

ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΝΕΣΤΟΡΙΟΥ

Πιθανότητες

Μαθηματικά Γενικής Παιδείας



ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΚΑΡΑΦΕΡΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΠΕ03 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

ΜΕΡΟΣ Α. ΘΕΩΡΙΑ

Πείραμα Τύχης

- Κάθε πείραμα κατά το οποίο η γνώση των συνθηκών κάτω από τις οποίες εκτελείται καθορίζει πλήρως το αποτέλεσμα λέγεται **αιτιοκρατικό** (deterministic) πείραμα.
- Κάθε πείραμα του οποίου δεν μπορούμε εκ των προτέρων να προβλέψουμε το αποτέλεσμα, μολονότι επαναλαμβάνεται (φαινομενικά τουλάχιστον) κάτω από τις ίδιες συνθήκες ονομάζεται **πείραμα τύχης** (random experiment).

Να μερικά **Πειράματα Τύχης**:

1. Ρίχνεται ένα νόμισμα και καταγράφεται η άνω όψη του.
2. Ρίχνεται ένα ζάρι και καταγράφεται η ένδειξη της άνω έδρας του.
3. Διαλέγεται αυθαίρετα μια οικογένεια με δύο παιδιά και εξετάζεται ως προς το φύλο των παιδιών και τη σειρά γέννησής τους.
4. Ρίχνεται ένα νόμισμα ώσπου να φέρουμε “γράμματα” αλλά όχι περισσότερο από τρεις φορές.
5. Επιλέγεται τυχαία μια τηλεφωνική συνδιάλεξη και καταγράφεται η διάρκειά της.
6. Γίνεται η κλήρωση του ΛΟΤΤΟ και καταγράφεται το αποτέλεσμα.
7. Την παραμονή του Πάσχα, στις 5 μ.μ., μετράται το μήκος της ουράς των αυτοκινήτων στα πρώτα διόδια της Εθνικής οδού Αθηνών-Λαμίας.
8. Επιλέγεται τυχαία μια μέρα της εβδομάδος και μετράται ο αριθμός των τηλεθεατών που παρακολούθησαν το απογευματινό δελτίο ειδήσεων στην ΕΤ1.
9. Επιλέγεται τυχαία μια ραδιενεργός πηγή και καταγράφεται ο αριθμός των εκπεμπόμενων σωματιδίων σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.

Δειγματικός Χώρος

Όλα τα αποτελέσματα που μπορούν να εμφανιστούν σε ένα πείραμα τύχης λέγονται δυνατά αποτελέσματα ή δυνατές περιπτώσεις του πειράματος. Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων λέγεται **δειγματικός χώρος** (sample space) και συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα Ω . Αν δηλαδή $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ είναι τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης, τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος θα είναι το σύνολο: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$. Το πλήθος των στοιχείων του Ω θα το συμβολίζουμε με $N(\Omega)$

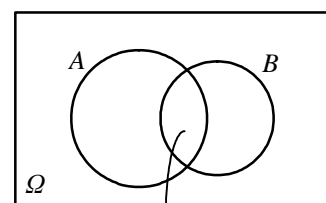
Ενδεχόμενα

- Το σύνολο που έχει ως στοιχεία ένα ή περισσότερα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης λέγεται **ενδεχόμενο** (event) ή γεγονός.
- Είναι φανερό ότι ένα ενδεχόμενο είναι υποσύνολο του δειγματικού χώρου.
- Ένα ενδεχόμενο λέγεται **απλό** όταν έχει ένα μόνο στοιχείο και **σύνθετο** αν έχει περισσότερα στοιχεία.
- Όταν το αποτέλεσμα ενός πειράματος, σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του είναι στοιχείο ενός ενδεχομένου, τότε λέμε ότι το ενδεχόμενο αυτό **πραγματοποιείται** ή **συμβαίνει**. Γι'αυτό τα στοιχεία ενός ενδεχομένου λέγονται και **ευνοϊκές περιπτώσεις** για την πραγματοποίησή του.
- Ο ίδιος ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος θεωρείται ότι είναι ενδεχόμενο, το οποίο μάλιστα πραγματοποιείται πάντοτε, αφού όποιο και αν είναι το αποτέλεσμα του πειράματος θα ανήκει στο Ω . Γι'αυτό το Ω λέγεται **βέβαιο ενδεχόμενο**.
- Δεχόμαστε ακόμα ως ενδεχόμενο και το κενό σύνολο \emptyset που δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος τύχης. Γι'αυτό λέμε ότι το \emptyset είναι το **αδύνατο ενδεχόμενο**.
- Το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου A θα το συμβολίζουμε με $N(A)$, και προφανώς $N(\emptyset) = 0$.

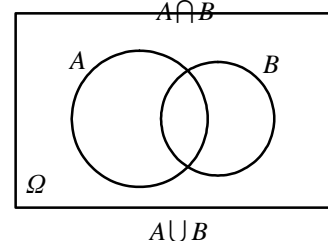
Πράξεις με Ενδεχόμενα

Αν A και B είναι δύο ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω , έχουμε:

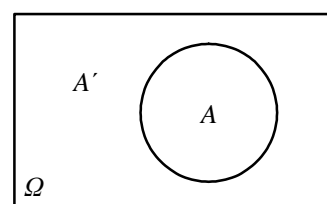
- Το ενδεχόμενο $A \cap B$, που διαβάζεται “ A τομή B ” ή “ A και B ” και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A και B .



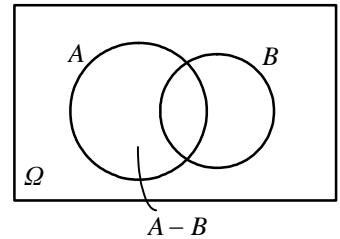
- Το ενδεχόμενο $A \cup B$, που διαβάζεται “ A ένωση B ” ή “ A ή B ” και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A , B .



- Το ενδεχόμενο A' , που διαβάζεται “όχι A ” ή “συμπληρωματικό του A ” και πραγματοποιείται, όταν δεν πραγματοποιείται το A . Το A' λέγεται και “αντίθετο του A ”.



- Το ενδεχόμενο $A - B$, που διαβάζεται “διαφορά του B από το A ” και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B . Είναι εύκολο να δούμε ότι $A - B = A \cap B'$.

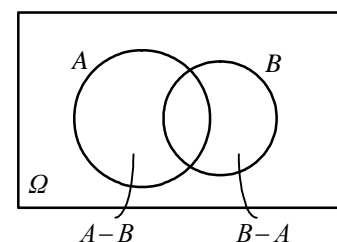


Στον παρακάτω πίνακα τα A και B συμβολίζουν ενδεχόμενα ενός πειράματος και το ω ένα αποτέλεσμα του πειράματος αυτού. Στην αριστερή στήλη του πίνακα αναγράφονται διάφορες σχέσεις για τα A και B διατυπωμένες στην κοινή γλώσσα, και στη δεξιά στήλη αναγράφονται οι ίδιες σχέσεις αλλά διατυπωμένες στη γλώσσα των συνόλων.

Το ενδεχόμενο A πραγματοποιείται	$\omega \in A$
Το ενδεχόμενο A δεν πραγματοποιείται	$\omega \in A'$ (ή $\omega \notin A$)
Ένα τουλάχιστον από τα A και B πραγματοποιείται	$\omega \in A \cup B$
Πραγματοποιούνται αμφότερα τα A και B	$\omega \in A \cap B$
Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A και B	$\omega \in (A \cup B)'$
Πραγματοποιείται μόνο το A	$\omega \in A - B$ (ή
Η πραγματοποίηση του A συνεπάγεται την πραγματοποίηση του B	$\omega \in A \cap B'$) $A \subseteq B$

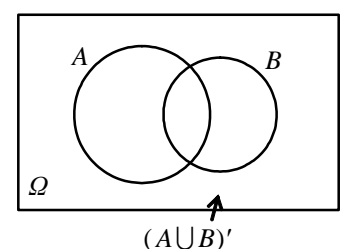
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- i) **Να πραγματοποιείται μόνο το A ή μόνο το B** , το ζητούμενο ενδεχόμενο είναι το $(A - B) \cup (B - A)$ ή ισοδύναμα το



$$(A \cap B') \cup (A' \cap B).$$

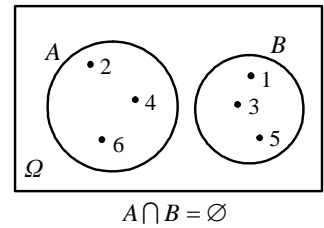
- ii) **Να μην πραγματοποιείται κανένα από τα A και B** , το ζητούμενο σύνολο είναι συμπληρωματικό του $A \cup B$, δηλαδή το $(A \cup B)'$



Ασυμβίβαστα Ενδεχόμενα

Δύο ενδεχόμενα A και B λέγονται **ασυμβίβαστα**, όταν $A \cap B = \emptyset$.

Δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα λέγονται επίσης **ξένα μεταξύ τους** ή **αμοιβαίως αποκλειόμενα**.

**Η έννοια της πιθανότητας****Έννοια και Ιδιότητες Σχετικής Συχνότητας**

Αν σε n εκτελέσεις ενός πειράματος ένα ενδεχόμενο A

πραγματοποιείται k φορές, τότε ο λόγος $\frac{k}{n}$ ονομάζεται **σχετική**

συχνότητα του A και συμβολίζεται με f_A . Ιδιαίτερα αν ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος είναι το πεπερασμένο σύνολο $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\lambda\}$ και σε n εκτελέσεις του πειράματος αυτού τα απλά ενδεχόμενα $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \dots, \{\omega_\lambda\}$ πραγματοποιούνται $k_1, k_2, \dots, k_\lambda$ φορές αντιστοίχως, τότε για τις σχετικές συχνότητες

$f_1 = \frac{k_1}{n}, f_2 = \frac{k_2}{n}, \dots, f_\lambda = \frac{k_\lambda}{n}$ των απλών ενδεχομένων θα έχουμε:

$$1. 0 \leq f_i \leq 1, \quad i=1,2,\dots,\lambda \quad (\text{αφού } 0 \leq k_i \leq n)$$

$$2. f_1 + f_2 + \dots + f_\lambda = \frac{k_1 + k_2 + \dots + k_\lambda}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

Αν εκτελέσουμε το παραπάνω πείραμα πάρα πολλές φορές δηλαδή $n \rightarrow +\infty$ τότε παρατηρούμε ότι τα $f_i, i=1,2,\dots,\lambda$ τείνουν να σταθεροποιηθούν, αυτό το σταθερό τους αποτέλεσμα λέγεται **πιθανότητα του ενδεχομένου $\omega_i, i=1,2,\dots,\lambda$** . Το

εμπειρικό αυτό εξαγόμενο, το οποίο επιβεβαιώνεται και θεωρητικά, ονομάζεται **στατιστική ομαλότητα** ή **νόμος των μεγάλων αριθμών**.

Κλασικός Ορισμός Πιθανότητας

Σε πειράματα στα οποία όλα τα απλά ενδεχόμενα του πειράματος έχουν την ίδια πιθανότητα να πραγματοποιηθούν λέμε ότι τα δυνατά αποτελέσματα ή, ισοδύναμα, τα απλά ενδεχόμενα είναι **ισοπίθανα**. Από δω και πέρα όπου συναντάμε τις φράσεις **αμερόληπτος** ή **επιλέγουμε τυχαία** ή **στην τύχη** ή οποιαδήποτε φράση που μας λέει ότι το πείραμα είναι τυχαίο και αντικειμενικό θα θεωρούμε ότι έχει **ισοπίθανα** απλά ενδεχόμενα.

Γενικά, σε ένα πείραμα με n ισοπίθανα αποτελέσματα η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου με k στοιχεία θα τείνει στον αριθμό

$\frac{k}{n}$. Γι'αυτό είναι εύλογο σε ένα πείραμα με ισοπίθανα

αποτελέσματα να ορίσουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου A τον αριθμό:

$$P(A) = \frac{\text{Πλήθος Ευνοϊκών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}.$$

Έτσι, έχουμε τον **κλασικό** ορισμό της πιθανότητας, που διατυπώθηκε από τον Laplace το 1812.

Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει άμεσα ότι:

$$1. P(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1$$

$$2. P(\emptyset) = \frac{0}{N(\Omega)} = 0$$

3. Για κάθε ενδεχόμενο A ισχύει $0 \leq P(A) \leq 1$, αφού το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου είναι ίσο ή μικρότερο από το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου.

Αξιοματικός Ορισμός Πιθανότητας

Για τις περιπτώσεις που δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας χρησιμοποιούμε τον παρακάτω αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας, ο οποίος έχει ανάλογες ιδιότητες με τη σχετική συχνότητα.

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Σε κάθε απλό ενδεχόμενο $\{\omega_i\}$ αντιστοιχίζουμε έναν πραγματικό αριθμό, που τον συμβολίζουμε με $P(\omega_i)$, έτσι ώστε να ισχύουν:

- $0 \leq P(\omega_i) \leq 1$
- $P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_n) = 1.$

Τον αριθμό $P(\omega_i)$ ονομάζουμε πιθανότητα του ενδεχομένου $\{\omega_i\}$.

Ως πιθανότητα $P(A)$ ενός ενδεχομένου $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \neq \emptyset$ ορίζουμε το άθροισμα $P(\alpha_1) + P(\alpha_2) + \dots + P(\alpha_k)$, ενώ ως πιθανότητα του αδύνατου ενδεχομένου \emptyset ορίζουμε τον αριθμό $P(\emptyset) = 0$.

Αν $P(\omega_i) = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, \dots, n$, τότε έχουμε τον κλασικό ορισμό της

πιθανότητας ενός ενδεχομένου. Στην πράξη, ιδιαίτερα στην περίπτωση που δεν ισχύει ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας, ως πιθανότητα ενός ενδεχομένου A λαμβάνεται το όριο της σχετικής του συχνότητας.

ΣΧΟΛΙΟ

Όταν έχουμε ένα δειγματικό χώρο $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ και χρησιμοποιούμε τη φράση “παίρνουμε τυχαία ένα στοιχείο του Ω ”, εννοούμε ότι όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα με πιθανότητα $P(\omega_i) = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Κανόνες Λογισμού των Πιθανοτήτων

Για τις πιθανότητες των ενδεχομένων ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες, γνωστές ως “κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων”. Οι κανόνες αυτοί θα αποδειχθούν στην περίπτωση που τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα.

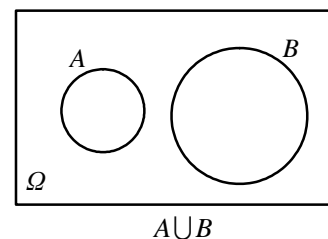
Αποδεικνύεται όμως ότι ισχύουν και στην περίπτωση που τα απλά ενδεχόμενα δεν είναι ισοπίθανα.

1. Για οποιαδήποτε **ασυμβίβαστα** μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν $N(A) = \kappa$ και $N(B) = \lambda$, τότε το $A \cup B$ έχει $\kappa + \lambda$ στοιχεία, γιατί αλλιώς τα A και B δε θα ήταν ασυμβίβαστα. Δηλαδή, έχουμε $N(A \cup B) = \kappa + \lambda = N(A) + N(B)$.



Επομένως:

$$P(A \cup B) = \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A) + N(B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} = P(A) + P(B).$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **απλός προσθετικός νόμος** (simply additive law) και ισχύει και για περισσότερα από δύο ενδεχόμενα. Έτσι, αν τα ενδεχόμενα A , B και Γ είναι ανά δύο ασυμβίβαστα θα έχουμε $P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma)$.

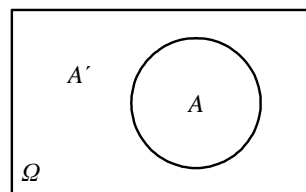
2. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ισχύει:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή $A \cap A' = \emptyset$, δηλαδή τα A και A' είναι ασυμβίβαστα, έχουμε διαδοχικά, σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο:

$$P(A \cup A') = P(A) + P(A') \Rightarrow P(\Omega) = P(A) + P(A') \\ \Rightarrow 1 = P(A) + P(A') \Rightarrow P(A') = 1 - P(A).$$



3. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για δυο ενδεχόμενα A και B έχουμε $N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$, (1) αφού στο άθροισμα $N(A) + N(B)$ το πλήθος των στοιχείων του $A \cap B$ υπολογίζεται δυο φορές. Αν διαιρέσουμε τα μέλη της (1) με $N(\Omega)$ έχουμε:

$$\frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} - \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} \Rightarrow$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **προσθετικός νόμος** (additive law).

4. Αν $A \subseteq B$, τότε $P(A) \leq P(B)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή $A \subseteq B$ έχουμε διαδοχικά:

$$N(A) \leq N(B) \Rightarrow \frac{N(A)}{N(\Omega)} \leq \frac{N(B)}{N(\Omega)} \Rightarrow P(A) \leq P(B).$$

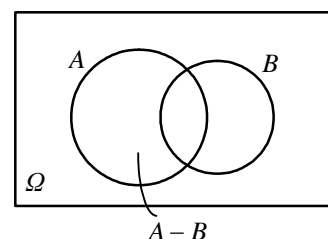
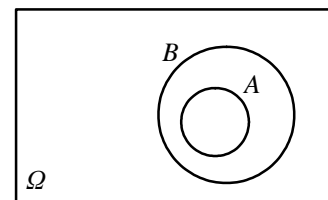
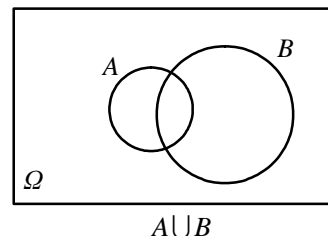
5. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή τα ενδεχόμενα $A - B$ και $A \cap B$ είναι ασυμβίβαστα και $(A - B) \cup (A \cap B) = A$, έχουμε:

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$



ΜΕΡΟΣ Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

- 1) \approx Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις διαδοχικές φορές.
- α) Να γραφτεί ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος.
- β) Να παρασταθούν με αναγραφή τα ενδεχόμενα που προσδιορίζονται από την αντίστοιχη ιδιότητα:
- A_1 : “Ο αριθμός των K υπερβαίνει τον αριθμό των Γ ”
- A_2 : “Ο αριθμός των K είναι ακριβώς 2”
- A_3 : “Ο αριθμός των K είναι τουλάχιστον 2”
- A_4 : “Ίδια όψη και στις τρεις ρίψεις”
- A_5 : “Στην πρώτη ρίψη φέρνουμε K ”.
- γ) Να βρεθούν τα ενδεχόμενα A_3' , $A_5 \cap A_2$, $A_5 \cup A_4$.
- 2) \approx Ένα κουτί έχει τρεις μπάλες, μια άσπρη, μια μαύρη και μια κόκκινη. Κάνουμε το εξής πείραμα: παίρνουμε από το κουτί μια μπάλα, καταγράφουμε το χρώμα της και την ξαναβάζουμε στο κουτί. Στη συνέχεια παίρνουμε μια δεύτερη μπάλα και καταγράφουμε επίσης το χρώμα της. (Όπως λέμε παίρνουμε διαδοχικά δύο μπάλες με επανατοποθέτηση).
- i) Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος;
- ii) Ποιο είναι το ενδεχόμενο “η πρώτη μπάλα να είναι κόκκινη”;
- iii) Ποιο είναι το ενδεχόμενο “να εξαχθεί και τις δυο φορές μπάλα με το ίδιο χρώμα”;
- 3) \approx Να επιλυθεί το προηγούμενο πρόβλημα, χωρίς όμως τώρα να γίνει επανατοποθέτηση της πρώτης μπάλας πριν την εξαγωγή της δεύτερης. (Όπως λέμε παίρνουμε διαδοχικά δύο μπάλες χωρίς επανατοποθέτηση).
- 4) \approx Μια οικογένεια από την Αθήνα αποφασίζει να κάνει τις επόμενες διακοπές της στην Κύπρο ή στη Μακεδονία. Στην Κύπρο μπορεί να πάει με αεροπλάνο ή με πλοίο. Στη Μακεδονία μπορεί να πάει με το αυτοκίνητό της, με τρένο ή με αεροπλάνο. Αν ως αποτέλεσμα του πειράματος θεωρήσουμε τον τόπο διακοπών και το ταξιδιωτικό μέσο, τότε:
- i) Να γράψετε το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος
- ii) Να βρείτε το ενδεχόμενο A : “Η οικογένεια θα πάει με αεροπλάνο στον τόπο των διακοπών της”.
- 5) \approx Ένα ξενοδοχείο προσφέρει γεύμα που αποτελείται από τρία πιάτα. Το κύριο πιάτο, το συνοδευτικό και το γλυκό. Οι δυνατές επιλογές δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Γεύμα	Επιλογές
Κύριο πιάτο	Κοτόπουλο ή φιλέτο
Συνοδευτικό	Μακαρόνια ή ρύζι ή χόρτα
Γλυκό	Παγωτό ή τούρτα ή ζελέ

- Ένα άτομο πρόκειται να διαλέξει ένα είδος από κάθε πιάτο.
- Να βρείτε το δειγματικό χώρο του πειράματος
 - Να βρείτε το ενδεχόμενο A : “το άτομο επιλέγει παγωτό”
 - Να βρείτε το ενδεχόμενο B : “το άτομο επιλέγει κοτόπουλο”
 - Να βρείτε το ενδεχόμενο $A \cap B$
 - Αν Γ το ενδεχόμενο: “το άτομο επιλέγει ρύζι”, να βρείτε το ενδεχόμενο $(A \cap B) \cap \Gamma$.
- 6) Η διεύθυνση ενός νοσοκομείου κωδικοποιεί τους ασθενείς σύμφωνα με το αν είναι ασφαλισμένοι ή όχι και σύμφωνα με την κατάσταση της υγείας τους, η οποία χαρακτηρίζεται ως καλή, μέτρια, σοβαρή ή κρίσιμη. Η διεύθυνση καταγράφει με 0 τον ανασφάλιστο ασθενή και με 1 τον ασφαλισμένο, και στη συνέχεια δίπλα γράφει ένα από τα γράμματα α, β, γ ή δ , ανάλογα με το αν η κατάστασή του είναι καλή, μέτρια, σοβαρή ή κρίσιμη. Θεωρούμε το πείραμα της κωδικοποίησης ενός νέου ασθενούς. Να βρείτε:
- Το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος.
 - Το ενδεχόμενο A : “η κατάσταση του ασθενούς είναι σοβαρή ή κρίσιμη και είναι ανασφάλιστος”.
 - Το ενδεχόμενο B : “η κατάσταση του ασθενούς είναι καλή ή μέτρια”.
 - Το ενδεχόμενο Γ : “ο ασθενής είναι ασφαλισμένος”.
- 7) Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα:
- Ρίχνουμε ένα ζάρι. A είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε 3 και B είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό.
 - Επιλέγουμε ένα άτομο. A είναι το ενδεχόμενο να έχει γεννηθεί στην Ελλάδα και B το ενδεχόμενο να είναι καθολικός.
 - Επιλέγουμε μια γυναίκα. A είναι το ενδεχόμενο να έχει ηλικία άνω των 30 και B το ενδεχόμενο να είναι παντρεμένη πάνω από 30 χρόνια.
 - Επιλέγουμε κάποιον με ένα αυτοκίνητο. A είναι το ενδεχόμενο το αυτοκίνητό του να είναι ευρωπαϊκό και B το ενδεχόμενο να είναι ασιατικό.
- 8) Μεταξύ των οικογενειών με τρία παιδιά επιλέγουμε τυχαία μια οικογένεια και εξετάζουμε τα παιδιά ως προς το φύλο και ως προς τη σειρά γέννησής τους. Να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος.
- 9) Δύο παίκτες θα παίξουν σκάκι και συμφωνούν νικητής να είναι εκείνος που πρώτος θα κερδίσει δύο παιχνίδια. Αν α είναι το αποτέλεσμα να κερδίσει ο πρώτος παίκτης ένα παιχνίδι και β είναι το αποτέλεσμα να κερδίσει ο δεύτερος παίκτης ένα παιχνίδι, να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

- 10) ✎ Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές. Να βρείτε τα ενδεχόμενα:
Α: “Το αποτέλεσμα της 1ης ρίψης είναι μεγαλύτερο από το αποτέλεσμα της 2ης ρίψης”.
Β: “Το άθροισμα των ενδείξεων στις δύο ρίψεις είναι άρτιος αριθμός”
Γ: “Το γινόμενο των ενδείξεων στις δύο ρίψεις είναι μικρότερο του 5”
Στη συνέχεια να βρείτε τα ενδεχόμενα $A \cap B$, $A \cap \Gamma$, $B \cap \Gamma$, $(A \cap B) \cap \Gamma$.
- 11) ✎ Αν A και B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , να αποδείξετε ότι: αν $A \subseteq B$, τότε $B' \subseteq A'$.
- 12) ✎ Έστω A και B δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω . Να γράψετε το ενδεχόμενο $A \cup B$ ως ένωση τριών ξένων μεταξύ τους ενδεχομένων.

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

- 13) ✎ Ρίχνουμε δύο “αμερόληπτα” ζάρια. Να βρεθεί η πιθανότητα να φέρουμε ως αποτέλεσμα δύο διαδοχικούς αριθμούς.
- 14) ✎ Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω δίνονται $P(A)=0,5$, $P(B)=0,4$ και $P(A \cap B)=0,2$. Να βρεθεί η πιθανότητα των ενδεχομένων:
i) Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A και B .
ii) Να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα A και B .
- 15) ✎ Από μια τράπουλα με 52 φύλλα παίρνουμε ένα στην τύχη. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων
i) το χαρτί να είναι πέντε
ii) το χαρτί να μην είναι πέντε.
- 16) ✎ Να βρείτε την πιθανότητα στη ρίψη δύο νομισμάτων να εμφανιστούν δύο “γράμματα”.
- 17) ✎ Ένα κουτί περιέχει μπάλες: 10 άσπρες, 15 μαύρες, 5 κόκκινες και 10 πράσινες. Παίρνουμε τυχαίως μια μπάλα. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων η μπάλα να είναι:
i) μαύρη
ii) άσπρη ή μαύρη
iii) ούτε κόκκινη ούτε πράσινη.
- 18) ✎ Σε μια φρουτιέρα βρίσκονται 7 μήλα, 5 πορτοκάλια, 3 αχλάδια και 5 μανταρίνια. Παίρνουμε τυχαία ένα φρούτο. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων το φρούτο να είναι:
α) μανταρίνι
β) πορτοκάλι ή μανταρίνι
γ) ούτε μήλο ούτε αχλάδι.
- 19) ✎ Σε μια τάξη με 30 μαθητές, ρωτήθηκαν οι μαθητές πόσα αδέρφια έχουν. Οι απαντήσεις τους φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

Αριθμός μαθητών	4	11	9	3	2	1
Αριθμός αδελφών	0	1	2	3	4	5

Αν επιλέξουμε τυχαία από την τάξη ένα μαθητή, να βρείτε την πιθανότητα η οικογένειά του να έχει τρία παιδιά.

- 20) Έστω τα σύνολα $\Omega = \{\omega \in \mathbb{N} / 11 \leq \omega \leq 20\}$, $A = \{\omega \in \mathbb{N} / \omega \text{ πολλαπλάσιο του } 3\}$ και $B = \{\omega \in \mathbb{N} / \omega \text{ πολλαπλάσιο του } 4\}$. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα στοιχείο του χώρου Ω , ποια είναι η πιθανότητα
- το στοιχείο να ανήκει στο A
 - Το στοιχείο να μην ανήκει στο B
 - το στοιχείο να ανήκει στο A και στο B
 - το στοιχείο να ανήκει στο A ή στο B
 - το στοιχείο να ανήκει μόνο στο A
 - το στοιχείο να μην ανήκει σε κανένα απ τα δύο σύνολα
- 21) Έστω τα σύνολα $\Omega = \{\omega \in \mathbb{N} / 10 \leq \omega < 60\}$, $A = \{\omega \in \mathbb{N} / \omega \text{ πολλαπλάσιο του } 5\}$ και $B = \{\omega \in \mathbb{N} / \omega \text{ πολλαπλάσιο του } 7\}$. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα στοιχείο του χώρου Ω , ποια είναι η πιθανότητα
- το στοιχείο να ανήκει στο A
 - Το στοιχείο να μην ανήκει στο B
 - το στοιχείο να ανήκει στο A και στο B
 - το στοιχείο να ανήκει στο A ή στο B
 - το στοιχείο να ανήκει μόνο στο A
 - το στοιχείο να μην ανήκει σε κανένα απ τα δύο σύνολα
- 22) Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω δίνονται : $P(A)=0,5$, $P(B)=0,4$ και $P(A \cap B)=0,2$. Να βρεθεί η πιθανότητα των ενδεχομένων
- να πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον απ τα A και B
 - να μην πραγματοποιείται το A
 - να πραγματοποιείται μόνο το B
 - να μην πραγματοποιείται κανένα απ τα A και B
 - να πραγματοποιείται ένα μόνο απ' τα A και B
- 23) Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω δίνονται $P(A)=0,5$, $P(B)=0,3$ και $P(A \cup B)=0,7$. Να βρεθεί η πιθανότητα των ενδεχομένων
- να πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα A και B
 - να μην πραγματοποιείται το A
 - να πραγματοποιείται μόνο το B
 - να μην πραγματοποιείται κανένα απ τα A και B
 - να πραγματοποιείται ένα μόνο απ' τα A και B

- 24) ✎ Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω δίνονται $P(A)=0,4$, $P(A \cup B)=0,8$ και $P(A \cap B)=0,3$. Να βρεθεί η πιθανότητα των ενδεχομένων
- να πραγματοποιείται το B
 - να μην πραγματοποιείται το A
 - να πραγματοποιείται μόνο το B
 - να μην πραγματοποιείται κανένα απ τα A και B
 - να πραγματοποιείται ένα μόνο απ' τα A και B
- 25) ✎ Από μια τράπουλα με 52 φύλλα παίρνουμε ένα στην τύχη. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων :
- το χαρτί είναι τρία .
 - το χαρτί είναι καρό
 - το χαρτί είναι τρία καρό
 - το χαρτί είναι τρία ή καρό
- 26) ✎ Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A)=\frac{17}{30}$, $P(B)=\frac{7}{15}$ και $P(A \cup B)=\frac{2}{3}$. Να βρείτε την $P(A \cap B)$.
- 27) ✎ Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(A \cup B)=\frac{5}{6}$ και $P(A \cap B)=\frac{1}{3}$. Να βρείτε την $P(B)$.
- 28) ✎ Για τα ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου είναι γνωστό ότι $P(A)=P(B)$, $P(A \cup B)=0,6$ και $P(A \cap B)=0,2$. Να βρείτε την $P(A)$.
- 29) ✎ Για τα ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω δίνεται ότι $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B')=\frac{2}{3}$ και $P(A \cap B)=\frac{1}{12}$. Να βρείτε την $P(A \cup B)$.
- 30) ✎ Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω δίνονται : $P(A)=\frac{3}{8}$, $P(B)=\frac{5}{8}$ και $P(A \cap B)=\frac{1}{4}$. Να βρεθεί η πιθανότητα $P(A \cup B)$.
- 31) ✎ Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω δίνονται : $P(B)=0,5$, $P(A \cup B)=0,8$ και $P(A \cap B)=0,1$. Να βρεθεί η πιθανότητα $P(A)$.
- 32) ✎ Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω δίνονται : $P(A')=0,3$, $P(B)=0,6$ και $P(A \cup B)=0,8$. Να βρεθεί η πιθανότητα $P(A \cap B)$.

- 33) ✎ Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω δίνονται : $P(A') = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ και $P(A \cup B) = \frac{2}{5}$. Να βρεθούν οι πιθανότητες $P(B)$ και $P(A \cap B')$.
- 34) ✎ Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω δίνονται : $P(A') = \frac{1}{3}$, $P(B') = \frac{1}{4}$ και $P(A \cap B) = 0,5$. Να βρεθεί η πιθανότητα να μην συμβεί κανένα απ τα A και B .
- 35) ✎ Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A) = 2P(B)$ και $P(A \cup B) = \frac{3}{2}P(A)$. Να βρείτε την $P(A \cap B)$. Τι συμπεραίνετε για τα ενδεχόμενα A και B ;
- 36) ✎ Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A \cap B) = 0,1$ και $\frac{1}{2}P(A) = \frac{1}{3}P(B) = \frac{1}{4}P(A \cup B)$. Να βρείτε Να βρείτε τις: $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$.
- 37) ✎ Αν A και B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $P(A') = \frac{1}{3}$ και $P(B) = \frac{2}{3}$. Να βρείτε τις: $P(A \cap B)$, και $P(A \cup B)$.
- 38) ✎ Αν για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω έχουμε $P(A) = \kappa$, $P(B) = \lambda$ και $P(A \cap B) = \mu$, να βρείτε τις πιθανότητες:
 i) να πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα A και B
 ii) να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A και B
 iii) να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα A και B .
- 39) ✎ Αν $\frac{P(A)}{P(A')} = \frac{3}{4}$, να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(A')$.
- 40) ✎ Αν $\frac{P(A')}{P(A)} = \frac{4}{5}$ να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(A')$.
- 41) ✎ Αν $0 < P(A) < 1$, να αποδείξετε ότι $\frac{1}{P(A)} + \frac{1}{P(A')} \geq 4$ τότε ισχύει το =;
- 42) ✎ Να αποδείξετε ότι $P(A)P(A') \leq \frac{1}{4}$, τότε ισχύει το =;
- 43) ✎ Για δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A) = 0,6$ και $P(B) = 0,5$.
 i) Να εξεταστεί αν τα A και B είναι ασυμβίβαστα.
 ii) Να αποδείξετε ότι $0,1 \leq P(A \cap B) \leq 0,5$.

- 44) ✎ Αν A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με $P(A)=0,6$ και $P(B)=0,7$,
i) Να εξεταστεί αν τα A και B είναι ασυμβίβαστα.
ii) Να δείξετε ότι $0,3 \leq P(A \cap B) \leq 0,6$.
- 45) ✎ Αν A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με $P(A) > \frac{1}{2}$ και $P(B) > \frac{1}{2}$, να δείξετε ότι τα A και B είναι ασυμβίβαστα.
- 46) ✎ Αν A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = \frac{3}{8}$ και $P(B) = \frac{1}{3}$, να δείξετε ότι $\frac{1}{3} \leq P(A \cup B) \leq \frac{17}{24}$.
- 47) ✎ Για δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω να δείξετε ότι $P(B) - P(A') \leq P(A \cap B)$.
- 48) ✎ Για δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω να δείξετε ότι $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.
- 49) ✎ Να αποδείξετε ότι $1 + P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) \geq 2P(A \cap B)$, όπου A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω .
- 50) ✎ Αν A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με $P(A') \geq 0,32$ και $P(B') \geq 0,72$, να δείξετε ότι $P(A \cup B) \leq 0,96 - P(A \cap B)$.
- 51) ✎ Αν A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με $P(A') \leq 0,25$ και $P(B') \leq 0,55$,
α) Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα.
β) $0,45 \leq P(A \cup B)$
γ) $P(A \cap B) \geq 0,2$.
- 52) ✎ Αν A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με $P(A') \leq 0,2$ και $P(B) \geq 0,21$.
α) Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα.
β) $P(A \cap B) \geq 1,01 - P(A \cup B)$
- 53) ✎ Σε έναν αγώνα η πιθανότητα να κερδίσει ο Λευτέρης είναι 30%, η πιθανότητα να κερδίσει ο Παύλος είναι 20% και η πιθανότητα να κερδίσει ο Νίκος είναι 40%. Να βρείτε την πιθανότητα
i) να κερδίσει ο Λευτέρης ή ο Παύλος
ii) να μην κερδίσει ο Λευτέρης ή ο Νίκος.
- 54) ✎ Ένα ορισμένο κατάστημα δέχεται πιστωτικές κάρτες D ή V. Το 25% των πελατών έχουν κάρτα D, το 55% έχουν κάρτα V και το 15% έχουν και τις δύο κάρτες. Ποια είναι η πιθανότητα ένας πελάτης που επιλέγεται τυχαία να έχει μία τουλάχιστον από τις δυο κάρτες;

- 55) ✎ Σε μια πόλη το 40% των κατοίκων της καπνίζει, το 32% πίνει και το 60% καπνίζει ή πίνει. Ποιο ποσοστό των κατοίκων και καπνίζει και πίνει;
- 56) ✎ Το 10% των ατόμων ενός πληθυσμού έχουν υπέρταση, το 6% στεφανιαία καρδιακή ασθένεια και το 2% έχουν και τα δύο. Για ένα άτομο που επιλέγεται τυχαία ποια είναι η πιθανότητα να έχει
α) τουλάχιστον μία ασθένεια;
β) μόνο μία ασθένεια
- 57) ✎ Από τους μαθητές ενός σχολείου το 80% μαθαίνει αγγλικά, το 30% γαλλικά και το 20% και τις δύο γλώσσες. Επιλέγουμε τυχαίως ένα μαθητή. Να βρείτε την πιθανότητα να μη μαθαίνει καμιά από τις δύο γλώσσες.
- 58) ✎ Σε μια κωμόπολη το 15% των νοικοκυριών δεν έχουν τηλεόραση, το 40% δεν έχουν βίντεο και το 10% δεν έχουν ούτε τηλεόραση ούτε βίντεο. Επιλέγουμε τυχαίως ένα νοικοκυριό. Να βρείτε την πιθανότητα να έχει τηλεόραση και βίντεο.
- 59) ✎ Από μια έρευνα που έγινε σε ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα του Ελληνικού πληθυσμού απέδειξε ότι το 80% των Ελλήνων προτιμούν τα πορτοκάλια, το 40% προτιμούν τα μήλα και το 30% και τα δύο. Ποια είναι η πιθανότητα των ενδεχομένων:
A={ να προτιμούν τα πορτοκάλια και όχι τα μήλα }
B={ να προτιμούν τα πορτοκάλια ή τα μήλα }
Γ={ να μην προτιμούν ούτε τα πορτοκάλια ούτε τα μήλα }.
- 60) ✎ Ένας οδηγός σταματά με το αυτοκίνητό του σε ένα βενζινάδικο. Η πιθανότητα να ζητήσει να του ελέγξουν τα λάστιχα είναι 0,18, να ζητήσει να του ελέγξουν τη μπαταρία είναι 0,23 και η πιθανότητα να ζητήσει και τα δύο είναι 0,08. Να βρείτε την πιθανότητα να ζητήσει:
α) να του ελέγξουν τη μπαταρία αλλά όχι τα λάστιχα
β) να μην ελέγξουν ούτε τη μπαταρία ούτε τα λάστιχα
γ) να του ελέγξουν ή τη μπαταρία ή τα λάστιχα αλλά όχι και τα δύο μαζί.
- 61) ✎ Η Τρίτη τάξη των μαθητών ενός λυκείου αποτελείται από 200 μαθητές. Από αυτούς το 90% θα πάρουν απολυτήριο. Από εκείνους που θα πάρουν απολυτήριο το 20% θα περάσει σε ανώτερες ή ανώτατες σχολές. Να βρεθεί η πιθανότητα των ενδεχομένων: A= { ένας μαθητής παίρνει απολυτήριο, αλλά δεν εισάγεται σε κάποια σχολή } και B={ ένας μαθητής δεν εισάγεται σε κάποια σχολή }.
- 62) ✎ Ένας τροχονόμος ελέγχει τα αυτοκίνητα ως προς τα καυσαέρια (K) που εκπέμπουν και ως προς τη ζώνη (Z) που φορούν οι οδηγοί. Ο έλεγχος σταματά αν βρει 3 παραβάτες καυσαερίων ή δυο παραβάτες ζώνης ή 4 παραβάτες συνολικά.
α) Να γραφεί ο δειγματικός χώρος.

- β) Ποια είναι η πιθανότητα ο τροχονόμος να έχει βρει όταν σταματήσει ο έλεγχος ακριβώς δύο παραβάτες ζώνης;
- γ) Ποια είναι η πιθανότητα ο τροχονόμος να έχει βρει όταν σταματήσει ο έλεγχος το πολύ δύο παραβάτες καυσαερίων;
- 63) ✎ Ρίχνουμε στον αέρα ένα αμερόληπτο κέρμα 3 φορές και καταγράφουμε τις ενδείξεις του (Κ) κεφαλή ή (Γ) γράμματα.
- α) Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος;
- β) Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου $A = \{ \text{να φέρουμε ακριβώς μια κεφαλή} \}$;
- γ) Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου $B = \{ \text{να φέρουμε τουλάχιστον δύο φορές γράμματα} \}$;
- δ) Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου $\Gamma = \{ \text{να φέρουμε τρεις ίδιες ενδείξεις} \}$;
- 64) ✎ Πέντε παίκτες Α, Β, Γ, Δ, Ε οργανώνουν ένα τουρνουά σκάκι. Οι Α, Β, Γ έχουν μεταξύ τους την ίδια πιθανότητα να νικήσουν, οι Δ, Ε έχουν επίσης την ίδια πιθανότητα μεταξύ τους να νικήσουν αλλά ο Α έχει τριπλάσια πιθανότητα νικήσει από αυτή του Δ.
- α) Ποια η πιθανότητα νίκης του κάθε παίκτη;
- β) Ποια η πιθανότητα να νικήσει ο Δ ή ο Ε;
- γ) Ποια η πιθανότητα να νικήσει ο Α ή ο Β ή ο Γ;
- δ) Ποια η πιθανότητα να μη νικήσει ο Β;
- 65) ✎ Έστω $\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \omega_3 \}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και τα ενδεχόμενα $A = \{ \omega_1, \omega_2 \}$ και $B = \{ \omega_2, \omega_3 \}$. Αν είναι $P(A) = \frac{2}{5}$ και $P(B) = \frac{3}{4}$ να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(\omega_1)$, $P(\omega_2)$ και $P(\omega_3)$.
- 66) ✎ Ο υπάλληλος της καντίνας ενός θερινού σινεμά γνωρίζει απ την πείρα του ότι το 37% των θεατών αγοράζουν ποπ-κορν, το 54% αγοράζουν παγωτό, το 67% αγοράζουν αναψυκτικό, το 23% αγοράζουν ποπ-κορν και παγωτό, το 34% αγοράζουν παγωτό και αναψυκτικό, το 28% αγοράζουν ποπ-κορν και αναψυκτικό και το 16% αγοράζουν και τα τρία. Επιλέγουμε έναν θεατή στην τύχη. Ποια είναι η πιθανότητα να αγοράσει:
- α) ποπ-κορν και αναψυκτικό αλλά όχι παγωτό,
- β) μόνο παγωτό
- γ) παγωτό ή αναψυκτικό
- δ) αναψυκτικό αλλά όχι παγωτό
- ε) τίποτε απ τα τρία .
- 67) ✎ Μια φοιτήτρια τρώει μερικές φορές στη λέσχη του Πανεπιστημίου, μερικές φορές ένα σάντουιτς απ το κυλικείο, μερικές φορές σε ένα κοντινό εστιατόριο, μερικές φορές στο σπίτι και μερικές φορές καθόλου για να χάσει βάρος. Οι αντίστοιχες πιθανότητες είναι 0,23 0,39 0,15 0,16 0,07.

Να βρείτε την πιθανότητα:

- α) να φάει στη λέσχη ή στο κοντινό εστιατόριο ή ένα σάντουιτς απ το κυλικείο.
 β) να φάει σάντουιτς ή να φάει στο σπίτι ή να μην φάει καθόλου
 γ) να μην φάει στη λέσχη ούτε στο εστιατόριο
- 68) ✎ Παίρνουμε στην τύχη έναν από τους αριθμούς $1, 2, 3, \dots, 100$. Ποια είναι η πιθανότητα των ενδεχομένων: $A = \{ \text{ο αριθμός διαιρείται με το } 2 \}$ $B = \{ \text{ο αριθμός διαιρείται με το } 5 \}$.
- 69) ✎ Ένα κουτί περιέχει 12 άσπρες μπάλες, χ κόκκινες και ψ μαύρες. Παίρνουμε τυχαία μια μπάλα. Η πιθανότητα να πάρουμε μια κόκκινη μπάλα είναι $\frac{1}{2}$ και η πιθανότητα να πάρουμε μια μαύρη μπάλα είναι $\frac{1}{3}$. Να βρείτε πόσες μπάλες υπάρχουν στο κουτί;
- 70) ✎ Εκλέγουμε τυχαία ένα στοιχείο του δειγματικού χώρου Ω των μονοψήφιων αριθμών, και θεωρούμε δύο ενδεχόμενα A και B με $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,5$ και $P[(A \cup B)'] = 0,1$.
- α) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A \cup B)$ και $P(A \cap B)$.
 β) Αν $(A \cup B)' = \{4\}$, $A' = \{1, 2, 3, 4\}$ και $A \cap B = \{5, 6\}$ να βρείτε τα στοιχεία του ενδεχομένου B .
- 71) ✎ Έστω A και B ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$ και η πιθανότητα $P(B)$ είναι ίση με τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης f με $f(x) = \ln x - x + 1,6$ ενώ $P(A) = P(A' \cap B)$. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων A και B .
- 72) ✎ Σε ένα κιβώτιο εισάγονται λ βόλαιοι αριθμημένοι από το 1 ως το λ ($\lambda \in \mathbb{N}$). Εκλέγουμε στην τύχη έναν από αυτούς και θεωρούμε δύο ενδεχόμενα A και B του δειγματικού χώρου Ω του παραπάνω πειράματος τύχης. Ισχύει ότι $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{4}{5}$, $P(A \cup B) = 1$ και $A \cap B = \{5, 6, 7, 8\}$.
- α) Να βρείτε το πλήθος των βόλων που έχουν εισαχθεί στο δοχείο.
 β) Αν $B = \{1, 2, 3, \dots, 15, 16\}$, να βρείτε το ενδεχόμενο A .
- 73) ✎ Ρίχνουμε δύο αμερόληπτα ζάρια και θεωρούμε τα ενδεχόμενα :
- $A = \{ \text{το γινόμενο των ενδείξεων είναι μικρότερο ή ίσο του } 4 \}$
 $B = \{ \text{το άθροισμα των ενδείξεων είναι ίσο με } 4 \}$
- α) Να βρείτε το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου Ω και των ενδεχομένων A και B .
 β) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων $A \cup B$ και $(A \cap B)'$.

- 74) ✎ Σε ένα κιβώτιο, στον πάγκο ενός μικροπωλητή, υπάρχουν 10 λαχνοί, από τους οποίους οι 6 κερδίζουν και οι τέσσερις δεν κερδίζουν. Αν έρθουν τρεις παίχτες και τραβήξουν με τη σειρά από ένα λαχνό και κερδίζουν οι δύο πρώτοι, να βρείτε την πιθανότητα να κερδίσει και ο τρίτος.
- 75) ✎ Αν $|P(A) - 2| - \mu = |P(A) + 1| - 3\mu, \mu \in \mathcal{R}$ να βρείτε την πιθανότητα $P(A)$ και να δείξετε ότι $|\mu| \leq \frac{1}{3}$.
- 76) ✎ Σε ένα κουτί περιέχονται 15 σφαίρες χρώματος άσπρου, κόκκινου και μαύρου. Αν επιλέξουμε μια και η πιθανότητα να μην είναι άσπρη είναι τριπλάσια από την πιθανότητα να είναι κόκκινη ενώ η πιθανότητα να μην είναι κόκκινη είναι διπλάσια από την πιθανότητα να είναι μαύρη, να βρεθούν πόσες είναι οι άσπρες, πόσες είναι οι κόκκινες και πόσες οι μαύρες σφαίρες.
- 77) ✎ Εκλέγουμε τυχαία μια μπάλα από ένα δοχείο που περιέχει μπάλες απ' τις οποίες οι 12 είναι άσπρες, και θεωρούμε το ενδεχόμενο $A = \{ \text{η μπάλα που εκλέχθηκε είναι άσπρη} \}$. Έστω $\lim_{x \rightarrow -1} \left(x^2 P^2(A) + \frac{1}{9} x \right) = 0$. Να βρείτε:
- α) πόσες μπάλες έχει το δοχείο συνολικά;
- β) το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 P^2(A) + \frac{1}{9} x}{x + 1}$.
- 78) ✎ Έστω ενδεχόμενα A και B του δειγματικού χώρου Ω . Αν $P(A)$ και $P(B)$ είναι ρίζες της εξίσωσης : $\begin{vmatrix} x & 7 \\ x & x \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}$ και $P(A) < P(B)$ τότε:
- α) Να βρεθούν οι πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$.
- β) Να δείξετε ότι τα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα.
- γ) Να δείξετε ότι $\frac{1}{6} \leq P(A \cap B) \leq \frac{2}{3}$.
- δ) Να δείξετε ότι $P(A \cup B) \geq \frac{1}{2}$.
- 79) ✎ Δίνονται τα ενδεχόμενα A , B και Γ του ίδιου δειγματικού χώρου Ω , για τα οποία ισχύει: $P(A \cap B) + P(A \cup B) = 0,5$ και $P(A') = 0,8$.
- α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου B .
- β) Αν τα ενδεχόμενα A , B και Γ είναι ασυμβίβαστα μεταξύ τους ανά δύο και $A \cup B \cup \Gamma = \Omega$ να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου Γ .

- 80) ✎ Σε μια κληρωτίδα υπάρχουν λαχνοί από τους οποίους μόνο 22 κερδίζουν. Υπολογίστηκε ότι η πιθανότητα να μην κερδίσει κάποιος αν τραβήξει τυχαία έναν κλήρο είναι 0,8.
 α) Πόσους λαχνούς έχει η κληρωτίδα;
 β) Να υπολογίσετε πόσους λαχνούς που κερδίζουν πρέπει να προσθέσουμε στην κληρωτίδα ώστε η πιθανότητα να κερδίσουμε τραβώντας ένα λαχνό να είναι 0,5.
- 81) ✎ Σε ένα δοχείο υπάρχουν άσπροι, μαύροι και κόκκινη βόλοι. Θεωρούμε A , M και K τα αντίστοιχα ενδεχόμενα της εκλογής ενός άσπρου, μαύρου και κόκκινου βόλου από το δοχείο. Αν οι κόκκινοι βόλοι είναι 60 παραπάνω από τους μαύρους και $P(M)=2P(A)$, $P(M \cup A) = \frac{3}{10}$, να υπολογίσετε:
 α) τις πιθανότητες των ενδεχομένων M , K και A
 β) πόσοι βόλοι υπάρχουν στο δοχείο
 γ) πόσοι είναι άσπροι πόσοι μαύροι και πόσοι κόκκινοι βόλοι.
- 82) ✎ Θεωρούμε το δειγματικό χώρο Ω ενός πειράματος τύχης και A και B δύο ενδεχόμενα του Ω διάφορα του κενού. Η εξίσωση $4x^3 - 8P(A)x^2 + x = 0$ έχει ακριβώς δύο πραγματικές λύσεις από τις οποίες η μια μία ίση με $P(B)$. Αν είναι $P(A \cap B) = 0,1$:
 α) να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον απ' τα A και B
 β) να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο το A ή μόνο το B .
- 83) ✎ Θεωρούμε τα ασυμβίβαστα ανά δύο ενδεχόμενα A , B και Γ διάφορα του κενού, του ίδιου δειγματικού χώρου Ω , ώστε $A \cup B \cup \Gamma = \Omega$. Οι πιθανότητες πραγματοποίησης των ενδεχομένων A , B και Γ ικανοποιούν τις σχέσεις $\begin{vmatrix} P(A) & P^2(A) \\ P(B) & P^2(B) \end{vmatrix} = 0$ και $P(A \cup B) = P(\Gamma) - 0,2$
 α) να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$ και $P(\Gamma)$
 β) να υπολογίσετε την τιμή του ορίου $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 20P(B)x + 3}{x - 5P(A)}$.
- 84) ✎ Θεωρούμε ένα δοχείο που περιέχει n μπάλες από τις οποίες οι 16 είναι άσπρες. Έστω $P(A)$ η πιθανότητα τυχαίας εκλογής μιας άσπρης μπάλας από το δοχείο και ότι ισχύει $P(A) = 2P(A')$.
 α) Να βρείτε πόσες μπάλες με χρώμα διαφορετικό από άσπρο υπάρχουν στο δοχείο.
 β) Να υπολογίσετε την τιμή του ορίου $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3P(A) - x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

- 85) Σε μια κληρωτίδα εισάγονται 20 λαχνοί αριθμημένοι από το 1 έως το 20. Εκλέγουμε τυχαία έναν λαχνό και θεωρούμε τα ενδεχόμενα A, B υποσύνολα του Ω τέτοια ώστε:
 $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 12\}$ και $B = \{9, 10, 11, 12, \dots, 16\}$.
 α) Να σχεδιάσετε ένα διάγραμμα Venn για να παραστήσετε εποπτικά το παραπάνω πείραμα τύχης.
 β) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων $(A \cup B)'$ και $(A \cap B)'$.
- 86) Θεωρούμε συνάρτηση f με $f(x) = x^2 - \lambda x - \lambda$ με λ πραγματικό αριθμό που ανήκει στο σύνολο $\Omega = \{\lambda \in \mathbb{Z} / -1 \leq \lambda < 7\}$. Εκλέγουμε τυχαία ένα στοιχείο του Ω και το αντικαθιστούμε με το λ στον τύπο της f . Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων
 $A = \{ \text{η γραφική παράσταση της } f \text{ περνάει και κάτω από τον άξονα } x'x \}$
 $B = \{ \text{η συνάρτηση } f \text{ έχει ελάχιστη τιμή το } 0 \}$
 $\Gamma = \{ \text{η κορυφή της γραφικής παράστασης είναι το σημείο } (2, f(2)) \}$.
- 87) Αν $P(B-A) = 0,3$ και $P(A-B) = 0,5$ να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου $(A-B) \cup (B-A)$ και να αποδείξετε ότι $P(B) \geq 0,3$, $P(A) \geq 0,5$ και $P(A \cup B) \geq 0,8 - P(A \cap B)$.
- 88) Θεωρούμε το σύνολο Ω , το οποίο έχει για στοιχεία όλους τους ακέραιους αριθμούς a για τους οποίους ισχύει:
 $-a^2 + 11a - 10 > 0$. Εκλέγουμε τυχαία ένα στοιχείο του Ω και το τοποθετούμε στη θέση του a στην εξίσωση $x^2 - (a-3)x = 3-a$ (1).
 α) Να βρείτε την πιθανότητα η εξίσωση (1) να έχει διπλή ρίζα ή να μην έχει ρίζες.
 β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα η εξίσωση (1) να έχει διπλή ρίζα τον αριθμό 2.
- 89) Δίνεται το σύνολο $\Omega = \{a \in \mathbb{Z} / 0 < a \leq 5\}$ και οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + x$ και $g(x) = x + a$. Εκλέγουμε τυχαία ένα στοιχείο του Ω και αντικαθιστούμε μ' αυτό τον ακέραιο a στον τύπο της συνάρτησης $h(x) = f(g(x))$. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
 $A = \{ \text{η εξίσωση } f(g(x)) = 0 \text{ έχει λύση τον αριθμό } -5 \}$
 $B = \{ \text{η γραφική παράσταση της } h \text{ διέρχεται από το σημείο } M(0, 2) \}$.
- 90) Έστω πείραμα τύχης που έχει ως διαδικασία την τυχαία εκλογή μιας από 32 αριθμημένες με αριθμούς από το 1 ως το 32 μπάλες ενός δοχείου. Δίνονται ενδεχόμενα του χώρου A, B με $A \neq \emptyset$ και $B \neq \emptyset$ για τα οποία ισχύει:
$$\begin{vmatrix} P(A) & P^2(A) \\ P(B) & P^2(B) \end{vmatrix} = 0$$
,

$$\begin{vmatrix} P(A) & P(B) \\ \frac{1}{4} & P(A) \end{vmatrix} = 0 \text{ και } A = \{1, 2, 3, \dots, \kappa\}, B = \{21, 22, 23, \dots, \lambda\}.$$

Να βρεθούν τα κ , λ και η πιθανότητα του ενδεχομένου $(A \cup B)'$.

- 91) ✎ Σε μια κληρωτίδα εισάγονται 10 μπαλάκια αριθμημένα από το 1 ως το 10. Εκλέγουμε τυχαία ένα μπαλάκι και τον αριθμό που προκύπτει τον αντικαθιστούμε στη θέση του α στις εξισώσεις

$$x^2 - \sqrt{\alpha} \cdot x + \frac{5}{4} = 0 \quad (1) \text{ και } (2\alpha - 17)x^2 - (\alpha - 5)x + \alpha - 5 = 0 \quad (2).$$

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

A: «Η εξίσωση (1) έχει δύο λύσεις άνισες»

B: «η Εξίσωση (2) δεν έχει πραγματικές λύσεις»

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων: A , B , $A \cup B$, $A \cap B$ και $A - B$.

- 92) ✎ Δίνεται το σύστημα $(\Sigma) \begin{cases} \alpha x + \beta y = -1 \\ 2\alpha x + 3\beta y = -1 \end{cases}$. Θεωρούμε τα

ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω των οποίων οι πιθανότητες πραγματοποίησης δίνονται από τις σχέσεις:

$$P(A) = \frac{1}{2 + \alpha + \beta} \text{ και } P(B) = \frac{1}{\sqrt{8(1 + \beta)}} \text{ ενώ } P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων A , B , $A \cup B$, $A' \cap B$.

- 93) ✎ Σε μια βιβλιοθήκη Υπάρχουν 36 βιβλία, που είναι μυθιστορήματα, ποιητικές συλλογές και βιογραφίες. Οι αριθμοί που αντιπροσωπεύουν το πλήθος τους είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Οι λιγότερες σε πλήθος βιογραφίες διαφέρουν κατά 8 απ' τα περισσότερα σε πλήθος μυθιστορήματα. Εκλέγουμε τυχαία ένα βιβλίο απ' τη βιβλιοθήκη και θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

A: «το βιβλίο είναι βιογραφία»

B: «το βιβλίο είναι ποιητική συλλογή»

Γ: «το βιβλίο είναι μυθιστόρημα»

Να βρείτε τις πιθανότητες: $P(\Gamma)$, $P(A \cup B)$, $P(A \cap \Gamma)$, $P(B - \Gamma)$.

$P[(A \cup \Gamma)']$.

- 94) ✎ Θεωρούμε το δειγματικό χώρο $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$ ενός πειράματος τύχης. Εκλέγουμε στην τύχη ένα στοιχείο του Ω και αντικαθιστούμε με τον άγνωστο χ στην εξίσωση:

$$(2x - 2)(x^2 - 5x + 6) \quad (1) \text{ και στον τύπο } f(x) = (x - 1)(x - 5) \text{ της}$$

συνάρτησης f . Θεωρούμε στη συνέχεια τα ενδεχόμενα του Ω :

A: «Επαληθεύεται η εξίσωση (1)»

B: «Η συνάρτηση f έχει τιμές μεγαλύτερες ή ίσες του 0»

α) Να βρείτε τα ενδεχόμενα $A \cap B$ και $A \cup B$ και τις πιθανότητες τους.

β) Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn τα ενδεχόμενα $(A \cup B)'$ και $(A \cap B)'$ και να βρείτε τις αντίστοιχες πιθανότητες τους.

95) ✎ Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 + 3x + a$. Ο πραγματικός αριθμός a ανήκει στο σύνολο $\Omega = \{ a \in \mathbb{Z} / a \in (-5, 6) \}$. Εκλέγουμε τυχαία ένα από τα στοιχεία του Ω και το τοποθετούμε στον τύπο της f στη θέση του a . Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

A: « Η συνάρτηση f πληροί τη συνθήκη $f(0) - f(2) < 0$ »

B: « Η συνάρτηση f έχει ρίζα τον αριθμό 1 »

Γ: « Η συνάρτηση f πληροί τη συνθήκη $f(0) = f(2)$ »

Δ: « Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες »

96) ✎ Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = x \begin{vmatrix} 2P(B)x & \frac{7}{4} - P(A) \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 8 & \frac{7}{4} - P(A) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ η οποία παρουσιάζει}$$

τοπικό ακρότατο στη θέση $x_0 = 1$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(-2, 0)$.

Να αποδείξετε ότι ισχύει:

α) $A \cap B \neq \emptyset$

β) $\frac{1}{4} \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{2}$

γ) Αν ισχύει $A \cup B = \Omega$ να βρεθεί η πιθανότητα να πραγματοποιείται ένα μόνο από τα ενδεχόμενα A, B .

97) ✎ α) Αν τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω να αποδείξετε ότι $P(A \cap B) \geq P(B) - P(A')$

β) Αν A, B είναι ενδεχόμενα του Ω και $P(A) \in (\frac{1}{2}, 1]$,

$P(B) \in (\frac{1}{2}, 1]$, να αποδείξετε ότι τα A και B δεν είναι

ασυμβίβαστα,

γ) Αν τα A, B είναι ασυμβίβαστα και $P(B) = c$, όπου $c \in (0, 1)$ να αποδείξετε ότι $P(A') > c$.

98) ✎ Θεωρούμε το σύστημα $(\Sigma) \begin{cases} 2P(A) + P(B) = 2 \\ 4P(A) - 8P(B) = -1 \end{cases}$

όπου $P(A), P(B)$ οι πιθανότητες δύο ενδεχομένων A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω .

α) Να αποδείξετε ότι τα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα.

β) Αν $P(A \cap B) = \frac{3}{8}$ να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί

ένα μόνο από τα A και B και την πιθανότητα να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A και B.

99) \sphericalangle Δίνονται δυο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω , για τα οποία ισχύει: $P(A) \geq 0,4$, $P(B) \geq 0,8$ και $P(A \cup B) \leq 0,9$.

α) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει η πιθανότητα πραγματοποίησης του $A \cap B$.

β) Να αποδείξετε ότι $P(A') + P(B') \leq 0,8$.

100) \sphericalangle Το 60% των τροχαίων ατυχημάτων οφείλεται στην κακή κατάσταση του οδοστρώματος, το 40% σε λάθος χειρισμό του οδηγού και το 10% και στους δύο παράγοντες. Αν γίνει ένα τροχαίο ατύχημα, να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
A: « Το ατύχημα οφείλεται μόνο στην κακή κατάσταση του οδοστρώματος ή μόνο σε λάθος χειρισμό του οδηγού.»
B: « Το ατύχημα δεν οφείλεται σε κανέναν από τους δύο παράγοντες.»

101) \sphericalangle Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\lambda \in \mathbb{N} / 0 < \lambda \leq 20\}$ και δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα του Ω τα A, B για τα οποία ισχύει:

$$\begin{vmatrix} P(A) & 2 \\ \frac{1}{50} & P(A) \end{vmatrix} = -\frac{1}{10} P(A) \left[P(A) - \frac{1}{5} \right] \text{ και } P(B) \geq 0,4$$

α) Να υπολογίσετε τη μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει η πιθανότητα της $A \cup B$.

β) Αν $P(B') = 0,3$, $A = \{v, v+1, \dots, 20\}$ και $B = \{1, 2, 3, \dots, \mu\}$ να βρεθούν οι φυσικοί αριθμοί v , μ .

102) \sphericalangle Δίνονται τα ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει $\frac{P(A')}{P(A)} = \frac{1}{4}$ και $P(A \cap B) = 0,6$.

α) Να αποδείξετε ότι $0,6 \leq P(B) \leq 0,8$

β) Αν $P(A \cup B) = 0,9$ να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα μόνο από τα A και B.

103) \sphericalangle Για τα ενδεχόμενα A και B του δειγματικού χώρου Ω ενός πειράματος τύχης ισχύει: $P(A') = 0,8$, $P(B') = 0,1$

α) εξετάστε αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα

β) αποδείξτε ότι $0,7 \leq P(A \cap B) \leq 0,8$.

104) \sphericalangle Δίνονται τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω . Η πιθανότητα να μην συμβεί κανένα από τα A και B είναι 0,1, η πιθανότητα πραγματοποίησης και των δύο ενδεχομένων ταυτόχρονα είναι 0,5 και η πιθανότητα πραγματοποίησης του B είναι ίση με τα $\frac{3}{4}$ της πιθανότητας πραγματοποίησης του A.

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων A , B , $A \cap B$, $A \cap B'$.

105) $\not\approx$ Δίνονται τα ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει $P(A \cup B') = 0,8$, $P(A' \cup B) = 0,7$, και $P(B) + P(A) = 1,1$. Να βρείτε τις πιθανότητες πραγματοποίησης των ενδεχομένων A , B , και $A \cap B$.

106) $\not\approx$ Δίνονται τα ασυμβίβαστα ανά δύο ενδεχόμενα A , B και Γ του ίδιου δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει: $A \cup B \cup \Gamma = \Omega$ και οι πιθανότητες τους ικανοποιούν τις σχέσεις $\frac{P(A)}{2} = \frac{P(B)}{3}$ και

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{P(A \cup B)(x^2 - 1)}{x - 1} = 1$$

α) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων A , B και Γ .

β) Έστω A είναι το ενδεχόμενο τυχαίας εκλογής από τις 12 άσπρες μπάλες ενός δοχείου και B , Γ τα αντίστοιχα ενδεχόμενα τυχαίας εκλογής μιας κόκκινης και μιας μαύρης μπάλας. Να βρείτε πόσες κόκκινες και πόσες μαύρες μπάλες έχει το δοχείο.

107) $\not\approx$ Δίνονται τα ενδεχόμενα A , B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω , για τα οποία ισχύει $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/4$ και

$$P(A \cap B) = \sqrt[3]{P(A) \cdot P(B)} - \frac{3}{8}.$$

α) Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης του $A \cup B$.

β) Να βρείτε την πιθανότητα να μην πραγματοποιηθεί το $A \cap B$.

108) $\not\approx$ Έστω A ενδεχόμενο του Ω και $P^2(A) - \frac{1}{2}P(A) = -\frac{1}{16}$

α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα να μην πραγματοποιηθεί το A .

β) Αν A παριστάνει το ενδεχόμενο εκλογής σε τυχαία κλήρωση ενός αγοριού από 360 μαθητές να βρείτε πόσα κορίτσια έχει το σχολείο.

109) $\not\approx$ Σε ένα δοχείο υπάρχουν 8 λευκές και α μαύρες σφαίρες.

Θεωρούμε Λ και M τα ενδεχόμενα τυχαίας εκλογής λευκής, μαύρης σφαίρας αντίστοιχα. Αν $P^2(\Lambda) + 0,2 = P^2(M)$, να βρείτε το συνολικό αριθμό των σφαιρών του δοχείου.

110) $\not\approx$ Σε ένα σχολείο υπάρχουν 8 δάσκαλοι (Δ), μαθητές (A) και μαθήτριες (K). Θεωρούμε $P(A)$, $P(K)$, τις πιθανότητες τυχαίας εκλογής ενός μαθητή και μιας μαθήτριας αντίστοιχα. Αν το πλήθος των δασκάλων και των μαθητριών είναι όσο και το

πλήθος των μαθητών και $\frac{P(A)}{P(K)} = \frac{25}{21}$ να βρείτε:

α) τον αριθμό των μαθητριών του σχολείου

β) τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(K)$.

- 111) ✎ Σε ένα κιβώτιο υπάρχουν χ κάλπικες και ψ γνήσιες λίρες, όπου χ και ψ φυσικοί αριθμοί. Η πιθανότητα τυχαίας εκλογής μιας κάλπικης λίρας είναι ίση με το μισό της πιθανότητας εκλογής μιας γνήσιας λίρας. Αν προσθέσουμε 10 κάλπικες λίρες στο δοχείο, οι πιθανότητες εκλογής γίνονται ίσες.
- α) Να βρείτε τον αριθμό των λιρών που υπήρχαν αρχικά στο κιβώτιο.
- β) Από τις $\chi+\psi$ λίρες που υπήρχαν αρχικά στο κιβώτιο αφαιρούμε 16 γνήσιες και θεωρούμε $P(K)$ και $P(\Gamma)$ τις πιθανότητες τυχαίας εκλογής μιας κάλπικης και μιας γνήσιας λίρας αντίστοιχα. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(K)$ και $P(\Gamma)$.
- 112) ✎ Από ένα λύκειο πήραμε μόνο τους μαθητές που ασχολούνται με μπάσκετ ή ποδόσφαιρο και βρήκαμε ότι μεταξύ αυτών η πιθανότητα ένας μαθητής να ασχολείται με μπάσκετ είναι α , με ποδόσφαιρο είναι β και με τα δύο είναι 20%. Αν τώρα ξέρουμε ότι η εξίσωση $(\alpha-\beta)x^2+2(\alpha+\beta)x-(\alpha+\beta)=0$ έχει μία ρίζα x_0 , τότε
- α) να βρείτε τις πιθανότητες α και β
- β) να βρείτε την πιθανότητα ώστε ένας μαθητής απ' αυτούς να ασχολείται μόνο με ποδόσφαιρο.
- 113) ✎ Θεωρούμε τα ενδεχόμενα A και B του δειγματικού χώρου Ω .

$$\text{Αν } P(A), P(B) \text{ είναι ρίζες της εξίσωσης } \begin{vmatrix} x^2 & \frac{1}{4} \\ x & x-\frac{2}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{6} \text{ και}$$

$P(A) > P(B)$ τότε:

- α) να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$
- β) να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα
- γ) να αποδείξετε ότι $\frac{1}{6} \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{2}$
- δ) να αποδείξετε ότι $\frac{2}{3} \leq P(A \cap B) \leq 1$
- 114) ✎ Αν $P(A)$ είναι η πιθανότητα ενός ενδεχομένου του δειγματικού χώρου Ω και ισχύει $|P(A)+2|-|P(A)-3|=8\lambda$, να αποδείξετε ότι $|\lambda| \leq \frac{1}{8}$.
- 115) ✎ Θεωρούμε έναν μη συμμετρικό «κύβο» στις έδρες του οποίου σημειώνουμε τους αριθμούς 1,2,3,4,5,6 και έστω ότι ισχύει: $P(1)=P(3)=P(5)$ και $P(2)=P(4)=P(6)=\frac{2}{3}P(1)$.

- α) Να υπολογιστούν οι πιθανότητες όλων των απλών ενδεχομένων του Ω .
- β) Να βρείτε την πιθανότητα η ένδειξη να είναι άρτιος αριθμός,
- γ) Να βρείτε την πιθανότητα η ένδειξη να είναι περιττός αριθμός

- δ) Να βρείτε την πιθανότητα η ένδειξη να είναι το πολύ 3.
 ε) Να βρείτε την πιθανότητα η ένδειξη να είναι τουλάχιστον 3.
 116) ✎ Ένα κουτί περιέχει μια σφαίρα με την ένδειξη 1 δύο σφαίρες με την ένδειξη 2, τρεις σφαίρες με την ένδειξη 3 κ.τ.λ. n σφαίρες με την ένδειξη v .
 α) Αν ο n είναι άρτιος να βρείτε την πιθανότητα να τραβήξουμε σφαίρα με περιττή ένδειξη.
 β) Αν έχουμε 15 σφαίρες ποια είναι η πιθανότητα να τραβήξουμε σφαίρα με ένδειξη μεγαλύτερη του 3;

ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

117) Απολυτήριες 2000

✎ Από 120 μαθητές ενός Λυκείου, 24 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, 20 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της Ένωσης Ελλήνων Φυσικών και 12 μαθητές συμμετέχουν και στους δύο διαγωνισμούς. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Ποια είναι η πιθανότητα ο μαθητής:

A. να συμμετέχει σ' έναν τουλάχιστον από τους δύο διαγωνισμούς;

B. να συμμετέχει μόνο σ' έναν από τους δύο διαγωνισμούς

Γ. να μη συμμετέχει σε κανέναν από τους δύο διαγωνισμούς;

118) Απολυτήριες 2001

✎ Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η κατανομή του βάρους των αθροιστικών συχνοτήτων 80 μαθητών της Γ' Λυκείου.

A. Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι η σχετική συχνότητα της τρίτης κλάσης είναι διπλάσια από τη σχετική συχνότητα της πρώτης κλάσης βρείτε τις σχετικές συχνότητες που λείπουν.

B. Να βρεθεί η μέση τιμή.

Γ. Αν επιλέξουμε ένα μαθητή στην τύχη

α. Ποιά είναι η πιθανότητα να έχει βάρος μικρότερο από 65 κιλά;

β. Ποιά είναι η πιθανότητα να έχει βάρος μεγαλύτερο ή ίσο από 55 και μικρότερο από 75 κιλά;

Βάρος σε κιλά [,)	Fi
45-55	0,2
55-65	0,5
65-75	
75-85	

119) Απολυτήριες 2002

✎ Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A)+P(B) \neq 2P(A \cap B)$. Δίνεται ακόμα η συνάρτηση

$$f(x) = (x - P(A \cup B))^3 - (x - P(A \cap B))^3, x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $P(A \cup B) \neq P(A \cap B)$.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο

$$x = \frac{P(A) + P(B)}{2}$$

γ) Εάν τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα να δείξετε ότι

$$f(P(A)) = f(P(B))$$

120) Απολυτήριες 2003

Στο σύλλογο καθηγητών ενός λυκείου το 55% είναι γυναίκες, το 40% των καθηγητών είναι φιλόλογοι και το 30% είναι γυναίκες φιλόλογοι. Επιλέγουμε τυχαία έναν καθηγητή για να εκπροσωπήσει το σύλλογο σε κάποια επιτροπή.

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες ο καθηγητής να είναι:

- γυναίκα ή φιλόλογος
- γυναίκα και όχι φιλόλογος
- άνδρας και φιλόλογος
- άνδρας ή φιλόλογος.

121) Απολυτήριες 2004

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x + 10$. Οι

πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$ δύο ενδεχομένων A και B ενός δειγματικού χώρου Ω είναι ίσες με τις τιμές του x , στις οποίες η f έχει αντίστοιχα τοπικό ελάχιστο και τοπικό μέγιστο.

A. Να δείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{2}$ και $P(B) = \frac{1}{3}$

B. Για τις παραπάνω τιμές των $P(A)$, $P(B)$ καθώς και για

$P(A \cup B) = \frac{2}{3}$, να βρείτε τις πιθανότητες:

- $P(A \cap B)$
- $P(A - B)$
- $P[(A \cap B)']$
- $P[(A - B) \cup (B - A)]$

122) Απολυτήριες 2005

Έστω A , B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , ώστε να ισχύουν: Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα A , B είναι $\frac{7}{8}$. Οι πιθανότητες $P(B)$, $P(A \cap B)$ δεν

είναι ίσες και ανήκουν στο σύνολο $X = \{k, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}\}$, όπου

$$k = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x - 15}{x^2 - 6x + 5}$$

α. Να βρεθεί το k .

β. Να βρεθούν τα $P(B)$, $P(A \cap B)$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. Να βρεθούν οι πιθανότητες:

i) Να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A .

ii) Να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο A .

123) Απολυτήριες 2006

Σε ένα χορευτικό όμιλο συμμετέχουν x αγόρια και $(x+4)2$ κορίτσια.

α. Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο, για να εκπροσωπήσει τον όμιλο σε μια εκδήλωση. Να εκφράσετε ως συνάρτηση του x την πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι.

β. Αν η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι είναι ίση με $\frac{1}{19}$ και ο

όμιλος περιλαμβάνει λιγότερα από 100 μέλη, να βρείτε τον αριθμό των μελών του ομίλου, καθώς και την πιθανότητα να επιλεγεί κορίτσι.

γ. Ποιος πρέπει να είναι ο αριθμός των αγοριών του ομίλου, ώστε να μεγιστοποιείται η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι, και ποια είναι η τιμή της πιθανότητας αυτής;

124) Απολυτήριες 2007

Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ για τον οποίο ισχύει $P(-1) = P(0) = P(1) = P(2) = 2P(3) = 2P(4) = 2P(5)$.

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα του Ω : $A = \{1, 3, x^2 - x - 3\}$, $B = \{2, x + 1, 2x^2 + x - 2, -2x + 1\}$ όπου x ένας πραγματικός αριθμός.

α. Να βρεθούν οι πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω , δηλαδή οι $P(-1)$, $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, $P(5)$.

β. Να βρεθεί η μοναδική τιμή του x για την οποία ισχύει

$$A \cap B = \{1, 3\}$$

γ. Για $x = -1$ να δειχθεί ότι: $P(A) = \frac{5}{11}$, $P(B) = \frac{7}{11}$, $P(A \cap B) = \frac{3}{11}$ και

στη συνέχεια να υπολογιστούν οι πιθανότητες

$P(A - B)$ και $P(A \cup B')$.

125) Απολυτήριες 2008

Το 50% των κατοίκων μιας πόλης διαβάζουν την εφημερίδα α , ενώ το 30% των κατοίκων διαβάζουν την εφημερίδα α και δεν διαβάζουν την εφημερίδα β .

α. Ποια είναι η πιθανότητα ένας κάτοικος της πόλης, που επιλέγεται τυχαία, να μη διαβάζει την εφημερίδα α ή να διαβάζει την εφημερίδα β ;

β. Ορίζουμε το ενδεχόμενο B : «ένας κάτοικος της πόλης που

επιλέγεται τυχαία, διαβάζει την εφημερίδα β». Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{5} \leq P(B) \leq \frac{7}{10}$$

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + P(B)x$ όπου x πραγματικός αριθμός και B το ενδεχόμενο που ορίστηκε στο προηγούμενο ερώτημα. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)$ δεν έχει ακρότατα.

126) Απολυτήριες 2009

☞ Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{x}{2} + \lambda^2 - 6\lambda + 2, x > 0$ όπου λ ένας πραγματικός αριθμός .

A. α. Να προσδιοριστεί το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα και το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα .

β. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα .

B. Θεωρούμε ότι οι τιμές της συνάρτησης $f(2), f(4), f(8), f(3)$ και $f(5)$ είναι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X .

α. Αν R είναι το εύρος και δ η διάμεσος των παρατηρήσεων, να δειχθεί ότι $R = 3 + \ln \frac{1}{4}$ και $\delta = \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda$.

β. Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ ο οποίος αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα. Αν το λ παίρνει τιμές στο δειγματικό χώρο Ω , να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A = \{\lambda \in \Omega / R + \delta < -2\}$.

127) Απολυτήριες 2010

☞ Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με αντίστοιχες πιθανότητες $P(A), P(B)$ και η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(x - P(A)) - \frac{1}{2}(x - P(A))^2 + P(B), x > P(A).$$

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Δ2. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0 = \frac{5}{3}$

με τιμή $f(x_0) = 0$, να αποδείξετε ότι: $P(A) = \frac{2}{3}$ και $P(B) = \frac{1}{2}$

Λαμβάνοντας υπόψη το ερώτημα Δ2 και επιπλέον ότι $(P(A \cup B)) = \frac{5}{6}$, να βρείτε την πιθανότητα:

Δ3. να μην πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα ενδεχόμενα A, B .

Δ4. να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα ενδεχόμενα A, B .

128) Απολυτήριες 2011

☞ Ένα κουτί περιέχει άσπρες, κόκκινες και μαύρες σφαίρες. Παίρνουμε τυχαία μια σφαίρα. Η πιθανότητα να είναι μαύρη

είναι $P(M) = \frac{1}{4}$, η πιθανότητα να είναι άσπρη είναι $P(A) = 4\lambda^2$ και η

πιθανότητα να είναι κόκκινη είναι $P(K) = -5\lambda + \frac{7}{4}$, όπου $\lambda \in \mathfrak{R}$. Αν

για το πλήθος $N(\Omega)$ των σφαιρών που υπάρχουν στο κουτί ισχύει $64 < N(\Omega) < 72$, τότε:

B1. Να δείξετε ότι $N(\Omega) = 68$

B2. Να υπολογιστεί η τιμή του λ

B3. Να βρείτε πόσες άσπρες, πόσες μαύρες και πόσες κόκκινες σφαίρες υπάρχουν στο κουτί.

B4. Παίρνουμε τυχαία μια σφαίρα. Να βρεθεί η πιθανότητα αυτή να είναι άσπρη ή μαύρη.

129) Απολυτήριες 2011

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\frac{1}{3}x(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5})}$, $x \in \mathfrak{R}$

Δ1. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία.

Δ2. Αν A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$ και $P(A), P(B)$ είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(A \cap B), P(A - B), P(B - A)$.

130) Απολυτήριες 2012

Από τους μαθητές μίας τάξης ενός σχολείου επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή. Αν n φυσικός αριθμός με $n \geq 3$, τότε η πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει

♦ Γαλλικά είναι: $\frac{3n}{n^2 + 1}$,

♦ Ισπανικά είναι: $\frac{n + 2}{n^2 + 1}$,

♦ και τις δύο παραπάνω γλώσσες είναι $\frac{n + 1}{n^2 + 1}$,

♦ μια τουλάχιστον απ τις παραπάνω γλώσσες είναι ίση με το

όριο: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(\sqrt{x^2 + 3} - 2)}{x^2 + x}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι το ενδεχόμενο ο μαθητής να μαθαίνει μια τουλάχιστον από τις παραπάνω γλώσσες είναι βέβαιο.

Γ2. Να αποδείξετε ότι $n = 3$

Γ3. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει μόνο ία από τις δύο γλώσσες.

Γ4. Αν ο αριθμός των μαθητών που μαθαίνουν και τις δύο γλώσσες είναι 32, να βρείτε τον αριθμό των μαθητών της τάξης.

131) Επαναληπτικές 2000

Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ ενός

πειράματος τύχης με $P(\omega_2) = \frac{1}{4}$, $P(\omega_3) = P(\omega_4) = \frac{1}{24}$ και $P(\omega_5) = \frac{1}{2}$

α) Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση. Η πιθανότητα $P(\omega_1)$ είναι :

A: $\frac{1}{2}$ B: $\frac{1}{6}$ Γ: $\frac{1}{3}$ Δ: $\frac{1}{12}$ E: $\frac{1}{8}$

β) Δίνονται τα ενδεχόμενα $A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$ και $B = \{\omega_1, \omega_2\}$ του δειγματικού χώρου Ω . Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της Στήλης A και δίπλα τον αριθμό της Στήλης B που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη A	Στήλη B
α. $P(A \cup B)$	1. $\frac{1}{4}$
β. $P(A \cap B)$	2. $\frac{7}{4}$
γ. $P(A')$	3. $\frac{23}{24}$
	4. $\frac{1}{6}$

132) Επαναληπτικές 2001

Σε ένα σχολείο με 400 μαθητές διδάσκονται μόνο η αγγλική και η γαλλική γλώσσα. Κάθε μαθητής είναι υποχρεωμένος να παρακολουθεί τουλάχιστον μία από τις παραπάνω ξένες γλώσσες. Από τους παραπάνω μαθητές 340 παρακολουθούν την αγγλική γλώσσα και 240 τη γαλλική γλώσσα. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Έστω A το ενδεχόμενο να παρακολουθεί την αγγλική γλώσσα και Γ να παρακολουθεί τη γαλλική γλώσσα.

α. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A και Γ είναι ασυμβίβαστα.

β. Να αποδείξετε ότι: $P(\Gamma - A) \leq \frac{3}{5}$

γ. Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να παρακολουθεί μόνο την αγγλική γλώσσα.

δ. Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να παρακολουθεί μία μόνο ξένη γλώσσα από αυτές.

133) Επαναληπτικές 2002

Έστω $\Omega = \{1, 2, 3, 6\}$ δειγματικός χώρος.

A. Να δικαιολογήσετε ποιοι από τους παρακάτω τύπους μπορούν να θεωρηθούν κατάλληλοι και ποιοι όχι για να εκφράσουν την πιθανότητα κάθε στοιχειώδους ενδεχομένου k του Ω .

i) $P(k) = \frac{1}{k}$ ii) $P(k) = \frac{1}{2^k}$ iii) $P(k) = \frac{1}{2k}$

B. Οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X είναι οι ακόλουθες: 1, 1, 7, k , k , 3, 3, 3 όπου k είναι στοιχειώδες ενδεχόμενο του Ω , με πιθανότητα $P(k) = \frac{1}{2k}$

Δίνονται τα ενδεχόμενα A , B του δειγματικού χώρου Ω , Όπου $A = \{k \in \Omega : k \neq 1\}$ και $B = \{k \in \Omega : \eta \text{ μέση τιμή } x = 2,5\}$.

α. Να παρασταθούν με αναγραφή τα ενδεχόμενα A και B .

β. Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$ και $P(A \cup B)$.

134) Επαναληπτικές 2003

Έχουμε 30 σφαίρες μέσα σ' ένα δοχείο, αριθμημένες από το 1 έως το 30. Επιλέγουμε στην τύχη μία σφαίρα. Έστω A το ενδεχόμενο ο αριθμός της σφαίρας να είναι άρτιος και B το ενδεχόμενο ο αριθμός αυτός να είναι πολλαπλάσιο του 5.

Αν A' , B' είναι τα συμπληρωματικά ενδεχόμενα των A και B αντιστοίχως, να υπολογίσετε τις πιθανότητες :

α. $P(A)$, $P(B)$

β. $P(A \cup B)$

γ. $P(A \cup B')$

δ. $P((A' \cap B) \cup (A \cap B'))$

135) Επαναληπτικές 2004

Έστω $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ο δειγματικός χώρος της ρίψης ενός μη αμερόληπτου ζαριού και η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - kx^2 + 4x + 2 \text{ όπου } k \in \Omega.$$

Αν $P(1) = P(3) = P(5) = 2P(2) = 4P(4) = 2P(6)$, τότε να βρείτε:

α. Τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$.

β. Τις πιθανότητες των ενδεχομένων A και B , όπου

A : «Η ένδειξη του ζαριού είναι άρτιος αριθμός»

B : «Η ένδειξη του ζαριού είναι περιττός αριθμός».

γ. Την πιθανότητα του ενδεχομένου Γ , όπου

Γ : «Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} » .

136) Επαναληπτικές 2005

Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Για τα ενδεχόμενα A , B , Γ του Ω είναι $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A \cap B = \{1, 3, 4\}$, $A - B = \{2, 6\}$ και

$$\Gamma = \left\{ x \in \Omega / \frac{x+1}{x-1} \geq 2 \right\}$$

α. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$, $P(\Gamma)$.

β. Να βρείτε την πιθανότητα, ώστε να πραγματοποιηθεί το B και όχι το Γ .

γ. Να βρείτε την πιθανότητα, ώστε να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα B και Γ .

δ. Αν s^2 είναι η διακύμανση των τιμών $\lambda, 3\lambda, 5\lambda$, όπου $\lambda \in \Omega$, να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχόμενου $\Delta = \{\lambda \in \Omega / s^2 > 24\}$.

137) Επαναληπτικές 2006

Σ Μία Τράπεζα χορηγεί διαφόρων τύπων δάνεια στους πελάτες της. Αν επιλεγεί τυχαία κάποιος πελάτης η πιθανότητα να έχει πάρει μόνο στεγαστικό ή μόνο καταναλωτικό δάνειο είναι 0,7 ενώ η πιθανότητα να μην έχει πάρει κανένα από τα δύο προηγούμενα δάνεια είναι 0,1.

α. Να βρείτε την πιθανότητα ένας πελάτης να έχει πάρει και τα δύο δάνεια. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα «έχει πάρει στεγαστικό» και «έχει πάρει καταναλωτικό» είναι ασυμβίβαστα.

β. Αν επιπλέον η πιθανότητα να έχει πάρει μόνο στεγαστικό είναι 0,6 να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

i. «έχει πάρει καταναλωτικό».

ii. «έχει πάρει μόνο καταναλωτικό».

138) Επαναληπτικές 2007

Σ Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα A, B του Ω τα οποία ορίζονται ως εξής:

$$A = \{x \in \Omega / 0 \leq \ln(x-1) < \ln 3\},$$

$$B = \{x \in \Omega / (x^2 - 5x)(x-1) = -6(x-1)\}.$$

α. Να βρεθούν οι πιθανότητες $P(A-B)$ και $P(B \cup A')$.

β. Αν $P(A) = \frac{1}{4}$, να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(A' \cup B')$.

γ. Αν $P(A) = \frac{1}{4}$ και $P(B-A) = \frac{1}{8}$, να βρεθεί η μικρότερη και η

μεγαλύτερη τιμή της πιθανότητας $P(X)$, όπου X είναι ενδεχόμενο του Ω τέτοιο ώστε $A \cup X = B$.

139) Επαναληπτικές 2008

Σ Έστω A και B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και p ένας πραγματικός αριθμός με $0 < p < 1$. Δίνεται ότι οι πιθανότητες $P(A)$, $P(A \cup B)$ και $P(A \cap B)$ είναι ανά δύο διαφορετικές μεταξύ τους και αποτελούν στοιχεία του συνόλου $\{p-1, p, p+1, p^2, p^3\}$.

α. Να δείξετε ότι $P(A) = p^2$, $P(A \cup B) = p$ και $P(A \cap B) = p^3$.

β. Να αποδείξετε ότι $P(B) = p^3 - p^2 + p$.

γ. Να αποδείξετε ότι $P(B - A) > P(A - B)$.

140) Επαναληπτικές 2009

Σ Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = v^3 x + \frac{4}{x^2}$, $x \in (0, 1)$, όπου v ακέραιος

αριθμός με $v > 2$

A. α. Να προσδιοριστεί το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα και το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα και να

δειχθεί ότι $f(x) \geq 3v^2$ για κάθε $x \in (0,1)$

B. Θεωρούμε τον δειγματικό χώρο $\Omega = \{1, 2, \dots, v\}$ με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και το ενδεχόμενό του, A για το οποίο ισχύει

$$v^3 P(A) + \frac{4}{(P(A))^2} = 3v^2 \text{ και } N(A) = v^2 - 9v - 8 \text{ όπου } P(A) \text{ είναι η}$$

πιθανότητα του A και $N(A)$ το πλήθος των στοιχείων του A

α. Να δείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{5}$

β. Αν επιπλέον B είναι ένα ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου Ω με $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$, να υπολογιστεί η πιθανότητα του ενδεχομένου

$A \cup B$

141) Επαναληπτικές 2010

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και τα ενδεχόμενά του $A = \{\omega_1, \omega_3\}$ και $B = \{\omega_2, \omega_4\}$

Αν είναι $P(A-B) = \frac{v+1}{v+4}$ και $P(B-A) = \frac{v-1}{2v}$ όπου v θετικός

ακέραιος, τότε:

Γ1. Να αποδείξετε ότι $P(A-B) = P(A)$ και $P(B-A) = P(B)$

Γ2. Να αποδείξετε ότι $v=4$

Γ3. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων A και B

Γ4. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A \cup B$

142) Επαναληπτικές 2011

Εξακόσιοι απόφοιτοι Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, οι οποίοι έχουν τα ίδια τυπικά και ουσιαστικά προσόντα, υποβάλουν αίτηση πρόσληψης σε δύο εταιρίες A και B. Δίνεται ότι η πιθανότητα, ένας τυχαία επιλεγμένος από αυτούς :

- να κριθεί κατάλληλος για πρόσληψη σε μια μόνο από τις

εταιρίες A και B είναι $\frac{\lambda+1}{3\lambda}, \lambda \neq 0$

- να κριθεί κατάλληλος για πρόσληψη το πολύ σε μια από τις

εταιρίες A και B είναι $\frac{3\lambda-1}{3\lambda}, \lambda \neq 0$

- να μην κριθεί κατάλληλος για πρόσληψη σε καμία από τις

εταιρίες A και B είναι $\frac{1}{\lambda-2}, \lambda \neq 2$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\lambda=4$

Δ2. Από τους 600 απόφοιτους που υπέβαλαν αίτηση πρόσληψης στις εταιρίες A και B, η εταιρία A έκρινε κατάλληλους για πρόσληψη 50 λιγότερους από όσους έκρινε η εταιρία B.

α) Πόσοι απόφοιτοι κρίθηκαν κατάλληλοι για πρόσληψη μόνο

από την εταιρεία A, πόσοι κρίθηκαν κατάλληλοι για πρόσληψη μόνο από την εταιρεία B και πόσοι απόφοιτοι θα βρεθούν στο δίλημμα να επιλέξουν σε ποια από τις δύο εταιρείες στις οποίες κρίθηκαν κατάλληλοι για πρόσληψη, επιθυμούν να εργαστούν;

β) Να αποδείξετε ότι 300 απόφοιτοι κρίθηκαν κατάλληλοι για πρόσληψη, από τις εταιρείες A ή B.

Δ3. Στους απόφοιτους που δεν κρίθηκαν κατάλληλοι για πρόσληψη δίνεται η δυνατότητα παρακολούθησης προγράμματος επιμόρφωσης. Αν η πιθανότητα εύρεσης εργασίας για αυτούς που θα παρακολουθήσουν το πρόγραμμα είναι διπλάσια από την αντίστοιχη εκείνων που δεν θα το παρακολουθήσουν, να υπολογίσετε πόσοι απόφοιτοι από αυτούς, που δεν κρίθηκαν κατάλληλοι θα βρουν εργασία. (Ελλιπή δεδομένα..... Λύνεται και αν πάρουμε ως δεδομένο ότι όλοι οι επιμορφωμένοι θα βρουν δουλειά και όλοι οι χωρίς επιμόρφωση δε θα βρουν)

143) Επαναληπτικές 2012

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $B = \{\omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ δύο ενδεχόμενα του Ω , με $P(A) = \frac{1}{2}$. Αν είναι $P(\omega_1) = \alpha$, $P(\omega_2) = \beta$, με

$$26\alpha^2 - 10\alpha - 2\alpha\beta + \beta^2 + 1 = 0, P(\omega_3) = \gamma \text{ και η συνάρτηση}$$

$$g(x) = P(\omega_4)x^3, x \in \mathfrak{R}, \text{ τότε:}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = \frac{1}{5}$ και $\gamma = \frac{1}{10}$

Γ2. Να βρείτε το $P(\omega_4)$, αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $(1, g(1))$, είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = x$, και στη συνέχεια να βρείτε το $P(\omega_5)$

Γ3. Αν είναι $P(\omega_4) = \frac{1}{3}$, $P(\omega_5) = \frac{1}{6}$, τότε να βρείτε την πιθανότητα

των ενδεχομένων K, Λ όπου:

K: « ένα μόνο από τα A και B να πραγματοποιείται »

Λ: « να πραγματοποιείται το A ή να μην πραγματοποιείται το B »

144) Επαναληπτικές 2012

Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με ισοπίθانا απλά ενδεχόμενα. Αν είναι $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ και $A \subseteq B$, να

αποδείξετε ότι ισχύει :

$$\frac{P(A)}{P(B)} \leq \left(\frac{3 - P(B)}{3 - P(A)} \right)^2$$

145) Δ Δέσμη 1994

Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων και A, B δύο ενδεχόμενα του Ω με $P(A) \leq 0,28$ και $P(B) \leq 0,71$. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) P(A \cap B) \geq 1,01 - P(A \cup B)$$

β) το ενδεχόμενο $A \cap B$ δεν είναι το \emptyset .

146) Δ Δέσμη 1995

Έστω Ω το σύνολο των ριζών της εξίσωσης

$$(x^2 + 4x - 5)(x - 7) = 0. \text{ Υποθέτουμε ότι } \Omega \text{ είναι ο δειγματικός}$$

χώρος ενός πειράματος τύχης που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Θεωρούμε και την ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} (\alpha - 1995)\alpha & 1 \\ (\alpha - 1995)(2\alpha - 7) & (\alpha - 6) \end{vmatrix} \text{ όπου } \alpha \in \Omega. \text{ Έστω } A \subseteq \Omega \text{ είναι το}$$

ενδεχόμενο η παραπάνω ορίζουσα να είναι ίση με 0. Να βρεθεί η $P(A)$.

147) Δ Δέσμη 1996

Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και A, B ενδεχόμενα του Ω . Θεωρούμε ότι $P^2(A) + P^2(A') = P(B)$ και

$$2P(A)P(A') = P(B') \text{ όπου } A' \text{ το συμπλήρωμα του } A \text{ και } B' \text{ το}$$

συμπλήρωμα του B . Αν $P(B') = \frac{4}{9}$ και $P(A) < P(A')$ να βρεθούν οι

πιθανότητες των A και A' .

148) Δ Δέσμη 1998

Δίνεται η ορίζουσα $D = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ \lambda - 1 & \lambda \end{vmatrix}$ και οι πολυωνυμικές

συναρτήσεις $f(x) = 4(x-1)(x^2 - 5x + 6)$ και

$$g(x) = x^2 + (\kappa^2 - 5\kappa)x + 13, \quad x \in \mathfrak{R} \text{ και } \kappa, \lambda \in \mathfrak{R}.$$

α) Ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης είναι $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ με $\omega_1 = x_1, \omega_2 = x_2, \omega_3 = x_3, \omega_4 = 4x_1, \omega_5 = 4x_2, \omega_6 = 4x_3$, όπου x_1, x_2, x_3 είναι οι ρίζες της $f(x) = 0$. Οι πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων του Ω ικανοποιούν τις σχέσεις: $P(\omega_6) = P(\omega_5) = P(\omega_4) = 3P(\omega_3) = 3P(\omega_2) = 3P(\omega_1)$.

α) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων του Ω .

β) Θεωρούμε το σύνολο $B = \{\lambda \in \Omega / D = 0\}$, να βρεθεί η $P(B)$.

γ) Να δείξετε ότι για το ενδεχόμενο Γ του Ω με

$$\Gamma = \{\kappa \in \Omega / \eta \text{ g έχει ακρότατο στο σημείο } x_0 = 3\} \text{ ισχύει } P(\Gamma) = P(B).$$

δ) Να βρείτε τις πιθανότητες $P(B \cup \Gamma)$ και $P(B \cap \Gamma)$.

149) Δ Δέσμη 1999

Έστω $\Omega = \{0, 1, 2\}$ ένας δειγματικός χώρος με $P(0) = 2P(2) = \frac{1}{3}$

α) Να βρείτε το $P(1)$

β) Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x - \frac{\lambda}{2}x^2 + 118, x \in \mathbb{R}, \lambda \in \Omega$. Θεωρούμε το ενδεχόμενο $E = \{\lambda \in \Omega / \text{η γραφική παράσταση της συνάρτησης } f \text{ έχει σημείο καμπής το } (0, f(0))\}$. Να βρείτε την πιθανότητα του E .

150) Δ Δέσμη 1999

Έστω $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ένας δειγματικός χώρος με ισοπίθانا απλά ενδεχόμενα και κύκλος C με κέντρο $(2, 1)$ και ακτίνα 1.

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

$E = \{\omega \in \Omega / \text{το σημείο } M(\omega, 1) \text{ είναι εσωτερικό του κύκλου } C \}$

$Z = \{\omega \in \Omega / \text{το σημείο } N(2, \omega) \text{ είναι εξωτερικό του κύκλου } C \}$.

Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων $E, Z, E \cup Z$.

151) Δ Δέσμη 2000

Έστω $\Omega = \{1, 2, \dots, 10\}$ ένας δειγματικός χώρος με ισοπίθانا απλά ενδεχόμενα. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + \lambda^2, x \in \mathbb{R}, \lambda \in \Omega. \text{ Αν τα ενδεχόμενα } X, Y,$$

όπου: $X = \{\text{η μέγιστη τιμή της } f \text{ στο } [0, 5] \text{ είναι μεγαλύτερη ή ίση}$

$\text{του } \frac{68}{3}\}$ και $Y = \{\text{η ελάχιστη τιμή της } f \text{ στο } [0, 5] \text{ είναι μικρότερη ή}$

$\text{ίση του } 4\}$. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

$X, Y, X \cap Y, X \cup Y$.

152) Δ Δέσμη 2000

Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και X, Y ενδεχόμενα του Ω με $X \subseteq Y$. Αν οι πιθανότητες $P(X), P(Y)$ των ενδεχομένων X, Y είναι οι θέσεις των τοπικών ακρότατων της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x + 2000, x \in \mathbb{R}$.

Να υπολογίσετε:

α) τις πιθανότητες $P(X), P(Y)$

β) τις πιθανότητες: $P(X \cap Y), P(X \cup Y)$ και $P(Y \cap X')$ όπου X' το συμπλήρωμα του X .

153) Ο.Ε.Φ.Ε 2001

Δίνονται δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύουν: $P(A - B) = \frac{1}{4}, P(A \cap B) = \frac{1}{20}$ και $P(B' - A) = \frac{1}{2}$.

α) Να βρείτε την $P(A)$

β) Να αποδείξετε ότι $P(B) = \frac{1}{4}$

γ) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα ενδεχόμενα A και B .



Γενικό Λύκειο Νεστορίου
Σχολικό έτος 2012-2013
Βοηθητικό Υλικό της Γ΄ Λυκείου