ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ στα Θέματα Απολυτηρίων Εξετάσεων Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ στα Μαθηματικά Προσανατολισμού

ΘΕΜΑ 1ο

(Α) *Να χαρακτηρίσετε με τις λέξεις ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις παρακάτω πέντε προτάσεις μεταφέροντας τις απαντήσεις σας στο γραπτό σας.*

(Α1) *Αν f, g, g΄ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα [α, β], τότε:*

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx = \int_a^\beta f(x)dx \cdot \int_a^\beta g'(x)dx$$ *Σ - Λ* *(3μ)*

(Α2) *Μία συνάρτηση f είναι ΣΥΝΕΧΗΣ σε ένα διάστημα [α,β) , όταν είναι ΣΥΝΕΧΗΣ σε κάθε σημείο του διαστήματος [α,β).* *Σ - Λ* *(3μ)*

(Α3) *Το ορισμένο ολοκλήρωμα* $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ *είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x.* *Σ - Λ* *(3μ)*

(Α4) *Κάθε Τοπικό Μέγιστο μίας πραγματικής συνάρτησης πραγματικής μεταβλητής, είναι πάντοτε μεγαλύτερο από κάθε Τοπικό Ελάχιστο της.* *Σ - Λ* *(3μ)*

(Α5) *Ισχύει πάντα η ισότητα* $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^\beta f(x)dx + \int_a^\beta g(x)dx$. *Σ – Λ*

(3μ)

(Β) *Να αποδειχθεί ότι* ***κάθε Παραγωγίσιμη Συνάρτηση σε σημείο*** x_o *του Πεδίου Ορισμού της είναι και* ***Συνεχής στο σημείο αυτό.*** *(10μ)*

ΑΠΑΝΤΗΣΗ στο σχολικό βιβλίο σελ. 99

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = 2 \cdot \eta\mu x - x + 3, x \in [0, \pi]$.

α) *Να μελετηθεί η f ως προς την ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ και τα ΑΚΡΟΤΑΤΑ.* *(15μ)*

β) *Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση* $\eta\mu x = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ *έχει ΑΚΡΙΒΩΣ μία ρίζα στο (0,π).*

(10μ)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Η f έχει πεδίο ορισμού το [0,π] , όπου είναι ΣΥΝΕΧΗΣ και Παραγωγίσιμη...

$f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x - 1$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$ *για το πεδίο ορισμού πο έχει.*

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x < 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in (\pi/3, \pi]$ *Άρα η f είναι γν. Φθίνουσα στο διάστημα [π/3,π].*

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x > 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in [0, \pi/3)$ *Άρα η f είναι γν. Αύξουσα στο διάστημα [[0,π/3].*

Επομένως, στον αριθμό π/3 του πεδίου της θα δίνει ΟΛΙΚΟ ΜΕΓΙΣΤΟ, το

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = ... = \sqrt{3} - \pi + 3 > 0$.

β) $\eta\mu x = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2\eta\mu x = x - 3 \Leftrightarrow 2\eta\mu x - x + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0, x \in [0, \pi]$.

Αλγεβρικά δεν μπορεί να λυθεί η εξίσωση του ερωτήματος, όμως αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτησή μας έχει ΑΚΡΙΒΩΣ μία λύση στο [0,π].

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = ... = \sqrt{3} - \pi + 3 > 0$ *και* $f(\pi) = ... = -\pi + 3 < 0$ *άρα από BOLZANO και γν. Φθίνουσα μονοτονία στο [π/3,π] έχουμε ΑΚΡΙΒΩΣ μία ρίζα της f (άρα και λύση της εξίσωσης)σε αυτό το υποδιάστημα.*

Επίσης:

$f(0) = ... = 3 > 0$ *και* $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = ... = \sqrt{3} - \pi + 3 > 0$ *άρα από και γν. Αύξουσα μονοτονία στο [0,π/3] ΔΕΝ έχουμε καμμία ρίζα της f (άρα και λύση της εξίσωσης) σε αυτό το υποδιάστημα.*

ΤΕΛΙΚΑ έχουμε ΑΚΡΙΒΩΣ ΜΙΑ ρίζα της f (άρα και λύση της εξίσωσης) στο διάστημα [0,π].

ΘΕΜΑ 3ο

α) *Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης **f** με τύπο $f(x) = x^3$ σε τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης $\Sigma(\alpha, \alpha^3), a \neq 0$ έχει με αυτήν και άλλο κοινό σημείο P εκτός από το Σ.* (15μ)

β) *Να αποδειχθεί ότι η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στο σημείο P είναι ΤΕΤΡΑΠΛΆΣΙΑ από την κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στο σημείο Σ.* (10μ)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Η συνάρτηση f, έχει πεδίο ορισμού όλο το R όπου είναι ΣΥΝΕΧΗΣ και ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΗ (λεία).

$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$ *Στο τυχαίο σημείο **Σ(α,α³)** της C_f η εφαπτόμενη ευθεία (που πάντοτε υπάρχει λόγω "λειότητος"), θα έχει εξίσωση:*
$(\varepsilon): y - a^3 = 3a^2 \cdot (x-a) \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow (\varepsilon): y = 3a^2 \cdot x - 2a^3$. *Επειδή όμως οι καμπύλες δεν είναι ΚΥΚΛΟΙ (συνήθως), η εφαπτόμενη σε κάποιο σημείο της $\boldsymbol{C_f}$, μετά από λίγο μπορεί να γίνει ΤΕΜΝΟΥΣΑ ή ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ (πάλι).....*

Για να το δούμε αυτό δεν έχουμε παρά να δούμε εάν η C_f και η (ε) έχουν κι άλλα κοινά σημεία, εξισώνοντας τους τύπους τους.

$$x^3 = 3a^2x - 2a^3 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x(x^2 - a^2) + 2a^2(a-x) = 0 \Leftrightarrow .... \Leftrightarrow x_1 = a, \&, x_2 = -2a$$

$f'(x_1) = f'(a) = 3a^2$ *και* $f'(x_2) = f'(-2a) = 3(-2a)^2 = 12a^2$.

Παρατηρούμε πως: (α) τα σημεία Σ(α,α³) και P(-2α,-8α³) δεν έχουν την ΙΔΙΑ εφαπτόμενη ευθεία(άρα η (ε) είναι ΤΕΜΝΟΥΣΑ στο P) , και , (β) η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στο P είναι ΤΕΤΡΑΠΛΆΣΙΑ της κλίσης της εφαπτομένης (ε) που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα.

ΘΕΜΑ 4ο

*Δίνεται η συνάρτηση **f** συνεχής στο [-3,3] για την οποία ισχύει* $3x^2+4f^2(x)=27$ *για κάθε* $x\in[-3,3]$.

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης . $f(x)=0$ *(6μ)*

β) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα (-3,3). (6μ)

*γ) Να βρεθεί ο τύπος της **f.*** *(6μ)*

δ) Αν επιπλέον $f(1)=6$ *να βρείτε το όριο* $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{x}$. *(7μ)*

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) $f(x)=0 \Leftrightarrow f^2(x)=0 \Leftrightarrow \frac{27-3x^2}{4}=0 \Leftrightarrow 27-3x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm 3$

β) Επειδή η f δεν έχει άλλες ρίζες, τότε μεταξύ των διαδοχικών και μοναδικών ριζών της και λόγω συνέχειας, ΔΙΑΤΗΡΕΙ πρόσημο . Συγκεκριμένα μεταξύ των ριζών αυτών η συνάρτηση δίνει ΘΕΤΙΚΑ αποτελέσματα , επειδή έχουμε

$$f(x)=0 \Leftrightarrow f^2(x)>0 \Leftrightarrow \frac{27-3x^2}{4}>0 \Leftrightarrow 27-3x^2>0 \Leftrightarrow -3x^2+0x+27>0 \Leftrightarrow x\in(-3,3)$$

από την σχετική μελέτη του ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ....

γ) $f^2(x)=\frac{27-3x^2}{4} \Leftrightarrow \sqrt{f^2(x)}=\sqrt{\frac{27-3x^2}{4}}$ *αφού και τα δύο μέλη της αρχικής ισότητας είναι ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΑ...*

$$\sqrt{f^2(x)}=\sqrt{\frac{27-3x^2}{4}} \Leftrightarrow |f(x)|=\frac{\sqrt{27-3x^2}}{2}.$$

Άρα η f μπορεί να είναι $f_1(x)=\frac{\sqrt{27-3x^2}}{2}$ *ή* $f_2(x)=\frac{-\sqrt{27-3x^2}}{2}$.

(Παρατηρώντας τους 2 τύπους, ο πρώτος δίνει ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΑ αποτελέσματα, ενώ ο δεύτερος δίνει ΜΗ ΘΕΤΙΚΑ αποτελέσματα.)

Επίσης , δεν υπάρχει άλλος τρόπος κατασκευής ΤΥΠΟΥ για την f(x), δηλαδή κατασκευής ΚΛΑΔΙΚΩΝ ΤΥΠΩΝ οι οποίοι να είναι και ΣΥΝΕΧΕΙΣ διότι οι τύποι $f_1(x)$ *&* $f_2(x)$ *δεν συναντιώνται ΠΟΤΕ , και επομένως θα έχουμε ΑΣΥΝΕΧΕΙΣ ΚΛΑΔΟΥΣ.........Να δείτε ΕΠΕΙΓΟΝΤΩΣ το 3ο ΘΕΜΑ τω Πανελλαδικών του 2016 καθώς και την άσκηση 7 / β΄ομάδος/σχολικού βιβλίου /σελ 82.........*

Η Συνέχεια της f είναι ΔΕΣΜΕΥΤΙΚΗ....

*δ) Εάν **f(1)=6>0**, τότε πρόκειται εδώ για την* $\boldsymbol{f_1(x)}$***...***

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{x}=\frac{f(0)-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{0}=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{0}=\frac{0}{0}$$

. ‘Ομως επειδή δεν γνωρίζουμε εκ των προτέρων ΤΙΠΟΤΑ για την ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΟΤΗΤΑ της , δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε σχετικά εργαλεία....

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{x}=\ldots=\lim_{x\to 0}\frac{-3x}{4\left(f(x)+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{0}{\theta\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{o}}=0$$ *, επειδή ο παρανομαστής είναι λόγω της $f_1(x)$ θετικός.*

<u>ΣΗΜΕΙΩΣΗ:</u>

$$f^2(x)=\frac{27-3x^2}{4}\Leftrightarrow 4f^2(x)=27-3x^2\Leftrightarrow f^2(x)=\frac{27}{4}-\frac{3x^2}{4}\Leftrightarrow f^2(x)-\frac{27}{4}=-\frac{3x^2}{4}$$

$$\left(f(x)-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(f(x)+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{3x^2}{4}\Leftrightarrow f(x)-\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{-3x^2}{4\left(f(x)+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}$$ *, το οποίο χρησιμοποιήσαμε ΠΡΙΝ.....*

ΚΑΛΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ....ΥΠΟΜΟΝΗ & ΕΠΙΜΟΝΗ.....και
ΚΑΛΟ ΚΑΛΟΚΑΙΡΙ....