ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2013
ΔΕΥΤΕΡΑ 20 ΜΑΪΟΥ 2013
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ και ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α:

Α1. $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x+h-x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{h}=\lim\limits_{h\to 0}1=1.$

Α2. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0\in A$ όταν $f(x)\geq f(x_0)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_0.

Α3. Διάμεσος (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν το ν είναι περιττός (μονός) αριθμός, ή ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων όταν το ν είναι άρτιος (ζυγός) αριθμός.

Α4. $\alpha\to$ Λ, $\beta\to$ Σ, $\gamma\to$ Λ, $\delta\to$ Λ, $\varepsilon\to$ Λ

ΘΕΜΑ Β:

Β1. $P(\omega_1)=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}{x^2(x+1)\cdot\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}$

$=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x+\cancel{1}-\cancel{1}}{x^2(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\cancel{x}\,\cancel{(x+1)}}{x^{\cancel{2}}\cancel{(x+1)}\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}$

$=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{(-1)\left(\sqrt{(-1)^2-\cancel{1}+\cancel{1}}+1\right)}=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{-2}=\boxed{\dfrac{1}{4}}$

$f(x)=\dfrac{x}{3}\cdot\ln x\Rightarrow f'(x)=\left(\dfrac{x}{3}\cdot\ln x\right)'=\left(\dfrac{x}{3}\right)'\ln x+\dfrac{x}{3}\cdot(\ln x)'=\dfrac{1}{3}\ln x+\dfrac{x}{3}\cdot\dfrac{1}{x}$

$\Rightarrow f'(x)=\dfrac{\ln x}{3}+\dfrac{1}{3}.$

$P(\omega_3)=f'(1)=\dfrac{\ln 1}{3}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{0}{3}+\dfrac{1}{3}=\boxed{\dfrac{1}{3}}$

B2. $A' = \{\omega_2, \omega_3\}$

$\{\omega_3\} \subseteq A' \subseteq \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ (1)

Έστω $\Gamma = \{\omega_3\}$ και $\Delta = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $E = \{\omega_1\}$, $E' = \Delta$ (2)

τότε (1) $\Rightarrow \Gamma \subseteq A' \subseteq \Delta \Rightarrow P(\Gamma) \leq P(A') \leq P(\Delta) \overset{(2)}{\Rightarrow}$

$P(\Gamma) \leq P(A') \leq P(E') \Rightarrow \frac{1}{3} \leq P(A') \leq 1 - P(E) \Rightarrow \frac{1}{3} \leq P(A') \leq 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{1/3 \leq P(A') \leq \frac{3}{4}}$

B3. *) $P(A') = \frac{3}{4} \Rightarrow P(\omega_2) + P(\omega_3) = \frac{3}{4} \Rightarrow P(\omega_2) = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} \Rightarrow P(\omega_2) = \frac{9}{12} - \frac{4}{12}$

$\Rightarrow \boxed{P(\omega_2) = \frac{5}{12}}$

*) $P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{5}{12} + \frac{1}{3} + P(\omega_4) = 1 \Rightarrow$

$\frac{3}{12} + \frac{5}{12} + \frac{4}{12} + P(\omega_4) = 1 \Rightarrow P(\omega_4) = 1 - 1 \Rightarrow \boxed{P(\omega_4) = 0}$

*) $P[(A-B) \cup (B-A)] = P(\omega_3) + P(\omega_4) = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}$

$\left.\begin{array}{l} A - B = \{\omega_4\} \\ B - A = \{\omega_3\} \end{array}\right\} (A-B) \cup (B-A) = \{\omega_3, \omega_4\}$

$A' = \{\omega_2, \omega_3\}$
$B' = \{\omega_2, \omega_4\}$
| $A' - B' = \{\omega_3\} \Rightarrow P(A' - B') = P(\omega_3) \Rightarrow \boxed{P(A' - B') = \frac{1}{3}}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1

Κλάσεις
$[50, 50+c)$
$[50+c, 50+2c)$
$[50+2c, 50+3c)$
$[50+3c, 50+4c)$

αλλά η κεντρική τιμή της τέταρτης κλάσης είναι $x_4 = 85 \Rightarrow$

$$\frac{50+3c+50+4c}{2} = 85 \Rightarrow$$

$$100+7c = 170 \Rightarrow 7c = 70 \Rightarrow \boxed{c=10}$$

Γ2

Κλάσεις	κέντρο x_i	σχετ. συχνότ. f_i	v_i
$[50, 60)$	55	0,1	$0{,}1v$
$[60, 70)$	65	0,3	$0{,}3v$
$[70, 80)$	75	0,2	$0{,}2v$
$[80, 90)$	85	0,4	$0{,}4v$
ΣΥΝΟΛΟ		1	v

$f_4 = 2f_3$ (2)

$f_1+f_2+f_3+f_4 = 1 \overset{(1)}{\underset{(2)}{\Rightarrow}} f_4 + \frac{f_4}{2} + f_4 = 1 \Rightarrow 5f_4 = 2 \Rightarrow f_4 = \frac{2}{5} \Rightarrow \boxed{f_4 = 0{,}4}$

$\delta = 75 \Rightarrow f_1+f_2+\cancel{\frac{f_3}{2}} = \cancel{\frac{f_3}{2}} + f_4 \Rightarrow \boxed{f_1+f_2 = f_4}$ (1)

(2) $\Rightarrow f_4 = 2f_3 \Rightarrow 0{,}4 = 2f_3 \Rightarrow \boxed{f_3 = 0{,}2}$

(1) $\Rightarrow f_1+f_2 = 0{,}4$

$\bar{x} = 74 \Rightarrow \Sigma x_i f_i = \bar{x} \Rightarrow 55 \cdot f_1 + 65 f_2 + 75 \cdot 0{,}2 + 85 \cdot 0{,}4 = 74 \Rightarrow$

$55f_1 + 65f_2 + 15 + 34 = 74 \Rightarrow \boxed{55f_1 + 65f_2 = 25}$ (3)

(3) $\left.\begin{aligned} 55f_1 + 65f_2 &= 25 \\ f_1 + f_2 &= 0{,}4 \end{aligned}\right\} \cdot(-55) \Rightarrow \left.\begin{aligned} 55f_1 + 65f_2 &= 25 \\ -55f_1 - 55f_2 &= -22 \end{aligned}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow}$

$10f_2 = 3 \Rightarrow \boxed{f_2 = 0{,}3}$ και (1) $\Rightarrow f_1+f_2 = 0{,}4 \Rightarrow f_1 + 0{,}3 = 0{,}4 \Rightarrow$

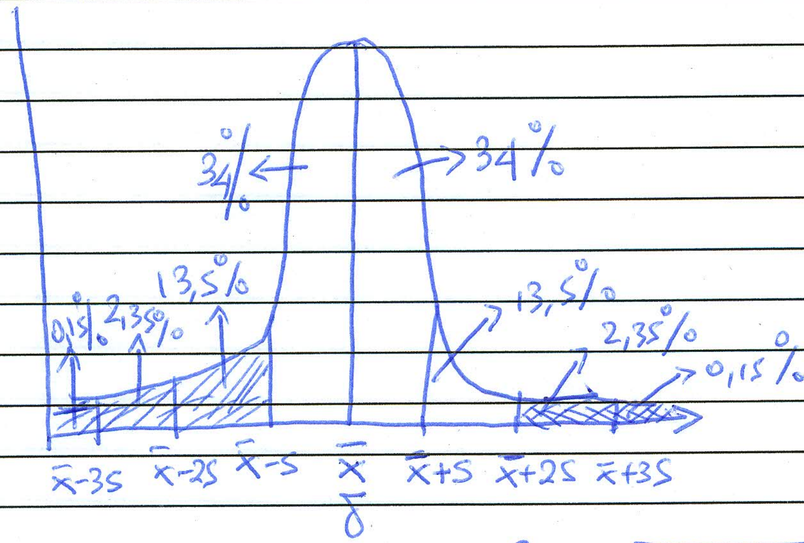
$\boxed{f_1 = 0{,}1}$

Γ3.

$$\bar{x}_2 = \frac{x_1\nu_1+x_2\nu_2+x_3\nu_3}{\nu_1+\nu_2+\nu_3} = \frac{55\cdot 0,1\nu+65\cdot 0,3\nu+75\cdot 0,2\nu}{0,1\nu+0,3\nu+0,2\nu} =$$

$$= \frac{40\nu}{0,6\nu} = \frac{40}{0,6} = \frac{400}{6} = \frac{200}{3}$$

Γ4.



• το 2,5% τουλάχιστον 74
$2,35\% + 0,15\% = 2,5\%$ } άρα $\boxed{\bar{x}+2s = 74}$

• το 16% το πολύ 68
$0,15\% + 2,35\% + 13,5\% = 16\%$ } άρα $\boxed{\bar{x}-s = 68}$

$$\left.\begin{array}{l}\bar{x}+2s=74\\ \bar{x}-s=68\end{array}\right\} \xRightarrow{(-)} 2s+s=6 \Rightarrow 3s=6 \Rightarrow \boxed{s=2}$$

$$\bar{x}-s=68 \Rightarrow \bar{x}-2=68 \Rightarrow \boxed{\bar{x}=70}$$

$$\begin{array}{r|l} 100 & 35 \\ \hline 70 & 0,028 \\ 300 & \\ 280 & \end{array}$$

$$C.V. = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{70} = \frac{1}{35} \simeq 0,028 = 2,8\% < 10\%$$

άρα το δείγμα είναι ομοιογενές.

Θέμα Δ:

Δ1 $f(x)=x\ln x+k \quad x>0$

$f'(x)=(x\ln x+k)'=(x)'\ln x+x(\ln x)'+0=\ln x+x\cdot\frac{1}{x} \Rightarrow \boxed{f'(x)=\ln x+1}$

$A(1,f(1))$

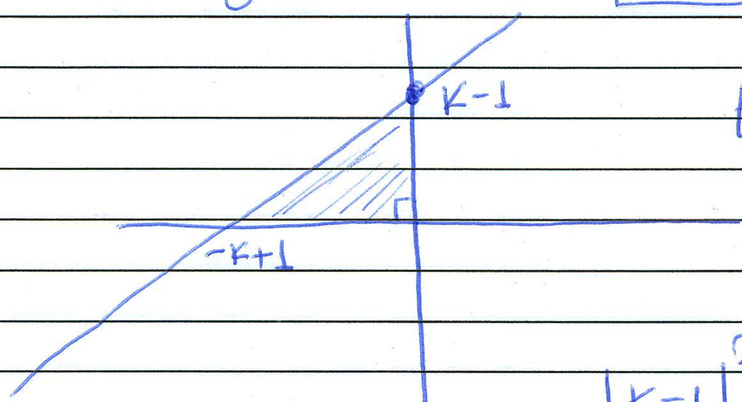
$f(1)=1\cancel{\ln 1}^{0}+k=k$

$f'(1)=\cancel{\ln 1}_{0}+1=1$

$y-f(1)=f'(1)(x-1) \Rightarrow y-k=x-1 \Rightarrow$

$\boxed{y=x+k-1}$

x	0	$-k+1$
ψ	$k-1$	0



$E<2 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot(k-1)\cdot|-k+1|<2$

$\frac{1}{2}(k-1)(k-1)<2 \Rightarrow$

$(k-1)^2<4 \Rightarrow$

$|k-1|^2<4 \Rightarrow |k-1|<2 \Rightarrow$

$-2<k-1<2 \Rightarrow -1<k<3$
αλλά και $k>1$ $\Big\} \Rightarrow 1<k<3$, $k\in\mathbb{Z}$ $\Big\} \Rightarrow \boxed{k=2}$

Δ2: α) $y=x+2-1 \Rightarrow \boxed{y=x+1}$

αν $y_i=x_i+c \Rightarrow \bar{y}=\bar{x}+c$

$\bar{y}=31$ αλλά $\bar{y}=\bar{x}+1 \Rightarrow 31+\bar{x}=1 \Rightarrow \boxed{\bar{x}=30}$

β) $\bar{x}=30 \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{50}x_i}{50}=30 \Rightarrow \sum_{i=1}^{50}x_i=1500 \Rightarrow \boxed{x_1+x_2+\dots+x_{50}=1500}$ (1)

$\bar{x}_\beta=31 \Rightarrow \frac{x_1+3+x_2+3+\dots+x_{20}+3+x_{21}+x_{22}+\dots+x_{35}+x_{36}-\lambda+\dots+x_{50}-\lambda}{50}$

$=31 \Rightarrow \frac{x_1+x_2+\dots+x_{50}+3\cdot 20-15\lambda}{50}=31 \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$1500+60-15\lambda=1550 \Rightarrow 15\lambda=1560-1550 \Rightarrow 15\lambda=10 \Rightarrow$

$\lambda=\frac{10}{15} \Rightarrow \boxed{\lambda=\frac{2}{3}}$

Δ3. $f'(x)=(x\ln x+2)'=(x)'\ln x+x(\ln x)'+(2)'=\ln x+1$, $\forall x>0$

$f'(x)=0 \Rightarrow \ln x+1=0 \Rightarrow \ln x=-1 \Rightarrow \ln x=-1\cdot \ln e \Rightarrow \cancel{\ln} x=\cancel{\ln} e^{-1} \Rightarrow$

$x=\frac{1}{e}$

x	0	$1/e$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	Τ.Ε / Ο.Ε	$\nearrow$

η f είναι στο $[1/e,+\infty)$ γνησίως αύξουσα

άρα $f(\frac{1}{e})<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e)$

$f(\frac{1}{e})=\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}+2=2-\frac{1}{e}=\frac{2e-1}{e}$, $f(e)=e+2$

$f'(\frac{1}{e})=0$

άρα η μικρότερη τιμή είναι η $f'(\frac{1}{e})$ και η μεγαλύτερη η $f(e)$

$R=\max x_i-\min x_i=f(e)-f'(\frac{1}{e})=e+2-0=e+2$

$\alpha^\alpha\cdot\beta^\beta\cdot\gamma^\gamma=e^7 \Rightarrow \ln(\alpha^\alpha\cdot\beta^\beta\cdot\gamma^\gamma)=\ln e^7 \Rightarrow \ln\alpha^\alpha+\ln\beta^\beta+\ln\gamma^\gamma=7\ln e \Rightarrow$

$\boxed{\alpha\ln\alpha+\beta\cdot\ln\beta+\gamma\cdot\ln\gamma=7}$ (1)

$\bar{x}=\frac{f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)+f(e)+f'(\frac{1}{e})}{5}=$

$=\frac{\alpha\ln\alpha+2+\beta\ln\beta+2+\gamma\ln\gamma+2+e+2+0}{5}=\frac{\alpha\ln\alpha+\beta\ln\beta+\gamma\ln\gamma+8+e}{5}$

$\overset{(1)}{=}\frac{7+8+e}{5}=\frac{15+e}{5}=3+\frac{e}{5}$

Δ4.

$N(\Omega) = 30$

A: $\hat{\omega} =$ οξεία $\Rightarrow$ εφ$\hat{\omega} > 0 \Rightarrow f'(t) > 0 \Rightarrow t > \frac{1}{e}$.

άρα $A = \{t_{11}, t_{12}, \ldots t_{30}\} \to N(A) = 20$

B: $f(t) > f'(t) + 1 \Rightarrow t\ln t + 2 > \ln t + 1 + 1 \Rightarrow t\ln t + \cancel{2} - \ln t - \cancel{2} > 0$

$\Rightarrow \ln t\,(t-1) > 0$

t	0		1	
$\ln t$		$-$	0	$+$
$t-1$		$-$	0	$+$
γιν		$+$	0	$+$

άρα $t \in (0,1)$

άρα $B = \{t_1, t_2, \ldots, t_{29}\} \to N(B) = 29$

α) $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{20}{30} \Rightarrow \boxed{P(A) = \frac{2}{3}}$

β) $A \cap B = \{t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{29}\} \to N(A \cap B) = 19$

$P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{19}{30} \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = \frac{19}{30}}$

Γενικό Λύκειο Νεστορίου Καστοριάς

Καραφέρης Γεώργιος

ΠΕ03 Μαθηματικός