Μαθηματικά Γενικής Παιδείας
Γ΄ Λυκείου

Λύσεις Θεμάτων Ο.Ε.Φ.Ε.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΚΑΡΑΦΕΡΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΟΕΦΕ-2001
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

A_1 Μέτρα θέσης είναι: Διάμεσος - μέση τιμή - επικρατούσα τιμή
Μέτρα διασποράς είναι: Διακύμανση - εύρος - τυπική απόκλιση

A_2 Ορίζουμε $f_i = \dfrac{v_i}{v}$, $i = 1, 2, \dots k$

Έχουμε $f_1+f_2+ \dots +f_k = \dfrac{v_1}{v}+\dfrac{v_2}{v}+\dots+\dfrac{v_k}{v} = \dfrac{v_1+v_2+\dots+v_k}{v} = \dfrac{v}{v} = 1$

B_1 1 Α
2 Δ
3 Β

B_2 α - Λάθος
β - Λάθος
γ - Λάθος

ΘΕΜΑ 2ο

α) Είναι $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$
Το πρόσημο της $f'(x)$ φαίνεται στον πίνακα:

X	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
f'		+	**0**	–	**0**	+	

Η f έχει τοπικό μέγιστο στο $\rho_1 = -3$ και τοπικό ελάχιστο στο $\rho_2 = 1$.

β) Πρέπει $f(-3) = 3\, f(1)$
ή $27 + \alpha^2 - 4\alpha = 3\,(-5 + \alpha^2 - 4\alpha)$
ή $2\alpha^2 - 8\alpha - 42 = 0$
ή $\alpha^2 - 4\alpha - 21 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 7$ **ή** $\alpha = -3$

γ) Ο ρυθμός μεταβολής της f είναι $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$

1ος τρόπος: Το τριώνυμο $3x^2 + 6x - 9$ με $\alpha = 3 > 0$ έχει ελάχιστο για

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha} \Leftrightarrow x = -1$$

2ος τρόπος: Θα βρούμε, αν η $f'(x)$ έχει ελάχιστο.
Είναι $(f'(x))' = f''(x) = 6x + 6$
Το πρόσημο της $(f'(x))'$ είναι:

X	$-\infty$		-1		$+\infty$
$(f'(x))'$		$-$	**0**	+	

Για $x = -1$ ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος.

ΘΕΜΑ 3ο

α) Είναι: $P(A-B) = P(A) - P(A\cap B)$

ή $P(A) = P(A-B) + P(A\cap B)$

ή $P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{20} = \frac{3}{10}$

β) Είναι: $P(B'-A) = P(B') - P(B'\cap A)$

ή $P(B'-A) = 1 - P(B) - P(A-B)$

ή $\frac{1}{2} = 1 - P(B) - \frac{1}{4}$

ή $P(B) = \frac{1}{4}$

γ) Ζητούμε την πιθανότητα $P[\,(A-B) \cup (B-A)\,]$
Αφού τα ενδεχόμενα $A-B$, $B-A$ είναι ασυμβίβαστα, από τον απλό προσθετικό νόμο έχουμε:

$$\begin{aligned} P[(A-B) \cup (B-A)] &= P(A-B) + P(B-A) \\ &= \frac{1}{4} + P(B) - P(B\cap A) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{20} = \frac{9}{20} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4ο

α) Είναι $\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{\nu} = \frac{4 + 4,3 + 8,3 + 8,7 + 7,3}{5}$ = 6,52

Και $\bar{y} = \frac{\Sigma y_i}{\nu} = \frac{24 + 25 + 28 + 29 + 32}{5}$ = 27,6

β) Σε κάθε αύξηση του αριθμού των ανέργων κατά 1 εκατοντάδα χιλιάδες = 100.000, ο αριθμός των ανέργων ευξάνεται κατά $\hat{\beta}$ εκατοντάδες.

Άρα $\hat{\beta}$=1,11 (111=1,11 εκατοντάδες).

Ακόμα, το σημείο $(\bar{x}, \bar{y})$ επαληθεύει την $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$

΄Αρα 27,6 = $\hat{\alpha}$ + 1,11 · 6,52 ή $\hat{\alpha}$ = 20,3628

Οπότε $\hat{y}$ = 20,3628 + 1,11x

γ) Είναι 7,3 + 7,3·10% = 8,03

Η τιμή x = 8,03 ανήκει στο διάστημα τιμών [4, 8, 7] της X, οπότε η πρόβλεψη είναι εφικτή.

$$\hat{y} = 20,3628 + 1,11 \cdot 8,03 \cong 29,27$$

Άρα ο αριθμός των εγκληματικών ενεργειών το 1998 εκτιμάται σε 29,27 εκατοντάδες = 2.927

δ) Η εκτίμηση αυτή δεν είναι δυνατόν να γίνει, γιατί με την $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$ γίνεται εκτίμηση μόνο της τιμής της Y από την τιμή της X.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1ο (θεωρία)

ΘΕΜΑ 2ο

Είναι $\varphi(x) = f(g(x))$, $g(x) = \ln x + x$

$$\varphi'(x) = f'(g(x))\, g'(x),\quad g'(x) = \frac{1}{x} + 1$$

α) Για x=1 προκύπτουν: $g(1) = \varphi(1) = 1$, $g'(1) = \varphi'(1) = 2$

β) $g'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$ στο $\Delta = (0, +\infty)$ και η $g(x)$ δεν έχει α-κρότατα.

γ) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\ln(h+1)+(h+1)-g(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{g(h+1)-g(1)}{h} = g'(1) = 2$

δ) ε_1: $y = \varphi'(1)x+\beta$ ή $y = 2x+\beta$ και επειδή επαληθεύεαι από τις συντεταγμένες του Α είναι $\beta=-1$, άρα ε_1: $y = 2x - 1$.

Όμοια ε_2: $y = x$ με γωνία $\omega=45^{o}$

ΘΕΜΑ 3ο.

α) Είναι

$$f(\alpha_3) = \frac{4\lambda}{31} = \frac{4}{31} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{31}.$$

$$\sum_{i=1}^{\kappa} f(\alpha_i) = 1 \Leftrightarrow \lambda(1+2+2^2+\ldots+2^{\kappa-1}) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{31}(2^{\kappa}-1) = 1 \Leftrightarrow 2^{\kappa} = 32 \Leftrightarrow \kappa = 5$$

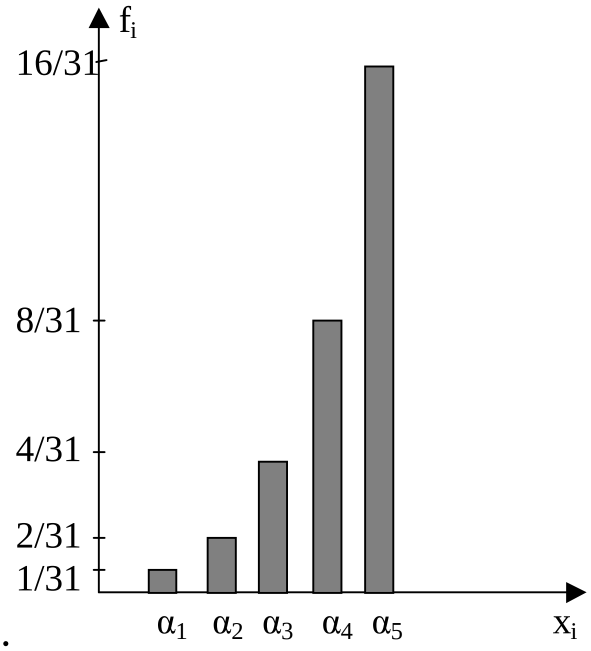
β) P(A)= $f(\alpha_4)=\dfrac{8}{31}$

P(B)= $f(\alpha_4)+f(\alpha_5)=24/31$

P(Γ)=$1-f(\alpha_1)=1-\dfrac{1}{31}=\dfrac{30}{31}$

γ) $f(\alpha_4)=\dfrac{16}{31}\Leftrightarrow\dfrac{160}{\nu}=\dfrac{16}{31}\Leftrightarrow\nu=310$

δ)



$M_o = \alpha_5$ κ.λ.π

ΘΕΜΑ 4ο.

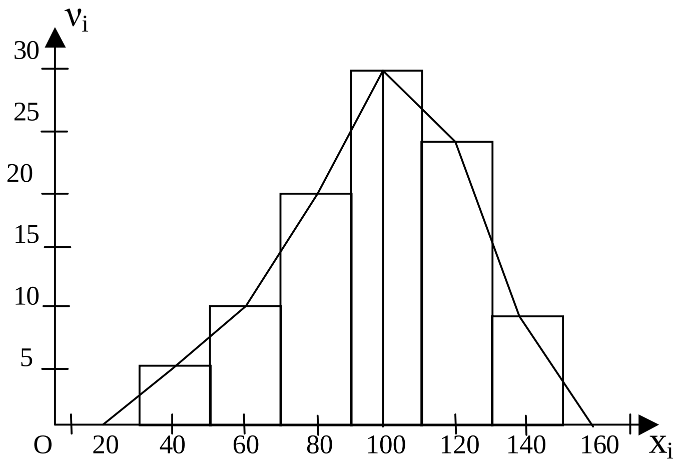
Είναι γνωστό ότι

- τα εμβαδά των ιστίων είναι ίσα με τις συχνότητες των α-ντίστοιχων κλάσεων.
- το εμβαδό του χωρίου που σχηματίζει το πολύγωνο συ-χνοτήτων με τον οριζόντιο άξονα δίνει το μέγεθος του δείγματος.

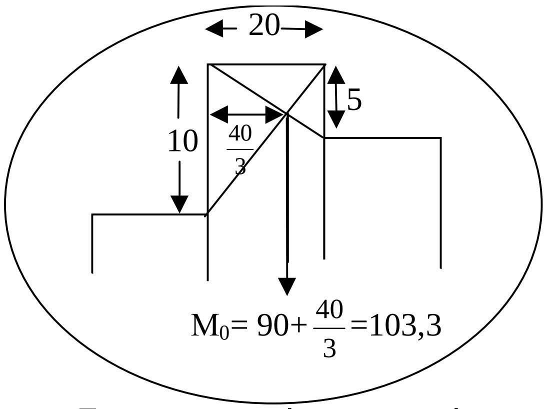
α) Επειδή το 100 είναι το κέντρο της κλάσης [90, 110) έχουμε:

$$5+10+20 = \nu_5+10 \Leftrightarrow \nu_5 = 25,$$

β) $\nu = 5+10+20+30+25+10 = 100$



γ) $\delta=100$



Επικρατούσα τιμή

$$\bar{x} = \frac{40\cdot 5+60\cdot 10+80\cdot 15+100\cdot 30+120\cdot 25+140\cdot 10}{100} = 94$$

δ) Το διάστημα [70, 90) περιλαμβάνει το 15% του δείγματος, έτσι στην περιοχή 70-72 περιλαμβάνεται το $\frac{2 \cdot 15}{20}\% = 1{,}5\%$ και το ζητούμενο ποσοστό είναι (5+10+1,5)% = 16,5% (ή με πολύγωνο σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων)

ε) Η κατανομή παρουσιάζει αριστερή ασυμμετρία.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2003

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΖΗΤΗΜΑ 1ο

Α. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 151
Β. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 85
Γ. 1. $n_i = f_i\% \Rightarrow n_i = \frac{n_i}{n}100 \Rightarrow 1 = \frac{100}{n} \Rightarrow n = 100$

2. Ξέρουμε (σχολικό βιβλίο, σελίδα 96) ότι $CV = \frac{s}{\bar{x}}$. Όμως
$\bar{x} = \frac{(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+3}{7} = \frac{0}{7} = 0$.
Επομένως ο συντελεστής μεταβλητότητας δεν ορίζεται.
3. Από την εφαρμογή του σχολικού βιβλίου, σελίδα 99,
προκύπτει: $\bar{x}' = a \cdot \bar{x} + b$, $s' = |a| \cdot s$.
4. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 70: $a_i = n_i \frac{360^0}{n} = 360 f_i$

Δ. Η ζητούμενη μέση επίδοση είναι ο ακόλουθος σταθμικός μέσος:
$$\frac{16\cdot 8+15\cdot 1,3+17\cdot 0,7}{8+1,3+0,7} = \frac{128+19,5+11,9}{10} = \frac{159,4}{10} = 15,94$$

Ε. Ξέρουμε (σχολικό βιβλίο, σελίδες 27, 28) ότι, αν u η ταχύτητα και α η επιτάχυνση του κινητού, τότε $u(t) = x'(t)$ και $a(t) = u'(t) = x''(t)$. Άρα, στη συγκεκριμένη περίπτωση, θα είναι: $u(t) = x'(t) = -t^2 - t - 1$ και $a(t) = x''(t) = u'(t) = -2t - 1$ και επειδή $t \geq 0$, θα είναι $a(t) < 0$. Επομένως, η ταχύτητα του φορτηγού μειώνεται.

ΖΗΤΗΜΑ 2ο

1. Έστω x, y οι δύο ζητούμενες (εκατοστιαίες) σχετικές συχνότητες των κλάσεων [4,6) και [16,18) αντίστοιχα. Ξέρουμε ότι $\sum f_i\% = 100$ και παρατηρούμε ότι το άθροισμα των δοσμένων σχετικών συχνοτήτων είναι 85. Άρα θα ισχύει $x + y = 100 - 85 = 15$. Εξάλλου, από υπόθεση, έχουμε ότι $y = 4x$. Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $x = 3$, $y = 12$. Άρα οι ζητούμενες σχετικές συχνότητες είναι 3% και 12% αντίστοιχα.
2. Αθροίζοντας τις δοσμένες σχετικές συχνότητες του πίνακα, βλέπουμε ότι βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 10 έχει πάρει το (16+14+13+12+5)%=60% των υποψηφίων. Από υπόθεση, αυτό το ποσοστό αντιστοιχεί σε πλήθος 55872 ατόμων. Άρα, το ζητούμενο συνολικό πλήθος των υποψηφίων θα είναι: $55872\frac{100}{60} = 93120$ υποψήφιοι.

3. Από τον πίνακα βλέπουμε ότι, βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 11 και μικρότερο του 13, έχει πάρει το $(\frac{16}{2}+\frac{14}{2})\% = 15\%$ των υποψηφίων. Άρα, το ζητούμενο πλήθος είναι το 15% του συνόλου, δηλαδή $\frac{15}{100}93120 = 13968$ υποψήφιοι.
4. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα Α: «ο υποψήφιος είναι της θεωρητικής κατεύθυνσης», Β: «ο υποψήφιος είναι της θετικής κατεύθυνσης» και « Τ: «ο υποψήφιος είναι της τεχνολογικής κατεύθυνσης». Αναζητούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου «ο μαθητής προέρχεται, είτε από τη θεωρητική, είτε από την τεχνολογική κατεύθυνση», δηλαδή την Ρ(Α∪Τ). Από υπόθεση είναι Ρ(Α)=0,34 και Ρ(Τ)=2Ρ(Β). Εξάλλου, γνωρίζουμε ότι Ρ(Α)+Ρ(Β)+Ρ(Τ)=1. Άρα έχουμε: $0,34 + P(B) + 2P(B) = 1 \Leftrightarrow 3P(B) = 0,66 \Leftrightarrow P(B) = \frac{0,66}{3} \Leftrightarrow P(B) = 0,22$ Επομένως είναι $P(T) = 2P(B) = 0,44$. Τα ενδεχόμενα Α και Τ είναι ασυμβίβαστα, αφού κάθε μαθητής μπορεί να έχει επιλέξει μόνο μία κατεύθυνση σπουδών. Με εφαρμογή του απλού προσθετικού νόμου, έχουμε: $P(A \cup T) = P(A) + P(T) = 0,34 + 0,44 = 0,78$. Το πλήθος των υποψηφίων της θετικής κατεύθυνσης είναι $0,22 \cdot 93120 = 20486,4 \approx 20486$ υποψήφιοι.

ΖΗΤΗΜΑ 3ο

1. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα Κ: «το νόμισμα έφερε κεφάλι» και Γ: «το νόμισμα έφερε γράμματα». Με δεντροδιάγραμμα, βρίσκουμε το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος τύχης: Ω={ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ}. Το ενδεχόμενο Α: «να φέρουμε τουλάχιστον μία φορά κεφάλι» είναι το Α={ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ}. Άρα, για την πιθανότητα να συμβεί το Α, έχουμε:. $\frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{4}$
2. Κατ` αρχάς, αντικαθιστούμε στον πίνακα (στις τιμές της μεταβλητής y_i) τις τιμές των Ρ(Α)=3/4, Ρ(Α')=1-3/4=1/4 και Ρ(Ω)=1 οπότε ο πίνακας συχνοτήτων γίνεται:

Τιμές μεταβλητής y_i	Απόλυτες συχνότητες n_i
$\frac{3}{2}x^2$	3
$\frac{3}{4}x^2$	2
x	3

α. Από τον ορισμό της μέσης τιμής έχουμε:

$$\bar{y} = \frac{\frac{3}{2}x^2 \cdot 3 + \frac{3}{4}x^2 \cdot 2 + 3x}{8} = \frac{\frac{24}{4}x^2 + 3x}{8} = \frac{6x^2 + 3x}{8}$$

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{\bar{y}} = \frac{1}{\frac{6x^2 + 3x}{8}} = \frac{8}{6x^2 + 3x}, \ x \in R - \left\{0, -\frac{1}{2}\right\}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της (ως ρητή συνάρτηση) και η παράγωγός της δίνεται από τον τύπο:

$$f'(x) = -8 \cdot \frac{12x+3}{(6x^2+3x)^2}$$

Τώρα έχουμε: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x+3=0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{12} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$ και

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -8 \cdot (12x+3) \geq 0 \Leftrightarrow 12x+3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{4}.$$

Άρα έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:

x	-1/2		-1/4		0
$f'(x)$	+	+	0	-	-
$f(x)$	↗	↗	Τ.Μ	↘	↘

Επομένως, η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, για $x = -\frac{1}{4}$, το

$$f(-\frac{1}{4}) = \frac{8}{6\cdot(-\frac{1}{4})^2 + 3\cdot(-\frac{1}{4})} = \frac{8}{\frac{6}{16}-\frac{3}{4}} = \frac{8}{\frac{3}{8}-\frac{3}{4}} = \frac{8}{-\frac{3}{8}} = -\frac{64}{3}$$

ΖΗΤΗΜΑ 4ο

1. $f'(x) = [(P(A))^2 x^3 - (7P(A)-3)x - x\ln x + P(B)]' =$
   $= 3\cdot[P(A)]^2 x^2 - 7P(A) + 3 - \ln x - 1$
2. Από υπόθεση έχουμε $f'(1)=0$, οπότε προκύπτει η δευτεροβάθμια εξίσωση: $3\cdot[P(A)]^2 - 7\cdot P(A) + 2 = 0$. Έχουμε Δ=25 και, τελικά,
   $$P(A) = \begin{cases} \frac{7+5}{6} = \frac{12}{6} = 2 \text{ , απορ. αφου } 0 \leq P(A) \leq 1 \\ \frac{7-5}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ , δεκτη τιμη} \end{cases}$$
   . Άρα, τελικά, $P(A) = \frac{1}{3}$.
3. Για $P(A) = \frac{1}{3}$, ο τύπος της συνάρτησης γίνεται
   $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - (\frac{7}{3}-3)x - x\ln x + P(B) = \frac{1}{9}x^3 + \frac{2}{3}x - x\ln x + P(B)$, οπότε
   $f(1) = \frac{1}{9} + \frac{2}{3} + P(B)$ (αφού ln1=0). Όμως, από υπόθεση, $f(1) = \frac{55}{36}$, άρα έχουμε:
   $\frac{1}{9} + \frac{2}{3} + P(B) = \frac{55}{36} \Leftrightarrow \frac{4}{36} + \frac{24}{36} + P(B) = \frac{55}{36} \Leftrightarrow P(B) = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$. Έστω ότι τα Α, Β είναι ασυμβίβαστα. Τότε θα ισχύει $P(A\cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{13}{12} > 1$, άτοπο, αφού $0 \leq P(A\cup B) \leq 1$. Άρα τα Α, Β δεν είναι ασυμβίβαστα.

4. $\frac{1}{12} \le P(A \cap B) \le \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} P(A \cap B) \le \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(A \cap B) \le P(A) \text{ , ισχυει αφου } \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \subseteq \mathrm{A} \\ \text{ΚΑΙ} \\ P(A \cap B) \ge \frac{1}{12} \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cup B) \ge \frac{1}{12} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{13}{12} - P(A \cup B) \ge \frac{1}{12} \Leftrightarrow P(A \cup B) \le 1 \text{ , που ισχυει} \end{cases}$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2004

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 31. Η παράγωγος αθροίσματος.
β. 1Λ
2Σ
3Λ
4Λ
γ. $\overline{x'} = -2\,\overline{x} = -8$
$R' = \max' - \min' = -2\min + 2\max = 2(\max - \min) = 2R = 20$
$s' = |c|s = 2s = 4$
δ. Σχολικό βιβλίο σελίδα 33. (ο σχετικός πίνακας).

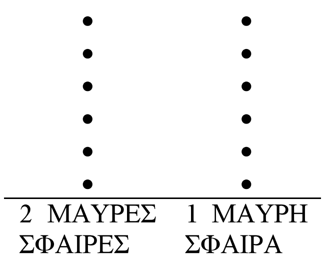
ΘΕΜΑ 2ο
α. Με το πίνακα διπλής εισόδου ή το δεντροδιάγραμμα του πειράματος βρίσκουμε
$\Omega=\{KM_1, KM_2, KM_3, M_1K, M_1M_2, M_1M_3, M_2K, M_2M_1, M_2M_3, M_3K, M_3M_1, M_3M_2\}$
β. $A=\{M_1M_2, M_1M_3, M_2M_1, M_2M_3, M_3M_1, M_3M_2\}$
$B=\{KM_1,\ KM_2,\ KM_3,\ M_1K,\ M_2K,\ M_3K\}$
$\Gamma = \{\ \}$

γ. Επειδή η αφαίρεση των σφαιρών γίνεται τυχαία (δες σελίδα 150 Σχόλιο), τα απλά ενδεχόμενα του Ω είναι ισοπίθανα, οπότε από τον κλασικό ορισμό των πιθανοτήτων έχουμε**:**

$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{6}{12}=0{,}5$

$P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{6}{12}=0{,}5$ και $P(\Gamma)=P(\varnothing)=0$

δ.



ΘΕΜΑ 3ο

Α. Έχουμε: $f'(x) = (2x^2-2x+1)' = 4x-2$ και
$f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x-2=0 \Leftrightarrow x=1/2$
$f'(x)>0 \Leftrightarrow 4x-2>0 \Leftrightarrow x>1/2$
$f'(x)<0 \Leftrightarrow 4x-2<0 \Leftrightarrow x<1/2$
Επομένως, (κριτήριο $1^{ης}$ παραγώγου) η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $\mathbb{R}$ για $x_o=1/2$ το

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\left(\frac{1}{2}\right)+1=\frac{1}{2}$$

Β. ***α***) Έχουμε $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} t_i}{4} = \dfrac{P(A)+P(A')+P(\varnothing)+P(\Omega)}{4} = \dfrac{1+0+1}{4} = \dfrac{1}{2}$.

Διατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά Είναι

$P(\varnothing)=0,\quad P(A),\quad P(A'),\quad P(\Omega)=1$ ή $P(\varnothing)=0,\quad P(A'),\quad P(A),\quad P(\Omega)=1$

Σε κάθε περίπτωση η διάμεσος , ως το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, ισούται με

$$\delta = \frac{P(A)+P(A')}{2} = \frac{1}{2}$$

β) Είναι $s^2 = \dfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\left(t_i - \bar{x}\right)^2$

$$= \frac{1}{4}\left[(P(A)-\frac{1}{2})^2 + (P(A')-\frac{1}{2})^2 + (P(0)-\frac{1}{2})^2 + (P(\Omega)-\frac{1}{2})^2\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[(P(A)-\frac{1}{2})^2 + (1-P(A')-\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2})^2 + (1-\frac{1}{2})^2\right]$$

$$= \ldots\ldots\frac{1}{4}\left[2P^2(A)-2P(A)+1\right]$$

γ. Είναι $s^2 = \dfrac{1}{4} f\ (P(A))$

Από το α ερώτημα έχουμε: $s^2 \geq \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow s \geq \dfrac{1}{\sqrt{8}}$ και η ισότητα ισχύει όταν P(A)=1/2. Έτσι,

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{s}{\frac{1}{2}} \geq \frac{\frac{1}{\sqrt{8}}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ώστε, είναι $CV \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ και η ισότητα ισχύει, όταν P(A)=1/2, που δίνει P(A') = 1–P(A) = ½, δηλαδή, ισοδύναμα, όταν P(A)=P(A')

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Έστω, x η συχνότητα της πρώτης κλάσης και y της τρίτης κλάσης. Για τα κέντρα και τις συχνότητες των κλάσεων έχουμε:

x_i	v_i
–3	x
–1	3x
1	y
3	5x
ΣΥΝΟΛΟ	9x+y

Είναι: $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x_i\ v_i}{v} = \dfrac{-3x-3x+y+15x}{9x+y} = \dfrac{9x+y}{9x+y} = 1$

Β. α) Με $\nu = x$, από τον τύπο $f_i\% = \frac{\nu_i}{\nu}100\%$ βρίσκουμε

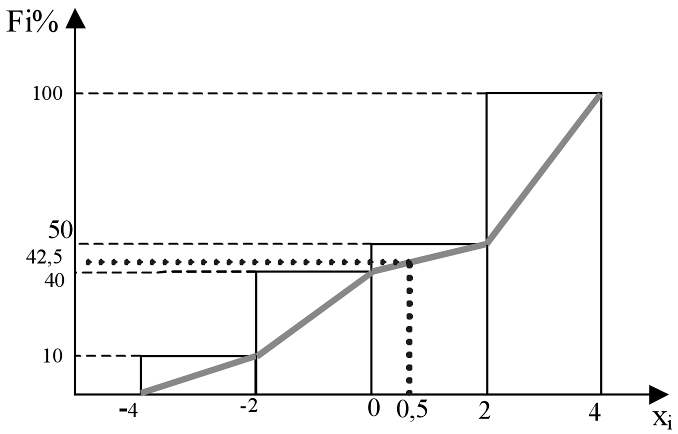
$f_1\% = \frac{x}{10x}100\% = 10\%$

$f_2\% = \frac{3x}{10x}100\% = 30\%$

$f_3\% = \frac{x}{10x}100\% = 10\%$

$f_4\% = \frac{5x}{10x}100\% = 50\%$

Έτσι, συμπληρώνουμε την τέταρτη στήλη του δοσμένου πίνακα. Το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων και το ζητούμενο πολύγωνο φαίνονται στο επόμενο σχήμα.



β) Η διάμεσος αντιστοιχεί στην παρατήρηση, που έχει αθροιστική συχνότητα 50%. Έτσι, είναι η τετμημένη του σημείου του πολυγώνου των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, που έχει τεταγμένη 50. Βρίσκουμε δ=2^0C.

γ) Το ποσοστό των ψυγείων με θερμοκρασία μικρότερη ή ίση της τιμής $0{,}5^0$C είναι η αθροιστική συχνότητα της τιμής $0{,}5^0$C. Από το σχήμα του Βα ερωτήματος το εκτιμάμε σε 42,5%. Επομένως το $(100-42{,}5)\% = 57{,}5\%$ των ψυγείων έχει θερμοκρασία μεγαλύτερη από $0{,}5^0$C.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1ο Θέμα

Α. i) Σχολ. βιβλίο σελ. 16

ii) Σχολ. βιβλίο σελ. 13

Β. Σχολικό βιβλίο σελ. 65

Γ. 1 (Λ), 2 (Σ), αφού για i=5, είναι $N_5 = v \Leftrightarrow v = 4\cdot 5^2 + 2\cdot 5 = 110$

3 (Λ), 4 (Σ), 5 (Λ)

2ο Θέμα

α) Για $x \neq 4$ είναι:

$$F(x) = \frac{(\bar{t}-2s)(x-4)}{\sqrt{x}-2} = \frac{(\bar{t}-2s)(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{(\bar{t}-2s)(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x})^2-2^2} =$$

$$= \frac{(\bar{t}-2s)(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} = (\bar{t}-2s)(\sqrt{x}+2)$$

β) Η F είναι συνεχής, οπότε

$$\lim_{x\to 4} F(x) = F(4) \underset{\kappa΄\ \upsilon\pi o\theta.}{\overset{\alpha.\ \varepsilon\rho\omega\tau.}{\Leftrightarrow}} \lim_{x\to 4}(\bar{t}-2s)(\sqrt{x}+2) = -24\cdot s$$

$$\Leftrightarrow (\bar{t}-2s)(\sqrt{4}+2) = -24\cdot s$$

$$\Leftrightarrow \bar{t}-2s = -6\cdot s$$

$$\Leftrightarrow \bar{t} = -4\cdot s \qquad (\text{ είναι } s > 0, \text{ άρα } \bar{t} < 0 \text{ })$$

$$\Leftrightarrow \frac{s}{-\bar{t}} = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{s}{|\bar{t}|} = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow CV = 0{,}25 = 25\%.$$

Επομένως, το δείγμα των τιμών t_1, t_2,..., t_{100} της μεταβλητής Τ δεν είναι ομοιογενές.

γ) Η g ορίζεται στο $[0,+\infty)$ αφού $\overline{t}-2s \overset{\beta.\epsilon\rho\omega\tau.}{=} -4\cdot s-2\cdot s=-6\cdot s\neq 0$ (από υπόθεση)

Για χ≠4 είναι

$$g(x)=\frac{F(x)}{\overline{t}-2s}\overset{\alpha.\epsilon\rho\omega\tau.}{=}\frac{(\overline{t}-2s)(\sqrt{x}+2)}{\overline{t}-2s}=\sqrt{x}+2$$

και

$$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},$$

οπότε έχουμε

$$g\left(\frac{1}{4}\right)=\sqrt{\frac{1}{4}}+2=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2} \quad \text{και} \quad g'\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}}=1 \quad (1).$$

Η εφαπτομένη (ε): $y=\lambda x+\beta$ στο Α έχει $\lambda = g'\left(\frac{1}{4}\right)$, έτσι γίνεται:

$$y=g'\left(\frac{1}{4}\right)x+\beta \overset{(1)}{\Leftrightarrow} y=x+\beta.$$

Επειδή το $A\left(\frac{1}{4},g\left(\frac{1}{4}\right)\right)$ ανήκει στην (ε): y=x+β, είναι $\frac{5}{2}=\frac{1}{4}+\beta \Leftrightarrow \beta=\frac{9}{4}$,

επομένως

$$(\varepsilon):\ y=x+\frac{9}{4}$$

3ο Θέμα

α) Το ποσοστό των αυτοκινήτων με κυβισμό μικρότερο από 1.400κ.εκ. είναι

$$\frac{100}{4.000}\cdot 100\%=2{,}5\%.$$

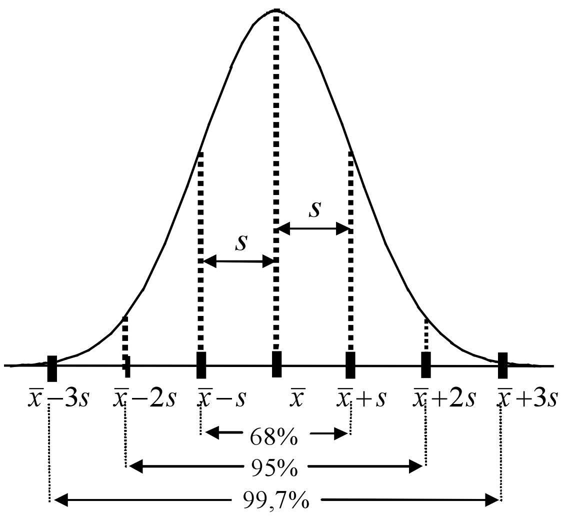
Όμως $2{,}5\%=\frac{100\%-95\%}{2}$ είναι το ποσοστό των αυτοκινήτων με κυβισμό μικρότερο από $\overline{x}-2s$.

Άρα

$$\overline{x}-2s=1.400 \quad (1)$$

Το ποσοστό των αυτοκινήτων με κυβισμό μικρότερο από 2.000κ.εκ. είναι

$$\frac{3.360}{4.000}\cdot 100\%=84\%.$$



Όμως $84\% = 100\% - \frac{100\% - 68\%}{2}$ είναι το ποσοστό των αυτοκινήτων με κυβισμό μικρότερο από $\bar{x} + s$.

Άρα

$$\bar{x} + s = 2000 \quad (2)$$

Οι σχέσεις (1), (2) δίνουν το σύστημα

$$\begin{cases} \bar{x} - 2s = 1400 \\ \bar{x} + s = 2000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 200 \\ \bar{x} = 1800 \end{cases}.$$

Ώστε: $\bar{x} = 1.800$κ.εκ., $s = 200$κ.εκ. και, τέλος, $R \cong 6 \cdot s = 1.200$κ.εκ..

β) Έστω τα ενδεχόμενα:

Α: το αυτοκίνητο έχει κινητήρα με κυβισμό μικρότερο από 1.200κ.εκ.

Β: το αυτοκίνητο έχει κινητήρα με κυβισμό μεγαλύτερο από 2.000κ.εκ.

Ζητάμε την πιθανότητα $P(A \cup B)$

Το ποσοστό των αυτοκινήτων με κυβισμό μικρότερο από $1200\text{κ.εκ.} = \bar{x} - 3s$ είναι $\frac{100\% - 99,7\%}{2} = 0,15\%$ ενώ αυτό των αυτοκινήτων με κυβισμό μεγαλύτερο από $2000\text{κ.εκ.} = \bar{x} + s$ είναι $\frac{100\% - 68\%}{2} = 16\%$. Επομένως

$$P(A)=0,15\% \quad \text{και} \quad P(B)=16\%$$

Επειδή, προφανώς, τα ενδεχόμενα Α, Β είναι ασυμβίβαστα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,15\% + 16\% = 16,15\%$$

γ) Έστω y_i, i=1,2,3,…,4000, ο κυβισμός των κινητήρων μετά την επισκευή.

Είναι $y_i = x_i + 0,06x_i = 1,06\, x_i$, i=1,2,3,…,4000, οπότε (βλέπε εφαρμογή 3 σελίδα 99 σχολικού βιβλίου)

$$\bar{y} = 1,06\bar{x} = 1,06 \cdot 1800 = 1908\text{κ.εκ}$$

και

$$s_y = 1,06 s_x = 1,06 \cdot 200 = 212\text{κ.εκ.}$$

άρα

$$s_y^2 = 212^2 = 44944\ (\text{κ.εκ})^2.$$

Το εύρος των νέων τιμών βρίσκεται ως εξής: Αν μ_x, M_x είναι η μικρότερη και η μεγαλύτερη αντίστοιχα από τις τιμές x_i, i=1,2,3,…,4000, τότε έχουμε διαδοχικά:

$$\mu_x \le x_i \le M_x$$

$$1,06\, \mu_x \le 1,06 x_i \le 1,06 M_x$$

$$1,06\, \mu_x \le y_i \le 1,06 M_x \quad \text{για κάθε } i=1,2,3,\dots,4000$$

Έτσι, η μικρότερη μ_y και η μεγαλύτερη M_y από τις τιμές y_i, i=1,2,3,…,4000, είναι

$$\mu_y = 1{,}06\ \mu_x$$
$$M_y = 1{,}06 M_x$$

και το εύρος R_y είναι:

$$R_y = M_y - \mu_y = 1{,}06M_x - 1{,}06\mu_x = 1{,}06(M_x - \mu_x) = 1{,}06R \cong 1{,}06\cdot 1200 = 1272 \text{ κ.εκ.}$$

4^o Θέμα

α) i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική) με

$$f'(x) = -\left[x - P(\Lambda)\right] + P(K) = P(\Lambda) + P(K) - x.$$

Είναι

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow P(\Lambda) + P(K) - x = 0 \Leftrightarrow x = P(\Lambda) + P(K).$$

Ακόμα:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow P(\Lambda) + P(K) - x > 0 \Leftrightarrow x < P(\Lambda) + P(K) \text{ και}$$
$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow P(\Lambda) + P(K) - x < 0 \Leftrightarrow x > P(\Lambda) + P(K)$$

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, P(\Lambda)+P(K)]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[P(\Lambda)+P(K), +\infty)$, και παρουσιάζει μέγιστο στο $x=x_o$ με $x_o=P(\Lambda)+P(K)$.

i) Για την μέγιστη τιμή έχουμε:

$$f(x_0) = \frac{5}{2}\left[P(K)\right]^2 \Leftrightarrow f\big(P(K)+P(\Lambda)\big) = \frac{5}{2}\left[P(K)\right]^2 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{2}\left[P(K)+P(\Lambda)-P(\Lambda)\right]^2 + \left[P(K)+P(\Lambda)\right]P(K) = \frac{5}{2}\left[P(K)\right]^2 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{2}\left[P(K)\right]^2 + \left[P(K)\right]^2 + P(K)P(\Lambda) = \frac{5}{2}\left[P(K)\right]^2 \Leftrightarrow$$

$$P(K)P(\Lambda) = 2\left[P(K)\right]^2 \overset{P(K)\neq 0}{\Leftrightarrow} P(\Lambda) = 2P(K)$$

β) i) Ισχύουν:

$$\varnothing \subseteq K\cap\Lambda \subseteq K \quad \text{και} \quad \Lambda \subseteq K\cup\Lambda \subseteq \Omega$$

επομένως

$$P(\varnothing) \le P(K\cap\Lambda) \le P(K) \quad \text{και} \quad P(\Lambda) \le P(K\cup\Lambda) \le P(\Omega).$$

Ακόμα

$P(K) < P(\Lambda)$ (από ερώτημα (α) (ii))

Επομένως, αν διατάξουμε σε αύξουσα σειρά τις παρατηρήσεις, έχουμε:

$P(\varnothing)$, $P(\varnothing)$, $P(K\cap\Lambda)$, $P(K)$, $P(K)$, $P(K)$, $P(\Lambda)$, $P(K\cup\Lambda)$, $P(K\cup\Lambda)$, $P(\Omega)$.

Η διάμεσος αυτών των 10 παρατηρήσεων είναι το ημιάθροισμα της $5^{ης}$ και $6^{ης}$ παρατήρησης: $\delta = \dfrac{P(K)+P(K)}{2} = P(K)$

Έτσι

$$P(K) = \delta = \frac{1}{4}$$

Ακόμα

$$P(\Lambda) = 2P(K) = 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Επειδή τα ενδεχόμενα Κ–Λ και Λ–Κ είναι ασυμβίβαστα, από τον απλό προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων, έχουμε:

$$P\left[(K-\Lambda)\cup(\Lambda-K)\right] = \frac{2}{3} \Leftrightarrow P(K-\Lambda)+P(\Lambda-K) = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow P(K)-P(K\cap\Lambda)+P(\Lambda)-P(\Lambda\cap K) = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow P(K)+P(\Lambda)-2P(K\cap\Lambda) = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}+\frac{1}{2}-2P(K\cap\Lambda) = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow P(K\cap\Lambda) = \frac{1}{24}$$

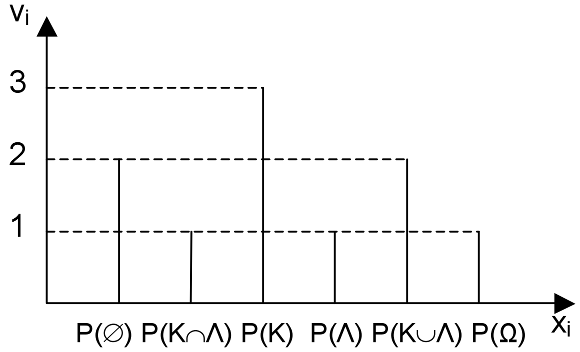
Τέλος:

$$P(K\cup\Lambda) = P(K)+P(\Lambda)-P(K\cap\Lambda) = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{24} = \frac{17}{24}.$$

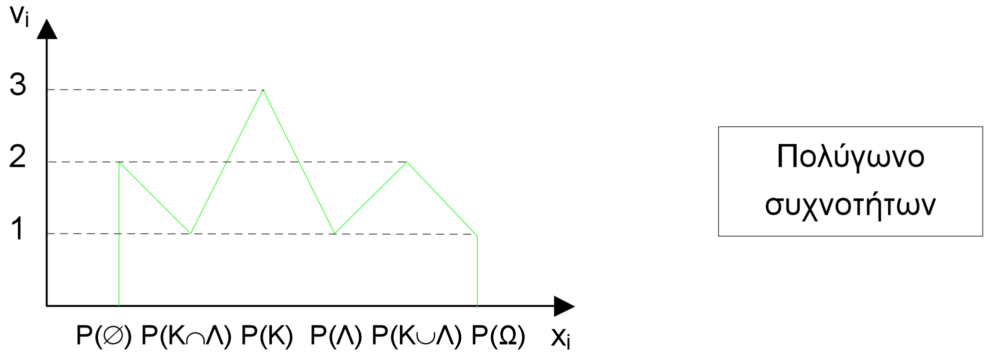
ii) Με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα συχνοτήτων:

x_i	$P(\varnothing)$	$P(K\cap\Lambda)$	$P(K)$	$P(\Lambda)$	$P(K\cup\Lambda)$	$P(\Omega)$
v_i	2	1	3	1	2	1

κατασκευάζουμε το διάγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων των παρατηρήσεων (διακριτή μεταβλητή).



Διάγραμμα συχνοτήτων



v_i
3
2
1
P(∅) P(K∩Λ) P(K) P(Λ) P(K∪Λ) P(Ω)
x_i
Πολύγωνο συχνοτήτων

Σημείωση για τη βαθμολογία του 1ου Θέματος:

Β. *Μονάδες 10. Επιμέρους 4 μονάδες για την 1^{η} ιδιότητα και 6 μονάδες για την 2^{η} ιδιότητα.*

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 85
Β. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 150
Γ. 1.Γ – 2.Α – 3.Α,Γ – 4.Α,Δ,Δ

ΘΕΜΑ 2ο

i) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}-x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x+1\right)}{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2-(x+1)^2}{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{x^2+3}+x+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3-x^2-2x-1}{\left(x^2+1\right)\left(\sqrt{x^2+3}+x+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{-2(x-1)}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+x+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-2}{(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+x+x\right)}=\frac{-2}{2\left(\sqrt{4}+2\right)}=\frac{-2}{8}=\frac{-1}{4}$$

άρα $-\frac{1}{2\lambda}=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow 2\lambda=4\Leftrightarrow \lambda=2$

ii) $f(x)=\lambda x^3-6x+\mu$. $A_f=R$. Για λ=2: $f(x)=2x^3-6x+\mu$

Η f παραγωγίσιμη στο R ως πολυωνυμική με : $f'(x)=6x^2-6$.

Είναι: $f'(x)=0\Leftrightarrow 6x^2-6=0\Leftrightarrow 6(x-1)(x+1)=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x=-1$

Και : $f'(x)>0\Leftrightarrow 6(x-1)(x+1)>0$

	-1		1	
+		-		+

οπότε x < -1 ή x > 1

Ο πίνακας μεταβολών της f είναι:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f'	+	-	+	
f	↗	↘	↗	

Η f παρουσιάζει μέγιστο για x = -1, το $f(-1)=-2+6+\mu=\mu+4$

Οπότε : μ + 4 = 9 ⇔ μ = 5

iii) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο $A(x_0,f(x_0))$ είναι $f'(x_0)$. Οπότε, τα ζητούμενα σημεία έχουν τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης $f'(x_0)=0\Leftrightarrow x=-1$ ή $x=1$

Είναι : $f(-1)=9 \;\kappa\alpha\iota\; f(1)=1$

Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι : Β(-1,9) και Γ(1,1).

iv) Ο ρυθμός μεταβολής της f συναρτήσει του x είναι: $f'(x)=6x^2-6$

Είναι: $f''(x)=0 \Leftrightarrow 12x=0 \Leftrightarrow x=0$ και $f''(x)>0 \Leftrightarrow 12x>0 \Leftrightarrow x>0$

Ο πίνακας μεταβολών της f' είναι:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	-		+
f'	$\searrow$		$\nearrow$

Η f' παρουσιάζει ελάχιστο για x = 0 οπότε ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος για x = 0

ΘΕΜΑ 3ο

Α.

i)

Αριθμός επιβατών x_i	Αριθμός αυτοκινήτων v_i	f_i	f_i %	N_i	F_i	F_i %	$x_i v_i$	$(x_i-\bar{x})^2 v_i$
1	50	0,125	12,5	50	0,125	12,5	50	200
2	110	0,275	27,5	160	0,4	40	220	110
3	120	0,3	30	280	0,7	70	360	0
4	30	0.075	7,5	310	0,775	77,5	120	30
5	90	0,225	22,5	400	1	100	450	360
ΣΥΝΟΛΑ	v = 400	1	100				1200	700

ii) Η μέση τιμή είναι : $\bar{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{5} x_i v_i}{400}=\dfrac{1200}{400}=3$

Αφού v = 400 (άρτιος), η διάμεσος θα είναι το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, αν αυτές έχουν διαταχθεί κατ' αύξουσα σειρά.

Δηλαδή: $\delta=\dfrac{t_{200}+t_{201}}{2}=\dfrac{3+3}{2}=3$

iii) Η διακύμανση είναι : $s^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2 v_i}{400}=\dfrac{700}{400}=\dfrac{7}{4}$

Οπότε η τυπική απόκλιση είναι: $s=\sqrt{\dfrac{7}{4}}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

Τέλος ο συντελεστής μεταβολής είναι: $CV=\dfrac{s}{\bar{x}}=\dfrac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{3}=\dfrac{\sqrt{7}}{6}>\dfrac{0{,}6}{6}=\dfrac{1}{10}$

αφού $\sqrt{7}>0{,}6$.

Οπότε $CV>\dfrac{1}{10}$ δηλ. CV>10%, άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Β. Το πολύ δύο επιβάτες έχουν: $v_1+v_2=50+110=160$ αυτοκίνητα

Οπότε N(A) = 160, άρα η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$P(A)=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}=\dfrac{160}{400}=\dfrac{2}{5}$.

Τουλάχιστον τέσσερις επιβάτες έχουν : $v_4 + v_5$ = 30+90=120 αυτοκίνητα.
Οπότε N(B)=120, άρα η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι :

$$P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{120}{400}=\frac{3}{10}$$

Γ. Στην περίπτωση αυτή ο δειγματικός χώρος αποτελείται από το σύνολο των επιβαινόντων, δηλ. $N(\Omega)=\sum_{i=1}^{5} x_i v_i = 1200$

Τρεις συνεπιβάτες έχει όποιος επιβαίνει σε αυτοκίνητο με 4 επιβαίνοντες, δηλ. $x_4 \cdot v_4$ =120 άτομα. Οπότε N(Γ)=120, άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι :

$$P(\Gamma)=\frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)}=\frac{120}{1200}=\frac{1}{10}$$

Κανέναν συνεπιβάτη δεν έχει όποιος επιβαίνει σε αυτοκίνητο μόνος του, δηλ. $x_1 \cdot v_1$ =50 άτομα. Οπότε N(Δ)=50, άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(\Delta)=\frac{N(\Delta)}{N(\Omega)}=\frac{50}{1200}=\frac{1}{24}$$

ΘΕΜΑ 4ο

Α.

i) Έστω $\bar{x}$ η μέση ηλικία των κατοίκων και s η τυπική απόκλιση. Τότε, μετά από 25 χρόνια, σύμφωνα με γνωστή εφαρμογή, η μέση τιμή θα 'ναι $\bar{x}$ +25 ενώ η τυπική απόκλιση δεν θα μεταβληθεί. Αφού το δείγμα γίνεται για πρώτη φορά ομοιογενές μετά από 25 χρόνια, τότε ο συντελεστής μεταβλητότητας θα είναι 10%.

Οπότε : $\frac{s}{\bar{x}+25}=\frac{1}{10}$ (1)

Επίσης, αφού CV είναι τώρα 20%, είναι: $\frac{s}{\bar{x}}=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$ (2)

Λύνουμε το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{s}{\bar{x}+25}=\frac{1}{10}\\ \frac{s}{\bar{x}}=\frac{1}{5}\end{array}\right| \left.\begin{array}{l}10s=\bar{x}+25\\ \bar{x}=5s\end{array}\right| \left.\begin{array}{l}10s=5s+25\\ \bar{x}=5s\end{array}\right| \left.\begin{array}{l}5s=25\\ \bar{x}=5s\end{array}\right| \left.\begin{array}{l}s=5\\ \bar{x}=25\end{array}\right|$$

ii) Η μέση τιμή των $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_v^2$ είναι: $\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_v^2}{v}=\frac{1}{v}\sum_{i=1}^{v} x_i^2$

Είναι : $s^2=\frac{1}{v}\left[\sum_{i=1}^{v} x_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{v} x_i\right)^2}{v}\right]$

$$25 = \frac{\sum_{i=1}^{v} x_i^2}{v} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{v} x_i}{v} \right)^2$$

$$25 = \frac{\sum_{i=1}^{v} x_i^2}{v} - \overline{x}^2$$

$$25 = \frac{\sum_{i=1}^{v} x_i^2}{v} - 625$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{v} x_i^2}{v} = 650$$

iii) Στην κανονική κατανομή για το εύρος του δείγματος ισχύει $R \approx 6s$. Αφού λοιπόν η μικρότερη τιμή x_{min} είναι 10, για τη μεγαλύτερη τιμή x_{max} θα ισχύει η προσέγγιση : $x_{\max} \approx 10 + 6s$ δηλ. $x_{\max} \approx 40$

Β.

Επιλέγουμε τυχαία έναν από τους ανθρώπους που υπάρχουν στο χωριό. Έστω τα ενδεχόμενα:

Α:" ο άνθρωπος πηγαίνει στο καφενείο Α"

Β:" ο άνθρωπος πηγαίνει στο καφενείο Β"

Αφού το 30% των κατοίκων πηγαίνουν στο Α, είναι :Ρ(Α)=0,3

Αφού το 60% των κατοίκων δεν πηγαίνουν στο Β, είναι $P(B') = 0{,}6 \Leftrightarrow 1 - P(B) = 0{,}6 \Leftrightarrow P(B) = 0{,}4$

Αφού το 50% των κατοίκων πηγαίνει σ' ένα τουλάχιστον απ' τα δύο καφενεία, είναι $P(A \cup B) = 0{,}5$

i) $A \cap B$ είναι το ενδεχόμενο ένας κάτοικος να πηγαίνει και στα δύο καφενεία. Έχουμε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \quad 0{,}5 = 0{,}3 + 0{,}4 - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$P(A \cap B) = 0{,}7 - 0{,}5 = 0{,}2$$

οπότε και στα δύο καφενεία πηγαίνει το 20% των κατοίκων.

ii) Α – Β είναι το ενδεχόμενο ένας κάτοικος να πηγαίνει μόνο στο καφενείο Α και

Β – Α είναι το ενδεχόμενο ένας κάτοικος να πηγαίνει μόνο στο καφενείο Β.

Έχουμε: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}3 - 0{,}2 = 0{,}1$ δηλαδή μόνο στο Α πηγαίνει το 10% των κατοίκων

Ομοίως: $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}2$ δηλαδή μόνο στο Β πηγαίνει το 20% των κατοίκων.

Οπότε περισσότεροι είναι οι κάτοικοι που πηγαίνουν μόνο στο Β από εκείνους που πηγαίνουν μόνο στο Α.

Γ. Αφού η πιθανότητα να κληρωθεί περιττός αριθμός είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα να κληρωθεί άρτιος, οι περιττοί αριθμοί είναι περισσότεροι από τους άρτιους στο δείγμα 1,…,ν άρα ν περιττός. Δηλαδή υπάρχει ένας περιττός περισσότερο. Έτσι, το πλήθος των περιττών είναι $\frac{\nu+1}{2}$ ενώ των άρτιων $\frac{\nu-1}{2}$.

Έστω τα ενδεχόμενα:
Π: “ο αριθμός που κληρώνεται είναι περιττός”
Α: “ο αριθμός που κληρώνεται είναι άρτιος”

Τότε: $P(\Pi) = \frac{\mathrm{N}(\Pi)}{\mathrm{N}(\Omega)} = \frac{\frac{\nu+1}{2}}{\nu} = \frac{\nu+1}{2\nu}$

Και : $P(A) = \frac{\mathrm{N}(A)}{\mathrm{N}(\Omega)} = \frac{\frac{\nu-1}{2}}{\nu} = \frac{\nu-1}{2\nu}$

Αφού η Ρ(Π) είναι κατά 0,8% μεγαλύτερη από την Ρ(Α), έχουμε:

$$P(\Pi) = P(A) + \frac{0{,}8}{100}$$

$$\frac{\nu+1}{2\nu} = \frac{\nu-1}{2\nu} + 0{,}008$$

$$\nu + 1 = \nu - 1 + 0{,}016\nu$$

$$2 = 0{,}016\nu$$

$$\nu = \frac{2}{0{,}016} = \frac{2000}{16} = 125$$

άρα στο χωριό υπάρχουν 125 άτομα

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. 1. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 139.

2. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 87.

Β. Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 30.

Γ. 1 Σ, 2 Σ, 3 Σ, 4 Σ, 5 Λ

ΘΕΜΑ 2ο

α. Πρέπει $x > 0$, οπότε το πεδίο ορισμού είναι το διάστημα $A = (0, +\infty)$

β. Είναι

$$f'(x) = (x^2 + \ln x)' = (x^2)' + (\ln x)' = 2x + \frac{1}{x} \text{ με } x > 0$$

γ. Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $A = (0, +\infty)$ με $f'(x) = 2x + \dfrac{1}{x} > 0$.

Επομένως η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και άρα δεν έχει ακρότατα.

δ. Με $x \neq 1$ είναι

$$\frac{xf'(x)-3}{x-1} = \frac{x\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)-3}{x-1} = \frac{2x^2-2}{x-1} = \frac{2(x^2-1)}{x-1} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x-1} = 2(x+1)$$

οπότε

$$\lim_{x\to 1}\frac{xf'(x)-3}{x-1} = \lim_{x\to 1} 2(x+1) = 4$$

ΘΕΜΑ 3ο

Το εύρος του δείγματος είναι R = 30−5 = 25 και το πλάτος των κλάσεων είναι

$$c \cong \frac{R}{\kappa} = \frac{25}{5} = 5.$$

Έτσι οι κλάσεις είναι:

[5, 10), [10, 15), [15, 20), [20, 25) , [25, 30)

με κεντρικές τιμές αντίστοιχα:

7,5, 12,5, 17,5, 22,5, 27,5

Από τα υπόλοιπα δεδομένα προκύπτουν κατά σειρά οι σχέσεις:

$\nu_4 = 30$ (1), $\nu_2 = 4\nu_3$ (2), $f_1\% = 10$ (3) και $\nu_3 + \nu_4 + \nu_5 = 40$ (4)

Ακόμα:

$$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 + \nu_5 = \nu$$

$$\Leftrightarrow \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 + \nu_5 = 80$$

$$\overset{(4)}{\Leftrightarrow} \nu_1 + \nu_2 = 40 \quad (5)$$

Είναι

$$f_1\% = \frac{\nu_1}{\nu}\cdot 100 \Leftrightarrow 10 = \frac{\nu_1}{80}\cdot 100 \Leftrightarrow \nu_1 = 8,$$

και η (5) δίνει $\nu_2 = 32$. Από την (2) βρίσκουμε $\nu_3 = 8$ και από την (4) $\nu_5 = 2$, έτσι συμπληρώνουμε τη στήλη των ν_i: 8, 32, 8, 30, 2 με σύνολο 80.

Οι σχετικές συχνότητες $f_i\%$ προσδιορίζονται από τον τύπο $f_i\% = \frac{\nu_i}{\nu}100$, i = 1, 2, 3, 4, 5 και είναι κατά σειρά: 10, 40, 10, 37,5, 2,5 με σύνολο 100.

Οι αθροιστικές συχνότητες N_i προσδιορίζονται από τις σχέσεις:

$$N_1 = \nu_1,\ N_i = N_{i-1} + \nu_i,\ i = 2, 3, 4, 5$$

και είναι κατά σειρά: 8, 40, 48, 78, 80.

Πάλι, οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες είναι:

$$F_1\% = f_1\%,\ F_i\% = F_{i-1}\% + f_i\%,\quad i = 2, 3, 4, 5$$

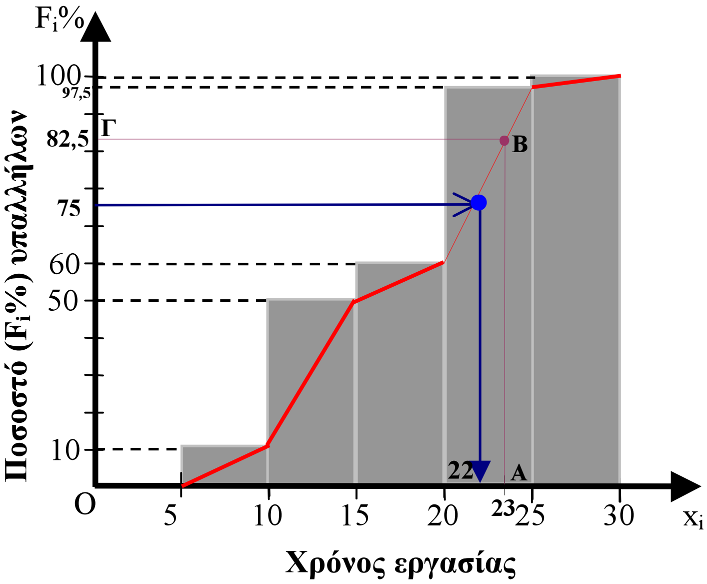
και βρίσκουμε κατά σειρά: 10, 50, 60, 97,5, 100.

Στη συνέχεια συμπληρώνουμε τον πίνακα συχνοτήτων:

Πίνακας συχνοτήτων

Κλάσεις [- , -)	**Κεντρικές Τιμές x_i**	**Συχνότητες ν_i**	**Σχετικές συχνότητες $f_i\%$**	**Αθροιστικές συχνότητες N_i**	**Αθροιστικές σχετικές συχνότητες $F_i\%$**
[5, 10)	7,5	8	10	8	10
[10, 15)	12,5	32	40	40	50
[15, 20)	17,5	8	10	48	60
[20, 25)	22,5	30	37,5	78	97,5
[25, 30)	27,5	2	2,5	80	100
ΣΥΝΟΛΟ	—	80	100	—	—

β. Το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων με το αντίστοιχο πολύγωνο φαίνονται στο σχήμα:



γ. 1^ος τρόπος. Το ζητούμενο ποσοστό βρίσκεται από το πολύγωνο συχνοτήτων από τη διαδρομή ΑΒΓ. Ξεκινώντας από το σημείο Α(23, 0) πηγαίνουμε κάθετα στον άξονα Οx μέχρι το αθροιστικό διάγραμμα και μετά παράλληλα στον άξονα Οx μέχρι το σημείο Γ(0, 82,5). Η τεταγμένη 82,5 του Γ είναι το ζητούμενο ποσοστό.

2^ος τρόπος. Το πλάτος του διαστήματος [20, 23) είναι τα $\frac{3}{5}$ του πλάτους της κλάσης [20, 25), επομένως το ποσοστό των υπαλλήλων που αντιστοιχεί στο διάστημα [20, 23) είναι τα $\frac{3}{5}$ του $f_4\%$, δηλαδή, $\frac{3}{5}\cdot 37{,}5 = 22{,}5$ Έτσι το ζητούμενο ποσοστό είναι

$$f_1\% + f_2\% + f_3\% + 22{,}5\% = 82{,}5\%$$

δ. 1^ος τρόπος. Επειδή $60 = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + 12$, οι 60 υπάλληλοι με τα λιγότερα χρόνια εργασίας είναι αυτοί που ανήκουν στις τρεις πρώτες κλάσεις και οι πρώτοι 12 της τέταρτης κλάσης οι οποίοι καλύπτουν διάστημα πλάτους $\frac{12}{30}\cdot 5 = 2$. Επομένως τα ζητούμενα χρόνια είναι 20+2=22.

2^ος τρόπος. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε με την παρατήρηση ότι οι 60 υπάλληλοι είναι το 75% του συνόλου, και εργαστούμε με το αθροιστικό διάγραμμα (μπλε διαδρομή στο σχήμα), όπως υποδεικνύει το σχολικό βιβλίο στην εφαρμογή της σελίδας 77

ΘΕΜΑ 4^{ο}

Η ισότητα $N(A) - N(B) = \frac{1}{5}N(\Omega)$ δίνει $\frac{N(A)}{N(\Omega)} - \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{1}{5}$ ή $P(A) - P(B) = \frac{1}{5}$ ή

$$P(A) = P(B) + \frac{1}{5} \qquad \textbf{(1)}$$

Έτσι, $P(B) < P(A)$. Επειδή

$$A \cap B \subseteq B \text{ και } A \subseteq A \cup B$$

έχουμε

$$P(A \cap B) \le P(B) \text{ και } P(A) \le P(A \cup B)$$

Επομένως

$$P(A \cap B) \le P(B) < P(A) \le P(A \cup B) \qquad \textbf{(2)}$$

οπότε

$$R = P(A \cup B) - P(A \cap B) \qquad \textbf{(3)}$$

α. Από την (2) είναι:

$$P(A \cap B) < P(A \cup B) \Leftrightarrow 0 < P(A \cup B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 0 < R$$

Ακόμα

$$P(A \cup B) \le 1 \quad \text{και} \quad P(A \cap B) \ge 0, \text{ οπότε } P(A \cup B) - P(A \cap B) \le 1 \Leftrightarrow R \le 1$$

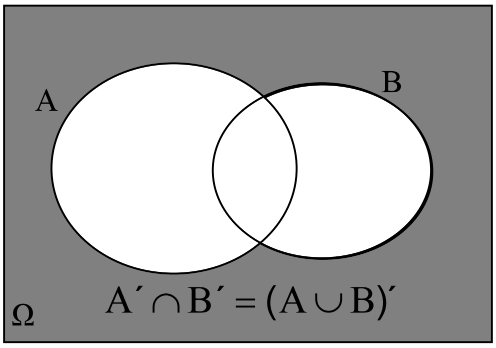
Άρα

$$0 < R \le 1$$

β. Έχουμε κατά σειρά:

$$\begin{aligned} R = P(A \cup B) - P(A \cap B) &= [\ P(A) + P(B) - P(A \cap B)\ ] - P(A \cap B) \\ &= [\ P(A) - P(A \cap B)\ ] + [\ P(B) - P(A \cap B\ ] \\ &= P(A - B) + P(B - A) \\ &= P(A - B) + P(B \cap A') \qquad [\text{ τύπος: } B - A = B \cap A'\ ] \\ &= P(A - B) + P(A' \cap B) \\ &= P(A - B) + P(A' \cap (B')') \\ &= P(A - B) + P(A' - B') \end{aligned}$$

2^{ος} τρόπος. Από διάγραμμα Venn παρατηρούμε ότι $A' \cap B' = (A \cup B)'$



Είναι:

$$\begin{aligned} P(A - B) + P(A' - B') &= P(A - B) + P(A') - P(A' \cap B') \\ &= [P(A) - P(A \cap B)] + [1 - P(A)] - [\ 1 - P(A \cup B)] \\ &= P(A) - P(A \cap B) + 1 - P(A) - 1 + P(A \cup B)] \\ &= P(A \cup B) - P(A \cap B) \\ &= R \end{aligned}$$

Β α. Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$ ή

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 5P(A\cap B) + 3 \qquad \textbf{(4)}$$

Με $x \neq 1$ έχουμε:

$$\frac{5P(A)x - 5P(B) - 1}{x-1} \overset{(1)}{=} \frac{5\left[P(B) + \frac{1}{5}\right]x - 5P(B) - 1}{x-1}$$

$$= \frac{5P(B)x + x - 5P(B) - 1}{x-1}$$

$$= \frac{5P(B)(x-1) + x - 1}{x-1} = \frac{(x-1)[5P(B)+1]}{x-1}$$

$$= 5P(B) + 1$$

Άρα,

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{5P(A)x - 5P(B) - 1}{x-1} = \lim_{x\to 1}[5P(B)+1] = 5P(B) + 1$$

και η (4) δίνει, τελικά, το ζητούμενο: $5P(B) + 1 = 5\,P(A\cap B) + 3$ ή

$$P(B) = P(A\cap B) + \frac{2}{5} \qquad (5)$$

β. Η (1) λόγω της (5) δίνει:

$$P(A) = P(A\cap B) + \frac{3}{5}$$

Από την (3) προκύπτει:

$$R = P(A\cup B) - P(A\cap B) = [\,P(A) + P(B) - P(A\cap B)] - P(A\cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - 2P(A\cap B)$$

$$= P(A\cap B) + \frac{3}{5} + P(A\cap B) + \frac{2}{5} - 2P(A\cap B)$$

$$= 1$$

γ. Αν υποθέσουμε ότι $P(A\cup B) < 1$, τότε θα είναι

$$R = P(A\cup B) - P(A\cap B) < 1, \text{ άτοπο, από το Ββ,}$$

και επειδή $P(A\cup B) \le 1$ απομένει:

$$P(A\cup B) = 1.$$

Τέλος

$$R = P(A\cup B) - P(A\cap B) = 1 \Leftrightarrow P(A\cap B) = 0.$$

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΕΠΙΛΟΓΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1ο

Α.1. Θεωρία από Σχ. Βιβλίο σελ. 92
Α.2. Θεωρία από Σχ. Βιβλίο σελ. 149
Α.3. Απόδειξη από Σχ. Βιβλίο σελ. 28-29
Β. α → Λάθος
β → Σωστό
γ → Σωστό
δ → Λάθος
ε → Λάθος

Θέμα 2ο

α) Πρέπει $x+2 \geq 0$ και $\sqrt{x+2}-2 \neq 0$

$x \geq -2$ και έστω $\sqrt{x+2}-2=0$

τότε $\sqrt{x+2}=2$

$x+2=4$

$x=2$

Άρα $\sqrt{x+2}-2 \neq 0$ όταν $x \neq 2$.

Οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι το $[-2,2)\cup(2,+\infty)$.

β) Τα ζητούμενα σημεία είναι αυτά για τα οποία ισχύει f(x)=0. Άρα:

$x^2-4=0$ και $x \in [-2,2)\cup(2,+\infty)$

$x^2=4$ και $x \in [-2,2)\cup(2,+\infty)$

$x=\pm 2$ και $x \in [-2,2)\cup(2,+\infty)$

Άρα $x=-2$.

Οπότε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης με τον x΄x είναι το M(-2,0).

γ)

$$f(x)=\frac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-2}=\frac{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\frac{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-2^2}=$$

$$=\frac{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{x+2-4}=\frac{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{x-2}=(x+2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)$$

Άρα $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}(x+2)\left(\sqrt{x+2}+2\right) = (2+2)\left(\sqrt{4}+2\right) = 4\cdot 4 = 16$

δ) Ο πίνακας γίνεται:

x_i	v_i	f_i	N_i	F_i
1	4	0,1	4	0,1
2	16	0,4	20	0,5
3	12	0,3	32	0,8
4	8	0,2	40	1
Σύνολο	40	1	-	-

$f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{4}{40} = 0{,}1$

$N_1 = v_1 = 4$

$F_1 = f_1 = 0{,}1$

$f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{16}{40} = 0{,}4$, $\quad N_2 = v_1 + v_2 = 4 + 16 = 20$

$F_2 = f_1 + f_2 = 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}5$

$f_4 = \frac{v_4}{v} \Rightarrow v_4 = f_4 \cdot v = 0{,}2 \cdot 40 = 8$

$N_4 = v = 40$ και $F_4 = 1$

$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 40 \Rightarrow 4 + 16 + v_3 + 8 = 40 \Rightarrow v_3 = 40 - 28 = 12$

$f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{12}{40} = 0{,}3$, $\quad N_3 = N_2 + v_3 = 20 + 12 = 32$

$F_3 = F_2 + f_3 = 0{,}5 + 0{,}3 = 0{,}8$

Θέμα 3ο

α) Στον παρακάτω πίνακα «διπλής εισόδου» καταγράφουμε τα δεδομένα μας.

Τμήμα / Φύλλο	Διοικητικό τμήμα	Τεχνικό τμήμα	Σύνολο
Άνδρες	10	50	60
Γυναίκες	30	10	40
Σύνολο	40	60	100

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{50}{100}=0,5$$

B_1: «είναι το ενδεχόμενο το άτομο να είναι άνδρας»
B_2: «είναι το ενδεχόμενο το άτομο να εργάζεται στο διοικητικό τμήμα».

$$B=(B_1\cup B_2)\Rightarrow P(B)=P(B_1\cup B_2)=P(B_1)+P\left(B_2\right)-P(B_1\cap B_2)$$
$$=\frac{60}{100}+\frac{40}{100}-\frac{10}{100}=\frac{90}{100}=0,9$$

β) Το άθροισμα των ηλικιών όλων των υπαλλήλων θα είναι:

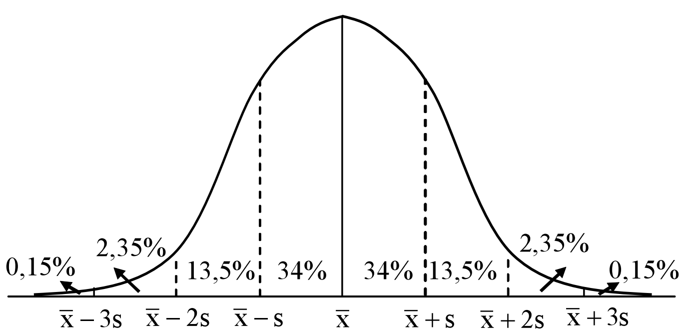
$$\sum_{i=1}^{100} t_i=60\cdot 40+40\cdot 40=2400+1600=4000$$

Μετά την πρόσληψη των νεότερων υπαλλήλων το άθροισμα των ηλικιών των υπαλλήλων θα είναι:

$$\overline{y}=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i \quad \text{άρα} \quad \sum_{i=1}^{\nu} t_i=\nu\cdot\overline{y} \quad \text{δηλαδή} \quad \sum_{i=1}^{100} t_i=100\cdot 39,6=3960$$

Έστω c το πλήθος των ατόμων που αποχώρησαν. Επειδή θα προσληφθούν c άτομα αλλά κατά 4 χρόνια νεότερα, θα ισχύει ότι: 4000 – 3960 = 4c δηλαδή 4c = 40 άρα c = 10

γ) Η καμπύλη συχνοτήτων στην κανονική κατανομή είναι:

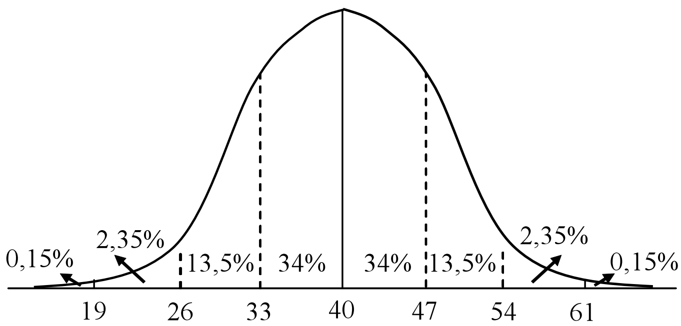


Επειδή το 2,5% (δηλαδή 2,35% + 0,15% = 2,5%) των υπαλλήλων έχει ηλικία το πολύ 26 χρόνια, $\bar{x}-2s=26$ **(1)**

Η μέση ηλικία όλων των υπαλλήλων είναι: $\bar{x}=\dfrac{60\cdot 40+40\cdot 40}{100}=40$

Από τη σχέση **(1)** έχουμε: $2s = 14 \Leftrightarrow s = 7$.

Επομένως η καμπύλη συχνοτήτων θα είναι:



Κάτω από 33 χρόνια θα είναι το 13,5% + 2,35% + 0,15% = 16% των υπαλλήλων της εταιρίας δηλ. $\dfrac{16}{100}\cdot 100=16$ υπάλληλοι.

δ) Είναι: $s^2=\dfrac{1}{100}\left[\sum_{i=1}^{\kappa}v_i x_i^2-\dfrac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa}v_i x_i\right)^2}{100}\right]\Leftrightarrow S^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{\kappa}v_i x_i^2}{100}-\dfrac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa}v_i x_i\right)^2}{100^2}\Leftrightarrow$

$$100^2\ s^2=100^2\ \frac{\sum_{i=1}^{\kappa}v_i x_i^2}{100}-100^2\ \frac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa}v_i x_i\right)^2}{100^2}\Leftrightarrow 100^2\ s^2=100\cdot\sum_{i=1}^{\kappa}v_i x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{\kappa}v_i x_i\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 10000\ s^2=250000\Leftrightarrow S^2=25\Leftrightarrow S=5$$

Στην κανονική κατανομή το εύρος $R\approx 6s$, επομένως $R\approx 30$.

Θέμα 4ο

Α. Είναι: $\bar{x} = \dfrac{x + 5e^x + x + 4 - 7x + 1}{5} = \dfrac{5e^x - 5x + 5}{5} = e^x - x + 1$

Έστω f(x)= e^x-x+1, $x \in \Re$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ με f΄(x) = e^x-1.

Έχουμε $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq e^0 \Leftrightarrow x \geq 0$

x	-∞	0	+∞
f΄(x)	-	0	+
f (x)	↘	2 min	↗

Για x=0 η f παρουσιάζει ελάχιστο το $m = f(0) = 2$

Β. Για m=2 είναι: g(x)=$2x^2$-κ^2x+3.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ με g΄(x)=4x-κ^2.

Η εφαπτομένη της C_g στο Α(1, g(1)) είναι παράλληλη στον x΄x όταν g΄(1)=0

$\Leftrightarrow$ 4-κ^2=0 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ κ^2=4 $\Leftrightarrow$

κ=2 ή κ=-2 (**απορρίπτεται** αφού $\kappa \in \Omega$)

Άρα κ=2.

Ε={1,3,4,5,6,7}

Οπότε $P(\mathrm{E}) = \dfrac{N(\mathrm{E})}{N(\Omega)} = \dfrac{6}{7}$

Γ. Αφού $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$ τότε $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{A}$ και $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})$ οπότε

$\mathrm{h}(\mathrm{x}) = \dfrac{3 - 2 \cdot \mathrm{P}(A)}{12}\mathrm{x}^3 + \dfrac{\mathrm{P}(A)}{2}\mathrm{x}^2 + x + 2008$, $x \in R$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο R με $\mathrm{h}'(\mathrm{x}) = \dfrac{3 - 2 \cdot P(A)}{4}\mathrm{x}^2 + P(A) \cdot \mathrm{x} + 1$, $x \in R$

και

$\Delta = P^2(A) - 4 \cdot \dfrac{3 - 2 \cdot P(A)}{4} \cdot 1 = P^2(A) - 3 + 2 \cdot P(A) = P^2(A) + 2 \cdot P(A) + 1 - 4 =$

$= (P(A) + 1)^2 - 4 < 0$ γιατί:

Το ενδεχόμενο Α αποκλείεται να είναι ο δειγματικός χώρος Ω (διότι αν ήταν, θα έπρεπε και Β=Ω, άτοπο αφού Α $\neq$ Β) άρα Ρ(Α) $\neq 1$ και επειδή $0 \leq \mathrm{P}(\mathrm{A}) \leq 1$ έπεται ότι $0 \leq \mathrm{P}(\mathrm{A}) < 1$ άρα Ρ(Α)+1<2 οπότε $(P(A) + 1)^2 < 4$.

(εναλλακτικά: το τριώνυμο $P^2(A) + 2 \cdot P(A) - 3$ έχει Δ' =16 και ρίζες τις -3 και 1 οπότε για Ρ(Α) $\in [0,1)$ είναι $P^2(A) + 2 \cdot P(A) - 3 < 0$).

Αφού Δ<0 η $h'(x)$ παίρνει τιμές ομόσημες του $\dfrac{3-2\cdot P(A)}{4}$ για κάθε $x\in R$ και αφού $\dfrac{3-2\cdot P(A)}{4}$ φανερά θετικό, έχω $h'(x)>0$ για κάθε $x\in R$, άρα η συνάρτηση h είναι γνήσια αύξουσα στο R.

Γ' ΤΑΞΗ ΓΕΝ.ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^o

Α. Θεωρία βιβλ. ΟΕΔΒ σελ. 152

Β. **α)** Θεωρία βιβλ. ΟΕΔΒ σελ 13
β) Θεωρία βιβλ. ΟΕΔΒ σελ 139

Γ. **α)** ΣΩΣΤΟ
β) ΛΑΘΟΣ
γ) ΛΑΘΟΣ
δ) ΣΩΣΤΟ
ε) ΛΑΘΟΣ

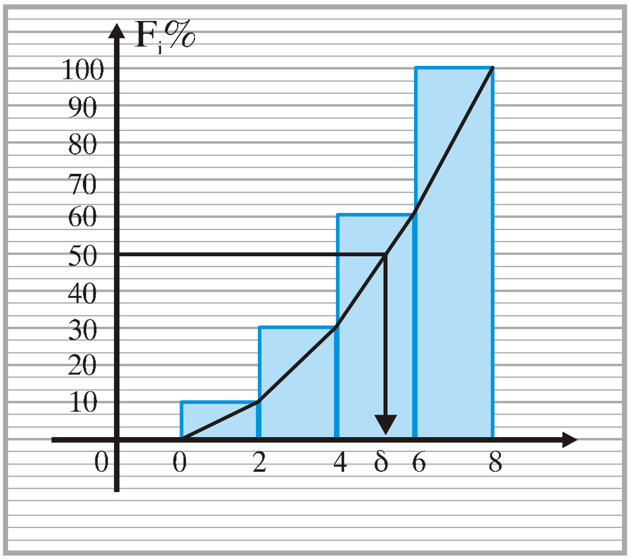
ΘΕΜΑ 2^o

Α)

[-)	x_i	ν_i	$f_i\%$	$F_i\%$	$x_i\,\nu_i$	$x_i^2 \cdot \nu_i$
[0 - 2)	1	2	10	10	2	2
[2 - 4)	3	4	20	30	12	36
[4 - 6)	5	6	30	60	30	150
[6 - 8)	7	8	40	100	56	392
Σύνολο		**ν=20**	**100**		**100**	**580**

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i \nu_i}{\nu} = \frac{100}{20} = 5^o C$$

β)



η διάμεσος είναι περίπου 5

γ) $s^2 = \frac{1}{\nu}\left[\sum_{i=1}^{4} x_i^2 \nu_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{4} x_i \nu_i\right)^2}{\nu}\right] \Leftrightarrow s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{4} x_i^2 \nu_i - (\bar{x})^2 \Leftrightarrow$

$s^2 = \frac{580}{20} - 5^2 = 29 - 25 = 4 \Rightarrow \boxed{s = 2^o C}$

$Cv = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{5} = 0,4$ ή $40\% > 10\%$ το δείγμα είναι ανομοιογενές.

δ) Το πλήθος των πόλεων με θερμοκρασίες από 3^o C έως και 7^o C είναι οι μισές πόλεις της δεύτερης κλάσης, όλες της τρίτης και οι μισές της $4^{ης}$ διότι το 3 είναι το κέντρο της $2^{ης}$ και το 7 το κέντρο της $4^{ης}$ και οι παρατηρήσεις (πόλεις) θεωρούνται ομοιόμορφα κατανεμημένες μέσα στις κλάσεις. Άρα το ποσοστό είναι:

$\frac{1}{2}20\% + 30\% + \frac{1}{2}40\% = 60\%$ των πόλεων.

ΘΕΜΑ 3^o

α) Ω={1,2,3, ... ,25} , ισοπίθανα , N(Ω)=25

$A = \{\kappa \in \Omega / \kappa \text{ πολ/σιο του } 3\} = \{3,6,9,12,15,18,21,24\}$ N(A)=8

$B = \{\kappa \in \Omega / \text{η } f \text{ δεν έχει πραγματικές ρίζες}\}$

Αφού $f(x) = x^2 - \kappa x + 9$ θα πρέπει $\Delta < 0 \Leftrightarrow \kappa^2 - 36 < 0 \Leftrightarrow (\kappa - 6)(\kappa + 6) < 0$

Άρα $-6 < \kappa < 6$. Επειδή όμως $\kappa \in \Omega$ θα πρέπει B={1,2,3,4,5} έτσι N(B)=5

$\Gamma = \left\{\kappa \in \Omega / \text{το } \lim_{x \to \kappa} \frac{x^2 - \kappa x}{\sqrt{x} - \sqrt{\kappa}} \le 16\sqrt{\kappa}\right\}$

έχουμε $\lim\limits_{x\to\kappa}\dfrac{x^2-\kappa x}{\sqrt{x}-\sqrt{\kappa}}=\lim\limits_{x\to\kappa}\dfrac{(x^2-\kappa x)(\sqrt{x}+\sqrt{\kappa})}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{\kappa})^2}=$

$=\lim\limits_{x\to\kappa}\dfrac{x(x-\kappa)(\sqrt{x}+\sqrt{\kappa})}{x-\kappa}=\lim\limits_{x\to\kappa}x(\sqrt{x}+\sqrt{\kappa})=2\kappa\sqrt{\kappa}$

Άρα έχουμε $2\kappa\sqrt{\kappa}\le 16\sqrt{\kappa}\Leftrightarrow \kappa\le 8$.

Επειδή $\kappa\in\Omega$ έχουμε Γ={1,2,3,4,5,6,7,8}. Άρα Ν(Γ)=8.

β) $P(A)=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}=\dfrac{8}{25}=32\%$

$P(\Gamma)=\dfrac{N(\Gamma)}{N(\Omega)}=\dfrac{8}{25}=32\%$

γ) $P(B)=\dfrac{N(B)}{N(\Omega)}=\dfrac{5}{25}=20\%$

$A\cap B=\{3\}$ άρα $P(A\cap B)\dfrac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}=\dfrac{1}{25}=4\%$

δ)

- $P(A\cup B)=P(B)+P(A)-P(A\cap B)=\dfrac{8}{25}+\dfrac{5}{25}-\dfrac{1}{25}=\dfrac{12}{25}=48\%$
- $P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')=$
  $=P(A)+1-P(B)-P(A-B)=$
  $=P(A)+1-P(B)-[P(A)-P(A\cap B)]=$
  $=P(A)+1-P(B)-P(A)+P(A\cap B)=1-P(B)+P(A\cap B)=$
  $=1-\dfrac{5}{25}+\dfrac{1}{25}=\dfrac{21}{25}=84\%$
- $P(B-A')=P(B)-P(B\cap A')=P(B)-P(B-A)=$
  $=P(B)-P(B-A)=P(B)-P(B)+P(A\cap B)=\dfrac{1}{25}=4\%$

ΣΧΟΛΙΟ: Δεκτές είναι και οι λύσεις με την χρήση των διαγραμμάτων Venn

ΘΕΜΑ 4^{o}

α) Αφού η εφαπτομένη στο K(1,f(1)) είναι παράλληλη στην (δ): y=x+1 πρέπει $\lambda_{\varepsilon_K}=\lambda_\delta\Leftrightarrow f'(1)=1$

Έχουμε $f(x)=\dfrac{P(A\cup B)}{2[P(A)+P(B)]}\cdot x^2+\dfrac{P(B-A)}{P(A)+P(B)}$

Άρα $f'(x)=\dfrac{P(A\cup B)}{P(A)+P(B)}\cdot x$ οπότε

$$f'(1)=1 \Leftrightarrow \frac{P(A\cup B)}{P(A)+P(B)}=1 \Leftrightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

Άρα $P(A\cap B)=0$ και επειδή ο δ.χ. Ω αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα θα είναι και $A\cap B=\varnothing$ δηλαδή τα Α και Β είναι ασυμβίβαστα.

β) Αφού $\Lambda\left(0,\frac{1}{3}\right)\in C_f \Rightarrow f(0)=\frac{1}{3}$ όμως $f(0)=\frac{P(B-A)}{P(A)+P(B)}$ οπότε

$$\frac{1}{3}=\frac{P(B-A)}{P(A)+P(B)} \Leftrightarrow 3P(B-A)=P(A)+P(B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\left[P(B)-P(A\cap B)\right]=P(A)+P(B) \Leftrightarrow P(A)=2P(B)$$

όμως

$$P(A\cup B)=P(B)+P(A) \Leftrightarrow 3P(B)=\frac{3}{4} \Leftrightarrow P(B)=\frac{1}{4}$$

Άρα $P(A)=\frac{1}{2}$.

γ) Έχουμε $g(x)=6f(x)-12x+2019 \quad , \quad x\in \mathbb{R}$ και

$g'(x)=6f'(x)-12$ έτσι

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=2 \Leftrightarrow \frac{P(A\cup B)}{P(A)+P(B)}\cdot x=2 \Leftrightarrow x=2$$

(αφού $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$)

$$g'(x)>0 \Leftrightarrow f'(x)>2 \Leftrightarrow x>2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
g΄(x)	−	0	+
g(x)	↘		↗
		Ο.Ε.	

η g παρουσιάζει ελάχιστη τιμή για x=2 την g(2)=6f(2)-24+2019

όμως

$$f(2)=\frac{P(A\cup B)}{2\left[P(A)+P(B)\right]}\cdot 4+\frac{P(B-A)}{P(A)+P(B)}=\frac{1}{2}\cdot 4+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$ άρα g(2)=2009.

δ) Έχουμε $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}$ και $f'(x)=x$

Έστω y=αx+β η εφαπτόμενη (ε_K) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

Πρέπει $\alpha=f'(1)=1$ άρα (ε_K): y=x+β

Αφού $K(1,f(1))\in C_f \Leftrightarrow f(1)=1+\beta \Leftrightarrow \beta=-\frac{1}{6}$. Επομένως ε_K : $\boxed{y=x-\frac{1}{6}}$

Είναι $M_i\in(\varepsilon_K) \Leftrightarrow y_i=x_i-\frac{1}{6} \quad , \quad i=1,2,\ldots 10$

Άρα $\bar{y}=\bar{x}-\frac{1}{6}=-\frac{59}{6}-\frac{1}{6}=-10$ και $s_y=s_x=2$ οπότε $CV_y=\frac{s_y}{|\bar{y}|}=\frac{2}{10}=20\%$

Γ' ΤΑΞΗ ΓΕΝ.ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Απόδειξη (βλ. σχολικό σελ.31)

Β. **α.** ορισμός (βλ. σχολικό σελ.149)
β. ορισμός (βλ. σχολικό σελ.66)

Γ. **α.** Λάθος
β. Λάθος
γ. Σωστό
δ. Λάθος
ε. Σωστό

ΘΕΜΑ 2

Α. Πρέπει $x^2+1\geq 0$, το οποίο ισχύει για κάθε $x\in R$ έτσι $A=R$

Β. **α.** $f'(x)=\left(\ln(x^2+1)+x+\sqrt{\alpha+15}\right)'=\dfrac{2x}{x^2+1}+1=\dfrac{x^2+1+2x}{x^2+1}=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1}$

β. $\lim\limits_{x\to -1}\left[f'(x)\dfrac{x^2+1}{x^2-x-2}\right]=\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1}\cdot\dfrac{x^2+1}{x^2-x-2}\right)=$

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)^2}{(x-2)\cdot(x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x-2}=\dfrac{-1+1}{-1-2}=\dfrac{0}{-3}=0$.

Γ. Έστω $M(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτομένης με την C_f.

Αφού $(\varepsilon)//(\eta)$ πρέπει: $f'(x_0)=1\Rightarrow\dfrac{x_0^2+2x_0+1}{x_0^2+1}=1\Rightarrow x_0^2+2x_0+1=x_0^2+1\Rightarrow$

$2x_0=0\Rightarrow x_0=0$.

Αφού $f(0)=\ln 1+\sqrt{\alpha+15}=\sqrt{\alpha+15}$, το σημείο επαφής είναι $M(0,\sqrt{\alpha+15})$

Έτσι $(\varepsilon): y=f'(0)\cdot x+\beta$ δηλαδή $(\varepsilon): y=x+\beta$

Όμως $M\in(\varepsilon)\Rightarrow\sqrt{\alpha+15}=0+\beta\Rightarrow\beta=\sqrt{\alpha+15}$ έτσι $(\varepsilon): y=x+\sqrt{\alpha+15}$.

Δ. για $x_1=0$ έχω $y_1=\sqrt{\alpha+15}$
για $x_2=1$ έχω $y_2=1+\sqrt{\alpha+15}$
για $x_3=9$ έχω $y_3=9+\sqrt{\alpha+15}$
για $x_4=10$ έχω $y_4=10+\sqrt{\alpha+15}$

Οι τιμές αυτές σε αύξουσα σειρά είναι:

$\sqrt{\alpha+15}$, $\sqrt{\alpha+15}+1$, $\sqrt{\alpha+15}+9$, $\sqrt{\alpha+15}+10$

$$\delta=\frac{\sqrt{\alpha+15}+1+\sqrt{\alpha+15}+9}{2}=\frac{2\sqrt{\alpha+15}+10}{2}=\sqrt{\alpha+15}+5$$

Αφού $\delta=50\Rightarrow\sqrt{\alpha+15}+5=50\Rightarrow\sqrt{\alpha+15}=45\Rightarrow\alpha+15=2025\Rightarrow\alpha=2010$

ΘΕΜΑ 3

Α. Το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος **ν**, έτσι $\nu=50$.

Β. Τα εμβαδά των ορθογωνίων είναι ίσα με τις αντίστοιχες συχνότητες.

Κλάσεις [-)	x_i	ν_i	f_i	$f_i\%$	N_i	F_i	$F_i\%$
0 - 4	2	4	0,08	8	4	0,08	8
4 – 8	6	7	0,14	14	11	0,22	22
8 – 12	10	18	0,36	36	29	0,58	58
12 – 16	14	13	0,26	26	42	0,84	84
16 - 20	18	8	0,16	16	50	1	100
Σύνολο	**–**	**ν = 50**	**1**	**100**			

Αφού $\nu=50\Rightarrow N_4+\nu_5=50\Rightarrow 6\nu_2+8=50\Rightarrow 6\nu_2=42\Rightarrow \nu_2=7$

$N_4=42\Rightarrow 4+7+18+\nu_4=42\Rightarrow \nu_4=13$

Γ. **α.** **Α:** «ο μαθητής έχει βαθμό από **10** έως **17**» τότε

$$N(A)=\frac{1}{2}\cdot\nu_3+\nu_4+\frac{1}{4}\cdot\nu_5=9+13+2=24 \text{ οπότε}$$

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{24}{50}=0{,}48 \text{ ή } 48\%$$

β. **Β:** «ο μαθητής έχει βαθμό κάτω από **10** ή τουλάχιστον **16**»

$$N(B)=\nu_1+\nu_2+\frac{1}{2}\nu_3+\nu_5=4+7+9+8=28. \text{ Έτσι}$$

$$P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{28}{50}=0{,}56 \text{ ή } 56\%$$

ΘΕΜΑ 4

Α. Έχουμε : $2P(2)=\dfrac{P(3)}{3}=P(6)=P(k)=\dfrac{P(\lambda)}{2}=\theta\in R$

Αφού $P(A)=\dfrac{1}{2}\Rightarrow P(\kappa)+P(\lambda)+P(\mu)=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\theta+2\theta+P(\mu)=\dfrac{1}{2}\Rightarrow$

$P(\mu)=\dfrac{1}{2}-3\theta \quad (1)$

Όμως $P(\Omega)=1 \Rightarrow P(2)+P(3)+P(6)+P(\kappa)+P(\lambda)+P(\mu)=1 \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$\frac{\theta}{2}+3\theta+\theta+\theta+2\theta+\frac{1}{2}-3\theta=1 \Rightarrow$

$4\theta+\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{9}{2}\theta=\frac{1}{2} \Rightarrow \theta=\frac{1}{9}$

Έτσι : $P(2)=\frac{1}{18}$, $P(3)=\frac{1}{3}$, $P(6)=\frac{1}{9}$, $P(\kappa)=\frac{1}{9}$, $P(\lambda)=\frac{2}{9}$, $P(\mu)=\frac{1}{6}$

Β. $\mathbf{f'(x)=\lambda x^2-24x+20}$

Αφού η **(ε) // (η)** $\Rightarrow \mathbf{f'(-1)=48 \Rightarrow \lambda+44=48 \Rightarrow \lambda=4}$

Έτσι $\mathbf{f'(x)=4x^2-24x+20}$

$\mathbf{f'(x)=0 \Rightarrow 4x^2-24x+20=0 \Rightarrow x=1,\ x=5}$

x	$-\infty$ 1	5	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	↗	↘	↗

Άρα $\mathbf{\kappa=1}$ και $\mathbf{\mu=5}$

Έτσι $\mathbf{\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}}$

Γ. πρέπει $\begin{cases} 2x-3\ge 0 \\ \sqrt{2x-3}-\sqrt{5}\ne 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 3/2 \\ \sqrt{2x-3}\ne\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 3/2 \\ 2x-3\ne 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 3/2 \\ x\ne 4 \end{cases}$

και αφού $\mathbf{x\in\Omega}$ άρα: $\mathbf{x=2}$ ή $\mathbf{x=3}$ ή $\mathbf{x=5}$ ή $\mathbf{x=6}$

έτσι $\mathbf{B=\{2,3,5,6\}}$

Δ. Οι **4** παρατηρήσεις είναι τα $\mathbf{\frac{4}{160}=\frac{1}{40}=2{,}5\%}$ του συνόλου των παρατηρήσεων.

Έτσι αφού έχω κανονική κατανομή πρέπει: $\mathbf{\bar{x}+2s=20}$ **(1)**

Όμως $\mathbf{R=\frac{3}{4}\bar{x} \Rightarrow 6s=\frac{3}{4}\bar{x} \Rightarrow 24s=3\bar{x}}$ **(2)**

(2) $\overset{(1)}{\Rightarrow} \mathbf{24s=3(20-2s) \Rightarrow 24s=60-6s \Rightarrow 30s=60 \Rightarrow s=2}$

Έτσι από **(1)** $\Rightarrow \mathbf{\bar{x}+4=20 \Rightarrow \bar{x}=16}$

Παρατηρούμε ότι: $\mathbf{CV=\frac{s}{\bar{x}}=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}>\frac{1}{10}}$, έτσι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Προσθέτοντας τον ίδιο θετικό σταθερό αριθμό c σε όλες τις τιμές της μεταβλητής έχω: $\mathbf{s'=s=2}$ και $\mathbf{\bar{x}'=\bar{x}+c=16+c}$.

Για να είναι ομοιογενές το νέο δείγμα τιμών πρέπει:

$\mathbf{CV'\le\frac{1}{10} \Rightarrow \frac{s'}{\bar{x}'}\le\frac{1}{10} \Rightarrow \frac{2}{16+c}\le\frac{1}{10} \Rightarrow}$

$\mathbf{20\le 16+c \Rightarrow c\ge 4}$ και αφού $\mathbf{c\in\Omega}$ έχω: $\mathbf{c=4}$ ή $\mathbf{c=5}$ ή $\mathbf{c=6}$

Έτσι $\mathbf{\Gamma=\{4,5,6\}}$

Ε. Έχουμε: $\mathbf{A \cap \Gamma = \{4,5\}}$

$\mathbf{B - \Gamma = \{2,3\}}$

$\mathbf{A \cup \Gamma = \{1,4,5,6\}}$

$\mathbf{B \cup A' = \{2,3,5,6\}}$, αφού $\mathbf{A' = \{2,3,6\}}$

Έτσι $\mathbf{P(A \cap \Gamma) = P(4) + P(5) = \frac{2}{9} + \frac{1}{6} = \frac{7}{18}}$

$\mathbf{P(B - \Gamma) = P(2) + P(3) = \frac{1}{18} + \frac{1}{3} = \frac{7}{18}}$

$\mathbf{P(A \cup \Gamma) = P(1) + P(4) + P(5) + P(6) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{11}{18}}$

$\mathbf{P(B \cup A') = P(2) + P(3) + P(5) + P(6) = \frac{1}{18} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{12}{18}}$

Γ' ΤΑΞΗ ΓΕΝ. ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία βιβλίο Ο.Ε.Δ.Β. σελίδα 150-151

Α2. Θεωρία βιβλίο Ο.Ε.Δ.Β. σελίδα 70

Α3. Θεωρία βιβλίο Ο.Ε.Δ.Β. σελίδα 22

Α4. **α.** ΣΩΣΤΟ
β. ΣΩΣΤΟ
γ. ΛΑΘΟΣ
δ. ΣΩΣΤΟ
ε. ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η παράγωγος συνάρτηση της f είναι

$$f'(x)=3x^2-2\kappa x\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

$$\left.\begin{aligned} f'(-1)&=3+2\kappa \\ f'(1)&=3-2\kappa \end{aligned}\right\}\ \text{οπότε}$$

$$f'(-1)=-3f'(1)\Leftrightarrow 3+2\kappa=-3(3-2\kappa)\Leftrightarrow$$

$$3+2\kappa=-9+6\kappa\Leftrightarrow 4\kappa=12\Leftrightarrow \boxed{\kappa=3}$$

Β2. Για κ=3 έχουμε $f(x)=x^3-3x^2+4$ και $f'(x)=3x^2-6x\ ,\ x\in\mathbb{R}$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 3x(x-2)=0\Leftrightarrow x=0\ \text{ή}\ x=2$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow 3x(x-2)>0\Leftrightarrow x<0\ \text{ή}\ x>2$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f΄(x)		+	0	−	0	+	
f(x)		↗	4 τ.μ	↘	0 τ.ε	↗	

<u>Μονοτονία</u>

Αν $x \in (-\infty, 0]$ η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Αν $x \in [0, 2]$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

Αν $x \in [2, +\infty)$ η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

<u>Ακρότατα</u>

Στο $x_0=0$ έχουμε τοπικό μέγιστο το $f(0)=4$ και
στο $x_0=2$ έχουμε τοπικό ελάχιστο το $f(2)=0$.

Β3. Έχουμε:

<u>Α΄ ΤΡΟΠΟΣ</u>

$f(3+h)=(3+h)^3-3(3+h)^2+4$ οπότε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^3-3(3+h)^2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2(3+h-3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2 h}{h}=\lim_{h\to 0}(3+h)^2=9$$

<u>Β΄ ΤΡΟΠΟΣ</u>

$f(3)=3^3-3\cdot 3^2+4=4$ και $f'(3)=3\cdot 3^2-6\cdot 3=9$.

$$L=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=f'(3)=9$$

Το σημείο επαφής είναι Μ(3,4). Η εφαπτομένη στο Μ(3,4) έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με $f'(3)=9$ και η εξίσωσή της είναι $y=9x+\beta$.
Επειδή όμως το σημείο Μ ανήκει στην ευθεία έχουμε $4=9\cdot 3+\beta \Leftrightarrow \beta=-23$ Άρα η εξίσωση της εφαπτόμενης είναι $y=9x-23$.

Β4. Έχουμε $f''(x)=6x-6$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x-6=0 \Leftrightarrow x=1$

$f''(x)>0 \Leftrightarrow 6x-6>0 \Leftrightarrow x>1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f΄΄(x)		–	0	+	
f΄(x)		↘	-3 ο.ε.	↗	

Άρα το σημείο στην τετμημένη του οποίου ο ρυθμός μεταβολής της $y=f(x)$ ως προς x έχει την ελάχιστη τιμή είναι το $(1, f(1))$ δηλαδή $(1, 2)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το μέσον της δεύτερης κλάσης είναι 35 και της τέταρτης 55. Άρα

$$35+\frac{c}{2}+c+\frac{c}{2}=55 \Leftrightarrow 2c=55-35 \Leftrightarrow \boxed{c=10}.$$

Επομένως οι 4 κλάσεις είναι [20,30), [30,40), [40,50) και [50,60).

Γ2. Από το ιστόγραμμα συχνοτήτων έχουμε $\nu_1=12$ και $\nu_4=4$

$\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4=40 \Leftrightarrow \nu_2+\nu_3=24 \quad (1)$

$$\bar{x}=\frac{12\cdot 25+35\cdot \nu_2+45\cdot \nu_3+4\cdot 55}{40} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 300+35\cdot\nu_2+45\cdot\nu_3+220=1440 \Leftrightarrow 35\cdot\nu_2+45\cdot\nu_3=920 \quad (2)$

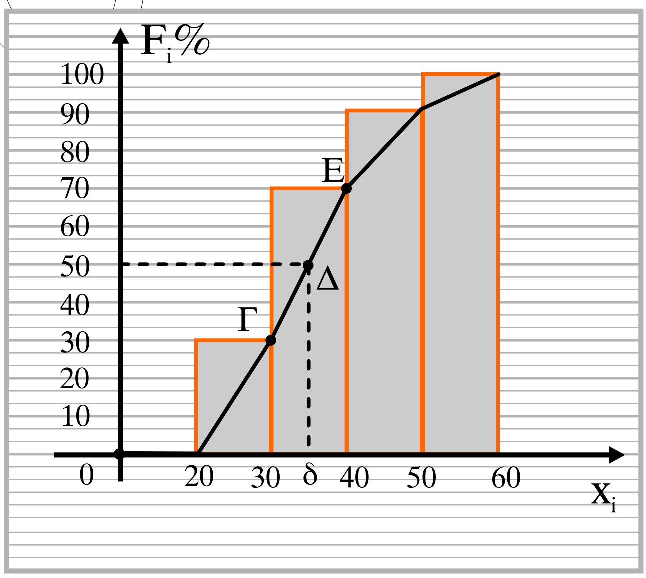
Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2)

$$\left.\begin{aligned}\nu_2+\nu_3&=24\\ 35\nu_2+45\nu_3&=920\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned}-45\nu_2-45\nu_3&=-1080\\ 35\nu_2+45\nu_3&=920\end{aligned}\right\} \Rightarrow (+)$$

$-10\nu_2=-160 \Leftrightarrow \nu_2=16$ οπότε $\nu_3=8$.

Γ3.

[−)	**x_i**	**ν_i**	**f_i**	**F_i**	**F_i%**
[20,30)	25	12	0,3	0,3	30
[30,40)	35	16	0,4	0,7	70
[40,50)	45	8	0,2	0,9	90
[50,60)	55	4	0,1	1	100
Σύνολο		40	1		



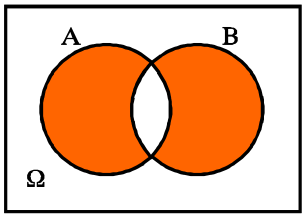
Έχουμε Γ(30,30), Δ(δ,50), Ε(40,70) και

$$\lambda_{\Gamma\Delta}=\frac{50-30}{\delta-30}=\frac{20}{\delta-30}$$

$$\lambda_{\Gamma E}=\frac{70-30}{40-30}=\frac{40}{10}=4 \text{ οπότε}$$

$$\lambda_{\Gamma\Delta}=\lambda_{\Gamma E}\Leftrightarrow\frac{20}{\delta-30}=4\Leftrightarrow 4\delta=140\Leftrightarrow\delta=35.$$

Γ4. $P(A-B)+P(B-A)=P(A\cup B)-P(A\cap B)=$
$=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)\quad(1)$



$$\left.\begin{array}{l}P(A')\le 0,25\Leftrightarrow 1-P(A)\le 0,25\Leftrightarrow P(A)\ge 0,75\\ P(B')\le 0,65\Leftrightarrow 1-P(B)\le 0,65\Leftrightarrow P(B)\ge 0,35\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow} P(A)+P(B)\ge 1,1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A)+P(B)-2P(A\cap B)\ge 1,1-2P(A\cap B)\Rightarrow$$

$$\frac{P(A)+P(B)-2P(A\cap B)}{2}\ge 0,55-P(A\cap B)\overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{P(A-B)+P(B-A)}{2}\ge 0,55-P(A\cap B)$$

ΘΕΜΑ Δ

Έχουμε $CV=\frac{s}{|\bar{x}|}\Leftrightarrow\frac{s}{|\bar{x}|}=0,25$

Δ1. $f'(x)=12x^2-2(\bar{x}+2s)x$

Επειδή η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$ είναι παράλληλη στον x΄x έχει συντελεστή διεύθυνσης 0. Οπότε έχουμε
$f'(1)=0\Leftrightarrow 12-2(\bar{x}+2s)=0\Leftrightarrow\bar{x}+2s=6\Leftrightarrow\bar{x}=6-2s$

$$\frac{s}{|\bar{x}|}=0,25\Leftrightarrow\frac{s}{|6-2s|}=0,25\Leftrightarrow s=0,25\cdot|6-2s|$$

- $s=0,25\cdot(6-2s)\Leftrightarrow s=1,5-0,5s\Leftrightarrow\boxed{s=1}$

  Για s=1 έχουμε $\bar{x}=6-2\cdot 1\Leftrightarrow\boxed{\bar{x}=4}$.Τότε ο τύπος της f γίνεται:

  $$f(x)=4x^3-(\bar{x}+2s)x^2+\frac{503}{0,25}+s=\boxed{4x^3-6x^2+2013}.$$

  Έχουμε: $f'(x)=12x^2-12x=12x(x-1)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f΄(x)		+		–		+	
f(x)		↗	2013 τ.μ	↘	2011 τ.ε	↗	

Η f έχει τοπικό μέγιστο το f(0) = 2013 και τοπικό ελάχιστο το f(1) = 2011.

- $s=-0,25\cdot(6-2s)\Leftrightarrow s=-1,5+0,5s\Leftrightarrow s=-3$ απορρίπτεται.

Δ2. Έχουμε $y=x+c$. Τότε

$\overline{y}=\overline{x}+c=4+c$ και $s_y=s=1$

$$CV\le 0,1\Leftrightarrow \frac{s_y}{|\overline{y}|}\le 0,1\Leftrightarrow \frac{1}{|4+c|}\le 0,1\Leftrightarrow |4+c|\ge 10$$

- $4+c\le -10\Leftrightarrow c\le -14$ απορρίπτεται γιατί c>0.
- $4+c\ge 10\Leftrightarrow c\ge 6$

Άρα ο μικρότερος θετικός c είναι ο 6.

Δ3. Έχουμε $P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ και $P(B)=\frac{1}{2\delta-5}$

Επειδή η κατανομή είναι κανονική τότε $\delta=\overline{x}=4$ οπότε $P(B)=\frac{1}{2\cdot 4-5}=\frac{1}{3}$.

i. Έστω $\alpha=P(A\cap B)$ και $\beta=P(A\cup B)$ με $\alpha,\beta\in[0,1]$ τότε

$$P(A\cap B)\cdot P(A\cup B)=\frac{1}{9}\Leftrightarrow \alpha\cdot\beta=\frac{1}{9}\quad (1)$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow$$

$$\beta=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\alpha\Leftrightarrow \alpha+\beta=\frac{5}{6}\quad (2)$$

$$(1)\overset{(2)}{\Rightarrow}\alpha\left(\frac{5}{6}-\alpha\right)=\frac{1}{9}\Leftrightarrow \frac{5}{6}\cdot\alpha-\alpha^2=\frac{1}{9}\Leftrightarrow 18\alpha^2-15\alpha+2=0$$

που έχει ρίζες $\alpha_1=\frac{2}{3}$ και $\alpha_2=\frac{1}{6}$

Επειδή όμως $A\cap B\subseteq B\Rightarrow P(A\cap B)\le P(B)\Rightarrow \alpha\le\frac{1}{3}$ οπότε $\alpha=\frac{1}{6}$

δηλαδή $\boxed{P(A\cap B)=\frac{1}{6}}$

$(2)\Rightarrow \beta=\frac{5}{6}-\frac{1}{6}\Rightarrow \beta=\frac{2}{3}$ δηλαδή $\boxed{P(A\cup B)=\frac{2}{3}}$

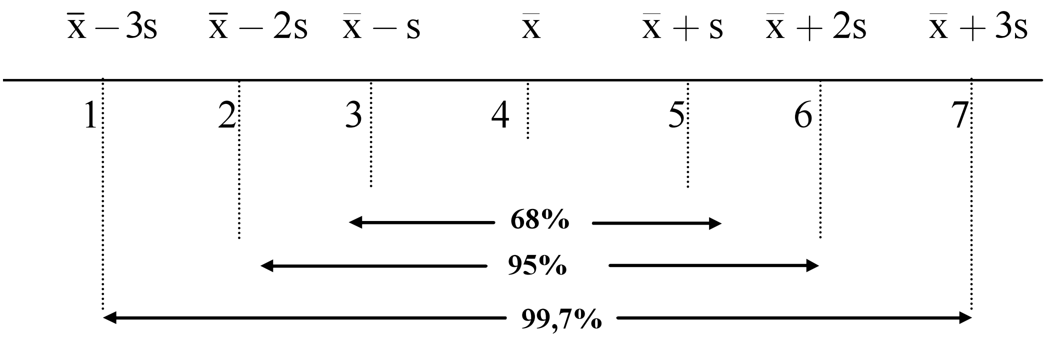
Έχουμε

$$P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')=$$

$$= P(A) + 1 - P(B) - P(A) + P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \text{ δηλαδή}$$

$$\boxed{P(A \cup B') = \frac{5}{6}}$$

iii. Επειδή η κατανομή είναι κανονική ή περίπου κανονική με $\bar{x} = 4$, $s = 1$ και $\bar{x} - 2s = 2$ έχουμε:



Το ποσοστό των παρατηρήσεων x_i, με $x_i \leq 2$ είναι $\frac{100 - 95}{2} = 2{,}5\%$. Τότε το μέγεθος του δείγματος είναι $\nu = 5 \cdot \frac{100}{2{,}5} = 200$.

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 1 Απριλίου 2012

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 151.

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 14.

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 84 (Τα μέτρα θέσης μας δίνουν τη θέση του «κέντρου» των παρατηρήσεων στον οριζόντιο άξονα και τα μέτρα διασποράς την διασπορά των παρατηρήσεων, δηλαδή πόσο αυτές εκτείνονται γύρω από το «κέντρο» τους.

Α4. α→Λ, β→Σ, γ→Σ, δ→Λ, ε→Λ.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αφού το εμβαδόν του πολυγώνου συχνοτήτων είναι 250 θα είναι ν=250 όπου ν το πλήθος των συνταξιούχων του δείγματος.

Το πλάτος c κάθε μιας από τις 5 κλάσεις θα είναι $\frac{R}{5}=\frac{20}{5}=4$.

Αφού το μέσο της δεύτερης κλάσης έχει τετμημένη 10 θα είναι x_2=10 και αν η πρώτη κλάση είναι [κ,κ+c) η δεύτερη θα είναι [κ+c, κ+2c) και θα είναι:

$$x_2=\frac{\kappa+c+\kappa+2c}{2}\Leftrightarrow 10=\frac{\kappa+4+\kappa+8}{2}\Leftrightarrow 2\kappa+12=20\Leftrightarrow \kappa=4.$$

Αφού $f_2\%=a$ θα είναι σύμφωνα με τα δεδομένα

$$f_1\%=3a,\ f_3\%=\frac{a}{2},\ f_4\%=\frac{3a}{10},\ \ f_5\%=\frac{a}{5}.$$

Όμως $f_1\%+f_2\%+f_3\%+f_4\%+f_5\%=100\Leftrightarrow 3a+a+\frac{a}{2}+\frac{3a}{10}+\frac{a}{5}=100\Leftrightarrow a=20.$

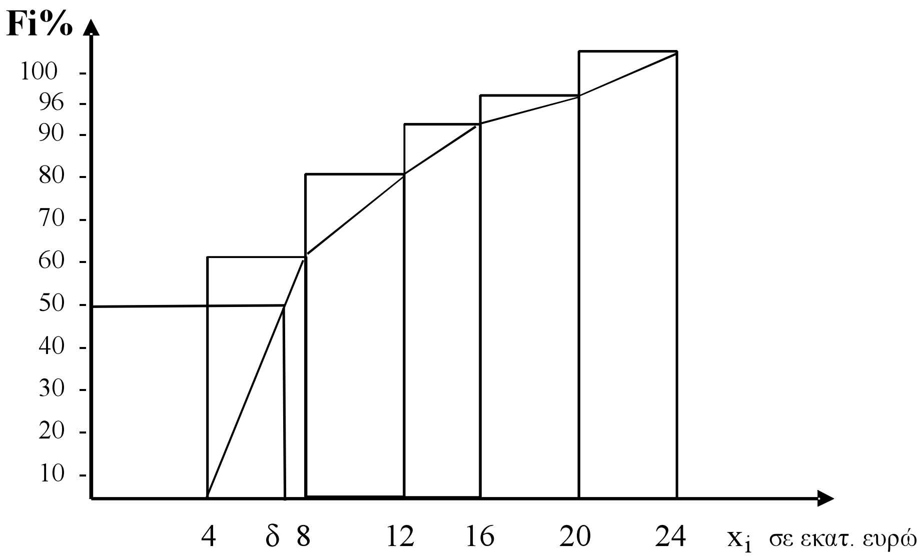
Άρα ο πίνακας συχνοτήτων γράφεται:

Κλάσεις	x_i	$f_i\%$	f_i	ν_i	N_i	$F_i\%$	F_i	$x_i \cdot \nu_i$
[4-8)	6	60	0,60	150	150	60	0,60	900
[8-12)	10	20	0,20	50	200	80	0,80	500
[12-16)	14	10	0,10	25	225	90	0,90	350
[16-20)	18	6	0,06	15	240	96	0,96	270
[20-24)	22	4	0,04	10	250	100	1	220
ΣΥΝΟΛΑ		100	1	250				2240

Για τις συχνότητες ν_i χρησιμοποιήσαμε τον τύπο $\nu_i = f_i \cdot \nu$.

Β2. Για τη μέση τιμή των συντάξεων έχουμε $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} x_i \cdot \nu_i}{\nu} = \dfrac{2240}{250} = 8,96$ εκατοντάδες ευρώ, δηλαδή 896 ευρώ.

Για την εύρεση της διαμέσου των συντάξεων σχηματίζουμε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων $F_i\%$.



Από αυτό έχουμε $\dfrac{\delta - 4}{8-4} = \dfrac{50-0}{60-0} \Leftrightarrow \delta - 4 = \dfrac{4 \cdot 5}{6} \Leftrightarrow \delta \simeq 4 + 3,33 \simeq 7,33$.

Αφού $\bar{x} > \delta$ η κατανομή παρουσιάζει θετική ασυμμετρία.

Β3. Πάνω από 1300 ευρώ δηλαδή από 13 εκατοντάδες είναι τα $\frac{16-13}{16-12}$ της $3^{ης}$ κλάσης και όλοι που είναι στην $4^η$ και στην $5^η$ κλάση, δηλαδή ποσοστό $\left(\frac{3}{4}\cdot 10+6+4\right)\%=17,5\%$ δηλαδή $\frac{17,5}{100}\cdot 2850000=498750$ συνταξιούχοι.

Β4. Μέγιστο ετήσιο εισόδημα 8640 ευρώ σημαίνει ότι το μέγιστο μηνιαίο εισόδημα είναι $\frac{8640}{12}=720$ ευρώ, δηλαδή 7,2 εκατοντάδες ευρώ.

i. Από 4-7,2 εκατοντάδες ευρώ ανήκουν $\frac{7,2-4}{8-4}=\frac{3,2}{4}=0,80$=80% των συνταξιούχων της πρώτης κλάσης, δηλαδή ποσοστό $0,80\cdot 60=48\%$ του συνόλου των συνταξιούχων. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι 48%.

ii. Το ποσό που θα αφαιρεθεί από τις ανώτερες κλάσεις του δείγματος ανά μήνα είναι $100\cdot 25+200\cdot 15+400\cdot 10=2500+3000+4000=9500$ ευρώ και θα διανεμηθεί σε $\frac{80}{100}\cdot 150=120$ της $1^{ης}$ κλάσης. Άρα καθένας από τους δικαιούχους θα πάρει $\frac{9500}{120}=79,16$ ευρώ ανά μήνα.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για την f(x) πρέπει να ισχύουν: $(x\geq 0$ και $x-4\neq 0)$. Άρα $A_f=[0,4)\cup(4,+\infty)$.
Για την g(x) πρέπει να ισχύουν: $(x>0$ και $x\geq 0)$ δηλαδή x>0. Άρα $A_g=(0,+\infty)$.

Γ2. $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=\lim\limits_{x\to 4}\frac{3\sqrt{x}-6}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{3\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{3}{\sqrt{x}+2}=\frac{3}{4}=\mathrm{P(A)}$.

Είναι: $g'(x)=\frac{2\mathrm{P(B)}}{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{16}2x=\frac{2\mathrm{P(B)}}{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{x}{8}$

οπότε $g'(4)=\frac{2\mathrm{P(B)}}{4}+\frac{1}{4}+\frac{4}{8}$.

Αν $\omega=\frac{\pi}{4}$ τότε

εφω=εφ$\frac{\pi}{4}=1=g'(4)\Leftrightarrow\frac{2P(B)}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=1\Leftrightarrow\frac{2P(B)}{4}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow P(B)=\frac{1}{2}$.

Γ3. α Αν $P(A\cap B)=\frac{2}{3}>\frac{1}{2}=P(B)$ άτοπο γιατί $(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\subseteq\mathrm{B}$.

Αν $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$ τότε $P(A\cup B)=\mathrm{P(A)}+\mathrm{P(B)}-\mathrm{P(A\cap B)}=$

$$=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{9}{12}+\frac{6}{12}-\frac{2}{12}=\frac{13}{12}>1 \text{ άτοπο.}$$

Άρα $P(A\cap B)=\frac{2}{5}$.

β $P(A\cup B')=P(\mathrm{A})+P(B')-P(A\cap B')=P(A)+1-P(B)-P(A-B)=$

$$=P(\mathrm{A})+1-P(B)-P(A)+P(A\cap B)=1-\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=\frac{9}{10}.$$

γ. $P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=$

$=P(\mathrm{A}-B)+P(B-A)=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=$

$=\frac{3}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-\frac{4}{5}=\frac{15}{20}+\frac{10}{20}-\frac{16}{20}=\frac{9}{20}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x)=-4x^3+4x=-4x\cdot(x^2-1)$

x	$-\infty$		**-1**		**0**		**1**		$+\infty$
-4x		+		+	0	−		−	
x^2-1		+	0	−		−	0	+	
f΄(x)		+	0	−	0	+	0	−	
f(x)		↗		↘		↗		↘	

Άρα η $f\uparrow(-\infty,-1]$, $f\downarrow[-1,0]$, $f\uparrow[0,1]$, $f\downarrow[1,+\infty)$.

Έχει τοπικό μέγιστο για x_1=-1 το $f(-1)=2$ και για x_3=1 το $f(1)=2$ και τοπικό ελάχιστο για x_2=0 το f(0)=1.

Δ2. i) Είναι: $0 \le P(B) \le 1$ και $f \uparrow$ στο $[0,1]$.

Συνεπώς: $f(0) \le f\left(P(B)\right) \le f(1) \Leftrightarrow 1 \le P(A) \le 2$ και $0 \le P(A) \le 1$ και αφού ο δειγματικός χώρος αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα P(A)=1 και A=Ω.

Ακόμα:

$f\left(P(B)\right) = P(A) \Leftrightarrow -P^4(B) + 2P^2(B) + 1 = 1 \Leftrightarrow P^2(B)\cdot\left(2 - P^2(B)\right) = 0 \Leftrightarrow$

$P(B) = 0$ ή $P(B) = \pm\sqrt{2}$ απορ. αφού $0 \le P(B) \le 1$

Άρα P(B)=0 και $B = \varnothing$.

Δ2. ii. α)

- $\Gamma \ne A = \Omega$ και $\Gamma \ne B = \varnothing$

  Άρα:

  $0 < P(\Gamma) < 1 \Leftrightarrow 0 < 2P(\Gamma) < 2 \Leftrightarrow 0 < \nu_1 < 2$ και $\nu_1 \in \mathbb{N} \Rightarrow \nu_1 = 1$,

  οπότε $P(\Gamma) = \frac{1}{2}$

- $\Delta \ne \Omega, \varnothing$ και $\Gamma \subseteq \Delta$, $\Gamma \ne \Delta$

  Άρα:

  $P(\Gamma) < P(\Delta) < 1 \Leftrightarrow 4P(\Gamma) < 4P(\Delta) < 4 \Leftrightarrow 2 < \nu_2 < 4$ και $\nu_2 \in \mathbb{N} \Rightarrow \nu_2 = 3$,

  οπότε $P(\Delta) = \frac{3}{4}$.

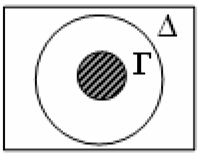
Συνεπώς:

x_i	ν_i
1	1
2	3
3	5
4	1
	ν=10

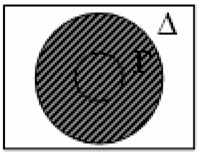
β) $\delta = \frac{t_5 + t_6}{2} = \frac{3+3}{2} = 3$.

γ) Είναι $\Gamma \cap \Delta = \Gamma$

οπότε $P(\Gamma \cap \Delta) = P(\Gamma) = \frac{1}{2}$



και $\Gamma \cup \Delta = \Delta$ οπότε $P\left(\Gamma \cup \Delta\right) = P(\Delta) = \frac{3}{4}$



ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 7 Απριλίου 2013
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Σχολικό βιβλίο Σελίδες 28-29.

Α.2. Σχολικό βιβλίο Σελίδες 86-87.

Α.3. Σχολικό βιβλίο Σελίδα 16.

Α.4. α→Σ, β→Λ, γ→Λ, δ→Σ, ε→Σ.

ΘΕΜΑ Β

Β.1. Αφού το εύρος $R = 20\min$ και το πλήθος των κλάσεων είναι $\kappa = 5$, τότε $c = \dfrac{R}{\kappa} = \dfrac{20}{5} = 4$. Αν οι κλάσεις είναι $[a, a+4), [a+4, a+8), [a+8, a+12)$,
από την κεντρική τιμή της 3ης κλάσης
$x_3 = \dfrac{(a+8)+(a+12)}{2} \Leftrightarrow 10 = \dfrac{2a+20}{2} \Leftrightarrow 20 = 2a+20 \Leftrightarrow a = 0$,
άρα οι κλάσεις είναι $[0,\ 4), \{4,\ 8), \{8,\ 12), [12,\ 16), [16,\ 20)$.
Έχουμε επίσης ότι $N_5 = 50$, αφού $N_5 = \nu$, άρα $\nu = 50$.
Επίσης, δίνεται ότι 3 μαθητές περιμένουν λιγότερο από 4min άρα $\nu_1 = 3$, έτσι:

$f_1 = \dfrac{\nu_1}{\nu} = \dfrac{3}{50} = \dfrac{6}{100} = 0{,}06$ και $F_2 = 0{,}2$, άρα

$f_1 + f_2 = 0{,}2 \Leftrightarrow f_2 = 0{,}2 - 0{,}06 \Leftrightarrow f(2) = 0{,}14$

$\dfrac{\nu_2}{\nu} = 0{,}14 \Leftrightarrow \dfrac{\nu_2}{50} = 0{,}14 \Leftrightarrow \nu_2 = 7$.

Δίνεται επίσης ότι 20 μαθητές περιμένουν λιγότερο από 12mm, άρα
$N_3 = 20 \Leftrightarrow \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = 20 \Leftrightarrow 10 + \nu_3 = 20 \Leftrightarrow \nu_3 = 10$, άρα

$f_3 = \frac{\nu_3}{\nu} = \frac{10}{50} = 0{,}2$ και $F_3 = f_1 + f_2 + f_3 = 0{,}4$, δίνεται επίσης ότι το 84% των μαθητών περιμένουν χρόνο λιγότερο από 16min, άρα
$F_4\% = 84 \Leftrightarrow F_4 = 0{,}84 \Leftrightarrow f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 0{,}84$, οπότε

$f_4 = 0{,}84 - 0{,}4 = 0{,}44$ και $\frac{\nu_4}{\nu} = 0{,}44 \Leftrightarrow \frac{\nu_4}{50} = 0{,}44 \Leftrightarrow \nu_4 = 22$

Οπότε $N_4 = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = 3 + 7 + 10 + 22 = 42$, άρα $\nu_5 = 50 - 42 = 8$
έτσι ο πίνακας γίνεται :

Κλάσεις: χρόνος σε min	Κέντρο κλάσης x_i	Συχνότητα ν_i	N_i	f_i	F_i	$F_i\ \%$
[0,4)	2	3	3	0,06	0,06	**6**
[4,8)	6	7	10	0,14	0,2	**20**
[8,12)	10	10	20	0,2	0,4	**40**
[12,16)	14	22	42	0,44	0,84	**84**
[16,20)	18	8	50	0,16	**1**	**100**
Σύνολο		**50**		**1**		

Β.2. Για το μέσο χρόνο αναμονής και τη διασπορά:

Κλάσεις: χρόνος σε min	x_i	ν_i	$x_i \cdot \nu_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \nu_i$
[0,4)	2	3	6	-10	100	**300**
[4,8)	6	7	42	-6	36	**252**
[8,12)	10	10	100	-2	4	**40**
[12,16)	14	22	308	2	4	**88**
[16,20)	18	8	144	6	36	**288**
Σύνολο		**50**	**600**			**968**

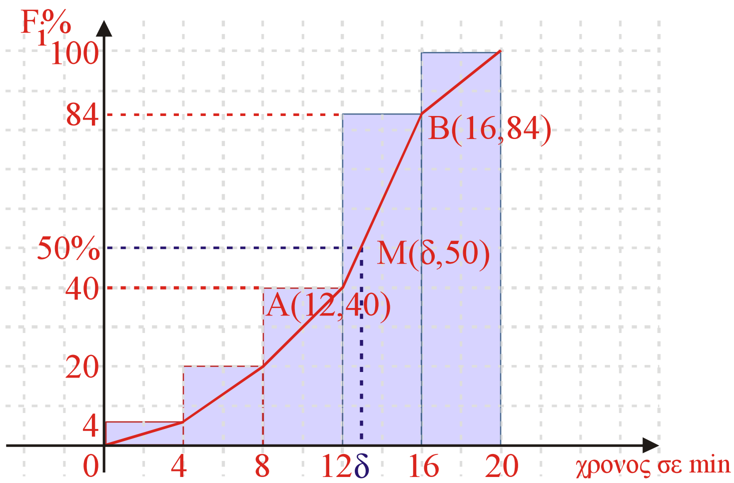
Άρα $\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa} x_i \cdot \nu_i = \frac{1}{50}\cdot 600 = 12\,\text{min}$ και η διασπορά ή διακύμανση $s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \cdot \nu_i$, δηλαδή $s^2 = \frac{1}{50}968 = \frac{1936}{100} = 19{,}36\,\text{min}^2$, οπότε $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{19{,}36} = 4{,}4\,\text{min}$.

Η διάμεσος δ σε ομαδοποιημένη κατανομή αντιστοιχεί στην τιμή $x = \delta$ της μεταβλητής x (στον οριζόντιο άξονα) έτσι ώστε το 50% των παρατηρήσεων να είναι μικρότερες ή ίσες του δ. Δηλαδή η διάμεσος έχει αθροιστική σχετική συχνότητα $F_1 = 50\,\%$ έτσι στο σχήμα από το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό τα σημεία Α, Μ, Β είναι συνευθειακά έτσι:

$\lambda_{AB} = \lambda_{AM} \Leftrightarrow \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A}$ ή

$\frac{84-40}{16-12} = \frac{50-40}{\delta-12} \Leftrightarrow \frac{44}{4} = \frac{10}{\delta-12} \Leftrightarrow 11(\delta-12) = 10$ ή

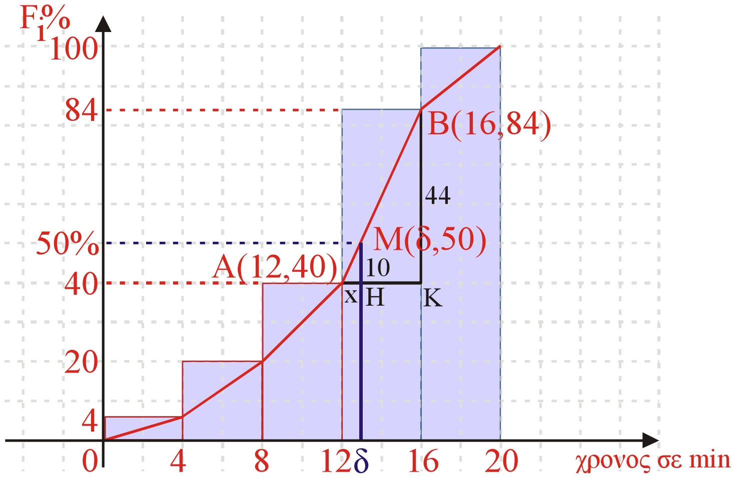
$11\delta - 132 = 10 \Leftrightarrow 11\delta = 142 \Leftrightarrow \delta = \frac{142}{11} = 12{,}9\,\text{min}$ περίπου



<u>Β΄ τρόπος</u>

Από τα όμοια τρίγωνα $\text{AHM} \approx \text{AKB}$ ή λόγω θεωρήματος Θαλή έχουμε $\frac{\text{AH}}{\text{AK}} = \frac{\text{HM}}{\text{KB}}$, δηλαδή $\frac{x}{4} = \frac{10}{44} \Leftrightarrow x = \frac{10}{11} \Leftrightarrow x = 0{,}9$ περίπου

Άρα η διάμεσος $\delta = 12 + x = 12 + 0{,}9 = 12{,}9$ περίπου



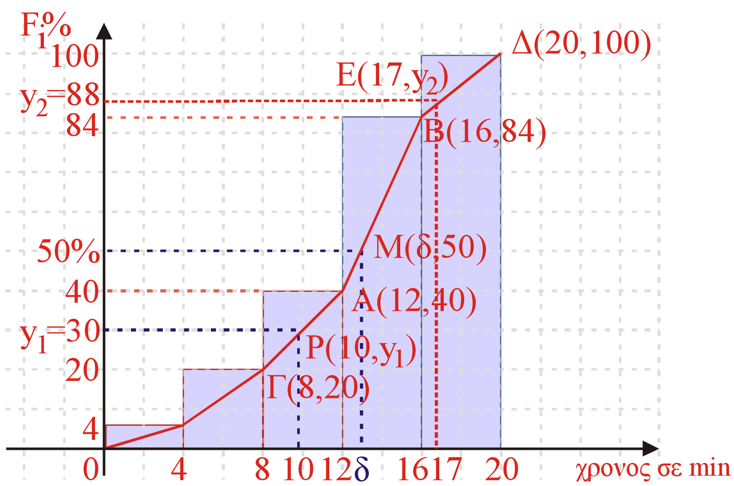
Β.3. **α)** Από το σχήμα έχουμε $\Gamma(8{,}20)$, $P(10, y_1)$, $A(12{,}40)$

$$\lambda_{\Gamma A} = \lambda_{\Gamma P} \Leftrightarrow \frac{y_A - y_\Gamma}{x_A - x_\Gamma} = \frac{y_P - y_\Gamma}{x_P - x_\Gamma} \Leftrightarrow \frac{40-20}{12-8} = \frac{y_1 - 20}{10-8}, \text{ άρα}$$

$$\frac{20}{4} = \frac{y_1 - 20}{2} \Leftrightarrow 5 = \frac{y_1 - 20}{2} \Leftrightarrow y_1 - 20 = 10 \Leftrightarrow y_1 = 30$$

άρα το 30% των μαθητών έχει χρόνο αναμονής κάτω από 10 min (οπότε το 70% κάνει χρόνο από 10 min και πάνω) άρα για το ενδεχόμενο Α={ο χρόνος αναμονής του μαθητή είναι μικρότερος από 10 min }, **έχουμε**

$$P(A) = P(t < 10 \text{ min}) = \frac{30}{100} = 0{,}3$$



$$\lambda_{B\Delta} = \lambda_{BE} \Leftrightarrow \frac{y_\Delta - y_B}{x_\Delta - x_B} = \frac{y_E - y_B}{x_E - x_B} \Leftrightarrow \frac{100-84}{20-16} = \frac{y_2 - 84}{17-16}, \text{ άρα}$$

$$\frac{16}{4} = \frac{y_2 - 84}{1} \Leftrightarrow 4 = y_2 - 84 \Leftrightarrow y_2 = 88$$

Άρα το 88% των μαθητών έχει χρόνο αναμονής κάτω από 17 min, από αυτούς το 20% έχει χρόνο αναμονής κάτω από 8 min, άρα χρόνο αναμονής τουλάχιστον 8 min και λιγότερο από 17 min έχει το $88-20=68\%$ του συνόλου των μαθητών. Έτσι για την πιθανότητα του ενδεχομένου Β={ο χρόνος αναμονής του μαθητή είναι τουλάχιστον $8\,\text{min}$ και λιγότερος από $17\,\text{min}$ },**έχουμε**

$$P(B)=P(8\le t<17\text{ min})=\frac{68}{100}=0{,}68$$

β) Θεωρούμε το ενδεχόμενο $A\cap B=\{$ο χρόνος αναμονής του μαθητή $8\text{ min}\le t\le 10\text{ min}$ $\}$, τότε το 30% των μαθητών έχει χρόνο αναμονής κάτω από 10 min, από αυτούς το 20% έχει χρόνο αναμονής κάτω από 8 min, οπότε το $30-20=10\%$ έχει χρόνο αναμονής $8\text{ min}\le t\le 10\text{ min}$,

άρα $P(A\cap B=\dfrac{10}{100}=0{,}1$, οπότε

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}3+0{,}68-0{,}1=0{,}88$,ενώ

$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=0{,}3-0{,}1=0{,}2$,

έτσι $P\big((A\cup B)-A\big)=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=0{,}68-0{,}1=0{,}58$

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1. Αρχικά για το όριο: $\delta=13\cdot\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{5x-5}{2\sqrt{x+3}-4}\right)$

Πρέπει $x+3\ge0$ **και** $2\sqrt{x+3}-4\ne0$ όποτε $x\ge-3$ και $\sqrt{x+3}\ne2$, άρα $x\ge-3$ και $x+3\ne4$, έτσι έχουμε $x\ge-3$ και $x\ne1$, άρα η συνάρτηση ορίζεται στο σύνολο $A=[-3,1)\cup(1,+\infty)$ άρα για τη συνάρτηση έχουμε:

$$f(x)=\frac{5(x-1)}{2\left(\sqrt{x+3}-2\right)}=\frac{5(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{2\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}\text{ ή}$$

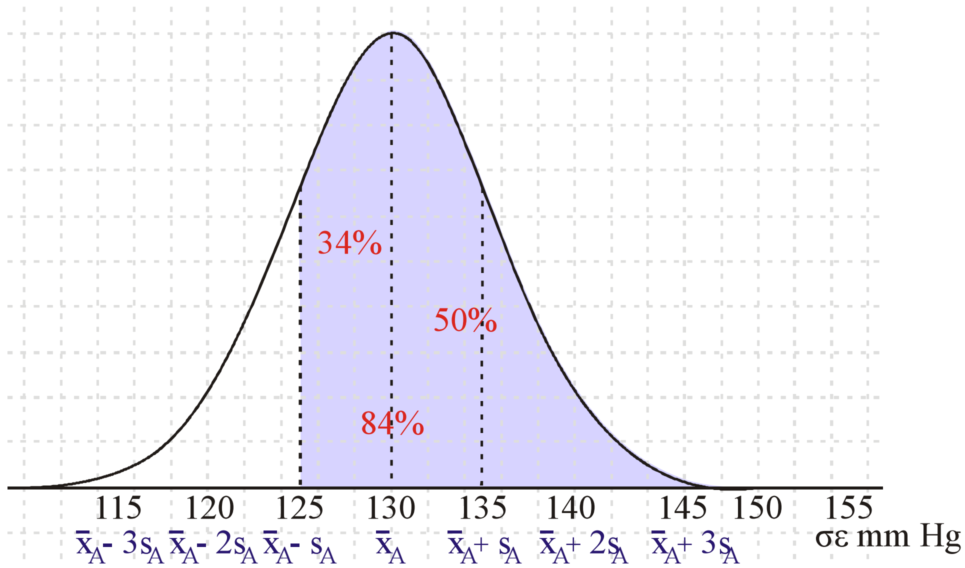
$$f(x)=\frac{5(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{2\left(\left(\sqrt{x+3}\right)^2-2^2\right)}=\frac{5(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{2(x+3-4)}=\frac{5\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{2}\text{ άρα}$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\left(\frac{5x-5}{2\sqrt{x+3}-4}\right)=\lim_{x\to1}\frac{5\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{2}=\frac{5\cdot4}{2}=10$$

Έτσι $\delta=13\cdot\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{5x-5}{2\sqrt{x+3}-4}\right)=13\cdot10=130\,mm\,Hg$

Όπως γνωρίζουμε στην κανονική κατανομή, η μέση τιμή χωρίζει το σύνολο των παρατηρήσεων με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε το 50% των παρατηρήσεων να είναι μικρότερες ή ίσες της $\bar{x}$ και το 50% των παρατηρήσεων να είναι

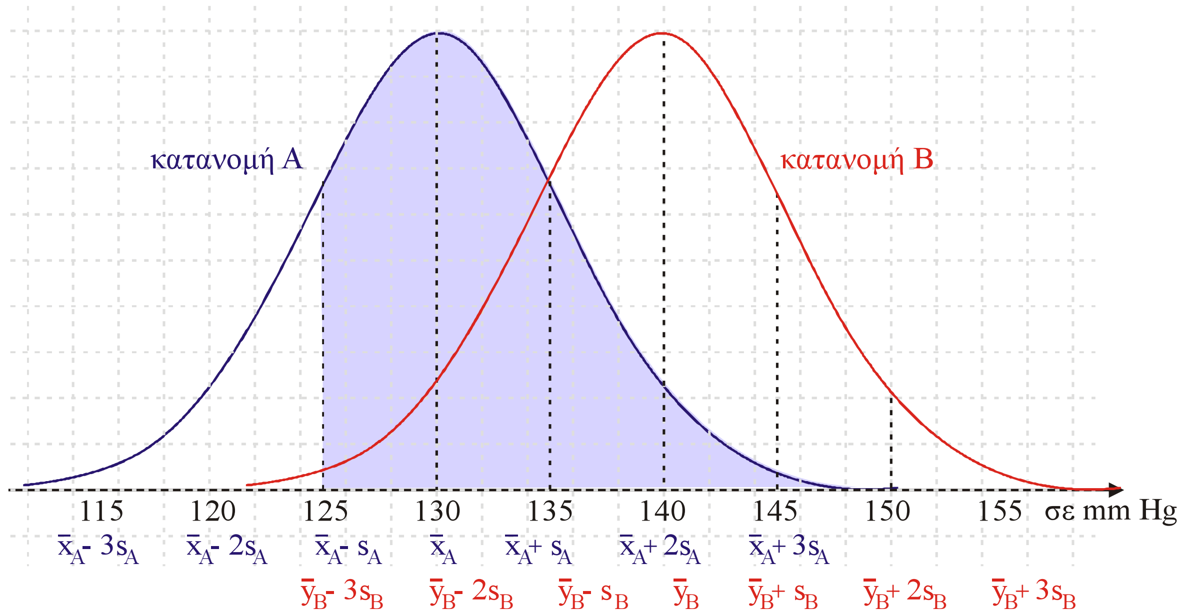
μεγαλύτερες ή ίσες της $\bar{x}$. Δηλαδή στην κανονική κατανομή ισχύει ότι η διάμεσος και η μέση τιμή ταυτίζονται έτσι $\delta = \bar{x} = 130\ mm\,Hg$.
Αποδεικνύεται ότι στην κανονική κατανομή:
το 84% έχει συστολική πίεση $x > \bar{x}_A - s_A$
από το πρόβλημα δίνεται ότι:
το 84% έχει συστολική πίεση μεγαλύτερη από $125\ mm\,Hg$, άρα πρέπει,
$\bar{x}_A - s_A = 125\ mm\,Hg$, όμως $\bar{x} = 130\ mm\,Hg$,
άρα $130 - s_A = 125 \Leftrightarrow s_A = 5\ mm\,Hg$
Έτσι για την κατανομή Α έχουμε:



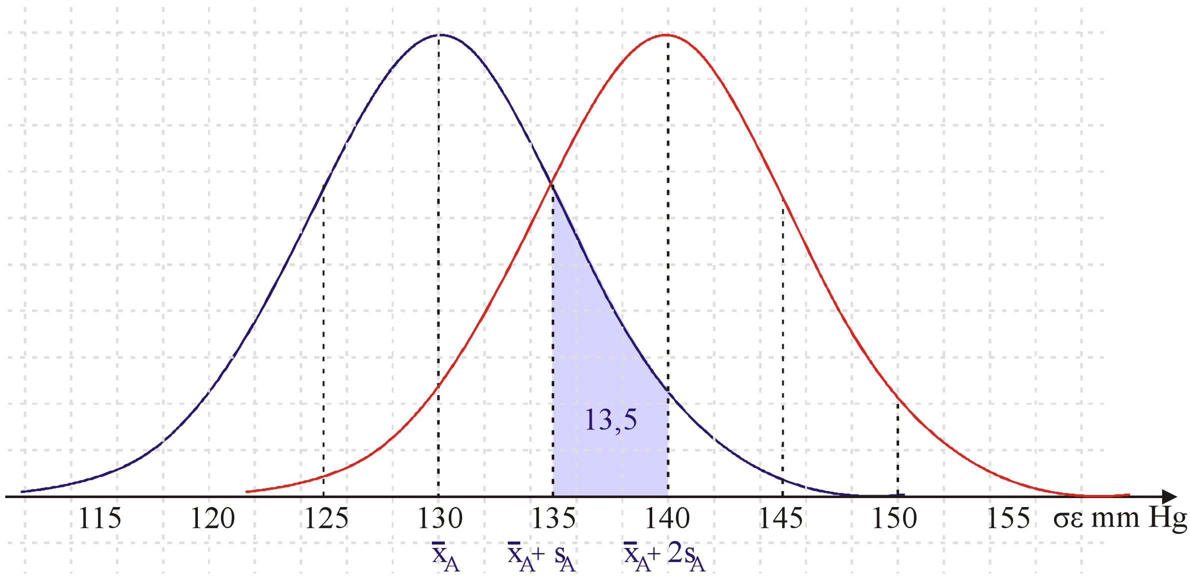
Για τον συντελεστή μεταβολής $CV_A = \frac{s_A}{|\bar{x}_A|} = \frac{5}{130} = \frac{1}{26} < \frac{1}{10}$, άρα το δείγμα Α είναι ομοιογενές.

Γ.2. **α)**
Για το δείγμα Β ξέρουμε ότι κάθε άτομο του δείγματος αυτού παρουσιάζει συστολική πίεση $y_i = x_i + 10$ σε mm Hg, για κάθε $i = 1,2,\ldots,\nu$, σε σχέση με τη συστολική πίεση x_i των ατόμων του δείγματος Α.
Άρα, από γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου, θα ισχύει ότι
$\bar{y}_B = \bar{x}_A + 10 = 130 + 10 = 140\ mm\,Hg$
Ενώ $s_B = s_A = 5\ mm\,Hg$.

Οπότε $CV_B = \frac{s_B}{|\bar{y}_B|} = \frac{5}{140} < \frac{5}{130} = CV_A$, έτσι το δείγμα Β παρουσιάζει μεγαλύτερη ομοιογένεια σε σχέση με το δείγμα Α.



Γ.2. β)



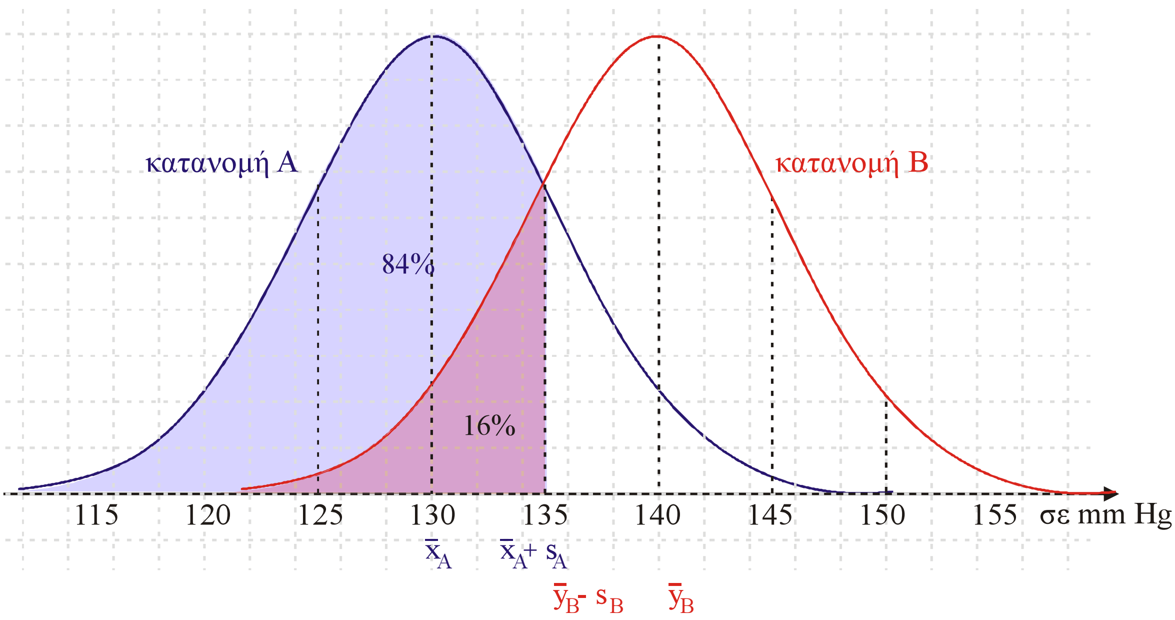
i. Από την υπόθεση έχουμε ότι το πλήθος των ατόμων του δείγματος Α, στο διάστημα $[\bar{x}_A + s_A, \bar{x}_A + 2s_A]$, είναι ίσο με 540, όμως το παραπάνω διάστημα περιέχει το 13,5% του πλήθους ν_A των ατόμων της κατανομής Α, άρα $13{,}5\%\,\nu_A = 540 \Leftrightarrow \frac{13{,}5}{100}\nu_A = 540 \Leftrightarrow 13{,}5\,\nu_A = 54.000$.

Δηλαδή $\nu_A = \frac{54000}{13{,}5} = 4000$, έτσι $\nu_A = \nu_B = 4.000$ άτομα.

ii. Οπότε συνολικά και από τα δύο δείγματα έχουν συστολική πίεση κάτω από 135 mm Hg

- Το 84 % των ατόμων της κατανομής Α
- Το 16 % των ατόμων της κατανομής Β

Άρα συνολικά $\frac{84}{100}4.000 + \frac{16}{100}4.000 = 4.000$ άτομα



ΘΕΜΑ Δ

Δ.1. α. $f'(x) = \frac{-2ax}{(ax^2+1)^2}$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης $(\varepsilon): y = -\frac{1}{2}x + \beta$ είναι $\lambda = -\frac{1}{2}$ και ισούται με την παράγωγο της f στο $x_0 = 1$, επομένως είναι:

$f'(1)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{-2a}{(a+1)^2}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow(a+1)^2=4a\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow a=1$, οπότε η συνάρτηση f γίνεται $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ και είναι $f(1)=\frac{1}{2}$.

Για $x=1$ και $y=\frac{1}{2}$ στην (ε) βρίσκουμε: $\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+\beta\Leftrightarrow\beta=1$.

β. $f'(x)=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}=0\Leftrightarrow x=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	τ.μ.	$\searrow$	

Στο διάστημα $(-\infty,0]$ η f είναι γνησίως αύξουσα και στο διάστημα $[0,+\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα.
Στο $x=0$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(0)=1$, το οποίο είναι και ολικό μέγιστο, αφού για $x\geq 0$ είναι $f(x)\leq f(0)=1$ και για $x\geq 0$ είναι $f(x)\leq f(0)=1$, δηλαδή για κάθε $x\in\Re$ είναι $f(x)\leq f(0)=1$.

Δ.2. α. Αν Α ένα ενδεχόμενο ενός δειγματικού χώρου Ω, τότε ισχύει $0\leq P(A)\leq 1$, οπότε πρέπει $0\leq y\leq 1$,

$$0\leq -\frac{1}{2}x+1\leq 1\Leftrightarrow 0\leq -x+2\leq 2\Leftrightarrow -2\leq -x\leq 0\Leftrightarrow 0\leq x\leq 2$$

Δ.2. β) Είναι $y_1=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}+1=\frac{4}{5}$

$y_2=-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}+1=\frac{3}{5}$

$y_3=-\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{5}+1=\frac{3}{10}$

Οπότε $\{y_1,y_2,y_3\}=\left\{\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{3}{10}\right\}$

i. Οι πιθανότητες των ενδεχομένων $(A\cap B)'$, $A\cup B$, και Α είναι οι αριθμοί $\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{3}{10}$, όχι απαραίτητα με την ίδια σειρά.

Η αύξουσα σειρά αυτών των αριθμών είναι $\frac{3}{10},\frac{3}{5},\frac{4}{5}$.

Είναι $A \subseteq A \cup B$, οπότε $P(A) \le P(A \cup B)$.

Αν $P(A) = \frac{3}{5}$ και $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$, τότε υποχρεωτικά πρέπει να είναι $P((A \cap B)') = \frac{3}{10}$, αλλά τότε $1 - P(A \cap B) = \frac{3}{10} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{7}{10} > P(A)$ που είναι άτοπο γιατί ισχύει $P(A \cap B) \le P(A)$, αφού $A \cap B \subseteq A$.

Αν $P(A) = \frac{3}{10}$ και $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$, τότε υποχρεωτικά πρέπει να είναι $P((A \cap B)') = \frac{3}{5}$, αλλά τότε $1 - P(A \cap B) = \frac{3}{5} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{5} > P(A)$ που είναι άτοπο γιατί ισχύει $P(A \cap B) \le P(A)$, αφού $A \cap B \subseteq A$.

Επομένως είναι: $P(A) = \frac{3}{10}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$ και $P((A \cap B)') = \frac{4}{5}$.

Επειδή είναι $P((A \cap B)') = 1 - P(A \cap B)$, τότε

$$P(A \cap B) = 1 - P((A \cap B)') = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}.$$

ii. Είναι $P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{10} - \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$ (3)

Επίσης είναι $A - B' = A \cap (B')' = A \cap B$, οπότε

$P(A - B') = P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ (4).

Από τις 3 και 4 προκύπτει ότι $P(A \cap B') < P(A - B')$ και αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$, τότε $f(P(A \cap B')) > f(P(A - B'))$.

iii. Είναι $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{3}{5} + \frac{1}{5} - \frac{3}{10} = \frac{4}{5} - \frac{3}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Είναι $\mathrm{B} - \Gamma \subseteq \mathrm{B}$, άρα $P(\mathrm{B} - \Gamma) \le P(\mathrm{B}) \Leftrightarrow P(\mathrm{B} - \Gamma) \le \frac{1}{2}$ (1)

Επίσης, $\mathrm{B} \cap \Gamma \subseteq \Gamma$, άρα $P(\mathrm{B} \cap \Gamma) \le P(\Gamma) \Leftrightarrow P(\mathrm{B} \cap \Gamma) \le \frac{3}{10} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -P(B \cap \Gamma) \ge -\frac{3}{10} \Leftrightarrow P(B) - P(\mathrm{B} \cap \Gamma) \ge P(B) - \frac{3}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(\mathrm{B} - \Gamma) \ge \frac{1}{2} - \frac{3}{10} \Leftrightarrow P(\mathrm{B} - \Gamma) \ge \frac{2}{10} \Leftrightarrow P(\mathrm{B} - \Gamma) \ge \frac{1}{5} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$\frac{1}{5} \le P(\mathrm{B} - \Gamma) \le \frac{1}{2}.$$

Γενικό Λύκειο Νεστορίου
Σχολικό έτος 2013-2014
Βοηθητικό Υλικό της Γ΄ Λυκείου