Μαθηματικά Κατεύθυνσης
Γ΄ Λυκείου

Λύσεις Θεμάτων Ο.Ε.Φ.Ε.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΚΑΡΑΦΕΡΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛ. ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΠΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α) Θεωρία.

Β) α) i) $g'(x)=0$ ii) $g'(x)=2001$ κλπ.

β) i) Λάθος.

ii) $1<2 \Rightarrow f(1)<f(2)$. Λάθος.

iii) Από τα σχόλια του Θεωρήματος Bolzano, η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο, άρα η f είναι γνησίως μονότονη. Σωστό.

ΘΕΜΑ 2^o

α) $$f(2)=\frac{2+i\bar{2}}{1-\bar{2}}=\frac{2+2i}{-1}=-2-2i$$

οπότε $|f(2)| = \ldots = 2\sqrt{2}$ και $\arg[f(2)] = \ldots = 5\pi/4$

β) Είναι $f(2) = 2\sqrt{2}[\sigma\upsilon\nu(5\pi/4)+i\eta\mu(5\pi/4)]$ και

$$\begin{aligned} w &= [f(2)]^{2004} = \{2\sqrt{2}[\sigma\upsilon\nu(5\pi/4)+i\eta\mu(5\pi/4)]\}^{2004} \\ &= (2\sqrt{2})^{2004}[\sigma\upsilon\nu(2005\pi)+i\eta\mu(2005)] \\ &= -(2\sqrt{2})^{2004} \text{ πραγματικός.} \end{aligned}$$

γ) Με αντικατάσταση του f(z) στο 1^o μέλος μετά τις πράξεις προκύπτει το 2^{o}μέλος.

δ) Αν M(x,y) τότε f(z)=x+iy οπότε με $|z| = 1$ από γ) ερώτημα είναι διαδοχικά:

$$\left|\frac{f(z)-2}{f(z)+i}\right|=1$$

ή $$|f(z)-2| = |f(z)+i| \qquad (^*)$$

---

* 2η λύση. Από εδώ προκύπτει ότι το Μ είναι η μεσοκάθετος του ευθ. τμήματος με άκρα τα A(2,0) και B(0,-1) στα οποία απεικονίζονται οι μιγαδικοί $z_1=2+0i$ $z_2=0-i$.
Η εξίσωση της μεσοκαθέτου θα βρεθεί με γνώσεις Β' Λυκείου.

ή $\quad |2x + iy - 2| = |x + iy + i|$

ή $\quad |(x-2) + iy| = |x + i(y+1)|$

ή $\quad \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y+1)^2}$

ή $\quad -4x - 2y + 3 = 0$

ΘΕΜΑ 3ᵒ α)

• Έχουμε $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\alpha-1)x+6}{x+\beta} = 2$

Με α= 1 είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6}{x} = 0$ άτοπο.

Με $\alpha \neq 1$ είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\alpha-1)x}{x} = \alpha - 1.$

Άρα $\alpha-1=2$ και η f γίνεται

$$f(x) = \frac{2x+6}{x+\beta} \qquad (1)$$

• Είναι $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, οπότε, υπάρχει περιοχή της μορφής $(\alpha, +\infty)$ ή $(-\infty, \beta)$ στην οποία $f(x) \neq 0$ και έτσι, στην περιοχή αυτή από την (1) βρίσκουμε:

$$x + \beta = \frac{2x+6}{f(x)}$$

και αφού $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{2x+6}{f(x)}=0$ (μορφή $\dfrac{4}{+\infty}$ ή $\dfrac{4}{-\infty}$)

είναι και $\lim\limits_{x \to -1^+} (x+\beta)=0$ ή $\beta=-1$.

Έτσι η f γίνεται $\quad f(x) = \dfrac{2x+6}{x+1}, \quad x > -1.$

$2^{ος}$ τρόπος εύρεσης του β.

Αν $\beta \neq -1$ είναι $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{2x+6}{x+\beta} = \dfrac{4}{-1+\beta}$ άτοπο.

Αν $\beta = -1$ είναι $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{2x+6}{x-1} = +\infty$. Άρα $\beta = -1$

β) Είναι $\quad G(x) = \displaystyle\int f(x)dx = \int \frac{2x+6}{x+1}dx = \int (2 + \frac{4}{x+1})dx$

ή $\quad G(x) = 2x + 4\ln|x+1| + c$

ή $\quad G(x) = 2x + 4\ln(x+1) + c$

Με $G(0) = 2$ προκύπτει $c = 2$, άρα

$$G(x) = 2x + 2 + 4\ln(x+1), \quad x > -1.$$

γ) Είναι $\quad h(x) = \dfrac{2x+2+4\ln(x+1)}{x+1} = 2 + 4\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}, \quad x>-1$

και $\quad h'(x) = ... = 4\dfrac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}, \quad x > -1$

τότε $\quad h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x+1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq e-1$

$\quad h'(x) \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x+1 \leq 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq e-1$

Το πρόσημο της h′, η μονοτονία της h και το μέγιστό της φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί:

x	-1		e-1		+∞
h′		+	0	−	
h		↗	$2 + \frac{4}{e}$	↘	

κλπ.

ΘΕΜΑ 4$^{\text{Ο}}$

Η δοσμένη ισότητα γράφεται

$$\int_1^x f(t)\,dt - \int_1^x g(t)\,dt = x^2 - 2x + 1$$

οπότε παραγωγίζοντας δύο φορές έχουμε:

$$f(x) - g(x) = 2x - 2 \qquad \textbf{(1)}$$

$$f'(x) - g'(x) = 2 \qquad \textbf{(2)}$$

Ακόμα: $\quad f(\varrho_1) = f(\varrho_2) = 0 \qquad$ **(3)**

α) **i**) Η (1) δίνει $\quad g(x) = f(x) - 2(x-1)$

Οπότε $\quad g(\varrho_1) = -2(\varrho_1 - 1)$

$$g(\varrho_2)= -2(\varrho_2-1)$$

Άρα $\qquad g(\varrho_1)g(\varrho_2)=4(\varrho_1-1)(\varrho_2-1)$

και αφού $\varrho_1<1<\varrho_2$ είναι $4(\varrho_1-1)(\varrho_2-1)<0$ κλπ Bolzano.

ii) Rolle για την f στο $[\varrho_1, \varrho_2]$ με τις σχέσεις (2)-(3). (είναι συνεχής στο $[\varrho_1, \varrho_2]$ - παραγωγίσιμη στο (ϱ_1, ϱ_2) και $f(\varrho_1) = f(\varrho_2)$). Έτσι, υπάρχει $\xi\in(\varrho_1, \varrho_2)$ με

$$f'(\xi)=0 \Leftrightarrow g'(\xi) + 2=0 \Leftrightarrow g'(\xi)=-2$$

($2^η$ λύση γίνεται με ΘΜΤ για την g, $3^η$ με την $h(x)=g(x)+2x$, $4^η$ με την $\varphi(x)= g'(\xi)+2$)

β) i) Η g' είναι γνησίως αύξουσα, άρα

$$x_1<x_2\Leftrightarrow g'(x_1)<g'(x_2)\Leftrightarrow g'(x_1)-2<g'(x_2)-2\Leftrightarrow f'(x_1)<f'(x_2)$$

έτσι η f' είναι γνησίως αύξουσα και άρα η f είναι κυρτή.

ii) Αφού $g'(\xi)=-2$ είναι $f'(\xi) = 0$ και η f' ως γνησίως αύξουσα αλλάζει πρόσημο στο ξ, όπως φαίνεται στον πίνακα:

x	$-\infty$ $\qquad$ ξ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$ $\qquad$ ξ $\qquad$ $+$

Άρα στο $x_0=\xi$ η f παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο, το οποίο είναι μοναδικό.

γ) Οι C_f, C_y τέμνονται όταν

$$\{ y=f(x) \quad \text{και} \quad y=g(x) \}$$

οπότε $\qquad f(x) = g(x)$

ή $\qquad f(x)-g(x)=0$

ή από την (1): $\qquad 2x-2=0$, $\quad$ άρα: $x=1$

Συνεπώς ζητάμε το

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx = \int_0^1 |2x - 2|\, dx = \int_0^1 (2 - 2x)\, dx = \left[2x - x^2\right]_0^1 = 1 \text{ τ.μ.}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΟΕΦΕ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ - ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 2002

ΘΕΜΑ 1ο

α) θεωρία. (ΘΕΤ)

β) Σ-Σ-Λ-Λ-Λ.

γ) ι) Θεωρία Σελίδα 99.

ιι) Η διανυαματική ακτίνα του z_2 προκύπτει με στροφή της διανυαματικής ακτίνας του z_1 κατά 90^o

δ) Θεωρία Σελίδα 217

ΘΕΜΑ 2ο

α) i) είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και

$f(\mathbb{R}) = (\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)) = (-\infty, +\infty)$

ii) $f''(x) = \left(\dfrac{2}{1+e^{f(x)}}\right)' = \dfrac{-2f'(x)e^{f(x)}}{\left(1+e^{f(x)}\right)^2} < 0$ κ.λ.π

iii) αφού $f'(0)=1$ η ισότητα $f'(x) = \dfrac{2}{1+e^{f(x)}}$ για $\chi = 0$ δίνει $f(0)=0$ Η f ως είναι γνησίως αύξουσα είναι 1-1και έχει μοναδική ρίζα την x=0.

β) i) $f'(x) = \dfrac{2}{1+e^{f(x)}} \Leftrightarrow f'(x)[1+e^{f(x)}] = 2 \Leftrightarrow \left(1+e^{f(x)}\right)' = (2x)' \Leftrightarrow$

$f(x) + e^{f(x)} = 2x+c$. Αλλά $f(0)=0 \Leftrightarrow c = 1$, άρα $f(x) + e^{f(x)} = 2x+1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x + e^x - 1)$ iii) Βρίσκουμε την y=x

γ) i) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{2x+1-e^{f(x)}}{x} = \lim_{x\to-\infty} (2 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{e^{f(x)}}{x}) = 2 + -0 = 2 = \lambda$

$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x\to-\infty} (2x+1-e^{f(x)} - 2x) = \lim_{x\to-\infty} (1-e^{f(x)}) = 1 - 0 = 1$

'Αρα y=2x+1

ii)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1-e^{f(x)}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x}-\frac{e^{f(x)}}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x}-\frac{f'(x)}{x'}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x}-\frac{2}{1+e^{f(x)}}\right)=2+0-0=2=\lambda'$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda' x]=\lim_{x\to+\infty}(2x+1-e^{f(x)}-2x)=\lim_{x\to+\infty}(1-e^{f(x)})=-\infty \text{ κ.λ.π}$$

ΘΕΜΑ 3ο

Είναι $z + 2i = \rho(\text{συν}\theta + i\,\text{ημ}\theta)$, $\rho > 0$.

i) $f(z_0) = \dfrac{2z_0}{z_0+2i}=3+i \Leftrightarrow ... z_0 =$ -2-4i. 'Αρα A(-2, -4)

ii) $f(z) - 2 = \dfrac{2z}{z+2i}.-2= \dfrac{-4i}{z+2i} = \dfrac{4[\text{συν}(3\pi/2)+i\,\text{ημ}(3\pi/2)]}{\rho(\text{συν}\theta+i\,\text{ημ}\theta)}$

$$=\frac{4}{\rho}\left[\text{συν}\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)+i\,\text{ημ}\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)\right]$$

iii) $|f(z)-2|=\sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{4}{\rho}=\sqrt{2} \Leftrightarrow \rho=2\sqrt{2}$ δηλαδή $|z+2i|=2\sqrt{2}$ που σημαίνει ότι η εικόνα Μ του z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει σε κύκλο c, του οποίου το κέντρο είναι Κ(0, -2) και η ακτίνα $2\sqrt{2}$.

iv) Arg (f(z) –2) = $\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow \dfrac{3\pi}{2}-\theta=\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow \theta=\dfrac{5\pi}{4}$ Τότε,

Arg (z +2 i)= Arg (x+i(y+2))= $\dfrac{5\pi}{4} \Leftrightarrow \dfrac{y+2}{x}=$ εφ$\dfrac{5\pi}{4} \Leftrightarrow y = x - 2$ με x < 0

ΘΕΜΑ 4ο

α) Είναι

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\le 1 \Leftrightarrow ...x^2 + x^4 \ge 0$$

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\ge -\frac{1}{8} \Leftrightarrow ...(x^2-3)^2 \ge 0$$

β) Θεώρημα μέσης τιμής στο [α, β] ή στο [ημx, x] (είναι ημx<x για x>0):

$$f\left(\frac{1}{\beta}\right)-f\left(\frac{1}{\alpha}\right)= f(\beta) - f(\alpha) = (\beta-\alpha)f'(\xi) \le \beta-\alpha$$

γ) Είναι

$$g(x) = F(x) + G(x) = \int_{1/e}^{x} f(t)dt + \int_{1/e}^{x} \frac{f(t)}{t^2}dt$$

$$= \int_{1/e}^{x}\left(f(t) + \frac{f(t)}{t^2} \right)dt = \int_{1/e}^{x} \left(\frac{1}{t}\right)dt = \ln x + 1$$

δ) Έχουμε:

$$h'(x) = [F(\varepsilon\varphi(x)) + G(\sigma\varphi(x))]' = F'(\varepsilon\varphi(x)) \cdot (\varepsilon\varphi(x))' + G'(\sigma\varphi(x)) \cdot (\sigma\varphi(x))'$$

$$= \frac{\varepsilon\varphi x}{1+\varepsilon\varphi^2 x}(1+\varepsilon\varphi^2 x) + \frac{1}{\sigma\varphi x(1+\sigma\varphi^2 x)}[-(1+\sigma\varphi^2 x)]$$

$$= \varepsilon\varphi x - \frac{1}{\sigma\varphi x} = 0$$

για x=π/4: h(π/4)=F(1)+G(1)=g(1)=ln1+1=1,άρα κ.λ.π. h(x)=1 στο Δ.

δ) παραλλαγή 3 i), ii)

$$E = F(e) = \int_1^e f(x)dx = \frac{1}{2} \cdot \left[\ln(1+x^2)\right]_1^e = \ln\sqrt{\frac{1+e^2}{2}}$$

$$\int_1^e \frac{1}{t(1+t^2)}dt = G(e) \overset{(\gamma)}{=} \ln e - F(e) = 1 - \ln\sqrt{\frac{1+e^2}{2}}$$

ε) Είναι

$$E = \int_0^1 (1 - f'(x))dx = [x - f(x)]_0^1 = \left[x - \frac{x}{1+x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2003

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΤΙΚΗΣ-ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1ο

Β. **α) Λάθος** διότι η f είναι «1-1» που σημαίνει δεν είναι πάντα γνησίως μονότονη.

β) Σωστό διότι $f\left(x_0\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)>0$ άρα $f\left(x\right)>0$ κοντά στο x_0

γ) Σωστό διότι από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $x_0\in\left(a,\beta\right)$ τέτοιος ώστε:

$$f'\left(x_0\right)=\frac{f\left(a\right)-f\left(\beta\right)}{a-\beta}>0 \text{ διότι } f\uparrow \text{ άρα } f\left(a\right)<f\left(\beta\right)$$

δ) Λάθος διότι $f''\left(x\right)\geq 0, x\in\Delta$. (Παράδειγμα: για την $f\left(x\right)=x^4$ είναι:

$$f'\left(x\right)=4x^3,\ f''\left(x\right)=12x^2\geq 0 \text{ για κάθε } x\in R\ )$$

ε) Σωστό διότι αν $f\left(x\right)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ τότε $\int_a^\beta f\left(x\right)dx=0$ (άτοπο)

στ) Σωστό διότι αν η f δεν παίρνει 2 τουλάχιστον ετερόσημες τιμές θα είναι $f\left(x\right)\geq 0$ για κάθε $x\in\left[a,\beta\right]$. Όμως η f δεν είναι παντού ίση με μηδέν, οπότε $\int_a^\beta f\left(x\right)dx>0$ άτοπο.

Θέμα 2ο

Α. $A=\left(0,+\infty\right)$ πεδίο ορισμού

$$f'\left(x\right)=\frac{\left(\ln\left(ax\right)\right)'\cdot\sqrt{x}-\ln\left(ax\right)\cdot\left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=\frac{\frac{1}{ax}\cdot\left(ax\right)'\cdot\sqrt{x}-\ln\left(ax\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{x}}{x}-\frac{\ln\left(ax\right)}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{\ln\left(ax\right)}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{2-\ln\left(ax\right)}{2x\sqrt{x}} \quad (1)$$

Είναι $f'(1)=\dfrac{2-\ln a}{2}=1\Leftrightarrow 2-\ln a=2\Leftrightarrow \ln a=0\Leftrightarrow a=1$

Β. α) Για α=1 έχουμε:

$$f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}, x>0 \text{ και } f'(x)=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}, x>0$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}=0 \Leftrightarrow \ln x=2 \Leftrightarrow x=e^2$$

x	0	e^2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$

$$f\left(e^2\right)=\frac{\ln e^2}{\sqrt{e^2}}=\frac{2}{e}(\max)$$

β) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot \ln x\right]=+\infty(-\infty)=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{\left(\sqrt{x}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$$

Άρα $f\left(\left(0,e^2\right]\right)=\left(-\infty,\frac{2}{e}\right]$ και $f\left(\left[e^2,+\infty\right)\right)=\left[\frac{2}{e},0\right)$

Η $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη και η $y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη.

γ) $\ln\left(\sqrt{\kappa}\right)^{\sqrt{\kappa+1}}>\ln\left(\sqrt{\kappa+1}\right)^{\sqrt{\kappa}} \Leftrightarrow$

$\sqrt{\kappa+1}\cdot\ln\sqrt{\kappa}>\sqrt{\kappa}\cdot\ln\sqrt{\kappa+1} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}\sqrt{\kappa+1}\cdot\ln\kappa>\sqrt{\kappa}\cdot\ln(\kappa+1) \Leftrightarrow$

$\frac{\ln\kappa}{\sqrt{\kappa}}>\frac{\ln(\kappa+1)}{\sqrt{\kappa+1}} \Leftrightarrow$

$f(\kappa)>f(\kappa+1)$ ισχύει διότι

$\kappa+1>\kappa\geq 8>e^2$ και $f\downarrow$ στο $\left[e^2,+\infty\right)$

Θέμα 3ο

Α. α) $z_1 = \dfrac{1+\beta - i(a-\beta i)}{1+f(\beta)-i\left[f(a)-i\cdot f(\beta)\right]} = \dfrac{1-i\cdot a}{1-i\cdot f(a)} =$

$$= \frac{(1-i\cdot a)(1+i\cdot f(a))}{\left[1-i\cdot f(a)\right]\cdot\left[1+i\cdot f(a)\right]} = \frac{(1+a\cdot f(a))+i(-a+f(a))}{1+f^2(a)}$$

$z_1 \in R$ αν και μόνο αν $-a+f(a)=0 \Leftrightarrow f(a)=a$

β) Ισχύει $z=-iw \Leftrightarrow a+\beta i = -i(f(a)+i\cdot f(\beta)) \Leftrightarrow a+\beta i = f(\beta)-if(a)$ οπότε $f(a)=-\beta$ και $f(\beta)=a$. Άρα $w=-\beta+\alpha\cdot i$. Έστω $A(a,\beta)$ και $B(-\beta,a)$. Είναι $(OA)=\sqrt{a^2+\beta^2}, (OB)=\sqrt{a^2+\beta^2}$ δηλαδή $O\overset{\triangleright}{A}B$ ισοσκελές.

Επειδή $(AB)^2=(a+\beta)^2+(a-\beta)^2=$

$$=a^2+\beta^2+2a\beta+a^2+\beta^2-2a\beta=2\left(a^2+\beta^2\right)=(OA)^2+(OB)^2$$

το τρίγωνο είναι και ορθογώνιο.

Β. α) Έχουμε $\left|a+\beta i - i(f(a)+if(\beta))\right|^2 = |a+\beta i|^2+|if(a)-f(\beta)|^2$

$$\left|a+f(\beta)+i(\beta-f(a))\right|^2 = a^2+\beta^2+f^2(a)+f^2(\beta) \Leftrightarrow$$

$$(a+f(\beta))^2+(\beta-f(a))^2 = a^2+\beta^2+f^2(a)+f^2(\beta)\Leftrightarrow$$

$$a^2+f^2(\beta)+2a\cdot f(\beta)+\beta^2+f^2(a)-2\beta\cdot f(a) = a^2+\beta^2+f^2(a)+f^2(\beta)\Leftrightarrow$$

$$2a\cdot f(\beta)-2\beta\cdot f(a)=0 \Leftrightarrow a\cdot f(\beta)-\beta\cdot f(a)=0$$

β) Έστω $A(a,\beta)$ και $B(f(a),f(\beta))$

$\lambda_{OA}=\dfrac{\beta}{a}$ και $\lambda_{OB}=\dfrac{f(\beta)}{f(\alpha)}$ οι συντελεστές διεύθυνσης ΟΑ και ΟΒ αντίστοιχα

Λόγω της (1) είναι $\lambda_{OA}=\lambda_{OB}$ που σημαίνει Α, Ο, Β συνευθειακά.

(Είναι $f(a)\neq 0$ διότι αν $f(a)=0$ τότε και $f(\beta)=0$ άτοπο)

γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $M(x_0,f(x_0))$ είναι $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ η οποία διέρχεται από το $(0,0)$ όταν $-f(x_0)=-x_0\cdot f'(x_0)\Leftrightarrow x_0\cdot f'(x_0)-f(x_0)=0$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι έχει μια τουλάχιστον λύση στο (α,β) η εξίσωση

$$x\cdot f'(x)-f(x)=0\Leftrightarrow \frac{x\cdot f'(x)-f(x)}{x^2}=0\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)'=0.$$

Έστω $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}, x\in[a,\beta]$

- Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[a,\beta]$ και
- $g(\alpha)=\dfrac{f(\alpha)}{a}=\dfrac{f(\beta)}{\beta}=g(\beta)$ λόγω της (1)

Σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle, έχει μία τουλάχιστον λύση στο (α,β) η εξίσωση $g'(x)=0$ δηλαδή η ισοδύναμη της $x\cdot f'(x)-f(x)=0$

Θέμα 4ο

α) $\int_0^x (t^2+1)f''(t)dt=-2\int_0^x tf'(t)dt-4x\cdot f(x)\cdot\int_0^1 tdt$

$$\int_0^x (t^2+1)f''(t)dt=-2\int_0^x t\cdot f'(t)dt-4x\cdot f(x)\cdot\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1$$

$$\int_0^x (t^2+1)f''(t)dt=-2\int_0^x t\cdot f'(t)dt-\frac{4}{2}x\cdot f(x)\quad(1)$$

Με παραγώγιση των μελών της (1) έχουμε:

$$(x^2+1)f''(x)=-2x\cdot f'(x)-2f(x)-2x\cdot f'(x)$$

$$(x^2+1)f''(x)+2x\cdot f'(x)=-2f(x)-2x\cdot f'(x)$$

$$\left[(x^2+1)f'(x)\right]'=\left[-2x\cdot f'(x)\right]',\text{ άρα }(x^2+1)f'(x)=-2x\cdot f(x)+C_1\quad(2)$$

Για $x=0$ είναι $f'(0)=C_1$ άρα $C_1=2$

Η (2) γράφεται:

$$(x^2+1)f'(x)+2x\cdot f(x)=2$$

$$\left[(x^2+1)f'(x)\right]'=(2x)'\quad\text{Άρα}\quad(x^2+1)\cdot f(x)=2x+C_2$$

Για $x=0$ είναι $f(0)=C_2$ άρα $C_2=0$. Επομένως $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1},x\in R$

<u>β΄ μέθοδος</u>

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε:

$$\left[(t^2+1)f'(t)\right]_0^x-\int_0^x 2tf'(t)dt=-2\int_0^x tf'(t)dt-4xf(x)\int_0^1 tdt\Leftrightarrow$$

$$(x^2+1)f'(x)-f'(0)=-4x\cdot f(x)\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1\Leftrightarrow$$

$$(x^2+1)f'(x)-2=-2x\cdot f(x)\Leftrightarrow$$

$$(x^2+1)f'(x)+2x\cdot f(x)=2\Leftrightarrow$$

$\left[\left(x^2+1\right)f\left(x\right)\right]'=\left(2x\right)'$

Άρα $\left(x^2+1\right)f\left(x\right)=2x+c$

Για $x=0$ είναι $f\left(0\right)=c$ δηλαδή $c=0$ οπότε $\left(x^2+1\right)f\left(x\right)=2x \Leftrightarrow f\left(x\right)=\dfrac{2x}{x^2+1}$

β) $\mathrm{E}\left(a\right)=\int_0^a \dfrac{2x}{x^2+1}dx=\int_0^a \left(\ln\left(x^2+1\right)\right)'dx=\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^a=\ln\left(a^2+1\right)$.

Το a είναι συνάρτηση του χρόνου οπότε:

$$E'\left(a\right)=\left[\ln\left(a^2\left(t\right)+1\right)\right]'=\frac{1}{a^2\left(t\right)+1}\left(a^2\left(t\right)+1\right)'=\frac{2a\left(t\right)\cdot a'\left(t\right)}{a^2\left(t\right)+1}.$$

Είναι $a'\left(t\right)=\dfrac{10}{3}cm/\sec$ και $a\left(t\right)=3cm$, άρα $E'\left(1\right)=\dfrac{2\cdot 3\cdot \frac{10}{3}}{9+1}cm^2/\sec=2cm^2/\sec$.

Ο ρυθμός μεταβολής του $E\left(a\right)$ όταν $a=3cm$.

γ) i) Αφού $x\to+\infty$ για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$-\left|f\left(x\right)\right|\le g\left(x\right)+x-2\le\left|f\left(x\right)\right|$$

$$-\frac{2x}{x^2+1}\le g\left(x\right)-\left(-x+2\right)\le\frac{2x}{x^2+1}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{2x}{x^2+1}\right)=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x^2+1}$.

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g\left(x\right)-\left(-x+2\right)\right]=0$ που σημαίνει ότι η ευθεία $y=-x+2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

ii) Είναι $E=\int_0^2\left|g\left(x\right)-\left(-x+2\right)\right|dx=\int_0^2\left|g\left(x\right)+x-2\right|dx$ και

$\left|g\left(x\right)+x-2\right|\le\left|f\left(x\right)\right|$ (ερώτημα i)

$\left|g\left(x\right)+x-2\right|-\left|f\left(x\right)\right|\le 0$. Άρα

$$\int_0^2\left[\left|g\left(x\right)+x-2\right|-\left|f\left(x\right)\right|\right]dx\le 0\Leftrightarrow$$

$$\int_0^2\left|g\left(x\right)+x-2\right|dx-\int_0^2\frac{2x}{x^2+1}dx\le 0\Leftrightarrow$$

$$E-\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^2\le 0\Leftrightarrow$$

$$E-\ln 5\le 0\Leftrightarrow E\le\ln 5$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2004

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΤΙΚΗΣ-ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Δες σχολικό βιβλίο, σελίδα 194: Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

Β. $I_1 > 0$ Δες σχόλιο σελίδα 346.

$I_2 = f(3) - f(0) < 0$ γιατί $f(3) < f(0)$

$I_3 = f'(3) - f'(0) < 0$ γιατί η κλίση της C_f στο $(3, f(3))$ είναι αρνητική και στο $(0, f(0))$ είναι θετική.

Γ. $1 \to \gamma$

$2 \to \beta$

$3 \to \alpha$

$4 \to \delta$

Δ. Δες σχολικό βιβλίο, σελίδα 224 στίχοι 1 έως 8.

ΘΕΜΑ 2ο

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)+2) = 0$ (1) και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x-2) = 0$ (2)

***α.* i)** Το κλάσμα $\dfrac{g'(x)}{f'(x)-1}$ ορίζεται σε διάστημα Δ της μορφής $(\alpha, +\infty)$, αφού $f'(x) \neq 1$. Στο Δ είναι

$$\frac{(g(x)+2)'}{(f(x)-x-2)'} = \frac{g'(x)}{f'(x)-1}$$

Ακόμα: $f'(x) - g'(x) = 1 \Leftrightarrow g'(x) = f'(x) - 1$, οπότε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g'(x)}{f'(x)-1} = 1$.

Από το πρώτο θεώρημα του De l' Hospital προκύπτει:

$$L = \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)+2}{f(x)-x-2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(g(x)+2)'}{(f(x)-x-2)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{g'(x)}{f'(x)-1} = 1.$$

ii) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)+2) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -2$, άρα η C_f έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = -2$.

Πάλι, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x-2) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+2)] = 0$, άρα η C_f έχει στο $+\infty$ πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y = x+2$

β) Έστω ότι η g έχει δύο διαφορετικές ρίζες ρ_1, ρ_2 στο $\mathbb{R}$ με $\rho_1 < \rho_2$. (απόδειξη με άτοπο)

Εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle για την g στο $[\rho_1, \rho_2]$ γιατί, ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

- η g είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2), και ακόμα
- $g(\rho_1) = g(\rho_2) = 0$.

Επομένως, υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi) = 0$. Τότε: $f'(\xi) - g'(\xi) = 1 \Leftrightarrow f'(\xi) = 1$. Άτοπο, γιατί $f'(x) \neq 1$. Έτσι, η g έχει το πολύ μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.

γ) Έχουμε $f'(x) - g'(x) = x \Leftrightarrow (f(x) - g(x))' = (x)'$, άρα, από τις συνέπειες του Θ. Μ. Τ. του διαφορικού λογισμού, υπάρχει αριθμός $c \in \mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε $f(x) - g(x) = x + c$ (1) ή

$$f(x) - x - 2 = g(x) + 2 + c - 4. \quad (2)$$

Επειδή υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x-2) = 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}[(g(x)+2)+c-4] = 0 + c - 4$, από την (2) είναι ίσα. Προκύπτει, επομένως : $0 = c - 4$ ή $c = 4$. Άρα, είναι: $f(x) - g(x) = x - 4$, $x \in \mathbb{R}$.

[Στην (1) καταλήγουμε και με ολοκλήρωση των δύο μελών της $f'(x) - g'(x) = x$]

ΘΕΜΑ 3ο

Α. i) Επειδή, προφανώς, η $f(t)=\dfrac{2}{\alpha+e^t}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, η g παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ με

$g'(x) = \dfrac{2}{\alpha+e^t} > 0$, επομένως, η g είναι γνησίως αύξουσα και σαν τέτοια είναι 1−1 και αντιστρέφεται.

ii) Η C_g είναι το σύνολο των σημείων (x, g(x)) με $x\in\mathbb{R}$, άρα η C_g^{-1} είναι το σύνολο των σημείων (g(x), x) και σ' αυτήν ανήκουν οι εικόνες M(g(x), x) του z = g(x)+xi, $x\in\mathbb{R}$

Β. α) Έχουμε κατά σειρά

$$|\bar{z}+i| \le |z-1| \Leftrightarrow |\, g(x)-xi+i \,| \le |\, g(x)+xi-1|$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{g^2(x)+(1-x)^2} \le \sqrt{(g(x)-1)^2+x^2}$$
$$\Leftrightarrow \ldots\ldots -2x \le -2g(x) \Leftrightarrow g(x) \le x$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) \le \mathrm{Im}(z),\ x\in\mathbb{R}$$

β) Θεωρούμε την συνάρτηση: $h(x) = g(x) - x$, $x\in\mathbb{R}$.

Από το **Βα** είναι $g(x) \le x \Leftrightarrow g(x) - x \le 0 \Leftrightarrow h(x) \le 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Ακόμα, $g(0)=\int_0^0 \dfrac{2}{a+e^t}dx = 0 \Leftrightarrow h(0)=0$, έτσι η h έχει ακρότατο (ολικό μέγιστο) για x=0.

Είναι $h'(x) = g'(x)-1 = \dfrac{2}{\alpha+e^t} - 1$, $x\in\mathbb{R}$

Επειδή το x=0 είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της h και η h παραγωγίζεται σ' αυτό, από το θεώρημα του Fermat προκύπτει : h'(0)=0 ή ισοδύναμα $\dfrac{2}{\alpha+e^0} - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha=1$.

γ. Επειδή η g παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ θα είναι συνεχής στο [1, 2] και παραγωγίσιμη στο (1, 2). Από το Θ.Μ.Τ του διαφορικού λογισμού, υπάρχει $\xi\in(1, 2)$ με

$$\frac{g(2)-g(1)}{2-1} = g'(\xi) \qquad \text{ή}$$

$$\int_0^2 \frac{2}{a+e^t}dt - \int_0^1 \frac{2}{a+e^t}dt = \frac{2}{a+e^{\xi}} \qquad \text{ή}$$

$$\int_0^2 \frac{1}{a+e^t}dt - \int_0^1 \frac{1}{a+e^t}dt = \frac{1}{a+e^{\xi}} \qquad (1)$$

Επειδή $\xi\in(1, 2)$ είναι διαδοχικά:

$$1 < \xi < 2 \qquad \text{ή}$$

$$e < e^{\xi} < e^2 \qquad [\ e^x \text{ γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}\ ] \text{ ή}$$

$$1+e < 1+e^{\xi} < 1+e^2 \qquad \text{ή}$$

$$\frac{1}{1+e^2} < \frac{1}{1+e^{\xi}} < \frac{1}{1+e} \qquad \text{ή}$$

$$\frac{1}{1+e^2} < \frac{1}{a+e^{\xi}} < \frac{1}{1+e} \qquad [\ \alpha=1\ ]$$

και η (1) δίνει το ζητούμενο:

$$\frac{1}{1+e^2} < \int_0^2 \frac{1}{a+e^t}dt - \int_0^1 \frac{1}{a+e^t}dt < \frac{1}{1+e}$$

ΘΕΜΑ 4ο

α) i) Είναι $f^2(x) + g^2(x) = 1$ (1), $x \in \mathbb{R}$

και $f'(x) = g^2(x) \neq 0$ (2), $x \in \mathbb{R}$

οπότε:

$$(f^2(x) + g^2(x))' = 0$$

ή $$2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x) = 0$$

ή $$2f(x)g^2(x) + 2g(x)g'(x) = 0$$

και επειδή $g(x) \neq 0$ είναι $f(x)g(x) + g'(x) = 0 \Leftrightarrow g'(x) = -f(x)\,g(x)$, $x \in \mathbb{R}$

ii) Επειδή η g δεν μηδενίζεται και είναι συνεχής, ως παραγωγίσιμη, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Είναι $g(0) = 1 > 0$, άρα:

$$g(x) > 0 \quad (3), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, γιατί από την (2): $f'(x) = g^2(x) > 0$.

Από την (1): $f^2(0) + g^2(0) = 1 \Leftrightarrow f^2(0) + 1 = 1 \Leftrightarrow f(0) = 0$. (4)

Έτσι,

- για $x < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(0) \Leftrightarrow f(x) < 0$
- για $x > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$

Η $g'(x) = -g(x)f(x)$, λόγω της (3), έχει για κάθε $x \neq 0$ αντίθετο πρόσημο της $f(x)$, που σημαίνει ότι

- για $x < 0$ είναι $f(x) < 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0$ και
- για $x > 0$ είναι $f(x) > 0 \Leftrightarrow g'(x) < 0$

Άρα, η g, ως συνεχής στο $x_0=0$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ και έχει ακρότατο (ολικό μέγιστο) το $g(0) = 1$, το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο.

β i) Λόγω της (3) ισχύει η ισοδυναμία:

$$g(x_1) < g(x_2) \Leftrightarrow g^2(x_1) < g^2(x_2) \Leftrightarrow f'(x_1) < f'(x_2), \text{ για κάθε } x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

που σημαίνει, τελικά, ότι η f' έχει ίδια μονοτονία με την g. Επομένως, η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$, κοίλη στο $[0, +\infty)$ και έχει σημείο καμπής το $(0, f(0)) = (0, 0)$.

Άλλος τρόπος. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη, είναι παραγωγίσιμη και η g^2, άρα από την (2) και η f', που σημαίνει ότι υπάρχει η f''. Τότε:

$f''(x) = (f'(x))' = (g^2(x))' = 2g(x)\,g'(x)$ έτσι, από την (3), η $f''(x)$ για κάθε $x \neq 0$ έχει ίδιο πρόσημο με την $g'(x)$:

- για $x < 0$ είναι $g'(x) > 0 \Leftrightarrow f''(x) > 0$ και
- για $x > 0$ είναι $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f''(x) < 0$

Επειδή η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ προκύπτει, ότι είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$, κοίλη στο $[0, +\infty)$ και έχει σημείο καμπής το $(0, f(0)) = (0, 0)$.

ii) Η ζητούμενη εξίσωση είναι $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ ή $y = f'(0)\cdot x$ ή $y=x$ αφού από την (2) έπεται $f'(0)=1$.

γ. Επειδή η f είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$, τα σημεία της C_f είναι κάτω από τα σημεία της εφαπτομένης της $y=x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, επομένως: $x \geq f(x) \Leftrightarrow x - f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$

$$\text{Είναι } E = \int_0^1 |x - f(x)|\,dx = \int_0^1 (x - f(x))\,dx \overset{(\alpha i)}{=} \int_0^1 \left(x + \frac{g'(x)}{g(x)}\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + \ln|g(x)|\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \ln|g(1)| - \frac{0}{2} - \ln|g(0)|$$

$$= \frac{1}{2} + \ln|g(1)| - \ln 1 = \frac{1}{2} + \ln[g(1)]. \qquad [\text{ γιατί } g(1) > 1 \text{ από την (3) }]$$

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1ο

Γ. 1 – **(Λάθος)** – 2 **(Σωστό)** – 3 **(Λάθος)** 4 **(Λάθος)** διότι από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f'(x_0) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} > 0$ διότι α<β και $f(\alpha) < f(\beta)$

5 (Λάθος) διότι: αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$

Θέμα 2ο

α) Για κάθε $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot (\ln x - 2) + 2\sqrt{x} \cdot \dfrac{1}{x} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}}(\ln x - 2) + \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}(\ln x - 2 + 2) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

β) $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left[\dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot \ln x\right] = -\infty$ διότι

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

γ) Για κάθε χ>0, $f''(x) = \dfrac{(\ln x)' \cdot \sqrt{x} - \ln x \left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)^2} =$

$$= \frac{\dfrac{\sqrt{x}}{x} - \ln x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$$

Είναι $2 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 2 \Leftrightarrow \ln x \leq \ln e^2 \Leftrightarrow 0 < x \leq e^2$

x	0	e^2	$+\infty$
$f''(x)$	+		-
F(x)	κυρτή	Σ.Κ	κοίλη

$$f\left(e^2\right)=2e\left(\ln e^2-2\right)=0$$

$M\left(e^2,0\right)$ το σημείο καμπής

δ) $$E=\int_{1/e}^{e^2}\left|\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right|dx=\int_{1/e}^{1}-\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx+\int_{1}^{e^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$$

$$=\left[-2\sqrt{x}\left(\ln x-2\right)\right]_{1/e}^{1}+\left[2\sqrt{x}\left(\ln x-2\right)\right]_{1}^{e^2}=$$

$$=-2(-2)+\frac{2}{\sqrt{e}}\left(\ln\frac{1}{e}-2\right)+2e\cdot\left(\ln e^2-2\right)-2(-2)$$

$$=8+\frac{2}{\sqrt{e}}(-1-2)+2e(2-2)=8-\frac{6}{\sqrt{e}}\text{ τ.μ.}$$

Θέμα 3ο

α) $\operatorname{Re}(z)>\operatorname{Im}(z)\Leftrightarrow e^x>x-1\Leftrightarrow e^x-x+1>0$

Έστω $f(x)=e^x-x+1,\ x\in\mathbf{R}$. Τότε $f'(x)=e^x-1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f΄(x)	–		+
F(x)	↘	2	↗

Η f για χ=0 παρουσιάζει ελάχιστο το 2. Άρα $f(x)\geq f(0)=2>0$ δηλαδή $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$

β) $$w=\left[e^x+(x-1)i\right]^2+e^x+(x-1)i+2i=$$

$$=e^{2x}+2i(x-1)\cdot e^x-(x-1)^2+e^x+(x-1)i+2i=$$

$$=e^{2x}+e^x-(x-1)^2+i\left[2(x-1)e^x+x+1\right]$$

Έστω $g(x)=2(x-1)e^x+x+1,\ x\in[0,1]$

- Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$
- $g(0)=-2+1=-1$, $g(1)=1+1=2$ Άρα $g(0)\cdot g(1)<0$

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιος ώστε $g(x_0)=0$ που σημαίνει ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιος ώστε 0 W να είναι πραγματικός.

γ) $\left|z\right|=\sqrt{e^{2x}+\left(x-1\right)^2}$ το οποίο γίνεται ελάχιστο όταν η συνάρτηση

$h\left(x\right)=e^{2x}+\left(x-1\right)^2$ έχει ελάχιστο.

$h'\left(x\right)=2e^{2x}+2\left(x-1\right)$. Προφανής λύση είναι η χ=0 διότι

$h'\left(0\right)=2-2=0$. Είναι $h''\left(x\right)=4e^{2x}+2>0$. Άρα η $h'\left(x\right)\uparrow$.

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
h΄(x)	– +
H(x)	$\searrow$ min $\nearrow$

Για κάθε χ<0 ισχύει $h'\left(x\right)<h'\left(0\right)=0$ και για κάθε χ>0

ισχύει $h'\left(x\right)>h'\left(0\right)=0$. Επομένως η $h\left(x\right)$ έχει ελάχιστο στο χ=0.

Συνεπώς ο μιγαδικός $z=e^0+\left(0-1\right)i=1-i$ έχει το μικρότερο μέτρο.

Θέμα 4ο

α) $e^x\cdot f\left(x\right)+e^x\cdot f'\left(x\right)+f'\left(x\right)=-\eta\mu x$

$$\left[e^x\cdot f\left(x\right)+f\left(x\right)\right]'=\left(\sigma\upsilon\nu x\right)'$$

Άρα υπάρχει $c\in\mathbf{R}$ τέτοιο ώστε:

$$e^x\cdot f\left(x\right)+f\left(x\right)=\sigma\upsilon\nu x+c,\ x\in\mathbf{R}$$

$$\left(e^x+1\right)\cdot f\left(x\right)=\sigma\upsilon\nu x+c.$$

Για χ=0 είναι $2f\left(0\right)=\sigma\upsilon\nu 0+c\Leftrightarrow 2\cdot\frac{1}{2}=1+c\Leftrightarrow c=0$

Επομένως $f\left(x\right)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1+e^x},\ x\in\mathbf{R}$

Έχουμε $f\left(x\right)+f\left(-x\right)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1+e^x}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1+e^{-x}}=\ldots=\sigma\upsilon\nu x\quad(1)$

β) $-\dfrac{1}{1+e^x}\le\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1+e^x}\le\dfrac{1}{1+e^x},\ x\in\mathbf{R}$ διότι $-1\le\sigma\upsilon\nu x\le 1$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+e^x}=0$, σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=0$

γ) Με ολοκλήρωση των μελών της (1) παίρνουμε

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}f\left(x\right)dx+\int_{-\pi/2}^{\pi/2}f\left(-x\right)dx=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu x dx\ \mathbf{(2)}$$

Στο $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(-x)\,dx$ θέτουμε $x=-u$ οπότε $dx=-du$.

Για $x=-\pi/2$ είναι $u=\pi/2$ και για $x=\pi/2$ είναι $u=-\pi/2$

Άρα $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(-x)\,du = -\int_{\pi/2}^{-\pi/2} f(u)\,du = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(u)\,du$.

Η (2) γράφεται:

$$I+I=\left[\eta\mu x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \Leftrightarrow 2\mathrm{I}=\eta\mu\pi/2-\eta\mu(-\pi/2)=1+1=2$$

Επομένως I= 1.

δ) Βρίσκουμε την ελάχιστη και μέγιστη τιμή της f στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

$$f'(x)=\frac{-\eta\mu x\cdot(1+e^x)-\sigma\upsilon\nu x\cdot e^x}{(1+e^x)^2}=\frac{\eta\mu x\cdot(1+e^x)+e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x}{(1+e^x)^2}<0$$

για κάθε $x\in[0,\pi/2]$. Άρα $f\downarrow$ στο $[0,\pi/2]$ οπότε $f(0)=\dfrac{1}{2}$ η μέγιστη τιμή και $f(\pi/2)=0$ η ελάχιστη.

Ισχύει $0\le f(x)\le\dfrac{1}{2}$ απ' όπου προκύπτει ότι $0\le\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx\le\dfrac{\pi}{4}$.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1

Β) α) Σωστό **β)** Λάθος **γ)** Σωστό **δ)** Λάθος **ε)** Λάθος

Θέμα 2

α) $\left|\dfrac{w-i}{w+i}\right| = \left|\dfrac{\dfrac{z+i}{1+iz}-i}{\dfrac{z+i}{1+iz}+1}\right| = \left|\dfrac{z+i-i-i^2z}{z+i+i+i^2z}\right| = \left|\dfrac{2z}{2i}\right| = |z|$

β) Λόγω (α) ερωτήματος έχουμε: $|w-i| = |w+i|$. Αν $w = x+yi$ τότε

$|x+yi-i| = |x+yi+i| \Leftrightarrow |x+(y-1)i| = |x+(y+1)i| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2} = \sqrt{x^2+(y+1)^2} \Leftrightarrow x^2+y^2-2y+1 = x^2+y^2+2y+1 \Leftrightarrow y=0$

Άρα το σημείο Μ ανήκει στον x΄x.

γ) $w \in I \quad \Leftrightarrow w = -\bar{w} \Leftrightarrow \dfrac{z+i}{1+iz} = -\dfrac{\bar{z}-i}{1-i\bar{z}} \Leftrightarrow$

$(z+i)(1-i\bar{z}) = -(1+iz)\cdot(\bar{z}-i) \Leftrightarrow$

$z+i-iz\bar{z}+\bar{z} = -(\bar{z}+iz\bar{z}-i+z) \Leftrightarrow$

$z+i-iz\bar{z}+\bar{z} = -\bar{z}-iz\bar{z}+i-z \Leftrightarrow 2z = -2\bar{z} \Leftrightarrow z = -\bar{z} \Leftrightarrow z \in I$.

δ) Έχουμε $f(\beta)i = \dfrac{f(a)i+i}{1+i^2f(a)} \Leftrightarrow f(\beta) = \dfrac{f(a)+1}{1-f(a)} < 0$ διότι $f(a) > 1$

Άρα $f(a)\cdot f(\beta) < 0$. Η f είναι συνεχής στο $[a,\beta]$.

Σύμφωνα με το θ. Bolzano η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο (a,β).

Θέμα 3

α) $f'(x)=e^x-a$ οπότε $f'(0)=1-a$

$\varepsilon: y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow$

$y=(1-a)x$

β) Είναι $f'(x)\geq 0\Leftrightarrow e^x\geq a\Leftrightarrow x\geq \ln a$

x	$-\infty$	$\ln a$	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	↘		↗

Η f στο $x_0=\ln a$ παρουσιάζει ελάχιστο το

$g(a)=e^{\ln a}-a\ln a-1=a-a\ln a-1$

Επειδή $g'(a)=1-\ln a-1=-\ln a<0$ για κάθε $a\in(1,+\infty)$ και g συνεχής στο $[1,+\infty)$ η g είναι $\downarrow$ στο $[1,+\infty)$ οπότε για κάθε $a>1$ ισχύει

$g(a)<g(1)=0$

γ) i) $E(a)=\int_0^a\left|f(x)-(1-a)x\right|dx$. Επειδή η f είναι κυρτή διότι

$f''(x)=e^x>0$ και η $\psi=(1-\alpha)x$ εφαπτομένη της c_f στο $(0,f(0))$, ισχύει :

$f(x)\geq(1-a)x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Άρα $E(a)=\int_0^a\left(e^x-ax-1-x+ax\right)dx=\int_0^a\left(e^x-x-1\right)dx$

$=\left[e^x-\frac{x^2}{2}-x\right]_0^a = e^a-\frac{a^2}{2}-a-1$ τ.μ.

ii) $E(a)=a^2\left(\frac{e^a}{a^2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}\right)$. Είναι $\lim\limits_{a\to+\infty}\frac{e^a}{a^2}=\lim\limits_{a\to+\infty}\frac{\left(e^a\right)'}{\left(a^2\right)'}$

$=\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\frac{e^a}{2a}=\lim\limits_{a\to+\infty}\frac{\left(e^a\right)'}{(2\alpha)'}=\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\frac{e^a}{2}=+\infty$. Επομένως $\lim\limits_{a\to+\infty}E(a)=+\infty$

Θέμα 4

α) Θέτουμε $x \cdot t = u$ τότε $(xt)'dt = du \Leftrightarrow x\,dt = du$ οπότε

για κάθε $x \neq 0$ είναι $dt = \frac{1}{x}du$

- Για $t = 0$ είναι $u = 0$ και για $t = 1$ είναι $u = x$.

Άρα $g(x) = \int_0^x \frac{u}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot f(u)dx = \frac{1}{x^2}\int_0^x u\, f(u)du$

Επειδή το ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο της μεταβλητής ολοκλήρωσης, έχουμε.

$$g(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^x t\, f(t)dt, \quad x \neq 0$$

β) Η g είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, όταν $\lim_{x\to 0} g(x) = g(0)$.

Είναι $g(0) = \int_0^1 t\, f(0)\, dt = f(0)\int_0^1 t\, dt = f(0)\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}f(0)$

Επειδή $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ και $\lim_{x\to 0}\int_0^x t \;\; f(t)dt = \int_0^0 t\, f(t)dt = 0$

(Η $\int_0^x t\, f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής)

σύμφωνα με το θ. De L΄ Hospital έχουμε

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x t\, f(t)dt\right)'}{\left(x^2\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{x f(x)}{2x} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{2} = \frac{f(0)}{2}$$

διότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ Άρα $\lim_{x\to 0} g(x) = g(0)$

που σημαίνει ότι η g είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

γ) Για κάθε $x > 0$ η ανισότητα γράφεται:

$$x \cdot \frac{1}{x^2}\int_0^x t\, f(t)dt < \int_0^x \cdot f(t)dt \Leftrightarrow \frac{1}{x}\int_0^x t\, f(t)dt < \int_0^x f(t)dt \Leftrightarrow$$

$$\int_0^x t\, f(t)dt < x\int_0^x f(t)dt \Leftrightarrow \int_0^x t\, f(t)dt - x\int_0^x f(t)dt < 0$$

Έστω η συνάρτηση:

$$h(x) = \int_0^x t\, f(t)dt - x\int_0^x f(t)dt, x \geq 0$$

$$h'(x) = x \cdot f(x) - \int_0^x f(t)dt - x \cdot f(x) = -\int_0^x f(t)dt < 0$$ για κάθε χ>0.

διότι από $f(t) > 0$ προκύπτει ότι:

$\int_0^x f(t)dt > 0$ για κάθε χ>0.

Η h είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ (πράξεις συνεχών συναρτήσεων)

Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Επομένως για κάθε χ>0 ισχύει $h(x) < h(0)$ Αλλά $h(0) = \int_0^0 t\, f(t)dt = 0$ συνεπώς

$g(x) < 0$ για κάθε χ>0.

δ) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[1,2]$ και ισχύει:

$$g(2) = \frac{1}{4}\int_0^2 t \cdot f(t)dt = \frac{1}{4}\left(\int_0^1 t \cdot f(t)dt + \int_1^2 t \cdot f(t)dt\right) = \int_0^1 t \cdot f(t)dt = g(1).$$

Σύμφωνα με το Θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιος ώστε $g'(\xi) = 0$.

Με παραγώγιση των μελών της $x^2 g(x) = \int_0^x t \cdot f(t)dt$ έχουμε:

$2x \cdot g(x) + x^2 g'(x) = x \cdot f(x) \overset{x \neq 0}{\Leftrightarrow} 2g(x) + x \cdot g'(x) = f(x)$ οπότε για $x = \xi$ προκύπτει: $2g(\xi) + \xi \cdot g'(\xi) = f(\xi) \Leftrightarrow 2g(\xi) = f(\xi)$

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1ο

Β. 1. Λάθος 2. Σωστό 3. Σωστό
4. Λάθος 5. Λάθος 6. Σωστό

Θέμα 2ο

α) $f'(x)=2x\cdot e^{-x}-(x^2+a)e^{-x}=(2x-x^2-a)e^{-x}=(-x^2+2x-a)e^{-x}$

$f(0)=a$ και $f'(0)=-a$

$\varepsilon: y-a=-ax \Leftrightarrow y=-ax+a$ η εξίσωση της εφαπτομένης στο $\mathrm{M}(0,f(0))$. Ταυτίζεται με την $y=-2x+2$ όταν $-a=-2$ και $a=2$ δηλαδή όταν $a=2$.

β) Για $a=2$ είναι $f(x)=(x^2+2)e^{-x}$ και $f'(x)=(-x^2+2x-2)e^{-x}<0$ για κάθε $x\in\Re$ διότι $-x^2+2x-2<0$ και $e^{-x}>0$ για κάθε $x\in\Re$. Άρα η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$.

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x^2+2)e^{-x}\right]=+\infty$

διότι $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+2)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[(x^2+2)\cdot e^{-x}\right]\overset{(+\infty\cdot 0)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2}{e^x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+2)'}{(e^x)'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$$

δ) Από (β) και (γ) συμπεραίνουμε ότι το σύνολο τιμών της $f(x)$ είναι $f(\mathrm{A})=(0,+\infty)$ το οποίο περιέχει το 2007. Η $f(x)\downarrow$ στο $\Re$, άρα η εξίσωση $f(x)=2007$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\Re$.

Θέμα 3ο

α) $|z+w|^2 = |z-w|^2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow z\cdot\bar{w} + \bar{z}\cdot w = 0 \overset{(1)}{} = z\cdot\bar{w} + \overline{z\cdot\bar{w}} = 0 \Leftrightarrow$

$2\,\mathrm{Re}\left(z\cdot\bar{w}\right) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(z\cdot\bar{w}\right) = 0$

β) Ισχύει $z\cdot\bar{w} + \bar{z}\cdot w = 0 \Leftrightarrow$ (ερώτημα (α)) $z\cdot\bar{w} = -\bar{z}\cdot w$. Διαιρούμε με $w\bar{w} = |w|^2$ και έχουμε $\frac{z}{w} = -\frac{\bar{z}}{\bar{w}}$ που σημαίνει ότι $\frac{z}{w}$ φανταστικός.

γ) Αν Α, Β οι εικόνες των z, w τότε $(\mathrm{OA}) = |z|, (\mathrm{OB}) = |w|$ και $(\mathrm{AB}) = |z-w|$.

Αρκεί ότι $(\mathrm{OA})^2 + (\mathrm{OB})^2 = (\mathrm{AB})^2 \Leftrightarrow |z|^2 + |w|^2 = |z-w|^2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(z\cdot\bar{w}\right) = 0$ ισχύει.

β' μέθοδος

Η ισότητα $|z+w| = |z-w|$ γράφεται ισοδύναμα $\left|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right| \Leftrightarrow$

$\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)^2 = \left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + 2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 - 2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 0$ Άρα $A\hat{O}B = 90^0$

γ' μέθοδος

Αν Γ η 4η κορυφή του παραλληλόγραμμου με πλευρές ΟΑ και ΟΒ, τότε $(\mathrm{O\Gamma}) = |z+w|$ και $(\mathrm{AB}) = |z-w|$ επειδή $|z+w| = |z-w|$ είναι $(\mathrm{O\Gamma}) = (\mathrm{AB})$. Επομένως ΟΑΓΒ ορθογώνιο.

δ) Είναι

$z\cdot\bar{w} = \left[a + i\cdot f(a)\right]\left[f(\beta) + \beta i\right] = a\cdot f(\beta) - \beta\cdot f(a) + \left[a\cdot\beta + f(a)f(\beta)\right]i$

οπότε $\mathrm{Re}\left(z\cdot\bar{w}\right) = 0 \Leftrightarrow a\cdot f(\beta) - \beta\cdot f(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(a)}{a} = \frac{f(\beta)}{\beta}$.

Θα αποδείξουμε ότι έχει μια τουλάχιστον λύση στο (a,β) η εξίσωση

$x\cdot f'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = 0$. Εφαρμόζεται το Θ. Rolle για την $h(x) = \frac{f(x)}{x}$ στο $[a,\beta]$, άρα υπάρχει $x_0 \in (a,\beta)\dots$

Θέμα 4ο

α) $g'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ και $g''(x)=\dfrac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}$

x	$-\infty$	0 $\quad$ $+\infty$
$g''(x)$	+	-
$g(x)$	$\cup$	$\cap$

Σ. Κ.

β) Για $x=0$ είναι $0\le g(0)\le 0$. Ισχύει η ισότητα

Για κάθε $x>0$ εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[0,x]$ οπότε υπάρχει

$\xi\in(0,x)$ τέτοιος ώστε $g'(\xi)=\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\dfrac{g(x)}{x}$ Έχουμε

$\dfrac{1}{1+x^2}\le g'(\xi)\le 1 \;\Leftrightarrow\; g'(x)\le g'(\xi)\le g'(0)$. Ισχύει διότι $g'(x)\downarrow$ στο $[0,+\infty)$ και

$0<\xi<x$ (ερώτημα α)

β' μέθοδος

Θα αποδείξουμε ότι:

$$g(x)\ge\frac{x}{1+x^2}\Leftrightarrow\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt\ge\frac{x}{1+x^2}$$

Έστω $h(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt-\frac{x}{1+x^2}$, $x\ge 0$

$$h'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1+x^2-x\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{1+x^2-1+x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=$$

$=\dfrac{2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και h συνεχής στο $[0,+\infty)$. Άρα

$h(x)\uparrow$ στο $[0,+\infty)$. Επομένως για κάθε $x\ge 0$ ισχύει $h(x)\ge h(0)=0$.

Όμοια αποδεικνύουμε ότι : $g(x)\le x$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

γ) Έστω $h(x)=g(x)+g(-x)=\displaystyle\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt+\int_0^{-x}\frac{1}{1+t^2}dt$.

Είναι $h'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{1+x^2}=0$ άρα $h(x)=c$

Για $x=0$ είναι $h(0)=0$. Επομένως $h(x)=0$, για κάθε $x\in\Re$.

β' μέθοδος

Είναι $g(x)+g(-x)=\displaystyle\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt+\int_0^{-x}\frac{1}{1+t^2}dt$.

Στο $g(-x)$ θέτουμε $t=-u$ τότε $dt=-du$

Άκρα ολοκλήρωσης

Για $t=0, u=0$ και για $t=0, u=x$.

Άρα $g(-x)=\int_0^{-x}\frac{1}{1+t^2}dt=-\int_0^{x}\frac{1}{1+u^2}du$

Επομένως …

δ) Αφού $f(t)=\frac{1}{1+t^2}>0$ τότε $g(x)=\int_0^{1}\frac{1}{1+t^2}dt>0$. Άρα

$$E=\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 x'\cdot g(x)dx=\left[x\cdot g(x)\right]_0^1-\int_0^1 x\cdot g'(x)dx=$$

$$=g(1)-\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=g(1)-\frac{1}{2}\int_0^1\left(\ln\left(1+x^2\right)\right)'dx=$$

$$=g(1)-\frac{1}{2}\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1=g(1)-\frac{1}{2}\ln 2 \text{ τ.μ.}$$

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. **α.** Βλέπε Πόρισμα σελίδα 251 σχολικού βιβλίου.
β. Βλέπε σελίδα 224 σχολικού βιβλίου.

Β. **α.** (Σ), **β.** (Σ), **γ.** (Σ), **δ.** (Σ).

Γ. **α.** 0, **β.** 8, **γ.** 44

ΘΕΜΑ 2ο

α. Η f είναι συνεχής για $x<0$, ως πολυωνυμική και για $x>0$, ως άθροισμα της τριγωνομετρικής ημx με την σταθερή $c(x)=\lambda$. Στο $x_0=0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(\eta\mu x+\lambda)=\lambda$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}((\mu-1)x+1)=1$$

Ακόμα $f(0)=1$. Για να είναι η συνάρτηση συνεχής στο $x_0=0$ πρέπει και αρκεί:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)\Leftrightarrow \lambda=1$$

Επομένως, η ζητούμενη τιμή είναι $\lambda=1$.

β. Για $x>0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x+\lambda-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x+1-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x}{x}=1$$

Για $x<0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(\mu-1)x+1-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(\mu-1)x}{x}=\mu-1$$

Για να είναι η συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ πρέπει και αρκεί:
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\Leftrightarrow \mu-1=1\Leftrightarrow \mu=2$$

Επομένως, η ζητούμενη τιμή είναι $\mu=2$.

γ. Είναι π.χ. $f(0)=f(\pi)=\lambda$, άρα η συνάρτηση δεν είναι 1–1.

δ. Είναι

$$f(x)=\begin{cases} \etaμx+1, & αν\ x>0 \\ x+1, & αν\ x\le 0 \end{cases}$$

και

$$\int_{-2}^{\pi} f(x)\,dx=\int_{-2}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx=\int_{-2}^{0}(x+1)\,dx+\int_{0}^{\pi}(\etaμx+1)\,dx=$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-2}^{0}+\ [-συνx+x]_0^{\pi}=\pi+2$$

ΘΕΜΑ 3ο

α. **i.** Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι :

$f'(x)=(e^{1-e^x})'=(1-e^x)'\cdot e^{1-e^x}=-e^x e^{1-e^x}=-e^{1+x-e^x}$

Επειδή $e^{1+x-e^x}>0$ είναι $f'(x)<0$ στο $\mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

ii. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$f''(x)=(-e^{1+x-e^x})'=-(1+x-e^x)'\cdot e^{1+x-e^x}=-(1-e^x)\cdot e^{1+x-e^x}=(e^x-1)\cdot e^{1+x-e^x}$

Έτσι: $f''(x)=0 \Leftrightarrow (e^x-1)\cdot e^{1+x-e^x}=0 \Leftrightarrow e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$
και $f''(x)>0 \Leftrightarrow x>0$, $f''(x)<0 \Leftrightarrow x<0$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)<0$ στο διάστημα $(-\infty, 0)$, άρα στρέφει τα κοίλα κάτω στο διάστημα $(-\infty, 0]$. Ακόμα είναι $f''(x)>0$ στο διάστημα $(0,+\infty)$, άρα η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $[0, +\infty)$.

Τέλος, η συνάρτηση έχει σημείο καμπής το $(0, f(0))$, γιατί εκατέρωθεν του αλλάζει κυρτότητα και υπάρχει η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης σ' αυτό, αφού είναι παραγωγίσιμη.

Είναι $f(0)=e^{1-1}=e^0=1$ έτσι, η συνάρτηση έχει σημείο καμπής το (0, 1).

β. Θα βρούμε, αν υπάρχουν, τα όρια:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(e^{1-e^x}) \quad και \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(e^{1-e^x})$$

Θέτουμε $u=1-e^x$ οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty} u=\lim_{x\to+\infty}(1-e^x)=-\infty \quad και \quad \lim_{x\to-\infty} u=\lim_{x\to-\infty}(1-e^x)=1-0=0$$

Τότε είναι:

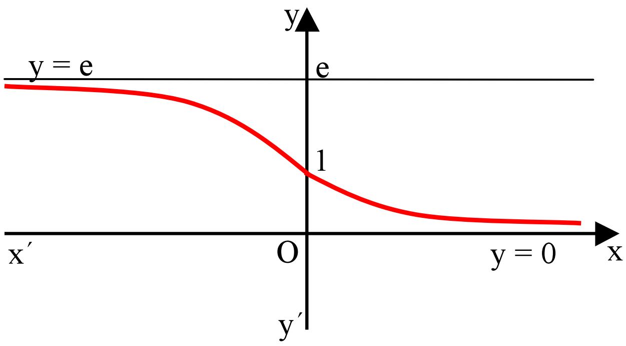
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(e^{1-e^x})=\lim_{u\to-\infty} e^u=0$$

και

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(e^{1-e^{x}}) = \lim_{u\to 1}(e^{u}) = e$$

Επομένως, η γραφική παράσταση της συνάρτησης έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y = 0$ στο $+\infty$ και την $y = e$ στο $-\infty$.

γ. Με βάση τις πληροφορίες των προηγουμένων ερωτημάτων σχεδιάζουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης:



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	|	$-$	
$f''(x)$		$-$	|	$-$	
$f(x)$	e	$\searrow$	$\boxed{1}$	$\searrow$	0

δ. Στο α ερώτημα βρήκαμε $f'(x) < 0$, οπότε $|f'(x)| = -f'(x)$ και έτσι:

$$E = \int_{\ln\frac{1}{2}}^{0} |f'(x)|\,dx = -\int_{\ln\frac{1}{2}}^{0} f'(x)\,dx = -\,[f'(x)]_{\ln\frac{1}{2}}^{0} = -f(0) + f\left(\ln\frac{1}{2}\right) =$$

$$= -e^{1-e^{0}} + e^{1-e^{\ln\frac{1}{2}}} = -1 + e^{1/2} \text{ τμ}$$

ΘΕΜΑ 4^{ο}

α. Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς, οι συναρτήσεις $\int_{1}^{x} f(t)\,dt$ και $\int_{1}^{x} f(t)\,dt$, που ορίζονται από ολοκλήρωμα, είναι παραγωγίσιμες, έτσι μπορούμε να παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη της (1), οπότε έχουμε:

$$\left(\int_{1}^{x} f(t)\,dt - 2\right)' = \left(x\int_{0}^{x} g(t)\,dt\right)'$$

$$\text{ή} \quad f(x) = x\,g(x) + \int_{0}^{x} g(t)\,dt \qquad (3)$$

Για $x = 0$ παίρνουμε: $f(0) = 0 + \int_{0}^{0} g(t)\,dt = 0$

Με $x \neq 0$ από την (3) έχουμε:

$$\frac{f(x)}{x} = g(x) + \frac{\int_{0}^{x} g(t)\,dt}{x}$$

και:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(g(x) + \frac{\int_{0}^{x} g(t)\,dt}{x}\right)$$

Επειδή η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_0 = 0$, είναι $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = g(0)$.

Η συνάρτηση $h(x) = \int_0^x g(t)\,dt$, $x\in\mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη, άρα είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, οπότε:

$$\lim_{x\to 0}\int_0^x g(t)\,dt = \lim_{x\to 0} h(x) = h(0) = \int_0^0 g(t)\,dt = 0$$

Επομένως, το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x g(t)\,dt}{x}$$

είναι μορφή 0/0 και υπολογίζεται με τον κανόνα του De L' Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x g(t)\,dt}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\int_0^x g(t)\,dt)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{1} = g(0)$$

Έτσι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(g(x) + \frac{\int_0^x g(t)\,dt}{x}\right) = 2g(0)$$

οπότε, τελικά:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 2g(0)$$

β. Η (1) για $x = 1$ δίνει $\quad -2 = \int_0^1 g(t)\,dt \quad$ (4)

Επειδή η g(x) δεν μηδενίζεται και είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ διατηρεί πρόσημο σ' αυτό. Αν ήταν $g(x) > 0$ τότε

$$\int_0^1 g(t)\,dt > 0 \Leftrightarrow -2 > 0$$

Άτοπο. Άρα είναι $g(x) < 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ. Η (1) για $x = 0$ δίνει $\int_1^0 f(t)\,dt - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \int_1^0 f(t)\,dt = 2 \quad$ (5)

Είναι $g(x) < 0 \Leftrightarrow -g(x) > 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έτσι:

- με $x \ge 0$ είναι $\int_0^x [-g(t)]\,dt \ge 0 \Leftrightarrow \int_0^x g(t)\,dt \le 0$, άρα: $x\int_0^x g(t)\,dt \le 0$
- με $x < 0$ είναι $\int_x^0 [-g(t)]\,dt > 0 \Leftrightarrow \int_0^x g(t)\,dt > 0$, άρα: $x\int_0^x g(t)\,dt < 0$

Επομένως, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ από την (1) είναι:

$$x\int_0^x g(t)\,dt \le 0 \Leftrightarrow \int_1^x f(t)\,dt - 2 \le 0$$

$$\Leftrightarrow \int_1^x f(t)\,dt \le 2 \qquad [\int_1^0 f(t)\,dt = 2 \text{ από } (5)]$$

$$\Leftrightarrow \int_1^x f(t)\,dt \le \int_1^0 f(t)\,dt$$

$2^{ος}$ τρόπος: Έστω η συνάρτηση $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$, $x \in \mathbb{R}$ για την οποία $F'(x) = f(x)$. Από την (3), αφού $g(x) < 0$, βρίσκουμε:

- με $x > 0$ είναι $f(x) = x\,g(x) + \int_0^x g(t)\,dt < 0 \Leftrightarrow F'(x) < 0$
- με $x = 0$ είναι $f(0) = 0 \Leftrightarrow F'(x) = 0$
- με $x < 0$ είναι $f(x) = x\,g(x) + \int_0^x g(t)\,dt > 0 \Leftrightarrow F'(x) > 0$

οπότε η $F(x)$ έχει μέγιστο το $F(0)$, άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) \le F(0) \Leftrightarrow \int_1^x f(t)\,dt \le \int_1^0 f(t)\,dt$$

δ. (Απόδειξη με Rolle σε αρχική). Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$H(x) = \int_0^x f(t)\,dt - 2\int_0^x g(t)\,dt - 2x \text{ με } x \in [0,\,1]$$

Επειδή οι f, g είναι συνεχείς, οι συναρτήσεις $\int_0^x f(t)\,dt$ και $\int_0^x g(t)\,dt$ ως οριζόμενες από ολοκλήρωμα, είναι παραγωγίσιμες. Ακόμα η $2x$ είναι παραγωγίσιμη, ως πολυωνυμική, άρα η $H(x)$, ως αλγεβρικό άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, είναι:

- Παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της, άρα και στο (0, 1) με
$$H'(x) = f(x) - 2g(x) - 2$$
- συνεχής στο [0, 1], ως παραγωγίσιμη σ' αυτό.
  Ακόμα:
- $H(0) = 0$ και
$$H(1) = \int_0^1 f(t)\,dt - 2\int_0^1 g(t)\,dt - 2$$
$$= -\int_1^0 f(t)\,dt - 2\int_0^1 g(t)\,dt - 2$$
$$= -2 - 2\cdot(-2) - 2 = 0 \qquad \text{[από (4) και (5)]}$$

Επομένως, εφαρμόζεται για την $H(x)$ το θεώρημα του Rolle, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,\,1)$ με

$$H'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) - 2g(\xi) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = 2g(\xi) + 2,$$

που σημαίνει ότι το ξ είναι ρίζα στο (0, 1) της εξίσωσης $f(x) = 2g(x) + 2$.

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Σχολ. Βιβλίο σελ. 260

Β.
1. Σχολ. Βιβλίο σελ. 280
2. Σχολ. Βιβλίο σελ. 191

Γ.
1. Σ
2. Λ
3. Λ
4. Σ
5. Λ

ΘΕΜΑ 2ο

Α. $z+\frac{1}{z}=-1 \Leftrightarrow z^2+1=-z \Leftrightarrow z^2+z+1=0$ με $z_1 z_2=1$ (τύποι Vieta)

$\left(\text{ή } \Delta = 1^2\text{-}4.1.1 = \text{-}3 \quad z_1=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \text{ και } z_2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$ και

$$z_1^2+z_1+1=0 \Rightarrow z_1^3+z_1^2+z_1=0 \Leftrightarrow z_1^3=-\left(z_1^2+z_1\right)=-1 \quad \text{ή} \quad z_1^3=\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\ldots$$

Β. Οι αριθμοί z_1 και z_2 συζυγείς οπότε $\overline{z_1^{2009}}=\overline{z_1}^{2009}=z_2^{2009}$
Άρα $\left(z_1^{2009}+z_2^{2009}\right)\in\Re$ σαν άθροισμα συζυγών

Γ. $z_1^8+\frac{1}{z_2^{10}}+1=z_1^8+z_1^{10}+1=\left(z_1^3\right)^2.z_1^2+\left(z_1^3\right)^3 z_1+1=z_1^2+z_1+1=0$

Δ. Έστω $g(x)=f(x)-3x+2$, συνεχής στο $[0,1]$ σαν άθροισμα συνεχών (f παραγωγίσιμη οπότε και συνεχής και –3x+2 συνεχής ως πολυωνυμική με

$$g(0)=f(0)+2=\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}+2+2=\frac{z_1^2+z_2^2}{z_1z_2}+4=\frac{\left(z_1+z_2\right)^2-2z_1z_2}{z_1z_2}+4=\frac{\left(-1\right)^2-2.1}{1}+4=3>0$$

και $g(1)=f(1)-3+2=\frac{1}{2z_1}+\frac{1}{2z_2}-\frac{3}{2}-1=\frac{2z_2+2z_1}{4z_1z_2}-\frac{5}{2}=\frac{-2}{4}-\frac{5}{2}=-3<0$

Άρα από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ ώστε

$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - 3x_0 + 2 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 3x_0 - 2$

Ε. w = 2(z$_1$+z$_2$)=2(-1)=-2 δηλαδή Γ (-2,0), και $A\left(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right), B\left(\frac{-1}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ τότε

$$|\Gamma A| = \sqrt{\left(-2+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(0-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{3}$$

$$|\Gamma B| = \sqrt{\left(-2+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$$

Άρα $|\Gamma A| = |\Gamma B|$

ΘΕΜΑ3ο

Α. $f(x) = x + 2 + 2\ln x$ **με** π.ο. $D_f = (0,+\infty)$

$f'(x) = 1 + \frac{2}{x} > 0 \Rightarrow f \uparrow (0,+\infty)$

$f''(x) = \frac{-2}{x_2} < 0 \Rightarrow f$ κοίλη στο $(0,+\infty)$

Β. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x>0^+}(x + 2 + 2\ln x) = 0 + 2 - \infty = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x + 2 + 2\ln x) = +\infty + 2 + \infty = +\infty$ δηλαδή f(A)=$(-\infty,+\infty)$

Αφού το $0 \in f(A)$ έχει η f(x)=0 ρίζα x$_0$ στο $(0,+\infty)$, μοναδική γιατί $f \uparrow (0,+\infty)$

Γ. Θέλω g(x)$\geq$g(x$_0$) δηλαδή η g να έχει ελάχιστο στο x$_0$. Έχω

$$g'(x) = \frac{(\ln x + 1)(x+2) - x\ln x}{(x+2)^2} = \frac{x\ln x + 2\ln x + x + 2 - x\ln x}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{2\ln x + x + 2}{(x+2)^2} = \frac{f(x)}{(x+2)^2}$$

Αν $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{(x+2)^2} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

x		x_0	
g'(x)	−	0	+
g(x)	↘	ελ	↗

άρα η g(x) έχει ελάχιστο στο x_0 δηλαδή $g(x) \geq g(x_0)$

Δ. Θέλω f(x-2)<2f(x+1)-f(x+4) ⇔f(x+4) – f(x+1)<f(x+1)-f(x-2)⇔

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+4)-f(x+1)}{(x+4)-(x+1)} < \frac{f(x+1)-f(x-2)}{(x+1)-(x-2)}$$

έχω από Θ.Μ.Τ. ότι υπάρχουν ξ_1 , $\in (x+1, x+4)$ και $\xi_2 \in (x-2, x+1)$ ώστε

$f'(\xi_1) = \dfrac{f(x+4)-f(x+1)}{(x+4)-(x+1)}$ και $f'(\xi_2) = \dfrac{f(x+1)-f(x-2)}{(x+1)-(x-2)}$ δηλαδή θέλω

$f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$

Όμως f κοίλη στο (0,+∞) δηλαδή $f' \downarrow (0,+\infty)$ και0< x-2 < ξ_1<x+1<ξ_2<x+4

Θα είναι $f'(\xi_1) > f'(\xi_2)$ δηλαδή ισχύει το ζητούμενο.

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x+1}{e^x} \Rightarrow -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x+1}{e^x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow \left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]' = \left(e^{-x}\frac{1}{x}\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = e^{-x}\frac{1}{x} + c$$

Για x = 1 είναι $f(1) = \frac{1}{e} + c \Rightarrow c = 0$

Άρα $f\left(\frac{1}{x}\right) = e^{-x}\frac{1}{x}$

Έστω $\frac{1}{x} = \omega$ τότε $x = \frac{1}{\omega}$, $\omega \in (0, +\infty)$. Άρα $f(\omega) = \omega e^{-1/\omega}$

Τελικά $f(x) = xe^{-1/x}$ $x \in (0, +\infty)$.

2η λύση:

$f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x+1}{e^x}$, x>0

Θέτω $\frac{1}{x} = \omega \Rightarrow x = \frac{1}{\omega} > 0$

Άρα $f'(\omega) = \left(\frac{1}{\omega}+1\right) e^{-1/\omega} \Rightarrow f'(\omega) = (\omega e^{-1/\omega})' \Rightarrow f(\omega) = \omega e^{-1/\omega} + c$

Για x = 1 είναι ω = 1 άρα $f(1) = e^{-1} + c \Rightarrow c = 0$

Άρα $f(\omega) = \omega e^{-1/\omega}$, ω>0 ή $f(x) = x e^{-1/x}$, x>0

Β.

1. Είναι $f'(x) = e^{-1/x} + xe^{-1/x}\,\frac{1}{x^2} = e^{-1/x}\,(1 + \frac{1}{x})$

$f'(1) = \frac{2}{e}$, $f(1) = \frac{1}{e}$

Η εφαπτομένη στο $x_0 = 1$ είναι:

$y - f(1) = f'(1)(x-1) \Rightarrow y = \frac{2}{e}x - \frac{1}{e}$ (ε)

2. Είναι: $f''(x) = \frac{1}{x^3}\,e^{-1/x} > 0$ για $x > 0$.

Άρα η f(x) είναι κυρτή στο ∈ (0, +∞) και η C_f βρίσκεται πάνω από την (ε) εκτός του σημείου επαφής.

Είναι $f(x) \geq \frac{2}{e}x - \frac{1}{e} \Rightarrow f(x) - \frac{2}{e}x + \frac{1}{e} \geq 0$ για κάθε $x \in [1,2]$

Άρα $\int_1^2 (f(x) - \frac{2}{e}x + \frac{1}{e})dx > 0 \Rightarrow \int_1^2 f(x)dx + \int_1^2 (-\frac{2}{e}x + \frac{1}{e})dx > 0 \Rightarrow$

$\int_1^2 f(x)dx + [-\frac{2}{e}x + \frac{1}{e}]_1^2 > 0 \Rightarrow \int_1^2 f(x)dx - \frac{2}{e} > 0 \Rightarrow \int_1^2 f(x)dx > \frac{2}{e}$

Γ. $g(x) = \frac{f(x)}{x^3} = \frac{e^{-1/x}}{x^2} > 0$ στο $[1,t]$

Άρα $E = \int_1^t g(x)dx = \int_1^t \frac{1}{x^2}e^{-1/x}\,dx = [e^{-1/x}]_1^t = e^{-1/t} - e^{-1}$ τ.μ.

Δ. $\lim_{t\to+\infty} E(t) = \lim_{t\to+\infty}(e^{-\frac{1}{t}} - e^{-1}) = \lim_{\omega\to 0}(e^{\omega} - e^{-1}) = 1 - e^{-1}$

(Έστω $-\frac{1}{t} = \omega$, όταν $t \to +\infty$ τότε $\omega \to 0$)

Γ' ΤΑΞΗ ΓΕΝ.ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Σχολικό βιβλίο σελ.334.
Β.1. σελ. 213.
Β.2. σελ. 212.
Γ. **α** – Λ
β – Σ
γ – Λ
δ – Λ
ε – Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α) Έχουμε $z=\dfrac{1+2w}{1-w}\ \left(w\neq 1\right)\Leftrightarrow z\left(1-w\right)=1+2w\Leftrightarrow z-zw=1+2w\Leftrightarrow$

$2w+zw=z-1\Leftrightarrow w(2+z)=z-1\Leftrightarrow$

$w=\dfrac{z-1}{z+2}\ \left(z\neq -2\right)\Leftrightarrow w+1=\dfrac{z-1}{z+2}+1\Leftrightarrow$

$w+1=\dfrac{z-1+z+2}{z+2}=\dfrac{2z+1}{z+2}$.

Από την υπόθεση $\left|w+1\right|=1$.

Άρα

$\left|w+1\right|=\left|\dfrac{2z+1}{z+2}\right|=1\Leftrightarrow\left|2z+1\right|=\left|z+2\right|\Leftrightarrow$

$\left|2z+1\right|^2=\left|z+2\right|^2\Leftrightarrow\left(2z+1\right)\left(2\overline{z}+1\right)=\left(z+2\right)\left(\overline{z}+2\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4z\overline{z}+2z+2\overline{z}+1=z\overline{z}+2z+2\overline{z}+4\Leftrightarrow 3\left|z\right|^2=3\Leftrightarrow\left|z\right|=1$.

β) **i)** Έχουμε $\left|z_1\right|=1\Leftrightarrow\left|z_1\right|^2=1\Leftrightarrow z_1\overline{z}_1=1\Leftrightarrow\overline{z}_1=\dfrac{1}{z_1},\ \overline{z}_2=\dfrac{1}{z_2}\ ,\overline{z}_3=\dfrac{1}{z_3}$

Επειδή $z\in R\Leftrightarrow z=\overline{z}$ (Πρέπει να αποδειχθεί) αρκεί να δείξουμε ότι $\overline{\alpha}=\alpha$.

Οπότε

$$\overline{\alpha} = \overline{\left(\frac{z_1+z_2}{z_3}\right)} + \overline{\left(\frac{z_2+z_3}{z_1}\right)} + \overline{\left(\frac{z_1+z_3}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_3} + \frac{\overline{z}_2}{\overline{z}_3} + \frac{\overline{z}_2}{\overline{z}_1} + \frac{\overline{z}_3}{\tilde{z}_1} + \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2} + \frac{\overline{z}_3}{\overline{z}_2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{z_1}}{\frac{1}{z_3}} + \frac{\frac{1}{z_2}}{\frac{1}{z_3}} + \frac{\frac{1}{z_2}}{\frac{1}{z_1}} + \frac{\frac{1}{z_3}}{\frac{1}{z_1}} + \frac{\frac{1}{z_1}}{\frac{1}{z_2}} + \frac{\frac{1}{z_3}}{\frac{1}{z_2}} = \frac{z_3}{z_1}+\frac{z_3}{z_2}+\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_1}{z_3}+\frac{z_2}{z_1}+\frac{z_2}{z_3}=$$

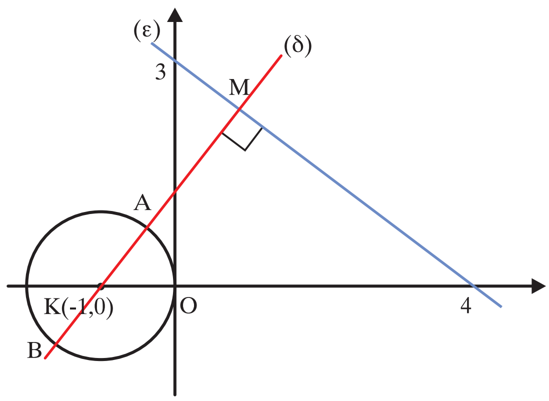
$$= \frac{z_1+z_2}{z_3}+\frac{z_2+z_3}{z_1}+\frac{z_1+z_3}{z_2} = \alpha .$$

ii) Έχουμε $\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}\right) = \dfrac{\left(\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}\right)+\left(\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}+\frac{\overline{z}_2}{\overline{z}_3}+\frac{\overline{z}_3}{\overline{z}_1}\right)}{2} =$

$$\frac{\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}+\frac{z_2}{z_1}+\frac{z_3}{z_2}+\frac{z_1}{z_3}}{2} = \frac{\frac{z_1+z_2}{z_3}+\frac{z_1+z_3}{z_2}+\frac{z_2+z_3}{z_1}}{2} =$$

$$= \frac{-\frac{z_3}{z_3}-\frac{z_2}{z_2}-\frac{z_1}{z_1}}{2} = -\frac{3}{2}$$

γ) **<u>1ος Τρόπος</u>**



Έχουμε

$$d(K,\varepsilon) = \frac{|3(-1)+4\cdot 0-12|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

Οπότε

Ελάχιστη απόσταση είναι:

$(AM) = d(K,\varepsilon) - \rho = 3-1 = 2$ και

μέγιστη $(BM) = d(K,\varepsilon) + \rho = 3+1 = 4$.

<u>2ος Τρόπος</u>

Έχουμε $(\varepsilon)\perp(\delta) \Leftrightarrow \lambda_\delta = \frac{4}{3}$. Άρα $(\delta): y = \frac{4}{3}(x+1) \Leftrightarrow 4x-3y+4=0$. Για να βρούμε το Μ λύνουμε το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} 3x+4y-12=0 \\ 4x-3y+4=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow (x,y) = \left(\frac{4}{5},\frac{12}{5}\right) \text{ άρα } M\left(\frac{4}{5},\frac{12}{5}\right)$$

$$(KM) = \sqrt{\left(\frac{4}{5}+1\right)^2 + \left(\frac{12}{5}-0\right)^2} = \sqrt{\frac{225}{25}} = 3$$

Οπότε

Ελάχιστη απόσταση είναι: $(AM)=(KM)-\rho=3-1=2$ και

μέγιστη $(BM)=(KM)+\rho=3+1=4$.

ΘΕΜΑ 3ο

α) Είναι $g(x)=e^{x}+x$ (1). Τότε $g'(x)=e^{x}+1>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.
Άρα η συνάρτηση g είναι 1 – 1 ως γνησίως αύξουσα.

β) Έχουμε

$$xf'(x)=\frac{x+1}{e^{f(x)}+1}\Leftrightarrow xf'(x)\left(e^{f(x)}+1\right)=x+1\Leftrightarrow$$

$$f'(x)e^{f(x)}+f'(x)=1+\frac{1}{x}\Leftrightarrow\left(e^{f(x)}+f(x)\right)'=(x+\ln x)'\Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)}+f(x)=x+\ln x+c.$$

Για $x=1$ έχουμε $e^{f(1)}+f(1)=1+c$ με $c=0$. Άρα
$e^{f(x)}+f(x)=x+\ln x=e^{\ln x}+\ln x$ και λόγω της (1) έχουμε
$g(f(x))=g(\ln x)$. Αλλά η g είναι 1-1 . Άρα $f(x)=\ln x$.

γ) Είναι $h(x)=\dfrac{f(x)-1}{x}$.

Τότε $h'(x)=\left(\dfrac{\ln x-1}{x}\right)'=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-(\ln x-1)}{x^2}=\dfrac{2-\ln x}{x^2}$.

Αν $h'(x)=0$ ή $2-\ln x=0$ ή $\ln x=2$ ή $x=e^2$

x	0	e^2	$+\infty$
h΄(x)	+	0	−
h(x)	↗		↘

Η h είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x\in\left(0,e^2\right]$
Η h είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x\in[e^2,+\infty)$

Έχουμε $h_{\max}=h\left(e^2\right)=\dfrac{\ln e^2-1}{e^2}=\dfrac{1}{e^2}$

<u>Πεδίο τιμών :</u>

$$\lim_{x\to0^+}h(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}(\ln x-1)=(+\infty)(-\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x - 1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x - 1)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

$$h(A) = \left(\lim_{x\to 0^+} h(x), h(e^2)\right] \cup \left(\lim_{x\to+\infty} h(x), h(e^2)\right] = \left(-\infty, \frac{1}{e^2}\right] \cup \left(0, \frac{1}{e^2}\right] = \left(-\infty, \frac{1}{e^2}\right].$$

δ) Έχουμε $\left(\frac{\eta\mu x}{e}\right)^{\sigma\upsilon\nu x} = \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{e}\right)^{\eta\mu x}$.

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $\frac{\eta\mu x}{e} > 0$, $\frac{\sigma\upsilon\nu x}{e} > 0$

Λογαριθμίζουμε τη σχέση και έχουμε:

$$\ln\left(\frac{\eta\mu x}{e}\right)^{\sigma\upsilon\nu x} = \ln\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{e}\right)^{\eta\mu x} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x \cdot \ln\left(\frac{\eta\mu x}{e}\right) = \eta\mu x \cdot \ln\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{e}\right) \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu x \cdot \left(\ln(\eta\mu x) - \ln e\right) = \eta\mu x \cdot \left(\ln(\sigma\upsilon\nu x) - \ln e\right) \Leftrightarrow \frac{\ln(\eta\mu x) - 1}{\eta\mu x} = \frac{\ln(\sigma\upsilon\nu x) - 1}{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h(\eta\mu x) = h(\sigma\upsilon\nu x) \quad (2)$$

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύουν οι σχέσεις 0 < ημx < 1, 0 < συνx < 1 και $(0,1) \subset (0, e^2)$.

Η h είναι 1-1 ως γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(0, e^2\right]$. Από τη (2) έχουμε

ημx = συνx ή εφx = 1 ή $x = \frac{\pi}{4}$.

ε) Έχουμε $h'(x) = \frac{2 - \ln x}{x^2}$ και

$$h''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \cdot (2 - \ln x)}{x^4} = \frac{-x - 4x + 2x \cdot \ln x}{x^4} = \frac{x(2\ln x - 5)}{x^4} = \frac{2\ln x - 5}{x^3}.$$

$$h''(x) = 0 \text{ ή } 2\ln x - 5 = 0 \text{ ή } \ln x = \frac{5}{2} \text{ ή } x = e^{\frac{5}{2}}.$$

x	0	$e^{5/2}$	$+\infty$
h′′(x)	−	0	+
h′(x)	↘		↗

Η h είναι κοίλη στο διάστημα $\left(0, e^{5/2}\right]$.

Η h είναι κυρτή στο διάστημα $\left[e^{5/2}, +\infty\right)$.

$$h'_{\min}\left(e^{5/2}\right) = \frac{2 - \ln e^{5/2}}{\left(e^{5/2}\right)^2} = \frac{2 - \frac{5}{2}}{e^5} = -\frac{1}{2e^5}.$$

Τότε $h'(x) \geq -\frac{1}{2e^5}$ για κάθε $x > 0$.

Η h είναι συνεχής στο $\left[x_1, x_2\right]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\left(x_1, x_2\right)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x) = \frac{2 - \ln x}{x^2}$. Από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(x_1, x_2\right)$ ώστε $h'\left(\xi\right) = \frac{h\left(x_2\right) - h\left(x_1\right)}{x_2 - x_1}$ (3).

Αλλά για κάθε $x > 0$ επομένως και για το $\xi > 0$ ισχύει $h'(\xi) \geq -\frac{1}{2e^5}$ (4).

Από τις (3) και (4) έχουμε $\frac{h\left(x_2\right) - h\left(x_1\right)}{x_2 - x_1} \geq -\frac{1}{2e^5}$.

ΘΕΜΑ 4ο

α) Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = \int_3^x \left(\int_1^u f(t)dt \right) du - 2x + 6 \geq 0$.

Έχουμε $g(3) = 0$. Τότε $g\left(x\right) \geq g\left(3\right)$ και η g παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 3$.

Από το Θεώρημα Fermat ισχύει $g'\left(3\right) = 0$. Αλλά $g'\left(x\right) = \int_1^x f\left(t\right)dt - 2$ και για $x = 3$ έχουμε $g'\left(3\right) = \int_1^3 f\left(t\right)dt \text{ - } 2 = 0$ ή $\int_1^3 f\left(t\right)dt = 2$.

β) Για $x = 0$ και $y = f(0)$ έχουμε

$4 \cdot 0 + f\left(0\right) - 3 = 0 \Leftrightarrow f\left(0\right) = 3 \; \kappa\alpha\iota \; f'\left(0\right) = -4$.

Έχουμε :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x t^2 f(t)dt - x^3}{x^4} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{\left(\int_0^x t^2 f(t)dt - x^3 \right)'}{\left(x^4\right)'} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 f(x) \text{ - } 3x^2}{4x^3} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 3}{4x} = \frac{1}{4} \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{4} \cdot f'\left(0\right) = \frac{-4}{4} = -1.$$

γ) **<u>1ος Τρόπος</u>**

Για κάθε $x > 1$ η ανίσωση γίνεται:

$\left(x - 1\right)h'\left(x\right) > h\left(x\right) \Leftrightarrow \left(x - 1\right)h'\left(x\right) - h\left(x\right) > 0$

Θέτουμε $K(x)=(x-1)h'(x)-h(x)=(x-1)f(x)-h(x)$ για $x\in[1,+\infty)$.
Έτσι έχουμε
$K'(x)=f(x)+(x-1)f'(x)-h'(x)=f(x)+(x-1)f'(x)-f(x)=$
$=(x-1)f'(x)>0$ για κάθε $x>1$.
Άρα η K είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ αφού είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$.
Επομένως $x>1\Leftrightarrow K(x)>K(1)\Leftrightarrow(x-1)h'(x)-h(x)>0$.

<u>2ος τρόπος</u>

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(u)=\int_1^u f(t)dt$, $u\in[1,x]$.
Η h είναι συνεχής στο $[1,x]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,x)$ με $h'(u)=f(u)$.
Από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,x)$ ώστε $h'(\xi)=\dfrac{h(x)-h(1)}{x-1}$.
Αλλά $h(1)=\int_1^1 f(t)dt=0$ οπότε $h'(\xi)=\dfrac{h(x)}{x-1}$ (1). Επίσης $h'(x)=f(x)$ και $h''(x)=f'(x)>0$. Άρα η h' είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x\geq 1$ και για $\xi<x$ έχουμε $h'(\xi)<h'(x)$ (2) . Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $h'(x)>\dfrac{h(x)}{x-1}$.

δ) Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi(x)=\int_1^x f(t)dt+3x-x^2$, $x\in R$.
Η φ είναι συνεχής στο [1, 3] ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων .
Η φ είναι παραγωγίσιμη στο (1, 3) ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $\varphi'(x)=f(x)+3-2x$.

Είναι $\left.\begin{aligned}&\varphi(1)=2\\&\varphi(3)=\int_1^3 f(t)dt+9-9=2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\varphi(1)=\varphi(3)$

Από το Θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,3)$ ώστε $\varphi'(\xi)=0\Leftrightarrow\ \Leftrightarrow f(\xi)+3-2\xi=0\Leftrightarrow f(\xi)+3=2\xi$.

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

Α. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 194, το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

Β. Βλέπε τον ορισμό στη σελίδα 279 του σχολικού βιβλίου.

Γ. Βλέπε σελίδα 246 του σχολικού βιβλίου, αμέσως μετά την διατύπωση του θεωρήματος Rolle.

Δ. **1.** Σωστό. Βλέπε στο σχολικό βιβλίο σελίδα 91:

$$z+\overline{z}=2\alpha \quad \text{με} \quad \alpha = Re(z).$$

2. Λάθος. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 185 με α = e: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

3. Λάθος. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 142:

$$\{x/x\in A \;\; και \;\; x\in B, \qquad με\; g(x)\neq 0\}$$

4. Σωστό. Βλέπε το ΣΧΟΛΙΟ στη σελίδα 218 του σχολικού βιβλίου.

5. Σωστό. Βλέπε στο σχολικό βιβλίο σελίδα 336 τον τύπο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες.

ΘΕΜΑ 2

α. **i.** Η f, ως πολυωνυμική, είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f\,'(x) = 12x^2 + 24\lambda x + \lambda - 1,$$
$$f\,''(x) = 24x + 24\lambda$$

Επειδή στο $x_0 = -1$ παρουσιάζει καμπή, είναι $f\,''(-1) = 0$:

$$f\,''(-1) = 0 \Leftrightarrow -24 + 24\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

ii. Επειδή λ = 1 είναι $\boxed{f(x) = 4x^3 + 12x^2}$ και

$$f\,''(x) > 0 \Leftrightarrow 24x + 24 > 0 \Leftrightarrow x > -1$$
$$f\,''(x) < 0 \Leftrightarrow 24x + 24 < 0 \Leftrightarrow x < -1$$

Επομένως η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, -1]$ και κυρτή στο $[-1, +\infty)$.

β. Θέτουμε $u = f(x)$. Επειδή

$$\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3}(4x^3 + 12x^2) = 0$$

είναι

$$\lim_{x\to -3}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} = \lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u} = 1$$

γ. **i.** Η ζητούμενη αρχική είναι η

$$F(x) = x^4 + 4x^3 + c,\quad x \in \mathbb{R}$$

με c σταθερά, γιατί για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$F'(x) = (x^4 + 4x^2 + c)' = 4x^3 + 12x^2 = f(x)$$

Το σημείο (0, 1) ανήκει στην γραφική παράσταση της F, οπότε $F(0) = 1$:

$$F(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1$$

Επομένως

$$\boxed{F(x) = x^4 + 4x^3 + 1},\ x \in \mathbb{R}$$

ii. Βρίσκουμε τις ρίζες της συνάρτησης:
$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 12x^2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = -3$
Το ζητούμενο εμβαδόν Ε ισούται με το ολοκλήρωμα

$$E = \int_{-3}^{0}|f(x)|dx$$

Στο διάστημα $[-3, 0]$ είναι $f(x) = 4x^2(x+3) \geq 0$, άρα

$$E = \int_{-3}^{0} f(x)dx$$

Τότε

$$E = F(0) - F(-3) = 1 + 26 = 27\ \tau.\mu$$

ΘΕΜΑ 3

α. **i)** Θέτουμε στη δοσμένη σχέση $x = \frac{\pi}{4}$ και παίρνουμε:

$$f(\eta\mu\frac{\pi}{4}) + f(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}) = 1 \Leftrightarrow f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow 2f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Πάλι, με x = 0 παίρνουμε:

$$f(\eta\mu 0) + f(\sigma\upsilon\nu 0) = 1 \Leftrightarrow f(0) + f(1) = 1$$

ii) Θεωρούμε την συνάρτηση g: [0, 1] → ℝ με

$$g(x) = f(x) + x - 1,\qquad \text{για κάθε } x \in [0, 1]$$

- Η g είναι συνεχής, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων· της f, και της x – 1.
- Είναι $g(0) = f(0) - 1$ και $g(1) = f(1) \overset{(\alpha i)}{=} 1 - f(0)$, οπότε

$$g(0) \cdot g(1) = -[f(0) - 1]^2 \quad \textbf{(1)}$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1η περίπτωση:
Αν $f(0) = 1$, τότε από (1) $\Leftrightarrow g(0) = 0$ ή $g(1) = 0$. Η g θα έχει ρίζα το $x_0 = 0$ ή το $x_0 = 1$

2η περίπτωση:
Αν $f(0) \neq 1$, τότε από την (1) είναι: $g(0) \cdot g(1) < 0$. Εφαρμόζεται, επομένως, το θεώρημα του Bolzano για την g στο [0, 1], έτσι θα υπάρχει, τουλάχιστον, ένα $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = 0$.
Σε κάθε περίπτωση, λοιπόν, υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$, τέτοιο ώστε

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) + x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) + x_0 = 1,$$

το οποίο απόδειξε το ζητούμενο.

β. **i.** Θεωρούμε την συνάρτηση h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$h(x) = f(x) - \sqrt{2}\,x + \frac{1}{2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

- Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως άθροισμα της f, η οποία από υπόθεση είναι παραγωγίσιμη, και της πολυωνυμικής $-\sqrt{2}x + \frac{1}{2}$, με παράγωγο

$$h'(x) = f'(x) - \sqrt{2}$$

- Η h έχει ελάχιστο στο $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Πραγματικά, είναι

$$h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0$$

Ακόμα, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) \geq \sqrt{2}x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) - \sqrt{2}x + \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow h(x) \geq h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

- Το $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμό της h.

Επομένως, εφαρμόζεται το θεώρημα του Fermat, σύμφωνα με το οποίο $h'(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 0$:

$$h'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο με τετμημένη $\frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι

$$y - f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow y-\frac{1}{2}=\sqrt{2}(x-\frac{\sqrt{2}}{2}) \Leftrightarrow y=\sqrt{2}\,x-\frac{1}{2}$$

ii) Είναι

$$f(0)+f(1)=1 \Leftrightarrow f(1)=1-f(0)$$

και

$$f(\text{ημx}) + f(\text{συνx}) = 1 \Leftrightarrow f(\text{συνx}) = 1 - f(\text{ημx}).$$

Αντικαθιστούμε στο όριο και έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(\sigma\upsilon\nu x)}{\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-f(0))-(1-f(\eta\mu x))}{\eta\mu x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)-f(0)}{\eta\mu x-0} \quad (\mathbf{2})$$

Κάνουμε την αντικατάσταση y = ημx. Επειδή

$$\lim_{x\to 0}(\text{ημx}) = \text{ημ}0 = 0$$

το y τείνει στο 0. Έτσι

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)-f(0)}{\eta\mu x-0}=\lim_{y\to 0}\frac{f(y)-f(0)}{y-0} \quad (\mathbf{3})$$

Επειδή η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο 0, από τον ορισμό της $f'(0)$ είναι

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(y)-f(0)}{y-0}=f'(0) \qquad (\mathbf{4})$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την $f'(0)$.

Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της δοσμένης $f(\eta\mu x)+f(\sigma\upsilon\nu x)=1$ και παίρνουμε:

$$[f(\text{ημx})+f(\text{συνx})]'=(1)' \Leftrightarrow [f(\text{ημx})]'+[f(\text{συνx})]'=0$$

$$\Leftrightarrow (\text{ημx})'f'(\text{ημx})+(\text{συνx})'f'(\text{συνx})=0$$

$$\Leftrightarrow \text{συνx}\cdot f'(\text{ημx})-\eta\mu x\cdot f'(\text{συνx})=0$$

Από εδώ, για $x = 0$ έχουμε

$$\text{συν}0\cdot f'(\text{ημ}0)-\eta\mu 0\cdot f'(\text{συν}0)=0 \Leftrightarrow f'(0)=0.$$

Επομένως, σύμφωνα με τις (2), (3) και (4):

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(\sigma\upsilon\nu x)}{\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)-f(0)}{\eta\mu x}=f'(0)=0$$

ΘΕΜΑ 4

Α. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$g(x) = e^x - x - 1,\ x\in\mathbb{R}$$

η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$g'(x) = e^x - 1,\ x\in\mathbb{R}$$

Είναι $g'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$ και

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$$

Επομένως η g, ως συνεχής στο $x_0 = 0$:

- είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$,
- είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$

άρα, έχει ολικό ελάχιστο το g(0) = 0, οπότε

$$g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq x + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Από την παραπάνω απόδειξη συμπεραίνουμε, ότι η ισότητα

$$g(x) = g(0) \Leftrightarrow e^x = x + 1$$

αληθεύει ακριβώς όταν x=0, αφού η θέση ελαχίστου της συνάρτησης είναι μόνον η $x = 0$.

Β. **α. i.** Θέτουμε $u = x - xt$, οπότε $du = -xdt$. Για t = 0 είναι u = x και για t = 1 είναι u = 0. Τότε:

$$x\int_0^1 e^{f(x-xt)}dt = \int_x^0 e^{f(u)}(-du) = \int_0^x e^{f(u)}du = \int_0^x e^{f(t)}dt.$$

Τότε για κάθε $x \in [0, +\infty)$ έχουμε:

$$z = \int_0^x e^{f(t)}dt + i\,x\int_0^1 e^{f(x-xt)}dt = \int_0^x e^{f(t)}dt + i\int_0^x e^{f(t)}dt$$

οπότε

$$Re(z) = Im(z) = \int_0^x e^{f(t)}dt$$

Στην συνέχεια

$$z = \int_0^x e^{f(t)}dt + i\int_0^x e^{f(t)}dt \Leftrightarrow z = (1+i)\int_0^x e^{f(t)}dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{z}{1+i} = \int_0^x e^{f(t)}dt$$

Επειδή $e^{f(t)} > 0$, για κάθε $x \geq 0$ είναι $\int_0^x e^{f(t)}dt \geq 0$, επομένως

$$\frac{z}{1+i} = Re(z) = Im(z) \geq 0, \text{ για κάθε } x \geq 0$$

ii. Βρήκαμε $\frac{z}{1+i} = \int_0^x e^{f(t)}dt \geq 0$, οπότε

$$\left|\frac{z}{1+i}\right| = \left|\int_0^x e^{f(t)}dt\right| = \int_0^x e^{f(t)}dt$$

άρα

$$\frac{|z|}{\sqrt{2}} = \int_0^x e^{f(t)}dt\ , \qquad \text{για κάθε } x \geq 0$$

Σύμφωνα με την σχέση αυτή και την δεύτερη από τις δοσμένες είναι:

$$\int_0^x e^{f(t)}dt = \int_0^x [f(t) + e^t]\,dt + f(\alpha) - 1 \quad \mathbf{(1)}, \quad \text{για κάθε } x \geq 0$$

Επειδή η f και η e^t είναι συνεχείς, θα είναι συνεχείς

- η σύνθεση $e^{f(t)}$ και
- το άθροισμα $f(t) + e^t$,

επομένως οι συναρτήσεις που ορίζονται από τα ολοκληρώματα

$$\int_0^x e^{f(t)}dt\ , \qquad \int_0^x [f(t)+e^t]\,dt$$

είναι παραγωγίσιμες με

$$\left(\int_0^x e^{f(t)}dt\right)' = e^{f(x)}, \qquad \left(\int_0^x [f(t)+e^t]\,dt\right)' = f(x)+e^x$$

Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της (1) και έχουμε:

$$\left(\int_0^x e^{f(t)}dt\right)' = \left(\int_0^x [f(t)+e^t]\,dt + f(\alpha) - 1\right)'$$

ή, τελικώς:

$$e^{f(x)} = f(x)+e^x, \text{ για κάθε } x \geq 0$$

β. Για κάθε $x_1,\ x_2 \geq 0$ από την (α.ii) έχουμε

$$e^{f(x_1)} = f(x_1)+e^{x_1} \Leftrightarrow e^{x_1} = e^{f(x_1)} - f(x_1)$$
$$e^{f(x_2)} = f(x_2)+e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_2} = e^{f(x_2)} - f(x_2)$$

Έστω $x_1 < x_2$. Επειδή η e^x είναι γνησίως αύξουσα έχουμε

$$e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow e^{f(x_1)} - f(x_1) < e^{f(x_2)} - f(x_2)$$
$$\Leftrightarrow g\big(f(x_1)\big) < g\big(f(x_2)\big)$$

με g την συνάρτηση του ερωτήματος Α, η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$, στο οποίο παίρνει τιμές η f. Επομένως

$$g\big(f(x_1)\big) < g\big(f(x_2)\big) \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε $x_1,\ x_2 \geq 0$,

αν $x_1 < x_2$, τότε $f(x_1) < f(x_2)$

που σημαίνει, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

γ. Η f ως γνησίως αύξουσα, είναι $1-1$, άρα έχει αντίστροφη.
Πάλι η f, ως γνησίως αύξουσα και συνεχής, έχει σύνολο τιμών το διάστημα:

$$\left[f(0), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)$$

- Η σχέση $e^{f(x)} = f(x)+e^x$ επειδή $f(x) \geq 0$ δίνει

$$e^{f(x)} \geq e^x \Leftrightarrow f(x) \geq x$$

Επειδή

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

είναι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

- Για $x = 0$ πάλι από την $e^{f(x)} = f(x)+e^x$ παίρνουμε

$$e^{f(0)} = f(0)+1.$$

Έτσι, το $f(0)$ είναι λύση της εξίσωσης $e^x = x + 1$. Από το ερώτημα Α. η εξίσωση αυτή έχει μοναδική λύση $x = 0$, που συνεπάγεται, ότι

$$\boxed{\boldsymbol{f(0)=0}} \quad \textbf{(2)}$$

Επομένως η f έχει σύνολο τιμών το διάστημα

$$\left[f(0), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = [0,+\infty)$$

Έστω $y = f(x)$ με $x \geq 0$. Από την $e^{f(x)} = f(x) + e^x$ έχουμε:

$$e^y = y + e^x \Leftrightarrow e^x = e^y - y$$

Η τελευταία εξίσωση έχει λύση ως προς $x \geq 0$, αφού $e^y - y \geq 1$. Τότε:

$$e^x = e^y - y \Leftrightarrow x = \ln(e^y - y)$$

Για την τιμή αυτή του x είναι $f(x) = y$. Πραγματικά

$$e^{f(\ln(e^y - y))} - f(\ln(e^y - y)) = e^{\ln(e^y - y)} = e^y - y$$

Η g ως γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ είναι 1-1, έτσι $f(\ln(e^y - y)) = y$

Άρα:

$$f^{-1}(x) = \ln(e^x - x), \qquad x \in [0,+\infty)$$

δ. Για x = 0 από την (1) παίρνουμε:

$$\int_0^0 e^{f(t)}dt = \int_0^0 [f(t) + e^t]\,dt + f(\alpha) - 1 \Leftrightarrow f(\alpha) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{f(\alpha) = 1}} \ \ \mathbf{(3)}$$

Για την συνάρτηση f εφαρμόζεται το Θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού στο διάστημα [0, α], α > 0, γιατί είναι συνεχής σε αυτό και παραγωγίσιμη στο αντίστοιχο ανοιχτό διάστημα, ως παραγωγίσιμη από υπόθεση στο $(0,+\infty)$. Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον, $\xi \in (0, \alpha)$ με

$$\frac{f(\alpha) - f(0)}{\alpha - 0} = f'(\xi)$$

ή λόγω των (2) και (3):

$$\frac{1-0}{\alpha} = f'(\xi) \ \ ή \ \ \alpha f'(\xi) = 1.$$

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Ημερομηνία: Μ. Τετάρτη 11 Απριλίου 2012

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Βλέπε Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 217 την απόδειξη του Θεωρήματος.

Α2. Βλέπε Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 150 τον ορισμό του μεγίστου.

Α3. Βλέπε Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 234 την απόδειξη του τύπου $(\alpha^x)' = \alpha^x \ln\alpha$.

Α4.
- **i.** Αληθής. Βλέπε Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 152 τα σχόλια.
- **ii.** Ψευδής. Βλέπε Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 90 τις δυνάμεις του i με υ = 3.
- **iii.** Αληθής. Βλέπε Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 165 το Θεώρημα 1$^{\text{ο}}$.
- **iv.** Αληθής. Βλέπε Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 241 τον ορισμό του ρυθμού μεταβολής.
- **v.** Αληθής. Βλέπε Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 261 το σχόλιο του Θεωρήματος του Fermat.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Τα πεδία ορισμού των f, g είναι αντίστοιχα τα $A_f = \mathbb{R}$ και $A_g = (0, +\infty)$

- Η fog έχει πεδίο ορισμού το σύνολο

$$\{x \in A_g \text{ και } g(x) \in A_f\} = \{x > 0 \text{ και } g(x) \in \mathbb{R}\} = (0, +\infty)$$

Για τέτοιες τιμές του x, έχουμε:

$$(f o g)(x) = f\left(g(x)\right) = e^{g(x)-2} = e^{\ln x} = x$$

Ώστε $(f o g)(x) = x$ με $x \in (0, +\infty)$

- Η gof ορίζεται στο σύνολο

$$\{x \in A_f \text{ και } f(x) \in A_g\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } e^{x-2} > 0\} = \mathbb{R}$$

Για τέτοιες τιμές του x, έχουμε:

$$(g o f)(x) = \ln f(x) + 2 = \ln e^{x-2} + 2 = (x-2) + 2 = x$$

Ώστε $(g o f)(x) = x$ με $x \in \mathbb{R}$

Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις fog και gof δεν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού, επομένως δεν είναι ίσες.

Β2. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 - 2 \neq x_2 - 2 \Rightarrow e^{x_1-2} \neq e^{x_2-2} \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Επομένως η f είναι 1 – 1 και έχει αντίστροφη. Έχουμε

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = e^{x-2} \\ &\Leftrightarrow x - 2 = \ln y, \quad y > 0 \\ &\Leftrightarrow x = \ln y + 2, \quad y > 0 \end{aligned}$$

Άρα $f^{-1}(x) = \ln x + 2,\ x > 0$

Β3 Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = e^{x-2} - \ln x - 2,\ x \in [e^{-2},\ 2]$.

- Η h είναι συνεχής. Πράγματι η συνάρτηση e^{x-2} είναι συνεχής, ως σύνθεση της πολυωνυμικής x – 2 με την εκθετική e^x, οι οποίες είναι συνεχείς. Επομένως η h είναι συνεχής, γιατί προκύπτει από πράξεις των συνεχών συναρτήσεων e^{x-2}, lnx (λογαριθμική) και 2 (σταθερή).
- Είναι

$$h(e^{-2}) = e^{e^{-2}-2} - \ln e^{-2} - 2 = e^{e^{-2}-2} + 2 - 2 = e^{e^{-2}-2} > 0$$

και

$$h(2) = e^{2-2} - \ln 2 - 2 = -1 - \ln 2 < 0$$

Οπότε:

$$h(e^{-2}) \cdot h(2) = e^{e^{-2}-2}(-1 - \ln 2) < 0$$

Εφαρμόζεται, επομένως το Θεώρημα του Bolzano για την h στο διάστημα $[e^{-2}, 2]$, οπότε υπάρχει $x_0 \in (e^{-2}, 2)$ με $h(x_0) = 0$. Τότε

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0-2} - \ln x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{x_0-2} = \ln x_0 + 2$$

Αυτό σημαίνει, ότι η εξίσωση $e^{x-2} = \ln x + 2$ έχει ως ρίζα τον αριθμό $x_0 \in (e^{-2}, 2)$ και αποδεικνύει το ζητούμενο.

Β4. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{(gof)(x)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{x-2}}{x} = 0$, γιατί

$$\lim_{x\to-\infty} e^{x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^2} = \frac{1}{e^2} \lim_{x\to-\infty} e^x = \frac{1}{e^2} \cdot 0 = 0 \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

Ακόμα, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{(fog)(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x + 2}{x}$. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x + 2) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\dfrac{\infty}{\infty}$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x + 2)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, οπότε από το αντίστοιχο θεώρημα του De L' Hospital έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{(fog)(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x+2)'}{(x)'}=0$$

Ώστε $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{(gof)(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{(fog)(x)}=0$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. **i** Είναι $1+3\alpha^2\neq0$, οπότε:

$$f(x)=\frac{1}{1+3\alpha^2}e^{-\int_1^x 2tf(t)dt} \qquad \textbf{(1)}$$

Η συνάρτηση 2tf(t) είναι συνεχής, ως γινόμενο των συνεχών συναρτήσεων 2t και f (t), οπότε η συνάρτηση που ορίζεται από το ολοκλήρωμα $\int_1^x 2tf(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη, άρα και η $-\int_1^x 2tf(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη. Επομένως η συνάρτηση $e^{-\int_1^x 2tf(t)dt}$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, της $-\int_1^x 2f(t)dt$ με την εκθετική e^x. Το γινόμενό της επί τον αριθμό $\frac{1}{1+3\alpha^2}$, δηλαδή η $f(x)=\frac{1}{1+3\alpha^2}e^{-\int_1^x 2tf(t)dt}$ είναι παραγωγίσιμη. Έχουμε

$$f'(x)=\frac{1}{1+3\alpha^2}\left(e^{-\int_1^x 2tf(t)dt}\right)'=\frac{1}{1+3\alpha^2}e^{-\int_1^x 2tf(t)dt}\left(-\int_1^x 2tf(t)dt\right)'$$

$$=f(x)(-2xf(x))=-2xf^2(x)$$

ii. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)>0$, αφού $1+3\alpha^2>0$ και $e^{-\int_1^x 2tf(t)dt}>0$. Έτσι

$$f'(x)=-2xf^2(x)\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=-2x\Leftrightarrow\left[\frac{1}{f(x)}\right]'=\left(x^2\right)'$$

Επομένως υπάρχει $c\in\mathbb{R}$, ώστε

$$\frac{1}{f(x)}=x^2+c \qquad \textbf{(2)}$$

Η (1) για $x=1$ δίνει $f(1)=\frac{1}{1+3\alpha^2}$.

Η (2) δίνει $\frac{1}{f(1)}=1+c\Leftrightarrow1+3\alpha^2=1+c\Leftrightarrow c=3\alpha^2$

Άρα η (2) δίνει $f(x)=\frac{1}{x^2+3\alpha^2}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Γ2. Έχουμε

$$\int_0^{\alpha} t\,f(t)dt = \int_0^{\alpha} \frac{t}{t^2+3\alpha^2}dt = \frac{1}{2}\int_0^{\alpha} \frac{(t^2+3\alpha^2)'}{t^2+3\alpha^2}dt = \left[\frac{1}{2}\ln|t^2+3\alpha^2|\right]_0^{\alpha}$$

$$= \frac{1}{2}\ln 4\alpha^2 - \frac{1}{2}\ln 3\alpha^2 = \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$$

Η τιμή αυτή είναι ανεξάρτητη του α.

Γ3. Η f, ως ρητή, είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2+3\alpha^2}\right)' = -\frac{(x^2+3\alpha^2)'}{(x^2+3\alpha^2)^2} = -\frac{2x}{(x^2+3\alpha^2)^2}$$

Το πρόσημο της f' με την μονοτονία και το ακρότατο της f φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f΄		+	0	–	
f		↗	$\frac{1}{3\alpha^2}$	↘	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$, γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ και έχει ολικό μέγιστο το $f(0) = \frac{1}{3\alpha^2}$

Για την f'' έχουμε:

$$f''(x) = -2\left[\frac{x}{(x^2+3\alpha^2)^2}\right]' = -2\frac{(x^2+3\alpha^2)^2 - x\left[(x^2+3\alpha^2)^2\right]'}{(x^2+3\alpha^2)^4} =$$

$$= -2\frac{(x^2+3\alpha^2)^2 - 4x^2(x^2+3\alpha^2)}{(x^2+3\alpha^2)^4} = -2\frac{x^2+3\alpha^2-4x^2}{(x^2+3\alpha^2)^3} = 6\frac{x^2-\alpha^2}{(x^2+3\alpha^2)^3}$$

Το πρόσημο της f'' με την κυρτότητα της f και τα σημεία καμπής της φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

x	$-\infty$		$-\lvert\alpha\rvert$		$\lvert\alpha\rvert$		$+\infty$
f΄΄		+	0	–	0	+	
f		∪	$\frac{1}{4\alpha^2}$ σ.κ	∩	$\frac{1}{4\alpha^2}$ σ.κ	∪	

Η f είναι κυρτή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -|\alpha|]$, $[|\alpha|, +\infty)$ και κοίλη στο διάστημα $[-|\alpha|, |\alpha|]$. Έχει σημεία καμπής τα $(-|\alpha|, 1/4\alpha^2)$ και $(|\alpha|, 1/4\alpha^2)$

Η f, ως συνεχής στο $\mathbb{R}$, δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Στα $+\infty$ και $-\infty$ έχουμε:

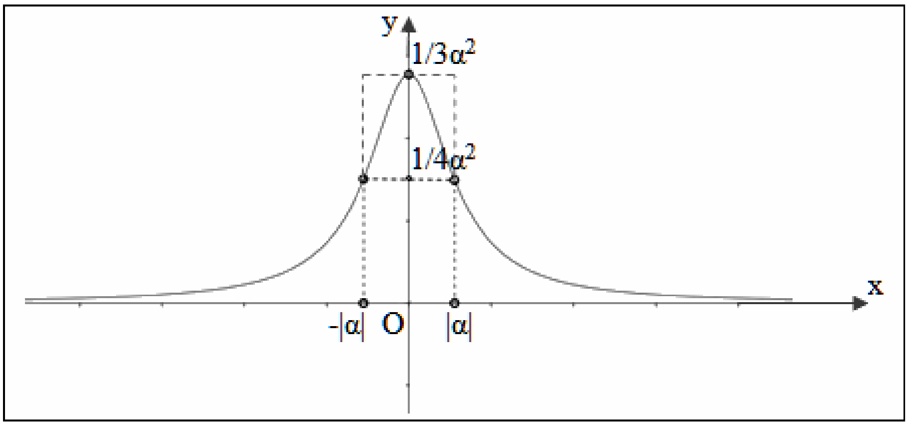
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+3\alpha^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2+3\alpha^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2} = 0$$

Άρα έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και στο $-\infty$ τον άξονα των x.
Σύμφωνα με τα παραπάνω συμπληρώνουμε τον επόμενο πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$		$-\lvert\alpha\rvert$		**0**		$\lvert\alpha\rvert$		$+\infty$
f΄		+		+	0	−		−	
f΄΄		+	0	−		−	0	+	
f	0	↗	$\frac{1}{4\alpha^2}$ σ.κ	↗	$\frac{1}{3\alpha^2}$ max	↘	$\frac{1}{4\alpha^2}$ σ.κ	↘	0

Η γραφική παράσταση της f δίνεται στο επόμενο σχήμα:



Παρατήρηση. Η f είναι άρτια αφού για κάθε $x\in\mathbb{R}$ το $-x\in\mathbb{R}$ και

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2+3\alpha^2} = \frac{1}{x^2+3\alpha^2} = f(x)$$

Επομένως μπορούμε να την μελετήσουμε στο διάστημα $[0, +\infty)$ και να επεκτείνουμε τα συμπεράσματα στο $\mathbb{R}$.

Γ4. Το ζητούμενο εμβαδό (βλέπε τη γραφική παράσταση της f) είναι μεγαλύτερο από το εμβαδό $E_1 = |\alpha|\frac{1}{4\alpha^2} = \frac{1}{4|\alpha|}$ του ορθογωνίου που ορίζεται από τους άξονες και τις ευθείες $x = \alpha$, $y = \dfrac{1}{4\alpha^2}$, και μικρότερο από το εμβαδό $E_2 = |\alpha| \dfrac{1}{3\alpha^2} = \dfrac{1}{3|\alpha|}$ του ορθογωνίου που ορίζεται από τους άξονες και τις ευθείες $x = \alpha$, $y = \dfrac{1}{3\alpha^2}$. Επομένως $\dfrac{1}{4|\alpha|} < E < \dfrac{1}{3|\alpha|}$

Αλλιώς: Με $\alpha > 0$, επειδή $f(x) > 0$ είναι $E = \int_0^{\alpha} |f(x)|\,dx = \int_0^{\alpha} f(x)\,dx$. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, \alpha]$, οπότε για $x \in [0, \alpha]$ είναι

$$f(\alpha) \le f(x) \le f(0) \Leftrightarrow \frac{1}{4\alpha^2} \le f(x) \le \frac{1}{3\alpha^2} \Leftrightarrow f(x) - \frac{1}{4\alpha^2} \ge 0 \quad \text{και} \quad \frac{1}{3\alpha^2} - f(x) \ge 0$$

Επειδή οι αντίστοιχες ισότητες δεν ισχύουν σε όλο το $[0, \alpha]$, έχουμε

$$\int_0^{\alpha} \left[f(x) - \frac{1}{4\alpha^2} \right] dx > 0 \quad \text{και} \quad \int_0^{\alpha} \left[\frac{1}{3\alpha^2} - f(x) \right] dx > 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\alpha} f(x)dx - \left[\frac{x}{4\alpha^2} \right]_0^{\alpha} > 0 \quad \text{και} \quad \left[\frac{x}{3\alpha^2} \right]_0^{\alpha} - \int_0^{\alpha} f(x)dx > 0$$

$$\Leftrightarrow E - \frac{1}{4\alpha} > 0 \ \text{ και } \ \frac{1}{3\alpha} - E > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4\alpha} < E < \frac{1}{3\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{4|\alpha|} < E < \frac{1}{3|\alpha|}$$

Με $\alpha < 0$ θα εργαστούμε ομοίως.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θέτουμε

$$g(x) = \frac{f(x) - 2e^{x+2}}{x+2}, x \ne -2$$

Τότε

$$\lim_{x \to -2} g(x) = -1 \qquad \textbf{(1)}$$

και

$$f(x) = (x+2)g(x) + 2e^{x+2},\ x \ne -2 \qquad \textbf{(2)}$$

Είναι

$$\lim_{x \to -2} [g(x)(x+2) + 2e^{x+2}] = \lim_{x \to -2} [g(x)(x+2)] + \lim_{x \to -2} 2e^{x+2} = 0 + 2 = 2$$

οπότε

$$\lim_{x \to -2} f(x) = 2$$

Η f, ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_0 = -2$, έτσι

$$\lim_{x \to -2} f(x) = f(-2) \Rightarrow f(-2) = 2 \qquad \textbf{(3)}$$

Έχουμε, με $x \ne -2$

$$\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}\overset{(1),(3)}{=}\frac{(x+2)g(x)+2e^{x+2}-2}{x+2}=\frac{(x+2)g(x)}{x+2}+2\frac{e^{x+2}-1}{x+2}=g(x)+2\frac{e^{x+2}-1}{x+2}$$

Το όριο $\lim\limits_{x\to-2}\frac{e^{x+2}-1}{x+2}$ είναι απροσδιόριστη μορφή τύπου $\frac{0}{0}$. Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to-2}\frac{\left(e^{x+2}-1\right)'}{(x+2)'}=\lim_{x\to-2}(e^{x+2})=e^0=1$$

Επομένως, εφαρμόζεται ο αντίστοιχος κανόνας του De L' Hospital σύμφωνα με το οποίο βρίσκουμε

$$\lim_{x\to-2}\frac{e^{x+2}-1}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(e^{x+2}-1)'}{(x+2)'}=1$$

Τότε

$$f'(-2)=\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim_{x\to-2}\left[g(x)+2\frac{e^{x+2}-1}{x+2}\right]=\lim_{x\to-2}g(x)+2\lim_{x\to-2}\frac{e^{x+2}-1}{x+2}=1$$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι η C_f είναι κοίλη, γιατί $f''(x)<0$ στο $\mathbb{R}$. Επομένως τα σημεία της C_f είναι κάτω από τα αντίστοιχα σημεία της εφαπτομένης της στο σημείο της $A(-2, f(-2))$, εκτός του σημείου επαφής που είναι κοινό σημείο. Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y-f(-2)=f'(-2)(x+2)\Leftrightarrow y-2=x+2\Leftrightarrow y=x+4$$

Άρα $f(x)\le x+4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Παρατήρηση. Η σχέση αυτή αποδεικνύεται και με τη βοήθεια της συνάρτησης $T(x) = f(x)-x-4$, η οποία έχει μέγιστο το $T(-2)=0$.

Δ2. Είναι $f(-2)=f(0)=2$. Ακόμα η f είναι συνεχής στο $[-2, 0]$ και παραγωγίσιμη στο $(-2, 0)$, ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Εφαρμόζεται, επομένως, το θεώρημα του Rolle για την f στο διάστημα $[-2, 0]$, οπότε υπάρχει $x_0\in(-2, 0)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$. Επειδή $f''(x)<0$ η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε το x_0 είναι μοναδική της ρίζα και

- για κάθε $x\in(-\infty, x_0)$ είναι $x<x_0\Rightarrow f'(x)>f'(x_0)\Rightarrow f'(x)>0$
- για κάθε $x\in(x_0, +\infty)$ είναι $x>x_0\Rightarrow f'(x)<f'(x_0)\Rightarrow f'(x)<0$

Άρα η f ως συνεχής έχει μέγιστο (ολικό) το $f(x_0)$ με $x_0\in(-2, 0)$.

Δ3. Η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως είναι 1–1, οπότε

$$f'\left(\int_0^{2(x-5)}f(t-x)dt\right)=f'(0)\Leftrightarrow\int_0^{2(x-5)}f(t-x)dt=0 \qquad \textbf{(4)}$$

Αρκεί να δείξουμε, ότι η (4) έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$ την $x = 5$.

Πράγματι, για $x = 5$ η (4) επαληθεύεται, γιατί γίνεται $\int_0^0 f(t-x)dt = 0$.

Για να δείξουμε την μοναδικότητα της ρίζας θεωρούμε την συνάρτηση

$$h(x) = \int_0^{2(x-5)} f(t-x)dt,\ x \in \mathbb{R}$$

Θέτουμε $t - x = u$, οπότε $dt = du$. Για $t = 0$ το $u = -x$ και για $t = 2(x-5)$ το $u = x - 10$, επομένως

$$h(x) = \int_{-x}^{x-10} f(u)du = \int_0^{x-10} f(u)du - \int_0^{-x} f(u)du$$

Επειδή η f είναι συνεχής, η συνάρτηση $\varphi(x) = \int_0^x f(u)du$ είναι παραγωγίσιμη, επομένως και οι συνθέσεις των $x - 10$ και $-x$ με την φ είναι παραγωγίσιμες με

$$\left(\int_0^{x-10} f(u)du\right)' = (x-10)' f(x-10) = f(x-10),$$

$$\left(\int_0^{-x} f(u)du\right)' = (-x)f(-x) =' -f(-x)$$

Επομένως η h είναι παραγωγίσιμη, ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$h'(x) = f(x-10) + f(-x)$$

Επειδή, από το ερώτημα Δ1 $f(x) \le x + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι

$$h'(x) = f(x-10) + f(-x) \le (x-10) + 4 + (-x) + 4 = -2 < 0$$

Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα, επομένως και 1–1, που σημαίνει ότι η ρίζα της είναι μοναδική. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

Δ4. Στο ερώτημα Δ1 δείξαμε ότι $f'(x) < 0$ στο $(x_0, +\infty)$ με $x_0 \in (-2, 0)$. Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$. Είναι $|z+i| \ge 0$ και $|z| + 1 \ge 1 > 0$, αφού το μέτρο κάθε μιγαδικού είναι μη αρνητικός αριθμός. Τότε, με $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$ παίρνουμε:

$$f(|z+i|) \le f(|z|+1) \Leftrightarrow |z+i| \ge |z| + 1$$

$$\Leftrightarrow |x + (y+1)i| \ge |x + iy| + 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y+1)^2} \ge \sqrt{x^2 + y^2} + 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2 + (y+1)^2}\right)^2 \ge \left(\sqrt{x^2 + y^2} + 1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2y + 1 \ge x^2 + y^2 + 2\sqrt{x^2 + y^2} + 1$$

$$\Leftrightarrow y \ge \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow y \ge 0 \quad \text{και} \quad y^2 \ge \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow y \ge 0 \quad \text{και} \quad x^2 \le 0$$

$\Leftrightarrow y \ge 0$ και $x = 0$, άρα $z = iy, y \in \mathbb{R}^+$, φανταστικός.

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Ημερομηνία: Μ. Τρίτη 30 Απριλίου 2013
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, έκδοση 2012 σελ. 262, θεώρημα (περίπτωση iii).

Α2. **α.** Σχολικό βιβλίο, έκδοση 2012 σελ. 275, ορισμός.

β. Σχολικό βιβλίο, έκδοση 2012 σελ. 143, ορισμός και το πεδίο ορισμού της $g\circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το f(x) ανήκει στο πεδίο ορισμού της g. Δηλαδή είναι το σύνολο $A_1=\{x\in A \mid f(x)\in B\}$.

Α3. Λ – Σ – Λ – Λ – Σ.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω $z=x+yi$. Ισχύει:

$$\bar{z}(z+2)=-|1-i|^2 z-3 \Leftrightarrow$$
$$z\bar{z}+2\bar{z}=-\left(\sqrt{1^2+(-1)^2}\right)^2\cdot z-3 \Leftrightarrow$$
$$z\bar{z}+2\bar{z}=-2z-3 \Leftrightarrow$$
$$z\bar{z}+2z+2\bar{z}+3=0 \Leftrightarrow$$
$$z\bar{z}+2(z+\bar{z})+3=0 \Leftrightarrow$$
$$x^2+y^2+2\cdot 2x+3=0 \Leftrightarrow$$
$$x^2+y^2+4x+3=0 \Leftrightarrow$$
$$x^2+4x+4+y^2=4-3 \Leftrightarrow$$
$$(x+2)^2+y^2=1.$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι ο κύκλος με κέντρο $\mathrm{K}(-2,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

ή

Δεύτερος τρόπος:

Για την εξίσωση $x^2+y^2+4x+3=0$ έχουμε $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma=16+0-12=4>0$ δηλαδή είναι κύκλος με κέντρο $\mathrm{K}\left(-\frac{\mathrm{A}}{2},-\frac{\mathrm{B}}{2}\right)$ δηλαδή K(-2,0) και $\rho=\frac{\sqrt{4}}{2}=1$.

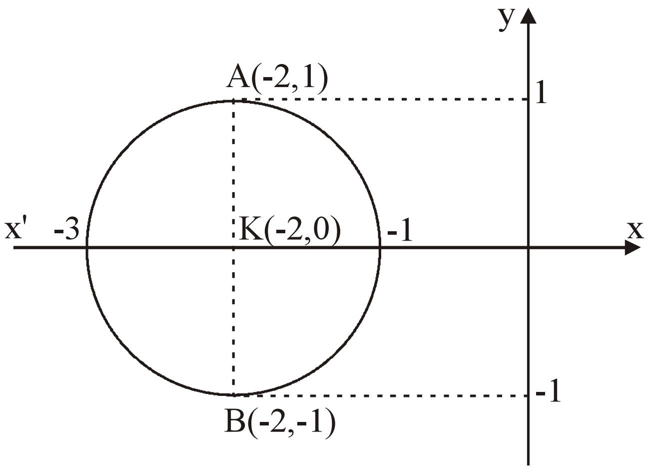
Αφού οι εικόνες των $z,\bar{z}$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$, ο γεωμετρικός τόπος του $\bar{z}$ είναι ο συμμετρικός του παραπάνω κύκλου ως προς τον $x'x$. Συνεπώς είναι ο ίδιος κύκλος, αφού το κέντρο του είναι σημείο του άξονα x΄x.

Β2. Αφού οι αριθμοί z και $\bar{z}$ έχουν εικόνες σημεία του ίδιου κύκλου, τότε η μέγιστη τιμή του $|z-\bar{z}|$, δηλαδή η μέγιστη απόσταση των εικόνων τους, επιτυγχάνεται όταν οι εικόνες των $z,\bar{z}$ είναι σημεία αντιδιαμετρικά. Συνεπώς η μέγιστη τιμή του $|z-\bar{z}|$ είναι 2ρ = 2.

Οι αριθμοί $z,\bar{z}$ για τους οποίους έχουμε τη μέγιστη τιμή του $|z-\bar{z}|$, έχουν εικόνες σημεία συμμετρικά ως προς τον $x'x$, αφού είναι συζυγείς (δηλαδή με την ίδια τετμημένη και αντίθετη τεταγμένη) και ταυτόχρονα αντιδιαμετρικά του παραπάνω κύκλου. Άρα είναι συμμετρικά και ως προς το κέντρο Κ, δηλαδή έχουν την ίδια τετμημένη x=–2 με το κέντρο. Συνεπώς οι εικόνες τους είναι οι λύσεις του συστήματος:

$$\begin{cases} x=-2 \\ (x+2)^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=\pm 1 \end{cases}$$

Άρα οι αριθμοί $z,\bar{z}$ που επιτυγχάνουν τη μέγιστη τιμή του $|z-\bar{z}|$ είναι οι $-2+i$, $-2-i$ ή αντίστροφα με εικόνες τα σημεία Α(-2,1) και Β(-2-1).



β΄ τρόπος:

Είναι $|z-\bar{z}|=|2yi|=2|y|=2\rho=2 \Leftrightarrow |y|=1 \Leftrightarrow y=\pm1$.

Τότε $(x+2)^2+y^2=1 \Leftrightarrow (x+2)^2=0 \Leftrightarrow x=-2$, δηλ. $z=-2+i$ και $\bar{z}$=-2-i ή αντίστροφα.

B3. Αφού $|z-\bar{z}|=2$ οι αριθμοί $z,\bar{z}$ είναι αυτοί που επιτυγχάνουν τη μέγιστη τιμή του $|z-\bar{z}|$ και επειδή $\mathrm{Im}(z)>0$ από το ερώτημα Β2. προκύπτει ότι $z=-2+i$ και $\bar{z}=-2-i$.

Τότε $\left(\frac{z-\bar{z}}{2}\right)^{2013}=\left(\frac{2i}{2}\right)^{2013}=i^{2013}=i^{4\cdot503+1}=i^1=i$.

B4. Οι μιγαδικοί z βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο Κ(-2,0) και ακτίνα ρ=1 δηλαδή για το μέτρο τους ισχύει:

$$|z-(-2+0i)|=1 \Leftrightarrow |z+2|=1$$

Έχουμε: $w=2z-i \Leftrightarrow w+i=2z \Leftrightarrow w+4+i=2z+4 \Leftrightarrow w+4+i=2(z+2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow |w+4+i|=2|z+2| \Leftrightarrow |w-(-4-i)|=2\cdot1=2$$

δηλαδή οι εικόνες των w ανήκουν σε κύκλο με κέντρο Λ(-4,-1) και ακτίνα $\rho_1=2$.

Έστω τυχαίο σημείο Μ του παραπάνω κύκλου. Αυτό είναι εικόνα ενός μιγαδικού w’ και για το μιγαδικό z’ με $z'=\frac{w'+i}{2} \Leftrightarrow w'=2z'-i$ είναι

$|w'-(-4-i)|=2 \Leftrightarrow |2z'-i+4+i|=2 \Leftrightarrow |2z'+4|=2 \Leftrightarrow |z'+2|=1$.

Άρα το Μ είναι σημείο του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου, ο οποίος, επομένως, είναι ο κύκλος με κέντρο Λ(–4, –1) ακτίνα $\rho_1 = 2$.

β΄ τρόπος: Αφού $w = 2z - i \Leftrightarrow w + i = 2z \Leftrightarrow z = \dfrac{w+i}{2}$.

Άρα

$$|z+2| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{w+i}{2} + 2\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{w+i+4}{2}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|w-(-4-i)|}{2} = 1 \Leftrightarrow |w-(-4-i)| = 2$$

δηλ. οι εικόνες των w ανήκουν σε κύκλο με κέντρο Λ(-4,-1) και ακτίνα ρ_1=2.

Έχουμε $w = 2z - i \Leftrightarrow w - z = z - i \Rightarrow |w-z| = |z-i|$, δηλαδή η απόσταση των εικόνων των z και w είναι ίση με την απόσταση της εικόνας του z από την εικόνα του i, που είναι το σημείο Α(0,1).

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη θα είναι και συνεχής.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^x - 1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x'}{(e^x-1)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{1}{e^0} = 1$.

Πρέπει $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) \Leftrightarrow \ln a = 1 = \ln e \Leftrightarrow a = e$.

Για την παράγωγο στο 0 έχουμε:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{e^x-1} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - e^x + 1}{x(e^x-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x-e^x+1}{xe^x - x} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{e^x + xe^x - 1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \frac{-e^0}{e^0 + e^0 + 0\cdot e^0} = -\frac{1}{2}.$$

Γ2. **α.** $f'(x) = \left(\dfrac{x}{e^x - 1}\right)' = \dfrac{1\cdot(e^x-1) - x\cdot e^x}{(e^x-1)^2} = \dfrac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2}$, $x \neq 0$.

Θέτω $g(x) = e^x - 1 - x\cdot e^x$.

Τότε $g'(x) = e^x - e^x - x\cdot e^x = -xe^x$

Αν $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Το πρόσημο και η μονοτονία των $g(x)$ και $f(x)$ φαίνονται στο παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	
		$-$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$		$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\searrow$	

Αφού η $g(x)$ παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0=0$, το $g(0)=0$, θα είναι αρνητική για $x \neq 0$.
Άρα η $f'(x)$ είναι αρνητική για κάθε $x \in \mathbb{R}$ δηλ. $f \downarrow \mathbb{R}$.

β. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x-1} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x)'}{(e^x-1)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Άρα η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=0$ (άξονας $x'x$).

Ακόμη $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{e^x-1} = \dfrac{-\infty}{0-1} = +\infty$.

Άρα το σύνολο τιμών της $f(x)$ είναι $f(\mathrm{A}) = (0,+\infty)$.

Ελέγχουμε για ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\frac{x}{e^x-1}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{e^x-1} = \dfrac{1}{0-1} = -1$ και

$\left[f(x)-(-x)\right] = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(f(x)+x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left[\dfrac{x}{e^x-1}+x\right] = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+x\cdot e^x-x}{e^x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x\cdot e^x}{e^x-1}$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\cdot e^x\right) \overset{(-\infty)\cdot 0}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{e^{-x}} \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{-e^{-x}} = 0$ οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x\cdot e^x}{e^x-1} = \dfrac{0}{0-1} = 0$.

Άρα η ευθεία y=-x είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Γ3. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = 2x - \int_0^x \dfrac{1}{f(t)+1}dt - \dfrac{1}{2013}$ συνεχή στο [0, 1] σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων με $g(0) = 2\cdot 0 - \int_0^0 \dfrac{1}{f(t)+1}dt - \dfrac{1}{2013} = -\dfrac{1}{2013} < 0$

και $g(1) = 2\cdot 1 - \int_0^1 \dfrac{1}{f(t)+1}dt - \dfrac{1}{2013}$.

Όμως $f(t)>0$ οπότε $f(t)+1>1$ δηλ. $0<\dfrac{1}{f(t)+1}<1$.

Άρα $\int_0^1 0\cdot dt<\int_0^1 \dfrac{1}{f(t)+1}dt<\int_0^1 1\cdot dt \Leftrightarrow 0<\int_0^1 \dfrac{1}{f(t)+1}dt<1(1-0)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 0<\int_0^1 \frac{1}{f(t)+1}<1.$$

Άρα $g(1)>0$ οπότε από το θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της $g(x)=0$ στο $(0,1)$.
Η ρίζα είναι μοναδική γιατί η $g(x) \uparrow$ $[0,1]$ αφού:

$$g'(x)=2-\frac{1}{f(x)+1}>0 \text{ αφού } 0<\frac{1}{f(x)+1}<1.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Επειδή για την παραγωγίσιμη $f(x)$ στο $[0,+\infty)$ ισχύει $f'(x)>0$ θα είναι $f(x)$ γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, οπότε για κάθε $x>0$ έχουμε $f(x)>f(0)=1>0$.

Άρα για $x>0$ θα είναι $\int_0^x f(t)dt>0 \Leftrightarrow F(x)>0$. Για $x=0$ θα είναι $F(0)=\int_0^0 f(t)dt=0$, δηλαδή $F(x)\geq 0$ για κάθε $x\geq 0$.

Για να δείξουμε ότι $G(x)\geq x$ για κάθε $x\geq 0$ κάνουμε τα εξής:

α΄ τρόπος: Θεωρούμε την συνάρτηση $K(x)=G(x)-x$, παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$, σαν διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $K'(x)=G'(x)-1>0$.
Άρα $K(x) \uparrow$ $[0,+\infty)$, δηλαδή $K(x)>K(0)=0$ για $x>0$.
Είναι $K(0)=G(0)-0=0$.
Άρα για κάθε $x\in[0,+\infty)$ ισχύει $K(x)\geq 0 \Leftrightarrow G(x)-x\geq 0 \Leftrightarrow G(x)\geq x$.

β΄ τρόπος: Αν $x=0$ τότε $G(0)=0$ δηλαδή ισχύει σαν ισότητα.
Αν $x>0$, τότε ορίζεται διάστημα $[0,x]$, στο οποίο η συνάρτηση $K(t)=G(t)-t$ είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη (διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων) και K(x) παραγωγίσιμη στο $(0,x)$ με $K'(t)=G'(t)-1>0$. Άρα από Θ.Μ.Τ. του διαφορικού λογισμού υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,x)$, τέτοιο ώστε, $K'(\xi)=\dfrac{K(x)-K(0)}{x-0}\Leftrightarrow K'(\xi)=\dfrac{K(x)}{x}$.

Όμως για $\xi>0$ είναι $K'(\xi)>0 \Leftrightarrow \dfrac{K(x)}{x}>0 \Leftrightarrow K(x)>0 \Leftrightarrow G(x)-x>0 \Leftrightarrow G(x)>x$.

Άρα για κάθε $x\in[0,+\infty)$ ισχύει $K(x)\geq 0 \Leftrightarrow G(x)-x\geq 0 \Leftrightarrow G(x)\geq x$.

γ΄ τρόπος: Αφού G δύο φορές παραγωγίσιμη θα είναι G' συνεχής οπότε:
για κάθε $t>0$ ισχύει:

$$G'(t)>1 \Leftrightarrow G'(t)-1>0.$$

Άρα για $x>0$ θα είναι $\int_0^x \left(G'(t)-1\right)dt>0 \Leftrightarrow \left[G(t)-t\right]_0^x>0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(G(x)-x\right)-\left(G(0)-0\right)>0 \Leftrightarrow G(x)>x.$$

Για x=0 ισχύει προφανώς σαν ισότητα. Άρα $G(x)\ge x$ για κάθε $x\ge 0$.

Δ2. Γνωρίζουμε ότι η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $[0,+\infty]$ οπότε η συνάρτηση $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ θα είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής. Δηλαδή $\lim\limits_{x\to 0}F(x)=F(0)=0$.

Άρα $$\lim_{x\to 0}\left[F(x)\cdot \ln x\right] \overset{0\cdot(-\infty)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{F(x)}} \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{F'(x)}{F^2(x)}} = \lim_{x\to 0}\frac{-F^2(x)}{x\cdot F'(x)} =$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-F^2(x)}{x\cdot f(x)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{F^2(x)}{x}\cdot\frac{-1}{f(x)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{F^2(x)}{x}\right)\cdot \lim_{x\to 0}\left(\frac{-1}{f(x)}\right) \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2F(x)\cdot F'(x)}{1}\cdot\left(\frac{-1}{f(0)}\right) = 2F(0)\cdot f(0)\cdot(-1)=0.$$

Η σχέση $f(\xi)\ln\xi+\dfrac{F(\xi)}{\xi}=0$ γράφεται για $\xi=x$:

$$f(x)\ln x+\frac{F(x)}{x}=0 \Leftrightarrow \left(F(x)\cdot\ln x\right)'=0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $H(x)=\begin{cases}F(x)\ln x, & 0<x\le 1\\ 0, & x=0\end{cases}$ που είναι συνεχής στο $[0,1]$ αφού είναι γινόμενο συνεχών στο $(0,1]$ και $\lim\limits_{x\to 0}H(x)=0=H(0)$. Ακόμη είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ σαν γινόμενο παραγωγίσιμων και είναι $H(0)=0=H(1)$ αφού $\ln 1=0$.

Άρα από το θεώρημα του Rolle για την H(x) θα υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε $H'(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)\ln\xi+\dfrac{F(\xi)}{\xi}=0$.

Δ3. **α.** Έχουμε για κάθε $x\ge 0$:

$$f'(x)F(x)+f^2(x) = G''(x)\left[G(x)-x\right]+\left[G'(x)-1\right]^2 \Leftrightarrow$$

$$f'(x)F(x)+f(x)\cdot F'(x)=\left(G'(x)-1\right)'\cdot\left[G(x)-x\right]+\left[G'(x)-1\right]\cdot\left[G(x)-x\right]' \Leftrightarrow$$

$$\left(f(x)\cdot F(x)\right)' = \left(\left(G'(x)-1\right)\cdot\left[G(x)-x\right]\right)' \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x)\cdot F(x) = (G(x)-x)\cdot(G'(x)-1)+c\,.$$

Για x=0 έχουμε:
$$f(0)\cdot F(0) = (G(0)-0)\cdot(G'(0)-1)+c \Leftrightarrow 1\cdot 0 = 0+c \Leftrightarrow c=0.$$

Δηλαδή:
$$f(x)\cdot F(x) = (G(x)-x)\cdot(G'(x)-1) \Leftrightarrow 2f(x)\cdot F(x) = 2(G(x)-x)\cdot(G'(x)-1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2F'(x)\cdot F(x) = 2(G(x)-x)\cdot(G(x)-x)' \Leftrightarrow \left(F^2(x)\right)' = \left((G(x)-x)^2\right)' \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow F^2(x) = (G(x)-x)^2 + c.$$

Για x=0 έχουμε:
$$F^2(0) = \left(G(0)-0\right)^2 + c \Leftrightarrow 0 = 0+c \Leftrightarrow c=0$$

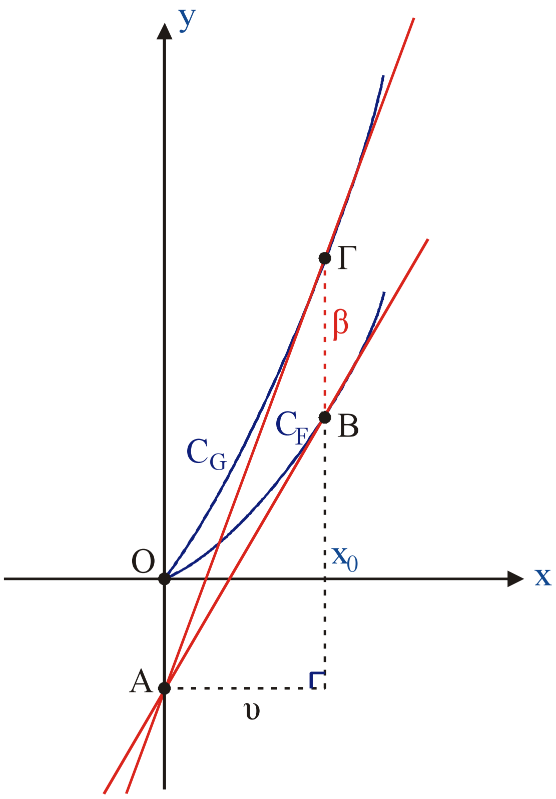
Δηλαδή $F^2(x) = (G(x)-x)^2 \Leftrightarrow F(x) = G(x)-x$, αφού είναι συνεχείς και $F(x)\geq 0$ και $G(x)\geq x$ για κάθε $x\geq 0$ από το ερώτημα Δ1.

β. Η εφαπτομένη της G_F στο $\left(x_0,\, F(x_0)\right)$ έχει εξίσωση
$$y - F(x_0) = F'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y = f(x_0)(x-x_0) + F(x_0) \qquad \textbf{(1)}$$

Η εφαπτομένη της C_G στο $(x_0, G(x_0))$ έχει εξίσωση
$$y - G(x_0) = G'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y = G'(x_0)(x-x_0) + G(x_0) \qquad \textbf{(2)}$$

Λύνοντας το (Σ) των εξισώσεων (1) και (2) έχω:
$$f(x_0)(x-x_0) + F(x_0) = G'(x_0)(x-x_0) + G(x_0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(G'(x_0)-1\right)\cdot(x-x_0) + G(x_0) - x_0 = G'(x_0)(x-x_0) + G(x_0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow G'(x_0)\cdot x - G'(x_0)\cdot x_0 - x + x_0 - x_0 = G'(x_0)\cdot x - G'(x_0)\cdot x_0 \Leftrightarrow x=0$$

δηλαδή οι εφαπτόμενες τέμνονται σε σημείο Α του άξονα $y'y$.
Επειδή για x=0 έχουμε $F(0) = G(0) - 0 \Leftrightarrow F(0) = G(0)$, τότε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις C_F, C_G και την ευθεία $x=x_0$ θα είναι
$$E = \int_0^{x_0} |F(x)-G(x)|dx = \int_0^{x_0} |-x|dx = \int_0^{x_0} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{x_0} = \frac{x_0^{\;2}}{2}.$$



Υπολογίζουμε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, χρησιμοποιώντας τον τύπο $E=\frac{1}{2}\cdot\beta\cdot\upsilon$.

Το ύψος είναι η απόσταση της κορυφής Α, που είναι το σημείο τομής των εφαπτομένων, από την πλευρά ΒΓ που είναι η ευθεία $x=x_0$. Αφού είναι σημείο του άξονα y΄y, η απόσταση θα είναι $|x_0|$.

Σαν βάση θεωρούμε την πλευρά ΒΓ, που σχηματίζουν τα σημεία Β(x_0, $F(x_0)$) και Γ(x_0, $G(x_0)$), οπότε $(\mathrm{B\Gamma})=|F(x_0)-G(x_0)|=|x_0|$

δηλαδή $E=\frac{1}{2}|x_0|\cdot|x_0|=\frac{1}{2}\cdot|x_0|^2=\frac{1}{2}x_0^{\,2}$, άρα ισχύει το ζητούμενο.

Γενικό Λύκειο Νεστορίου
Σχολικό έτος 2013-2014
Βοηθητικό Υλικό της Γ΄ Λυκείου