

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 2012

ΘΕΜΑ 1ο :

Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $\operatorname{Re}(z_1) = -2$ και $\operatorname{Re}(z_2) = 2$

Αν $f(x) = (x - z_1)(x - \overline{z_1})(x - z_2)(x - \overline{z_2})$ και $f(i) = 64 - 8i$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $f(-i) = 64 + 8i$

β) $(1 + z_1^2)(1 + \overline{z_1}^2)(1 + z_2^2)(1 + \overline{z_2}^2) = 4160$

γ) $|z_1| = 3$ και $|z_2| = \sqrt{7}$

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\begin{aligned} \bullet \quad f(i) &= (i - z_1)(i - \overline{z_1})(i - z_2)(i - \overline{z_2}) \\ \bullet \quad f(-i) &= (-i - z_1)(-i - \overline{z_1})(-i - z_2)(-i - \overline{z_2}) = \\ &= (\overline{i - z_1})(\overline{i - \overline{z_1}})(\overline{i - z_2})(\overline{i - \overline{z_2}}) = \\ &= (\overline{i - z_1})(\overline{i - \overline{z_1}})(\overline{i - z_2})(\overline{i - \overline{z_2}}) = \\ &= (\overline{i - z_1})(\overline{i - \overline{z_1}})(\overline{i - z_2})(\overline{i - \overline{z_2}}) = \\ &= (\overline{i - z_1})(\overline{i - \overline{z_1}})(\overline{i - z_2})(\overline{i - \overline{z_2}}) = \\ &= (\overline{i - z_1})(\overline{i - \overline{z_1}})(\overline{i - z_2})(\overline{i - \overline{z_2}}) = \\ &= f(i) = 64 - 8i = 64 + 8i \end{aligned}$$

β) Είναι:

$$\begin{aligned} (1 + z_1^2)(1 + \overline{z_1}^2)(1 + z_2^2)(1 + \overline{z_2}^2) &= \\ = (z_1^2 - i^2)(\overline{z_1}^2 - i^2)(z_2^2 - i^2)(\overline{z_2}^2 - i^2) &= \\ = (z_1 - i)(z_1 + i)(\overline{z_1} - i)(\overline{z_1} + i)(z_2 - i)(z_2 + i)(\overline{z_2} - i)(\overline{z_2} + i) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= [(z_1 - i)(\overline{z_1 - i})(z_2 - i)(\overline{z_2 - i})][(z_1 + i)(\overline{z_1 + i})(z_2 + i)(\overline{z_2 + i})] = \\
 &= [(i - z_1)(i - \overline{z_1})(i - z_2)(i - \overline{z_2})][(-i - z_1)(-i - \overline{z_1})(-i - z_2)(-i - \overline{z_2})] = \\
 &= f(i)f(-i) = (64 - 8i)(64 + 8i) = 64^2 + 8^2 = 4096 + 64 = 4160
 \end{aligned}$$

γ) Είναι:

$$z_1 + \overline{z_1} = 2 \operatorname{Re}(z_1) = 2 \cdot (-2) = -4 \quad (1)$$

$$z_2 + \overline{z_2} = 2 \operatorname{Re}(z_2) = 2 \cdot 2 = 4 \quad (2)$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad f(i) &= (i - z_1)(i - \overline{z_1})(i - z_2)(i - \overline{z_2}) = \\
 &= [(i - z_1)(i - \overline{z_1})][(i - z_2)(i - \overline{z_2})] = \\
 &= [-1 - i(z_1 + \overline{z_1}) + |z_1|^2][-1 - i(z_2 + \overline{z_2}) + |z_2|^2] \stackrel{(1), (2)}{=} \\
 &= [|z_1|^2 - 1 + 4i][|z_2|^2 - 1 - 4i] = \\
 &= [|z_1|^2 - 1 + 4i][|z_2|^2 - 1 - 4i] = \\
 &= [(|z_1|^2 - 1)(|z_2|^2 - 1) + 16] + [4(|z_2|^2 - 1) - 4(|z_1|^2 - 1)]i = \\
 &= [(|z_1|^2 - 1)(|z_2|^2 - 1) + 16] + [4|z_2|^2 - 4|z_1|^2]i
 \end{aligned}$$

Όμως:

$$\bullet \quad f(i) = 64 - 8i$$

Άρα έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{array}{l} (|z_1|^2 - 1)(|z_2|^2 - 1) + 16 = 64 \\ 4|z_2|^2 - 4|z_1|^2 = -8 \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (|z_1|^2 - 1)(|z_2|^2 - 1) = 48 \\ |z_2|^2 - |z_1|^2 = -2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \\
 \left\{ \begin{array}{l} (|z_2|^2 + 1)(|z_2|^2 - 1) = 48 \\ |z_1|^2 = |z_2|^2 + 2 \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |z_2|^4 - 1 = 48 \\ |z_1|^2 = |z_2|^2 + 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \\
 \left\{ \begin{array}{l} |z_2|^4 = 49 \\ |z_1|^2 = |z_2|^2 + 2 \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |z_2| = \sqrt{7} \\ |z_1|^2 = 9 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |z_2| = \sqrt{7} \\ |z_1| = 3 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 2ο :

Δίνεται η παράσταση $f(z) = \frac{(\sqrt{3} + i)z}{|z + 10i| - |z - 10i|}$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{C}$ στο οποίο ορίζεται η παράσταση $f(z)$ είναι το $\mathbb{C} - \mathbb{R}$

β) $||z + 10i| - |z - 10i|| \leq 2|z|$

γ) $|f(z)| \geq 1$

δ) Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z , για τους οποίους ισχύει $|f(z)| = \frac{1}{6}|z|$, είναι υπερβολή, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

ΛΥΣΗ

α) Έστω $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ και $M(x, y)$ η εικόνα του στο επίπεδο.

Για να ορίζεται η παράσταση f αρκεί $|z + 10i| - |z - 10i| \neq 0$

Εξετάζουμε λοιπόν για ποιους μιγαδικούς αριθμούς z ισχύει $|z + 10i| - |z - 10i| = 0$

Είναι:

$$|z + 10i| - |z - 10i| = 0 \Leftrightarrow |z + 10i| = |z - 10i| \Leftrightarrow$$

$$|x + (y + 10)i| = |x + (y - 10)i| \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x^2 + (y + 10)^2} = \sqrt{x^2 + (y - 10)^2} \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 + 20y + 100 = x^2 + y^2 - 20y + 100 \Leftrightarrow$$

$$20y = -20y \Leftrightarrow 40y = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

Άρα, για να ορίζεται η παράσταση f αρκεί $y \neq 0$, δηλαδή $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$

β) Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \text{ για κάθε } z_1, z_2 \in \mathbb{C},$$

οπότε για $z_1 = z + 10i$ και $z_2 = z - 10i$ έχουμε:

$$||z + 10i| - |z - 10i|| \leq |(z + 10i) + (z - 10i)| = |2z| = 2|z|$$

γ) Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ είναι:

$$||z + 10i| - |z - 10i|| \leq 2|z|$$

οπότε για κάθε $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ είναι:

$$\frac{1}{||z + 10i| - |z - 10i||} \geq \frac{1}{2|z|} \quad (1)$$

Έχουμε λοιπόν:

$$|f(z)| = \left| \frac{(\sqrt{3} + i)z}{|z + 10i| - |z - 10i|} \right| = \frac{|(\sqrt{3} + i)z|}{||z + 10i| - |z - 10i||} = \frac{|\sqrt{3} + i| \cdot |z|}{||z + 10i| - |z - 10i||} =$$

$$= \frac{2|z|}{||z+10i|-|z-10i||} = 2|z| \cdot \frac{1}{||z+10i|-|z-10i||} \stackrel{(1)}{\geq} 2|z| \cdot \frac{1}{2|z|} = 1$$

δ) Είναι:

$$|f(z)| = \frac{1}{6}|z| \Leftrightarrow \left| \frac{(\sqrt{3}+i)z}{|z+10i|-|z-10i|} \right| = \frac{1}{6}|z| \Leftrightarrow \frac{|\sqrt{3}+i| \cdot |z|}{||z+10i|-|z-10i||} = \frac{1}{6}|z| \Leftrightarrow$$

$$\frac{2|z|}{||z+10i|-|z-10i||} = \frac{1}{6}|z| \Leftrightarrow |z| \cdot ||z+10i|-|z-10i|| = 12|z| \Leftrightarrow ||z+10i|-|z-10i|| = 12$$

Είναι:

$$||z+10i|-|z-10i|| = 12 \Leftrightarrow ||z-(0-10i)|-|z-(0+10i)|| = 12 \Leftrightarrow |(ME')-(ME)| = 12,$$

όπου M η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z , $E'(0, -10)$ και $E(0, 10)$

Παρατηρούμε ότι η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων της εικόνας M του μιγαδικού αριθμού z από τα σταθερά σημεία E', E είναι $2a=12$ σταθερή και μικρότερη του $(E'E) = 20$.

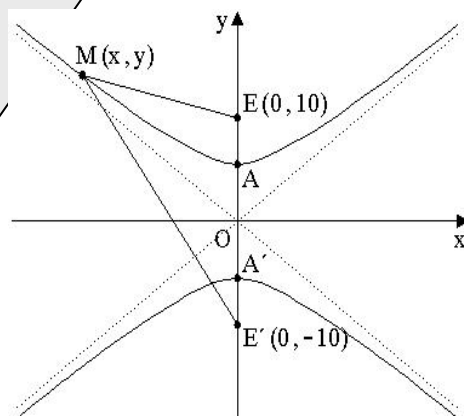
Επομένως, ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η υπερβολή με εστίες τα σημεία $E'(0, -10)$ και $E(0, 10)$, άρα $\gamma=10$

Επιπλέον είναι $2a=12 \Leftrightarrow a=6$, οπότε

$$\beta^2 = \gamma^2 - a^2 \Leftrightarrow \beta^2 = 100 - 36 \Leftrightarrow \beta^2 = 64 \Leftrightarrow \beta = 8$$

και η εξίσωση της υπερβολής είναι:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{64} = 1$$



ΘΕΜΑ 36 :

Δίνονται τρεις μιγαδικοί αριθμοί z, w, u με $|z|=3$, $|w|=4$, $|u|=5$ και $z+w+u=0$, οι οποίοι έχουν εικόνες τα σημεία A, B, Γ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $16z^2 + 9w^2 = 0$

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο, όπου O είναι η αρχή των αξόνων.

γ) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$ με κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών z, w, u

ΛΥΣΗ

α) Από την υπόθεση έχουμε:

$$\bullet |z|=3 \Leftrightarrow |z|^2=9 \Leftrightarrow z\bar{z}=9 \Leftrightarrow \bar{z}=\frac{9}{z} \quad (1)$$

$$\bullet |w|=4 \Leftrightarrow |w|^2=16 \Leftrightarrow w\bar{w}=16 \Leftrightarrow \bar{w}=\frac{16}{w} \quad (2)$$

$$\bullet |u|=5 \Leftrightarrow |u|^2=25 \Leftrightarrow u\bar{u}=25 \Leftrightarrow \bar{u}=\frac{25}{u} \quad (3)$$

Επίσης έχουμε:

$$u = -(z + w) \quad (4)$$

Είναι:

$$z + w + u = 0 \Leftrightarrow \bar{z} + \bar{w} + \bar{u} = 0 \quad (5)$$

Η σχέση (5) με βάση τις σχέσεις (1), (2) και (3) γράφεται:

$$\begin{aligned} \frac{9}{z} + \frac{16}{w} + \frac{25}{u} = 0 &\Leftrightarrow \frac{9}{z} + \frac{16}{w} - \frac{25}{z+w} = 0 \Leftrightarrow \\ 9w(z+w) + 16z(z+w) - 25zw &= 0 \Leftrightarrow \\ 9wz + 9w^2 + 16z^2 + 16zw - 25zw &= 0 \Leftrightarrow \\ 16z^2 + 9w^2 &= 0 \quad (6) \end{aligned}$$

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$(OA)^2 + (OB)^2 = (AB)^2 \Leftrightarrow |z|^2 + |w|^2 = |z - w|^2$$

Είναι όμως:

$$\begin{aligned} |z - w|^2 &= (z - w)(\bar{z} - \bar{w}) = z\bar{z} + w\bar{w} - (z\bar{w} + \bar{z}w) = \\ &= 16 + 9 - \left(\frac{16z}{w} + \frac{9w}{z} \right) = 25 - \frac{16z^2 + 9w^2}{zw} \stackrel{(6)}{=} 25 = (AB)^2 \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε:

$$(AB) = |z - w| = 5$$

Είναι:

$$(OA)^2 + (OB)^2 = |z|^2 + |w|^2 = 9 + 16 = 25 = |z - w|^2 = (AB)^2$$

οπότε το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο.

γ) Αρκεί να βρούμε ακόμα τους αριθμούς $|z - u|$ και $|w - u|$, που είναι αντίστοιχα τα μήκη των πλευρών ΑΓ και ΒΓ, αφού ήδη έχουμε αποδείξει ότι $(AB) = |z - w| = 5$

Είναι:

$$\begin{aligned} |z - u|^2 &\stackrel{(4)}{=} |2z + w|^2 = (2z + w)(2\bar{z} + \bar{w}) = \\ &= 4z\bar{z} + w\bar{w} + 2(z\bar{w} + w\bar{z}) = 4|z|^2 + |w|^2 + 2(z\bar{w} + w\bar{z}) = \\ &= 36 + 16 + 2 \cdot \left(\frac{9w}{z} + \frac{16z}{w} \right) = 36 + 16 + 2 \cdot \frac{16z^2 + 9w^2}{zw} \stackrel{(6)}{=} 52 \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε:

$$(ΑΓ) = |z - u| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad |w - u|^2 &\stackrel{(4)}{=} |z + 2w|^2 = (z + 2w)(\bar{z} + 2\bar{w}) = \\
 &= z\bar{z} + 4w\bar{w} + 2(z\bar{w} + w\bar{z}) = |z|^2 + 4|w|^2 + 2(z\bar{w} + w\bar{z}) = \\
 &= 9 + 64 + 2 \cdot \left(\frac{9w}{z} + \frac{16z}{w} \right) = 9 + 64 + 2 \cdot \frac{16z^2 + 9w^2}{zw} = 73
 \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε:

$$(BG) = |w - u| = \sqrt{73}$$

ΘΕΜΑ 4ο :

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w , οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\bullet \quad \left| \frac{z}{a^2} - i \right| = \frac{1}{a} |z - i| \quad (1)$$

$$\bullet \quad w(z - i) - 2zi - 2a^2 = 0 \quad (2), \text{ όπου } a \in \mathbb{R} \text{ και } 0 < a \neq 1$$

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z

β) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών w ανήκουν σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

γ) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $v = \frac{2z - w}{2z + w}$ με $w \neq -2z$, είναι φανταστικός

δ) Αν z_1, z_2 είναι δυο μιγαδικοί αριθμοί με εικόνες αντίστοιχα στο επίπεδο τα σημεία A, B , οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση (1) και w είναι ένας μιγαδικός αριθμός με εικόνα στο επίπεδο το σημείο Γ , ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση (2), τότε να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{3} \leq \frac{(\Gamma A)}{(\Gamma B)} \leq 3$$

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{z}{a^2} - i \right| = \frac{1}{a} |z - i| &\Leftrightarrow |z - a^2 i| = a |z - i| \Leftrightarrow |z - a^2 i|^2 = a^2 |z - i|^2 \Leftrightarrow \\
 (z - a^2 i)(\bar{z} - a^2 i) &= a^2 (z - i)(\bar{z} - i) \Leftrightarrow (z - a^2 i)(\bar{z} + a^2 i) = a^2 (z - i)(\bar{z} + i) \Leftrightarrow \\
 z\bar{z} + a^2 zi - a^2 \bar{z}i - a^4 i^2 &= a^2 z\bar{z} + a^2 zi - a^2 \bar{z}i - a^2 i^2 \Leftrightarrow |z|^2 - a^4 i^2 = a^2 |z|^2 - a^2 i^2 \Leftrightarrow \\
 |z|^2 - a^2 |z|^2 &= a^2 - a^4 \Leftrightarrow (1 - a^2) |z|^2 = (1 - a^2) a^2 \stackrel{0 < a \neq 1}{\Leftrightarrow} |z|^2 = a^2 \Leftrightarrow |z| = a \quad (3)
 \end{aligned}$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = a$

β) Έχουμε:

$$\begin{aligned}
 w(z - i) - 2zi - 2a^2 &= 0 \Leftrightarrow w(z - i) = 2zi + 2a^2 \stackrel{z \neq i}{\Leftrightarrow} w = \frac{2zi + 2a^2}{z - i} \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} \\
 w &= \frac{2zi + 2|z|^2}{z - i} \Leftrightarrow w = \frac{2zi + 2z\bar{z}}{z - i} \Leftrightarrow w = \frac{2z(\bar{z} + i)}{z - i} \quad (4)
 \end{aligned}$$

Είναι $z \neq i$, γιατί αν $z = i$ από τη σχέση (2) προκύπτει $a^2 = 1$ άτοπο.

Από τη σχέση (4) έχουμε:

$$|w| = \left| \frac{2z(\bar{z}+i)}{z-i} \right| \Leftrightarrow |w| = \frac{|2z(\bar{z}+i)|}{|z-i|} \Leftrightarrow |w| = \frac{2|z| \cdot |\bar{z}+i|}{|z-i|} \Leftrightarrow |w| = \frac{2|z| \cdot |\overline{z-i}|}{|z-i|} \Leftrightarrow$$

$$|w| = \frac{2|z| \cdot |z-i|}{|z-i|} \Leftrightarrow |w| = 2|z| \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} |w| = 2\alpha \quad (5)$$

Άρα οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών w ανήκουν στον κύκλο, ο οποίος έχει κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=2\alpha$

γ) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\bar{v} = -v$

Από τις σχέσεις (3) και (5) έχουμε:

- $|z|^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow z\bar{z} = \alpha^2 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{\alpha^2}{z}$
- $|w|^2 = 4\alpha^2 \Leftrightarrow w\bar{w} = 4\alpha^2 \Leftrightarrow \bar{w} = \frac{4\alpha^2}{w}$

Είναι:

$$\bar{v} = \overline{\left(\frac{2z-w}{2z+w} \right)} = \frac{\overline{2z-w}}{\overline{2z+w}} = \frac{2\bar{z}-\bar{w}}{2\bar{z}+\bar{w}} = \frac{\frac{2\alpha^2}{z} - \frac{4\alpha^2}{w}}{\frac{2\alpha^2}{z} + \frac{4\alpha^2}{w}} = \frac{2\alpha^2 \left(\frac{1}{z} - \frac{2}{w} \right)}{2\alpha^2 \left(\frac{1}{z} + \frac{2}{w} \right)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{z} - \frac{2}{w}}{\frac{1}{z} + \frac{2}{w}} = \frac{\frac{w-2z}{zw}}{\frac{w+2z}{zw}} = \frac{w-2z}{w+2z} = -\frac{2z-w}{2z+w} = -v$$

Άρα ο αριθμός $v = \frac{2z-w}{2z+w}$ είναι φανταστικός

δ) Είναι:

$$(\Gamma A) = |w - z_1| \quad \text{και} \quad (\Gamma B) = |w - z_2|$$

Για τους μιγαδικούς αριθμούς w, z_1 από τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$||w| - |z_1|| \leq |w + z_1| \leq |w| + |z_1| \quad (6)$$

Αν στη σχέση (6) θέσουμε, όπου z_1 το $-z_1$ έχουμε:

$$||w| - |-z_1|| \leq |w + (-z_1)| \leq |w| + |-z_1| \quad \stackrel{|-z_1|=|z_1|}{\Leftrightarrow}$$

$$||w| - |z_1|| \leq |w - z_1| \leq |w| + |z_1| \Leftrightarrow$$

$$|2\alpha - \alpha| \leq |w - z_1| \leq 2\alpha + \alpha \Leftrightarrow \alpha \leq (\Gamma A) \leq 3\alpha \quad (7)$$

Ομοίως για τους μιγαδικούς αριθμούς w, z_2 έχουμε:

$$\alpha \leq |w - z_2| \leq 3\alpha \Leftrightarrow \alpha \leq (\Gamma B) \leq 3\alpha, \text{ οπότε } \frac{1}{3\alpha} \leq \frac{1}{(\Gamma B)} \leq \frac{1}{\alpha} \quad (8)$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις σχέσεις (7) και (8) έχουμε:

$$\frac{\alpha}{3\alpha} \leq \frac{(\Gamma\Delta)}{(\Gamma\beta)} \leq \frac{3\alpha}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{(\Gamma\Delta)}{(\Gamma\beta)} \leq 3$$

ΘΕΜΑ 5ο :

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς w και z , για τους οποίους ισχύει ότι:

- $25|w|^2 = 180 + |5w - 6 - 12i|^2$
- Οι εικόνες $K(z)$ των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο είναι τα κέντρα των κύκλων εκείνων που εφάπτονται εσωτερικά του κύκλου $C_1: (E, 4)$, όπου $E(1, 0)$ και διέρχονται από το σημείο $E'(-1, 0)$

Να βρείτε:

- Το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο μιγαδικό επίπεδο.
- Το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο.
- Την ελάχιστη τιμή του μέτρου $|z - w|$
- Τους μιγαδικούς z_1, z_2, z_3, z_4 από τους μιγαδικούς αριθμούς z , που οι εικόνες τους είναι κορυφές τετραγώνου με πλευρές παράλληλες προς τους άξονες $x'x$ και $y'y$

ΛΥΣΗ

α) Έστω $w = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} 25|w|^2 &= 180 + |5w - 6 - 12i|^2 \Leftrightarrow \\ 25|x + yi|^2 &= 180 + |5(x + yi) - 6 - 12i|^2 \Leftrightarrow \\ 25|x + yi|^2 &= 180 + |(5x - 6) + (5y - 12)i|^2 \Leftrightarrow \\ 25(x^2 + y^2) &= 180 + (5x - 6)^2 + (5y - 12)^2 \Leftrightarrow \\ 25x^2 + 25y^2 &= 180 + 25x^2 - 60x + 36 + 25y^2 - 120y + 144 \Leftrightarrow \\ 60x + 120y - 360 &= 0 \Leftrightarrow x + 2y - 6 = 0 \end{aligned}$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο μιγαδικό επίπεδο είναι η ευθεία $\varepsilon: x + 2y - 6 = 0$

β) Αν Δ είναι το σημείο επαφής ενός κύκλου κέντρου $K(z)$ με τον κύκλο C_1 , τότε ισχύει:

$$(KE) = 4 - (K\Delta) \quad (1), \text{ με } (K\Delta) < 4$$

Επειδή $(K\Delta) = (KE')$ η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται:

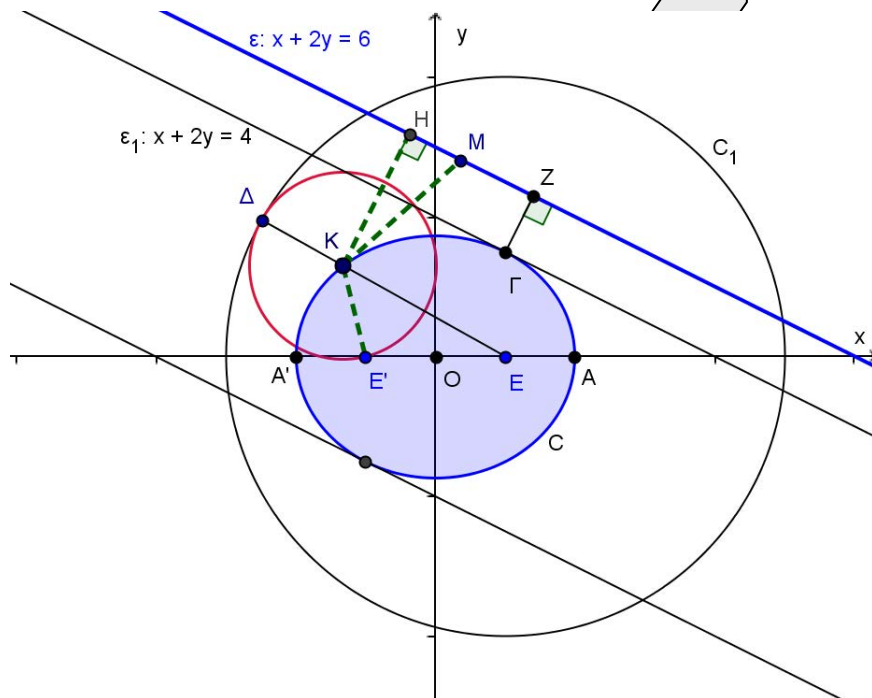
$$(KE) = 4 - (KE') \Leftrightarrow (KE) + (KE') = 4 \quad \text{και} \quad (E'E) = 2 < 4$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των σημείων K , που είναι οι εικόνες των μιγαδικών z στο επίπεδο είναι έλλειψη με εστίες τα σημεία $E'(-1, 0)$, $E(1, 0)$ και μεγάλο άξονα $A'A$ με $(A'A) = 2a = 4$, οπότε $a = 2$

Είναι:

$$2\gamma = (E'E) = 2 \Leftrightarrow \gamma = 1 \quad \text{και} \quad \beta^2 = a^2 - \gamma^2 \Leftrightarrow \beta^2 = 3$$

Επομένως η εξίσωση της έλλειψης είναι $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$



γ) Έστω $K(z)$ και $M(w)$ οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, w στο μιγαδικό επίπεδο, τότε είναι $|z - w| = (KM) \geq (KH) \geq (\Gamma Z)$, όπου $KH \perp (\varepsilon)$ και Γ εκείνο το σημείο της έλλειψης C , στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη προς την ευθεία ε και απέχει από αυτή τη μικρότερη απόσταση.

Εύρεση του Γ :

Έστω $\Gamma(x_1, y_1)$ σημείο της έλλειψης C τότε ισχύει:

$$\frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{3} = 1 \quad (1)$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης α₁ στο σημείο Γ είναι:

$$\varepsilon_1: \frac{xx_1}{4} + \frac{yy_1}{3} = 1$$

Είναι

$$\varepsilon_1 // \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon} \stackrel{y_1 \neq 0}{\Leftrightarrow} -\frac{3x_1}{4y_1} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow y_1 = \frac{3}{2}x_1 \quad (2)$$

Από την (1) έχουμε:

$$\frac{x_1^2}{4} + \frac{\frac{9}{4}x_1^2}{3} = 1 \Leftrightarrow x_1^2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = \pm 1$$

- Για $x_1 = 1$ είναι $y_1 = \frac{3}{2}$, άρα $\Gamma_1 \left(1, \frac{3}{2} \right)$

- Για $x_1 = -1$ είναι $y_1 = -\frac{3}{2}$, άρα $\Gamma_2\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$

Οι εφαπτόμενες της έλλειψης C , στα σημεία της Γ_1 και Γ_2 είναι παράλληλες προς την ευθεία ε και

$$\bullet \quad d(\Gamma_1, \varepsilon) = \frac{\left|1 + 2 \cdot \frac{3}{2} - 6\right|}{\sqrt{1+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad \bullet \quad d(\Gamma_2, \varepsilon) = \frac{\left|-1 - 2 \cdot \frac{3}{2} - 6\right|}{\sqrt{1+2^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

Δηλαδή $d(\Gamma_1, \varepsilon) < d(\Gamma_2, \varepsilon)$, άρα το ζητούμενο σημείο Γ είναι το Γ_1
Είναι:

$$|z - w| = (KM) \geq (KH) \geq (\Gamma Z) = d(\Gamma, \varepsilon) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Άρα η ελάχιστη τιμή του μέτρου $|z - w|$ είναι $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

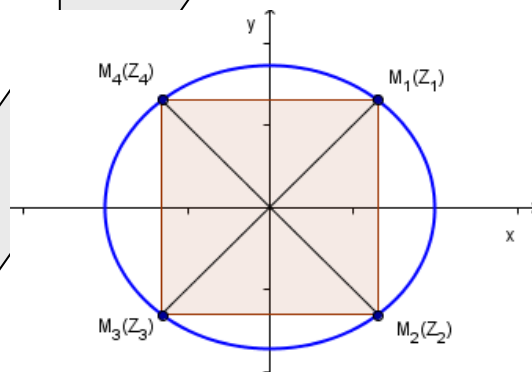
δ) Έστω τα σημεία M_1, M_2, M_3, M_4 της έλλειψης C ,

που είναι οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3, z_4

αντίστοιχα, με $z_1 = x_1 + y_1 i$, $x_1, y_1 > 0$, ώστε το

τετράπλευρο $M_1 M_2 M_3 M_4$ να είναι τετράγωνο με

πλευρές παράλληλες προς τους άξονες $x'x$ και $y'y$



Είναι:

$$\bullet \quad (M_1 M_2) = (M_1 M_4) \Leftrightarrow |z_1 - z_2| = |z_1 - z_4| \Leftrightarrow$$

$$|z_1 - \bar{z}_1| = |z_1 - (-\bar{z}_1)| \Leftrightarrow |2y_1 i| = |2x_1| \Leftrightarrow y_1 = x_1 \quad (3) \quad x_1, y_1 > 0$$

$$\bullet \quad \frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{3} = 1 \quad (4) \quad , \text{ γιατί το σημείο } M_1 \in (C)$$

Από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων (3) και (4) προκύπτει ότι:

$$x_1 = y_1 = \frac{2\sqrt{21}}{7}, \text{ γιατί } x_1, y_1 > 0$$

Άρα οι ζητούμενοι μιγαδικοί αριθμοί είναι:

$$z_1 = \frac{2\sqrt{21}}{7}(1+i), z_2 = \frac{2\sqrt{21}}{7}(1-i), z_3 = \frac{2\sqrt{21}}{7}(-1-i) \text{ και } z_4 = \frac{2\sqrt{21}}{7}(-1+i)$$

ΘΕΜΑ 6ο :

Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση:

$$(f^2(x) + g^2(x))' = 2f'(x) + 2g'(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

και οι μιγαδικοί αριθμοί $z_x = f(x) + g(x)i$

α) Αν $f(1)=4$ και $g(1)=-3$, τότε:

- Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z_x κινούνται σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
- Να βρείτε την ελάχιστη και την μέγιστη τιμή του αθροίσματος $f^2(x)+g^2(x)$, στην περίπτωση που ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z_x είναι ο κύκλος του προηγούμενου ερωτήματος.

β) Αν υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ ώστε $z_a = 1+i$, τότε:

- Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = z_a^{2012} - \bar{z}_a^{2012}$
- Να βρείτε τις συναρτήσεις f, g

ΛΥΣΗ

α) i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\begin{aligned} (f^2(x) + g^2(x))' &= 2f'(x) + 2g'(x) \Rightarrow \\ 2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x) &= 2f'(x) + 2g'(x) \Rightarrow \\ 2f'(x)(f(x)-1) + 2g'(x)(g(x)-1) &= 0 \Rightarrow \\ [(f(x)-1)^2 + (g(x)-1)^2]' &= 0 \Rightarrow \\ (f(x)-1)^2 + (g(x)-1)^2 &= c \quad (2) \end{aligned}$$

Για $x=1$ από τη σχέση (2) έχουμε:

$$\begin{aligned} (f(1)-1)^2 + (g(1)-1)^2 &= c \Leftrightarrow \\ 3^2 + (-4)^2 &= c \Leftrightarrow c = 25 \end{aligned}$$

Άρα, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$(f(x)-1)^2 + (g(x)-1)^2 = 25$$

που σημαίνει ότι οι εικόνες των μιγαδικών z_x κινούνται σε κύκλο με κέντρο $K(1, 1)$ και ακτίνα $\rho = 5$

- Για κάθε μιγαδικό αριθμό z_x ισχύει $|z_x|^2 = f^2(x) + g^2(x)$, οπότε το άθροισμα $f^2(x) + g^2(x)$ λαμβάνει την ελάχιστη (μέγιστη) τιμή του, όταν το μέτρο του z_x λαμβάνει την ελάχιστη (μέγιστη) τιμή.

Η ελάχιστη τιμή του $|z_x|$ είναι ίση με:

$$(OA) = (AK) - (OK) = 5 - \sqrt{2}$$

Η μέγιστη τιμή του $|z_x|$ είναι ίση με:

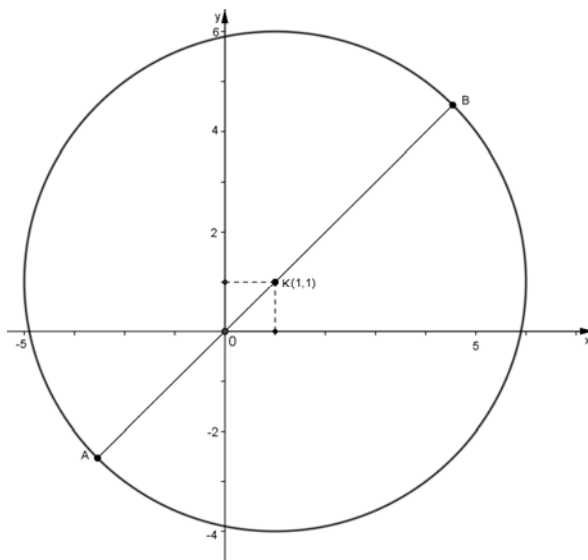
$$(OB) = (BK) + (OK) = 5 + \sqrt{2}$$

Επομένως η ελάχιστη τιμή του αθροίσματος είναι:

$$m = (5 - \sqrt{2})^2 = 27 - 10\sqrt{2}$$

και η μέγιστη τιμή του είναι:

$$M = (5 + \sqrt{2})^2 = 27 + 10\sqrt{2}$$



β) i) Είναι:

$$z_a^{2012} = (1+i)^{2012} = [(1+i)^2]^{1006} = (2i)^{1006} = -2^{1006}$$

και

$$\bar{z}_a^{2012} = (1-i)^{2012} = [(1-i)^2]^{1006} = (-2i)^{1006} = -2^{1006}$$

οπότε $A = 0$

ii) Για $x = \alpha$ έχουμε:

$$z_\alpha = f(\alpha) + g(\alpha)i \stackrel{z_\alpha = 1+i}{\Leftrightarrow} f(\alpha) + g(\alpha)i = 1+i \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) = 1 \\ g(\alpha) = 1 \end{cases}$$

και η σχέση (2) γίνεται:

$$(f(\alpha) - 1)^2 + (g(\alpha) - 1)^2 = c \Leftrightarrow$$

$$(1 - 1)^2 + (1 - 1)^2 = c \Leftrightarrow c = 0$$

Αρα, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$(f(x) - 1)^2 + (g(x) - 1)^2 = 0$$

Επομένως:

$$f(x) = 1, x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = 1, x \in \mathbb{R}$$

ΘΕΜΑ 7ο :

Έστω $f(z) = z + \frac{4}{z}$, όπου z μιγαδικός αριθμός με $z \neq 0$

α) Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 , για τους οποίους ισχύει $f(z) = 2$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 και $z_3 = \frac{z_1^4 z_2 + z_1 z_2^4}{32}$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 2$

β) Αν $f(z) \in \mathbb{R}$ και $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, τότε:

i) Να βρείτε το όριο $\lim_{h \rightarrow +\infty} (\ln(|z|^h + 1) - h)$

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{(t-2)^2(f(z)+4)}{t} + \frac{t^{2012}(4-f(z))}{t-2} = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα ως προς t στο διάστημα $(0, 2)$

γ) Αν $|f(z)| = |z|$, $z \in \mathbb{C}^*$, τότε:

i) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο.

ii) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z_4 - z_5|$ όπου z_4, z_5 δύο από τους μιγαδικούς z του (γ. i) ερωτήματος με $\text{Im}(z_4) \cdot \text{Im}(z_5) < 0$

ΛΥΣΗ

α) $f(z) = 2 \Leftrightarrow z + \frac{4}{z} = 2 \Leftrightarrow z^2 + 4 = 2z \Leftrightarrow z^2 - 2z + 4 = 0 \quad (1)$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2 \pm 2i\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z = 1 \pm \sqrt{3} \cdot i$$

Άρα $z_1 = 1 + \sqrt{3} \cdot i$ και $z_2 = 1 - \sqrt{3} \cdot i$ (2)

Είναι:

$$z_3 = \frac{z_1^4 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_2^4}{32} = \frac{z_1 z_2}{32} \cdot (z_1^3 + z_2^3) =$$

$$= \frac{z_1 z_2}{32} \cdot (z_1 + z_2) \cdot (z_1^2 - z_1 \cdot z_2 + z_2^2) \stackrel{(1)}{=} \frac{4}{32} \cdot 2 \cdot (-8) = -2$$

γιατί $z_1 \cdot z_2 = 4$, $z_1 + z_2 = 2$ και $z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2(z_1 \cdot z_2) = 2^2 - 2 \cdot 4 = -4$

Ισχύει:

$$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1| = 2\sqrt{3} \quad \text{και} \quad |z_1| = |z_2| = |z_3| = 2$$

Άρα οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 και z_3 στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 2$

β) i) Έχουμε:

$$f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(z) = \overline{f(z)} \Leftrightarrow z + \frac{4}{z} = \overline{z + \frac{4}{z}} \Leftrightarrow z + \frac{4}{z} = \bar{z} + \frac{4 \cdot (z \cdot \bar{z})}{z} \Leftrightarrow$$

$$z \cdot (z \cdot \bar{z}) + 4 \cdot \bar{z} = \bar{z} \cdot (z \cdot \bar{z}) + 4 \cdot z \Leftrightarrow z \cdot |z|^2 + 4 \cdot \bar{z} = \bar{z} \cdot |z|^2 + 4 \cdot z \Leftrightarrow$$

$$|z|^2 (z - \bar{z}) - 4 \cdot (z - \bar{z}) = 0 \Leftrightarrow (z - \bar{z})(|z|^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$z - \bar{z} = 0 \quad \text{ή} \quad |z|^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z} \quad \text{ή} \quad |z|^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$z \in \mathbb{R} \quad \text{ή} \quad |z| = 2 \Leftrightarrow |z| = 2 \quad (3)$$

Είναι:

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} (\ln(|z|^h + 1) - h) = \lim_{h \rightarrow +\infty} (\ln(2^h + 1) - \ln e^h) =$$

$$= \lim_{h \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{2^h + 1}{e^h} \right) = \lim_{h \rightarrow +\infty} \ln \left(\left(\frac{2}{e} \right)^h + \left(\frac{1}{e} \right)^h \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln t = -\infty, \text{ γιατί αν θέσουμε}$$

$$t = \left(\frac{2}{e} \right)^h + \left(\frac{1}{e} \right)^h \text{ τότε } \lim_{h \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{2}{e} \right)^h + \left(\frac{1}{e} \right)^h \right) = 0$$

ii) Είναι:

$$\frac{(t-2)^2(f(z)+4)}{t} + \frac{t^{2012}(4-f(z))}{t-2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(t-2)^3(f(z)+4) + t^{2013}(4-f(z)) = 0 \quad (4)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(t) = t^{2013}(4 - f(z)) + (t - 2)^3(f(z) + 4), \quad t \in [0, 2]$$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 2]$ ως άθροισμα συνεχών και $g(0) \cdot g(2) < 0$, γιατί $g(0) = -8 \cdot (f(z) + 4) < 0$ και

$$g(2) = 2^{2013}(4 - f(z)) > 0, \text{ λόγω της (5).}$$

Ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος

Bolzano, άρα στο διάστημα $(0, 2)$ η εξίσωση

$g(t) = 0$, λόγω της (4) είναι ισοδύναμη με την

$$\text{εξίσωση } \frac{(t-2)^2(f(z)+4)}{t} + \frac{t^{2012}(4-f(z))}{t-2} = 0,$$

οπότε η δοθείσα εξίσωση έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 2)$.

Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 2)$, επειδή

$$g'(t) = 2013t^{2012}(4 - f(z)) + 3(t-2)^2(f(z) + 4) > 0$$

για κάθε $t \in (0, 2)$, άρα η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Από το (β) ερώτημα έχουμε ότι:

$$f(z) \in \mathbb{R} \text{ και } z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$$

και από την (3) έχουμε ότι $|z| = 2$

$$\text{Είναι: } |f(z)| \leq |z| + \frac{4}{|z|} = 2 + \frac{4}{2} = 4,$$

$$\text{δηλαδή } |f(z)| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq f(z) \leq 4, \quad f(z) \in \mathbb{R}$$

$$\text{όμως } f(z) = 4 \Leftrightarrow z + \frac{4}{z} = 4 \Leftrightarrow z = 2$$

$$\text{και } f(z) = -4 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow z = -2$$

και επειδή $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ τελικά ισχύει

$$\boxed{-4 < f(z) < 4} \quad (5)$$

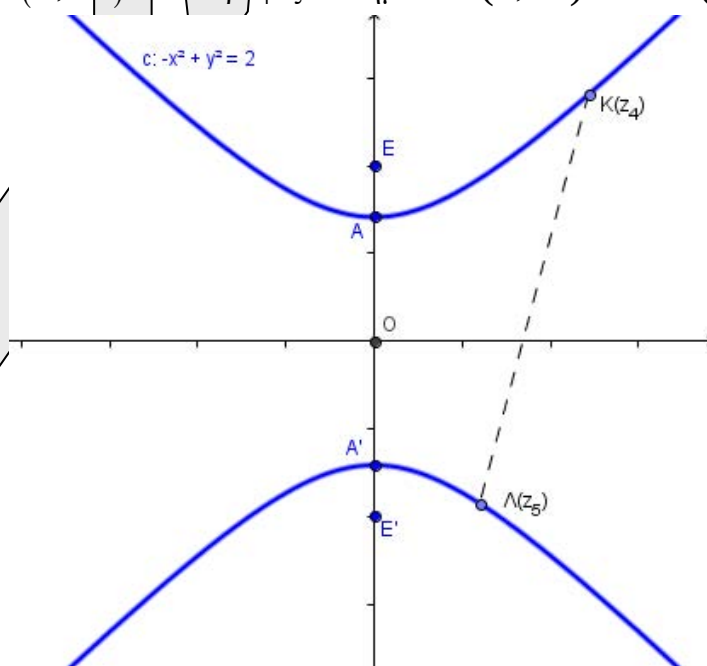
γ) i) Έστω $z = x + yi$, $z \neq 0$

$$|f(z)| = |z| \Leftrightarrow \left| z + \frac{4}{z} \right| = |z| \Leftrightarrow |z^2 + 4| = |z|^2 \Leftrightarrow |z^2 + 4|^2 = (z \cdot \bar{z})^2 \Leftrightarrow$$

$$(z^2 + 4)((\bar{z})^2 + 4) = z^2(\bar{z})^2 \Leftrightarrow z^2(\bar{z})^2 + 4z^2 + 4(\bar{z})^2 + 16 = z^2(\bar{z})^2 \Leftrightarrow$$

$$z^2 + (\bar{z})^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 - y^2) + 4 = 0 \Leftrightarrow y^2 - x^2 = 2$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο είναι η ισοσκελής υπερβολή $c: y^2 - x^2 = 2$ με $\alpha = \beta = \sqrt{2}$ και $\gamma = 2$, που έχει εστίες τα σημεία $E(0, 2)$ και $E'(0, -2)$ και κορυφές τα σημεία $A(0, \sqrt{2})$ και $A'(0, -\sqrt{2})$



ii) Είναι:

$$\operatorname{Im}(z_4) \cdot \operatorname{Im}(z_5) < 0$$

Άρα οι εικόνες των z_4, z_5 στο επίπεδο θα βρίσκονται σε διαφορετικό κλάδο της υπερβολής

$c: y^2 - x^2 = 2$. Αν K, Λ οι εικόνες των z_4, z_5 αντιστοίχως, τότε έχουμε:

$$|z_4 - z_5| = (K\Lambda) \geq (AA') = 2\sqrt{2}$$

Άρα η ελάχιστη τιμή του $|z_4 - z_5|$ είναι η $2\sqrt{2}$

ΘΕΜΑ 8ο :

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\bullet f(x) \geq e^x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$\bullet f(x)f(-x) = 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

α) Να βρείτε το $f(0)$ και να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$

β) Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}, x \in (0, +\infty)$

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g

iii) Αν για τους θετικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει $\ln \alpha + \ln \beta + \ln \gamma = 1$, να αποδείξετε ότι

$$\alpha e^{\beta+\gamma} + \beta e^{\alpha+\gamma} + \gamma e^{\alpha+\beta} \geq 3e^3$$

ΛΥΣΗ

α) Για $x=0$ από τις σχέσεις (1) και (2) αντίστοιχα έχουμε:

$$f(0) \geq 1 \text{ και } f^2(0) = 1$$

$$\text{Άρα } f(0) = 1$$

Επίσης, αν θέσουμε όπου x το $-x$, από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(-x) \geq e^{-x} \xrightarrow{(2)} \frac{1}{f(x)} \geq \frac{1}{e^x} \Rightarrow f(x) \leq e^x, x \in \mathbb{R} \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) και (3) έχουμε:

$$f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$$

β) i) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$g(x) = \frac{e^x}{x}$$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, με

$$g'(x) = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

Είναι:

$$\bullet g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)e^x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\bullet g'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)e^x}{x^2} > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Το πρόσημο της $g'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	—	0	+
$g(x)$		e	

ελάχιστο

- Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1]$
- Η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$
- Η συνάρτηση g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ με ελάχιστη τιμή $g(1) = e$

ii) Είναι:

$$\circ \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \cdot e^x \right) = +\infty$$

$$\circ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

- Η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1]$, άρα

$$g(\Delta_1) = [g(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)) = [e, +\infty)$$

- Η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$, άρα

$$g(\Delta_2) = [g(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)) = [e, +\infty)$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης g είναι:

$$g(\Delta) = g(\Delta_1) \cup g(\Delta_2) = [e, +\infty)$$

iii) Είναι:

$$\bullet \ln \alpha + \ln \beta + \ln \gamma = 1 \Leftrightarrow \ln(\alpha\beta\gamma) = 1 \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma = e \quad (4)$$

$$\bullet g(\alpha) = \frac{e^\alpha}{\alpha} \geq e, \quad g(\beta) = \frac{e^\beta}{\beta} \geq e \quad \text{και} \quad g(\gamma) = \frac{e^\gamma}{\gamma} \geq e$$

Επομένως

$$g(\alpha)g(\beta) + g(\beta)g(\gamma) + g(\gamma)g(\alpha) \geq 3e^2 \Rightarrow$$

$$\frac{e^\alpha}{\alpha} \cdot \frac{e^\beta}{\beta} + \frac{e^\beta}{\beta} \cdot \frac{e^\gamma}{\gamma} + \frac{e^\gamma}{\gamma} \cdot \frac{e^\alpha}{\alpha} \geq 3e^2 \Rightarrow$$

$$\frac{\gamma e^{\alpha+\beta} + \alpha e^{\beta+\gamma} + \beta e^{\gamma+\alpha}}{\alpha\beta\gamma} \geq 3e^2 \stackrel{(4)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{\alpha e^{\beta+\gamma} + \beta e^{\gamma+\alpha} + \gamma e^{\alpha+\beta}}{e} \geq 3e^2 \Rightarrow$$

$$\alpha e^{\beta+\gamma} + \beta e^{\gamma+\alpha} + \gamma e^{\alpha+\beta} \geq 3e^3$$

ΘΕΜΑ 9ο :

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$\sin^2 f(x) + 4f(x) = x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = \eta \mu x$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$

ΛΥΣΗ

α) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$, τότε έχουμε:

$$\bullet \sin f(x_1) = \sin f(x_2) \Rightarrow \sin^2 f(x_1) = \sin^2 f(x_2) \quad (2)$$

$$\bullet 4f(x_1) = 4f(x_2) \quad (3)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε:

$$\sin^2 f(x_1) + 4f(x_1) = \sin^2 f(x_2) + 4f(x_2) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} x_1 = x_2$$

Άρα η συνάρτηση f είναι «1-1», οπότε αντιστρέφεται.

Από υπόθεση γνωρίζουμε ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R}$, επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1} είναι το $\mathbb{R}$.

Για να ορίσουμε τη συνάρτηση f^{-1} απομένει να βρούμε τον τύπο της

Ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

οπότε η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$\sin^2 y + 4y = f^{-1}(y) \quad \text{ή} \quad f^{-1}(y) = 4y + \sin^2 y$$

Άρα η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι:

$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f^{-1}(x) = 4x + \sin^2 x$$

β) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και η συνάρτηση $\sin f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων, όπως επίσης και η συνάρτηση $\sin^2 f(x)$

Παραγωγίζοντας λοιπόν και τα δύο μέλη της σχέσης (1) έχουμε:

$$2\sin f(x)(\sin f(x))' + 4f'(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$-2\sin f(x)\eta \mu f(x)f'(x) + 4f'(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$(4 - 2\sin f(x)\eta \mu f(x)) \cdot f'(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{4 - 2\eta \mu f(x)\sin f(x)}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

1^{ος} τρόπος:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} |\eta \mu f(x)| \leq 1 \\ |\sigma \nu f(x)| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow |\eta \mu f(x)| \cdot |\sigma \nu f(x)| \leq 1 \Rightarrow \\ & |\eta \mu f(x) \sigma \nu f(x)| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \eta \mu f(x) \sigma \nu f(x) \leq 1 \Rightarrow \\ & 2\eta \mu f(x) \sigma \nu f(x) \leq 2 \Rightarrow 2 - 2\eta \mu f(x) \sigma \nu f(x) \geq 0 \Rightarrow \\ & 4 - 2\eta \mu f(x) \sigma \nu f(x) > 0 \end{aligned}$$

2^{ος} τρόπος:

$$\begin{aligned} 4 - 2\eta \mu f(x) \sigma \nu f(x) &= 3 + 1 - 2\eta \mu f(x) \sigma \nu f(x) = \\ &= 3 + \eta \mu^2 f(x) + \sigma \nu^2 f(x) - 2\eta \mu f(x) \sigma \nu f(x) = \\ &= 3 + (\eta \mu f(x) - \sigma \nu f(x))^2 > 0 \end{aligned}$$

οπότε:

$$f'(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

γ) Για $x=0$ έχουμε:

$$f^{-1}(0) = 1 \Leftrightarrow f(1) = 0$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1)$$

Όμως:

$$f'(1) = \frac{1}{4 - 2\eta \mu f(1) \sigma \nu f(1)} = \frac{1}{4 - 2\eta \mu 0 \cdot \sigma \nu 0} = \frac{1}{4}$$

Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \frac{1}{4}$$

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f^{-1}(x) - \eta \mu x = 4x + \sigma \nu^2 x - \eta \mu x, x \in \mathbb{R}$

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$$\bullet h\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot h(0) = \frac{1 + \sqrt{2} - 2\pi}{2} \cdot 1 < 0$$

Άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano, οπότε η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$

Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$ είναι:

$$h'(x) = 4 - 2\eta \mu x \sigma \nu x - \sigma \nu x = \underbrace{4 - \sigma \nu x}_{>0} + \underbrace{(-2\eta \mu x \sigma \nu x)}_{>0} > 0$$

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$, οπότε η ρίζα είναι μοναδική.

ΘΕΜΑ 10ο :

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0)=0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο a με $a > 0$ και ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\bullet \quad f(xy) = f(x)f(y) \text{ για κάθε } x, y > 0 \quad (1)$$

$$\bullet \quad f(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x > 0 \quad (2)$$

A) Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \quad f(1)=1 \text{ και } f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)} \text{ για κάθε } x > 0$$

$$\beta) \quad f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \geq 0$$

$$\gamma) \text{ η συνάρτηση } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } (0, +\infty) \text{ με } \frac{xf'(x)}{f(x)} = \frac{af'(a)}{f(a)} \text{ για κάθε } x > 0$$

B) Αν η ευθεία $\varepsilon: x - 2\sqrt{a} \cdot y + a = 0$ είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(a, f(a))$, να βρείτε τον τύπο της f .

ΛΥΣΗ

A) α) Για $y=1$ και $x > 0$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(x \cdot 1) = f(x)f(1) \Leftrightarrow f(x) = f(x)f(1) \Leftrightarrow f(x)(1 - f(1)) = 0 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} f(1) = 1 \quad (3)$$

Για $x > 0$ και $y = \frac{1}{x}$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow f(1) = f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)} \quad (4)$$

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο διάστημα $(0, +\infty)$, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$ και επειδή $f(1)=1 > 0$ συμπεραίνουμε ότι :

$$f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty) \quad (5)$$

Από την υπόθεση είναι $f(0)=0$, οπότε τελικά έχουμε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq 0$

γ) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $a > 0$, οπότε ισχύει $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ (6)

Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε τυχαίο $x_0 \in (0, +\infty)$

Έστω $x_0 \in (0, +\infty)$, τότε για κάθε $x \in (0, +\infty)$ με $x \neq x_0$ θέτουμε $x = x_0 \frac{h}{a}$ με $h > 0$, οπότε όταν το $x \rightarrow x_0$ το $h \rightarrow a$ και έχουμε

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f\left(x_0 \frac{h}{a}\right) - f(x_0)}{x_0 \frac{h}{a} - x_0} \stackrel{(1)}{=} \frac{f(x_0)f\left(\frac{h}{a}\right) - f(x_0)}{\frac{x_0(h-a)}{a}} = \frac{af(x_0)}{x_0} \cdot \frac{f\left(\frac{h}{a}\right) - 1}{h - a} \stackrel{(1)}{=}$$

$$= \frac{\alpha f(x_0)}{x_0} \cdot \frac{f(h)f\left(\frac{1}{\alpha}\right)-1}{h-\alpha} \stackrel{(4)}{=} \frac{\alpha f(x_0)}{x_0} \cdot \frac{f(h)\frac{1}{f(\alpha)}-1}{h-\alpha} = \frac{\alpha f(x_0)}{x_0 f(\alpha)} \cdot \frac{f(h)-f(\alpha)}{h-\alpha}$$

Είναι:

- $\lim_{h \rightarrow \alpha} \frac{\alpha f(x_0)}{x_0 f(\alpha)} = \frac{\alpha f(x_0)}{x_0 f(\alpha)}$, αφού $\frac{\alpha f(x_0)}{x_0 f(\alpha)}$ σταθερά.
- $\lim_{h \rightarrow \alpha} \frac{f(h)-f(\alpha)}{h-\alpha} \stackrel{(6)}{=} f'(\alpha)$

Επομένως

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{h \rightarrow \alpha} \left(\frac{\alpha f(x_0)}{x_0 f(\alpha)} \cdot \frac{f(h)-f(\alpha)}{h-\alpha} \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow \alpha} \frac{\alpha f(x_0)}{x_0 f(\alpha)} \cdot \lim_{h \rightarrow \alpha} \frac{f(h)-f(\alpha)}{h-\alpha} = \frac{\alpha f(x_0)}{x_0 f(\alpha)} \cdot f'(\alpha) \end{aligned}$$

Άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in (0, +\infty)$ με $f'(x_0) = \frac{\alpha f(x_0)}{x_0 f(\alpha)} \cdot f'(\alpha)$,

οπότε είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{\alpha f(x)}{x f(\alpha)} \cdot f'(\alpha)$

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$f'(x) = \frac{\alpha f(x)}{x f(\alpha)} \cdot f'(\alpha) \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \frac{x f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha f'(\alpha)}{f(\alpha)} \quad (7)$$

B) Είναι:

$$\begin{aligned} M(\alpha, f(\alpha)) \in (\varepsilon) &\Leftrightarrow \alpha - 2\sqrt{\alpha} \cdot f(\alpha) + \alpha = 0 \Leftrightarrow \\ 2\sqrt{\alpha} \cdot f(\alpha) &= 2\alpha \Leftrightarrow f(\alpha) = \frac{2\alpha}{2\sqrt{\alpha}} \Leftrightarrow f(\alpha) = \sqrt{\alpha} \quad (8) \end{aligned}$$

Είναι

$$f'(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}, \quad \alpha > 0 \quad (9)$$

Από τις σχέσεις (7), (8) και (9) έχουμε:

$$\frac{x f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha \cdot \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}}{\sqrt{\alpha}} \Leftrightarrow \frac{x f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2x} \Leftrightarrow (\ln f(x))' = \left(\frac{1}{2} \ln x \right)' \Leftrightarrow$$

$$\ln f(x) = \frac{1}{2} \ln x + c \stackrel{(5)}{\Leftrightarrow} \ln f(x) = \ln \sqrt{x} + c, \quad x > 0 \quad (10)$$

Για $x = \alpha$ από τη σχέση (10) έχουμε:

$$\ln f(\alpha) = \ln \sqrt{\alpha} + c \stackrel{(8)}{\Leftrightarrow} \ln \sqrt{\alpha} = \ln \sqrt{\alpha} + c \Leftrightarrow c = 0$$

Επομένως από τη σχέση (10) έχουμε:

$$\ln f(x) = \ln \sqrt{x} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x}, \quad x > 0$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο 0 με $f(0) = 0$, συμπεραίνουμε ότι:

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x \geq 0$$

ΘΕΜΑ 11ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $f(\alpha) < f'(x) < f(\beta)$ (1), όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha = \beta - 1 > 0$ (2). Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Η συνάρτηση $g(x) = f(x) - f(\alpha) \cdot x$ είναι γνησίως αύξουσα και ότι $f(\alpha) < \frac{f(\beta)}{2}$

γ) Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια ακριβώς λύση στο $(-\beta, \alpha)$

δ) Υπάρχουν $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει $\frac{f(\beta)}{f'(x_3)} + \frac{f(\alpha)}{f'(x_2)} - 2 \frac{f(-\beta)}{f'(x_1)} = 4\beta - 1$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[\alpha, \beta]$, αφού είναι παραγωγίσιμη

στο $\mathbb{R}$, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f'(\xi) < f(\beta) \Leftrightarrow \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < f(\beta) \quad (3)$$

Είναι:

$$\alpha = \beta - 1 \Leftrightarrow \beta - \alpha = 1 \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε:

$$f(\beta) - f(\alpha) < f(\beta) \Leftrightarrow -f(\alpha) < 0 \Leftrightarrow f(\alpha) > 0 \quad (5)$$

Από τις σχέσεις (1) και (5) έχουμε:

$$f'(x) > f(\alpha) > 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

β) 1^{ος} τρόπος:

Είναι:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \stackrel{(4)}{=} f(\beta) - f(\alpha)$$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(\alpha) < f'(\xi) \Rightarrow f(\alpha) < f(\beta) - f(\alpha) \Rightarrow 2f(\alpha) < f(\beta) \Rightarrow f(\alpha) < \frac{f(\beta)}{2}$$

2^{ος} τρόπος:

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = f'(x) - f(\alpha)$ (6)

Από τις σχέσεις (1) και (6) έχουμε:

$$g'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Ισχύει:

$$\alpha < \beta \stackrel{g \uparrow}{\Leftrightarrow} g(\alpha) < g(\beta) \Leftrightarrow f(\alpha) - \alpha f(\alpha) < f(\beta) - \beta f(\alpha) \Leftrightarrow$$

$$f(\alpha) + (\beta - \alpha)f(\alpha) < f(\beta) \stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} 2f(\alpha) < f(\beta) \Leftrightarrow f(\alpha) < \frac{f(\beta)}{2}$$

γ) Είναι:

$$\alpha = \beta - 1 > 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha > 0 \\ \beta > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha > 0 \\ -\beta < -1 \end{cases} \Rightarrow -\beta < -1 < 0 < \alpha \quad (7)$$

Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[-\beta, \alpha]$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (-\beta, \alpha)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(\alpha) - f(-\beta)}{\alpha + \beta}$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(\alpha) < f'(\xi_1) \Leftrightarrow f(\alpha) < \frac{f(\alpha) - f(-\beta)}{\alpha + \beta} \Leftrightarrow \alpha f(\alpha) + \beta f(\alpha) - f(\alpha) < -f(-\beta) \Leftrightarrow$$

$$\alpha f(\alpha) + (\beta - 1)f(\alpha) < -f(-\beta) \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 2\alpha f(\alpha) < -f(-\beta)$$

Από τις σχέσεις (5) και (7) έχουμε:

$$2\alpha f(\alpha) > 0 \text{ άρα } -f(-\beta) > 0, \text{ οπότε } f(-\beta) < 0 \quad (8)$$

Έχουμε:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-\beta, \alpha]$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
- $f(-\beta)f(\alpha) < 0$, λόγω των σχέσεων (5) και (8)

Επομένως η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[-\beta, \alpha]$, άρα θα υπάρχει ένα $\rho \in (-\beta, \alpha)$ και μάλιστα μοναδικό, αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, τέτοιο ώστε $f(\rho) = 0$ (9)

δ) Είναι:

$$-\beta < \rho < \alpha < \beta$$

Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα

$$[-\beta, \rho], [\rho, \alpha] \text{ και } [\rho, \beta]$$

άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον:

- $x_1 \in (-\beta, \rho)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_1) = \frac{f(\rho) - f(-\beta)}{\rho - (-\beta)} \stackrel{(9)}{\Leftrightarrow} f'(x_1) = \frac{-f(-\beta)}{\rho + \beta} \stackrel{f'(x_1) > 0}{\Leftrightarrow} \rho + \beta = \frac{-f(-\beta)}{f'(x_1)}$
- $x_2 \in (\rho, \alpha)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_2) = \frac{f(\alpha) - f(\rho)}{\alpha - \rho} \stackrel{(9)}{\Leftrightarrow} f'(x_2) = \frac{f(\alpha)}{\alpha - \rho} \stackrel{f'(x_2) > 0}{\Leftrightarrow} \alpha - \rho = \frac{f(\alpha)}{f'(x_2)}$
- $x_3 \in (\rho, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_3) = \frac{f(\beta) - f(\rho)}{\beta - \rho} \stackrel{(9)}{\Leftrightarrow} f'(x_3) = \frac{f(\beta)}{\beta - \rho} \stackrel{f'(x_3) > 0}{\Leftrightarrow} \beta - \rho = \frac{f(\beta)}{f'(x_3)}$

Είναι:

$$\frac{f(\beta)}{f'(x_3)} + \frac{f(\alpha)}{f'(x_2)} - 2 \frac{f(-\beta)}{f'(x_1)} = (\beta - \rho) + (\alpha - \rho) + 2(\rho + \beta) = \alpha + 3\beta \stackrel{(2)}{=} 4\beta - 1$$

ΘΕΜΑ 12ο :

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$, έχει σύνολο τιμών $f(A) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και ικανοποιεί τη σχέση $\eta\mu(f(x)) = \frac{x}{x+1}$, $x \geq -\frac{1}{2}$ (1)

- α) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{2x+1}}$, $x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$
- β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.
- γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τις ασύμπτωτες.

ΛΥΣΗ

- α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ και η συνάρτηση $\eta\mu x$ στο $\mathbb{R}$,

άρα η συνάρτηση $\eta\mu f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$, ως σύνθεση παραγωγισίμων.

Η συνάρτηση $\frac{x}{x+1}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$, άρα παραγωγίζοντας και τα

δύο μέλη της σχέσης (1) για κάθε $x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ έχουμε:

$$[\eta\mu f(x)]' = \left(\frac{x}{x+1}\right)' \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu f(x) f'(x) = \frac{(x)'(x+1) - x(x+1)'}{(x+1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu f(x) f'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu f(x) f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \quad (2)$$

Είναι:

$$\eta\mu^2 f(x) + \sigma\upsilon\nu^2 f(x) = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 f(x) = 1 - \eta\mu^2 f(x) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2 f(x) = 1 - \frac{x^2}{(x+1)^2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 f(x) = \frac{2x+1}{(x+1)^2} \quad (3)$$

Για κάθε $x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ είναι:

$$-\frac{\pi}{2} < f(x) < \frac{\pi}{2}, \text{ οπότε } \sin f(x) > 0 \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε:

$$\sin f(x) = \frac{\sqrt{2x+1}}{x+1} \quad (5)$$

Από τις σχέσεις (2) και (5) έχουμε:

$$\frac{\sqrt{2x+1}}{x+1} \cdot f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{2x+1}}, \quad x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$, οπότε

η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$, άρα είναι και «1-1», επομένως αντιστρέφεται.

Η συνάρτηση f είναι «1-1» και έχει σύνολο τιμών $f(A) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, επομένως για κάθε

$y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ υπάρχει μοναδικό $x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ τέτοιο, ώστε $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

Άρα για κάθε $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ η σχέση (1) γράφεται:

$$\eta \mu y = \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow x \eta \mu y + \eta \mu y = x \Leftrightarrow (1 - \eta \mu y) x = \eta \mu y \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\eta \mu y}{1 - \eta \mu y} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{\eta \mu y}{1 - \eta \mu y}$$

Επομένως:

$$f^{-1}: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f^{-1}(x) = \frac{\eta \mu x}{1 - \eta \mu x}$$

γ) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$, άρα το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $f(A) = \left[f\left(-\frac{1}{2}\right), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right)$ και επειδή $f(A) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

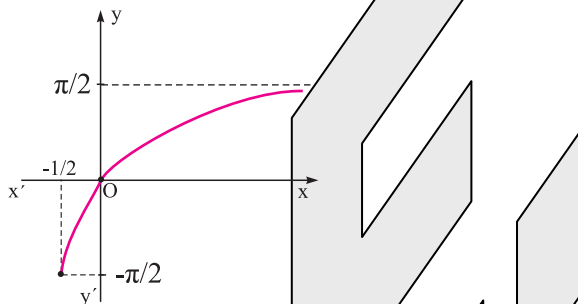
Επομένως η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την

$$\text{ευθεία } (\varepsilon): y = \frac{\pi}{2}$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ για $x_0 \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \in \mathbb{R}$, που σημαίνει ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Σημείωση:

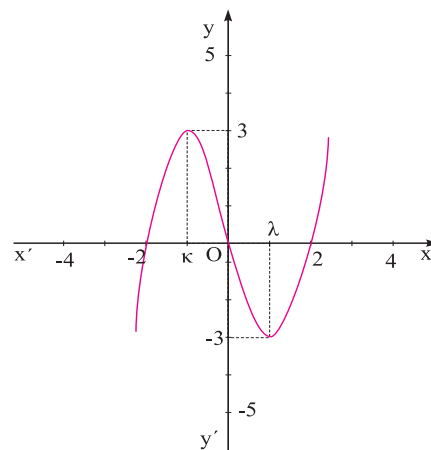
Η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



ΘΕΜΑ 13ο :

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, που έχει σημείο καμπής το $O(0,0)$ και της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{f(x)}$
- Με δεδομένο ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g έχει ασύμπτωτες, να τις βρείτε.
- Να μελετήσετε τη συνάρτησης g ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση
- Αν η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική 3^{ου} βαθμού, τότε:
 - Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ και τον τύπο της συνάρτησης f
 - Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$



ΛΥΣΗ

- Για να ορίζεται η συνάρτηση g πρέπει και αρκεί $f(x) \neq 0$

Είναι:

$$f(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2 \text{ και } x \neq 0 \text{ και } x \neq 2$$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το σύνολο $A_g = \mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$

- Από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , προκύπτει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$$

Επομένως η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_g της συνάρτησης g και στο $-\infty$ και στο $+\infty$

• Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ για $x < -2$, οπότε $\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ για $x > -2$, οπότε $\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

Επομένως η ευθεία $x = -2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_g της συνάρτησης g (*)

• Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ για $x \in (-2, 0)$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{f(x)} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ για $x \in (0, 2)$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

Επομένως η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_g της συνάρτησης g (*)

• Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ για $x \in (0, 2)$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ για $x > 2$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

Επομένως η ευθεία $x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_g της συνάρτησης g (*)

(*) Για την εύρεση μιας κατακόρυφης ασύμπτωτης, ως γνωστόν, αρκεί ένα τουλάχιστον από τα δύο πλευρικά όρια να είναι $+\infty$ ή $-\infty$. Εδώ ο υπολογισμός και των δύο πλευρικών ορίων, σε κάθε περίπτωση, έγινε γιατί μας είναι απαραίτητα για την χάραξη της γραφικής παράστασης, που ζητείται στο επόμενο ερώτημα.

γ) Για κάθε $x \in A_g = \mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$ έχουμε $g'(x) = \left(\frac{1}{f(x)} \right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)} \quad (1)$

Από τη σχέση (1) συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση g' , σε κάθε διάστημα που ορίζεται, έχει το αντίθετο πρόσημο από αυτό που έχει η συνάρτηση f' , άρα οι συναρτήσεις g και f έχουν αντίθετο είδος μονοτονίας σε κάθε διάστημα.

Επομένως:

- Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, \kappa]$, άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -2)$ και $(-2, \kappa]$
- Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\kappa, \lambda]$, άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $[\kappa, 0)$ και $(0, \lambda]$

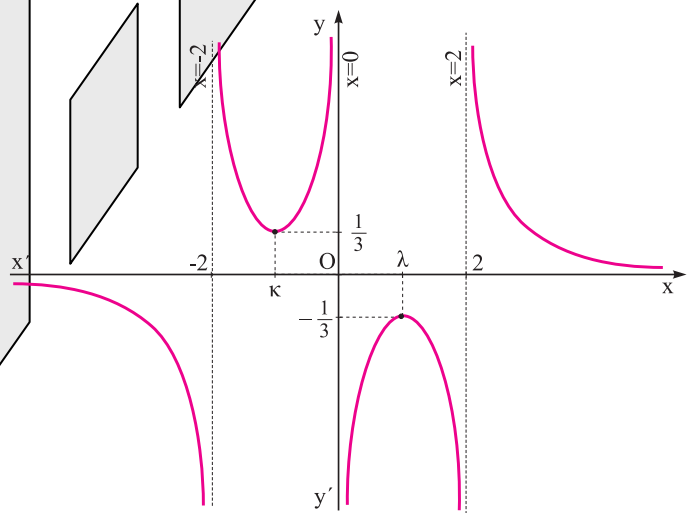
- Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\lambda, +\infty)$, άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $[\lambda, 2)$ και $(2, +\infty)$

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	-2	κ	0	λ	2	$+\infty$
$g'(x)$	-	-	0	+	+	0	-
$g(x)$	$0 \rightarrow -\infty$	$+\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
		τοπ. ελάχιστο		τοπ. μέγιστο			

- ♦ Η συνάρτηση g στο $x_0 = \kappa$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο με τιμή $g(\kappa) = \frac{1}{f(\kappa)} = \frac{1}{3}$
- ♦ Η συνάρτηση g στο $x_1 = \lambda$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο με τιμή $g(\lambda) = \frac{1}{f(\lambda)} = -\frac{1}{3}$

Η γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης g , είναι:



- δ) i) Η συνάρτηση f είναι πολωνυμική 3^{ου} βαθμού και έχει τρεις ρίζες, τους αριθμούς $-2, 0, 2$, άρα είναι της μορφής:

$$f(x) = \alpha x(x+2)(x-2) = \alpha x(x^2 - 4) = \alpha(x^3 - 4x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x) = \alpha(3x^2 - 4)$$

Είναι:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha(3x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{4}{3}} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Άρα:

$$\kappa = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{και} \quad \lambda = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Είναι:

$$f(\kappa) = 3 \Leftrightarrow f\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 3 \Leftrightarrow \alpha \left(\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3 - 4\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \right) = 3 \Leftrightarrow$$

$$\alpha \left(-\frac{8\sqrt{3}}{9} + \frac{8\sqrt{3}}{3} \right) = 3 \Leftrightarrow \frac{16\sqrt{3}}{9} \alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha = \frac{27}{16\sqrt{3}} \Leftrightarrow \alpha = \frac{9\sqrt{3}}{16}$$

Άρα:

$$f(x) = \frac{9\sqrt{3}}{16} (x^3 - 4x), \quad x \in \mathbb{R}$$

- ii) Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τον άξονα $x'x$ είναι:

$$E = \int_{-2}^2 |f(x)| dx = \int_{-2}^0 f(x) dx - \int_0^2 f(x) dx =$$

$$= \int_{-2}^0 \frac{9\sqrt{3}}{16} (x^3 - 4x) dx - \int_0^2 \frac{9\sqrt{3}}{16} (x^3 - 4x) dx =$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{16} \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_{-2}^0 - \frac{9\sqrt{3}}{16} \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_0^2 =$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{16} \cdot (0 - 4 + 8) - \frac{9\sqrt{3}}{16} (4 - 8 - 0) =$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{16} \cdot 4 - \frac{9\sqrt{3}}{16} (-4) = \frac{8 \cdot 9\sqrt{3}}{16} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 2012

ΘΕΜΑ 14ο :

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{|1 - \ln x|}{x}$, $x > 0$

- α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 β) Αν η τετμημένη του σημείου $M(x, f(x))$ μεταβάλλεται με ρυθμό $1 \mu/\text{sec}$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $E(t)$ του τριγώνου AOB , όπου $A(x, 0)$, $O(0, 0)$, $B(0, f(x))$, τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία είναι $x(t_0) = 4$
 γ) Αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σημείο M βρίσκεται στη θέση $(1, 1)$, τότε να αποδείξετε ότι:
 i) $x(t) = t + 1$
 ii) Η συνάρτηση $E(t)$ είναι κοίλη στο διάστημα $[e - 1, +\infty)$

ΛΥΣΗ

α) Για $0 < x < e$ έχουμε:

$$0 < x < e \Rightarrow \ln x < \ln e \Rightarrow \ln x < 1 \Rightarrow 1 - \ln x > 0, \text{ οπότε } |1 - \ln x| = 1 - \ln x$$

Για $x \geq e$ έχουμε:

$$x \geq e \Rightarrow \ln x \geq \ln e \Rightarrow \ln x \geq 1 \Rightarrow 1 - \ln x \leq 0, \text{ οπότε } |1 - \ln x| = \ln x - 1$$

Επομένως ο τύπος της συνάρτησης f είναι:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \ln x}{x}, & 0 < x < e \\ \frac{\ln x - 1}{x}, & x \geq e \end{cases}$$

Για $0 < x < e$ η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1 - \ln x}{x} \right)' = \frac{(1 - \ln x)' \cdot x - (1 - \ln x) \cdot (x)'}{x^2} = \\ &= \frac{-\frac{1}{x} \cdot x - (1 - \ln x) \cdot 1}{x^2} = \frac{\ln x - 2}{x^2} < 0 \end{aligned}$$

Για $x > e$ η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x - 1}{x} \right)' = \frac{(\ln x - 1)' \cdot x - (\ln x - 1) \cdot (x)'}{x^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (\ln x - 1) \cdot 1}{x^2} = \frac{2 - \ln x}{x^2}$$

Είναι:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2 - \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{2 - \ln x}{x^2} < 0 \Leftrightarrow 2 - \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > 2 \Leftrightarrow x > e^2$

Το πρόσημο της $f'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0	e	e ²	+∞
f'(x)	-	+	0	-
f(x)	↘	0 ο.ε.	↗ τ.μ. e ⁻²	↘

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(1 - \ln x) \cdot \frac{1}{x} \right] = +\infty$, γιατί
 - $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \ln x) = +\infty$
 - $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x - 1}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x - 1)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $f(e) = \frac{\ln e - 1}{e} = \frac{1 - 1}{e} = 0$
- $f(e^2) = \frac{\ln e^2 - 1}{e^2} = \frac{2 \ln e - 1}{e^2} = \frac{2 \cdot 1 - 1}{e^2} = \frac{1}{e^2} = e^{-2}$

Επίσης η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων. Η συνάρτηση $|1 - \ln x|$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, ως απόλυτη τιμή της συνάρτησης $1 - \ln x$, που είναι συνεχής, ως διαφορά συνεχών και η συνάρτηση x είναι συνεχής, ως πολυωνυμική, οπότε έχουμε:

- Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0, e]$
- Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [e, e^2]$

- Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_3 = [e^2, +\infty)$
- Η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = e$ με ελάχιστη τιμή $f(e) = 0$
- Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 = e^2$ με τιμή $f(e^2) = e^{-2}$

β) Το εμβαδό του τριγώνου AOB είναι:

$$E = \frac{1}{2} \cdot (OA) \cdot (OB) = \frac{1}{2} \cdot |x| \cdot |f(x)| = \frac{1}{2} \cdot \left| x \cdot \frac{1 - \ln x}{x} \right| = \frac{|1 - \ln x|}{2}$$

Άρα:

$$E(t) = \frac{|1 - \ln x(t)|}{2}$$

Επειδή $x(t_0) = 4 > e$ το $1 - \ln x(t_0) < 0$

Άρα για $x(t) > e$ έχουμε:

$$E(t) = \frac{\ln x(t) - 1}{2} \quad \text{και} \quad E'(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x(t)} \cdot x'(t)$$

Άρα τη χρονική στιγμή t_0 με $x(t_0) = 4$ είναι:

$$E'(t_0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x(t_0)} \cdot x'(t_0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{8} \text{ τ.μ/sec}$$

γ) i) Για $t \geq 0$ έχουμε:

$$x'(t) = 1 \Leftrightarrow x(t) = t + c$$

Για $t = 0$ είναι:

$$x(0) = 0 + c \stackrel{x(0)=1}{\Leftrightarrow} c = 1$$

Επομένως:

$$x(t) = t + 1, \quad t \geq 0$$

ii) Για $t \geq e-1$ έχουμε:

$$E(t) = \frac{|1 - \ln(t+1)|}{2} = \frac{\ln(t+1) - 1}{2}$$

Για $t > e-1$ έχουμε:

$$E'(t) = \frac{1}{2(t+1)} > 0 \quad \text{και} \quad E''(t) = -\frac{1}{2(t+1)^2} < 0$$

Η συνάρτηση $E(t)$ είναι συνεχής στο $[e-1, +\infty)$ και $E''(t) < 0$ για κάθε $t \in (e-1, +\infty)$

άρα η συνάρτηση $E(t)$ είναι κοίλη στο διάστημα $[e-1, +\infty)$

ΘΕΜΑ 15ο :

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & , x \in (0, 1] \\ e^{x-1} - 1 & , x \in (1, +\infty) \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \int_{\frac{1}{2}}^x f(t) dt$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $f'(1) = 1$

β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g

γ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ και ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g

ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες στο διάστημα $(0, +\infty)$

στ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι κοίλη στο $(0, \frac{1}{e}]$ και κυρτή στο $[\frac{1}{e}, +\infty)$

ΛΥΣΗ

α) • Για $x \in (0, 1)$ είναι $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x \ln x - 0}{x - 1} = \frac{x \ln x}{x - 1}$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x \ln x}{x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x \ln x)'}{(x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x + x \cdot \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (\ln x + 1) = 1$$

• Για $x \in (1, +\infty)$ είναι $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{e^{x-1} - 1 - 0}{x - 1} = \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1}$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(e^{x-1} - 1)'}{(x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{x-1}(x - 1)'}{1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{x-1} = e^0 = 1$$

Άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $f'(1) = 1$

β) • Για $x \in (0, 1]$ είναι:

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{\frac{1}{2}}^x f(t) dt = \int_{\frac{1}{2}}^x t \ln t dt = \int_{\frac{1}{2}}^x \left(\frac{t^2}{2} \right)' \ln t dt = \left[\frac{t^2}{2} \ln t \right]_{\frac{1}{2}}^x - \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{t^2}{2} (\ln t)' dt = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{8} \ln \frac{1}{2} - \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{t^2}{2} \cdot \frac{1}{t} dt = \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{1}{8} \ln 2 - \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^x t dt = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{1}{8} \ln 2 - \frac{1}{2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_{\frac{1}{2}}^x = \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{1}{8} \ln 2 - \frac{1}{4} \left(x^2 - \frac{1}{4} \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} \ln 2$$

- Για $x \in (1, +\infty)$ είναι:

$$g(x) = \int_{\frac{1}{2}}^x f(t) dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt = g(1) + \int_1^x (e^{t-1} - 1) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} \ln 2 + \int_1^x e^{t-1} (t-1)' dt - \int_1^x 1 dt =$$

$$= -\frac{3}{16} + \frac{1}{8} \ln 2 + \left[e^{t-1} \right]_1^x - 1 \cdot (x-1) =$$

$$= -\frac{3}{16} + \frac{1}{8} \ln 2 + e^{x-1} - e^0 - x + 1 = e^{x-1} - x - \frac{3}{16} + \frac{1}{8} \ln 2$$

Άρα ο τύπος της συνάρτησης g είναι:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} \ln 2, & x \in (0, 1] \\ e^{x-1} - x - \frac{3}{16} + \frac{1}{8} \ln 2, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

- γ) i) Για $x \in (0, 1)$ είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} \ln 2 \right) = 0 - 0 + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} \ln 2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} \ln 2, \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2}{2} \ln x \right) \stackrel{0 \cdot (-\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{2x^{-2}} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{(2x^{-2})'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-4x^{-3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{4} x^2 \right) = 0$$

- ii) Για $x \in (1, +\infty)$ είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{x-1} - x - \frac{3}{16} + \frac{1}{8} \ln 2 \right) = +\infty, \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{x-1} - x) \stackrel{+\infty - \infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{e^{x-1}}{x} - 1 \right) \right] = +\infty, \text{ αφού}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-1}}{x} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^{x-1})'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-1}(x-1)'}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e} \cdot e^x \right) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{x-1}}{x} - 1 \right) = +\infty$$

- δ) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, αφού είναι συνεχής:

- στο $(0, 1)$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων
- στο $(1, +\infty)$, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων (η e^{x-1} είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών)
- στο σημείο $x_0=1$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό από (α) πρόταση.

Επομένως η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$g'(x) = \left(\int_{\frac{1}{2}}^x f(t) dt \right)' = f(x), \quad x > 0$$

Παρατηρούμε ότι:

- Για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $f(x) = x \ln x < 0$
- Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ είναι $f(x) = e^{x-1} - 1 > 0$
- Για $x=1$ είναι $f(1) = 1 \cdot \ln 1 = 0$

Άρα

- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (1, +\infty)$
- $g'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1)$
- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Το πρόσημο της $g'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		0	+
$g(x)$		$g(1)$	

ελάχιστο

Είναι:

$$g(1) = \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} \ln 2 - \frac{1}{8} \ln 2 - \frac{3}{16} = \frac{\ln 4 - 3}{16} = \frac{1}{16} \ln \frac{4}{e^3} < 0, \text{ αφού } 0 < \frac{4}{e^3} < 1$$

- Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1]$
- Η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$
- Η συνάρτηση g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ με ελάχιστη τιμή $g(1) = \frac{1}{16} \ln \frac{4}{e^3}$

Το σύνολο τιμών της συνάρτησης g είναι:

$$g(\Delta) = g(\Delta_1) \cup g(\Delta_2)$$

- Η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1]$, οπότε είναι:

$$g(\Delta_1) = \left[g(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \right) = \left[\frac{1}{16} \ln \frac{4}{e^3}, \frac{1}{16} + \frac{1}{8} \ln 2 \right)$$

- Η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$, οπότε είναι:

$$g(\Delta_2) = \left[g(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right) = \left[\frac{1}{16} \ln \frac{4}{e^3}, +\infty \right)$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης g είναι:

$$g(\Delta) = g(\Delta_1) \cup g(\Delta_2) = \left[\frac{1}{16} \ln \frac{4}{e^3}, +\infty \right)$$

ε) Είναι:

- $g\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) dt = 0$, άρα ο αριθμός $\frac{1}{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $g(x) = 0$ στο διάστημα $(0, 1]$

και μάλιστα μοναδική, αφού η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό

- Το $0 \in g(\Delta_2)$, άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία ρίζα $\rho \in (1, +\infty)$, ($\rho \neq 1$, αφού $g(1) \neq 0$) και μάλιστα μοναδική, αφού η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$

Επομένως η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες στο διάστημα $(0, +\infty)$

στ) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, αφού είναι παραγωγίσιμη:

- στο $(0, 1)$, ως γινόμενο παραγωγισίμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = (x \ln x)' = (x)' \ln x + x(\ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

- στο $(1, +\infty)$, ως άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων (η e^{x-1} είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων), με

$$f'(x) = (e^{x-1} - 1)' = e^{x-1} (x-1)' = e^{x-1}$$

- στο σημείο $x_0 = 1$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό από (α) ερώτημα, με $f'(1) = 1$

Η συνάρτηση g' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, με $g''(x) = f'(x)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Επομένως

$$g''(x) = f'(x) = \begin{cases} 1 + \ln x & , x \in (0, 1] \\ e^{x-1} & , x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

Είναι:

$$\begin{aligned} \bullet & \begin{cases} g''(x) = 0 \\ x \in (0, 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \ln x = 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = -1 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e^{-1} \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow x = e^{-1} \\ \bullet & \begin{cases} g''(x) > 0 \\ x \in (0, 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \ln x > 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x > -1 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > e^{-1} \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow e^{-1} < x < 1 \end{aligned}$$

- $\begin{cases} g''(x) = 0 \\ x \in (1, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x-1} = 0 \\ x > 1 \end{cases}$, αδύνατη εξίσωση
- $\begin{cases} g''(x) > 0 \\ x \in (1, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x-1} > 0 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow x > 1$

Το πρόσημο της $g''(x)$ καθώς και η κυρτότητα της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	0	e^{-1}	1	$+\infty$
$g''(x)$	-	0	+	+
$g(x)$	∩		∪	

Είναι $\begin{cases} g \text{ συνεχής στο } \left(0, \frac{1}{e}\right] \\ g''(x) < 0 \text{ στο } \left(0, \frac{1}{e}\right) \end{cases}$

Άρα η συνάρτηση g είναι κοίλη στο διάστημα $\left(0, \frac{1}{e}\right]$

Είναι:

- $g''(x) > 0$ στο $\left(\frac{1}{e}, 1\right) \cup (1, +\infty)$ και
- η C_g δέχεται μη κατακόρυφη εφαπτομένη στο $x_0 = 1$, αφού η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό

Άρα η συνάρτηση g είναι κυρτή στο διάστημα $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$

ΘΕΜΑ 16ο :

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο, που ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $(f'(x))^2 - 2f'(x) + \frac{1}{x^2+1} = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1)
- $f'(-1) < 1 < f'(1)$ (2)
- $f(0) = 1$ (3)

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

δ) Αν $h(x) = \ln f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, τότε :

i) Να αποδείξετε ότι $h'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$

ii) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον

άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = 1$

iii) Να αποδείξετε ότι $h(x) > \frac{f(x) - x - 1}{x}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$(f'(x))^2 - 2f'(x) + \frac{1}{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow (f'(x))^2 - 2f'(x) + 1 = 1 - \frac{1}{x^2 + 1} \Leftrightarrow$$

$$(f'(x) - 1)^2 = \frac{x^2}{x^2 + 1} \Leftrightarrow g^2(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1} \quad (4), \text{ όπου } g(x) = f'(x) - 1, x \in \mathbb{R}$$

• Για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ είναι:

$$\frac{x^2}{x^2 + 1} > 0 \Leftrightarrow g^2(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) \neq 0$$

και επειδή η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$, ως άθροισμα συνεχών, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-\infty, 0)$.

Για $x = -1$ είναι $g(-1) = f'(-1) - 1 < 0$ (2) οπότε $g(x) < 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 0)$

Αφού $g(x) < 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 0)$, από τη σχέση (4) ισοδύναμα έχουμε:

$$g(x) = -\sqrt{\frac{x^2}{x^2 + 1}} \Leftrightarrow g(x) = -\frac{|x|}{\sqrt{x^2 + 1}} \Leftrightarrow g(x) = -\frac{-x}{\sqrt{x^2 + 1}} \Leftrightarrow$$

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \Leftrightarrow f'(x) - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \Leftrightarrow f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 0)$$

• Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$\frac{x^2}{x^2 + 1} > 0 \Leftrightarrow g^2(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) \neq 0$$

και επειδή η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, ως άθροισμα συνεχών, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$.

Για $x = 1$ είναι $g(1) = f'(1) - 1 > 0$ (2) οπότε $g(x) > 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Αφού $g(x) > 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$, από τη σχέση (4) ισοδύναμα έχουμε:

$$g(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + 1}} \Leftrightarrow g(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + 1}} \Leftrightarrow g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \Leftrightarrow$$

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \Leftrightarrow f'(x) - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \Leftrightarrow f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Για $x = 0$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$(f'(0))^2 - 2f'(0) + 1 = 0 \Leftrightarrow (f'(0) - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow f'(0) - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 1$$

$$\text{Άρα } f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow f'(x) = (x + \sqrt{x^2+1})' \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2+1} + c$$

$$\text{Για } x=0 \text{ είναι } f(0) = 0 + \sqrt{0+1} + c \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} c = 0. \text{ Άρα } f(x) = x + \sqrt{x^2+1}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f(x) = x + \sqrt{1+x^2} > x + \sqrt{x^2} = x + |x| \geq 0$$

$$\text{Άρα } f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (5)$$

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}} \stackrel{(5)}{>} 0$$

Είναι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Επίσης η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right)' = \frac{(x) \sqrt{x^2+1} - x (\sqrt{x^2+1})'}{x^2+1} = \\ &= \frac{\sqrt{x^2+1} - x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{x^2+1 - x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0 \end{aligned}$$

Είναι $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

δ) i) Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με

$$h'(x) = (\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, x \in \mathbb{R}$$

ii) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=1$ είναι:

$$E = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x + \sqrt{x^2+1}) dx = \int_0^1 x dx + \int_0^1 \sqrt{x^2+1} dx = I_1 + I_2$$

Είναι:

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad I_1 &= \int_0^1 x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \\
 \bullet \quad I_2 &= \int_0^1 \sqrt{x^2+1} \, dx = \int_0^1 (x)' \sqrt{x^2+1} \, dx = \left[x \sqrt{x^2+1} \right]_0^1 - \int_0^1 x (\sqrt{x^2+1})' \, dx = \\
 &= \sqrt{2} - \int_0^1 x \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} (x^2+1)' \, dx = \sqrt{2} - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} \, dx = \sqrt{2} - \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}} \, dx = \\
 &= \sqrt{2} - \int_0^1 \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} \, dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \, dx = \sqrt{2} - \int_0^1 \sqrt{x^2+1} \, dx + \int_0^1 h'(x) \, dx = \\
 &= \sqrt{2} - I_2 + [h(x)]_0^1 = \sqrt{2} - I_2 + h(1) - h(0) = \sqrt{2} - I_2 + \ln f(1) - \ln f(0) = \\
 &= \sqrt{2} - I_2 + \ln(1+\sqrt{2}) - \ln 1 = \sqrt{2} - I_2 + \ln(1+\sqrt{2})
 \end{aligned}$$

Είναι:

$$I_2 = \sqrt{2} - I_2 + \ln(1+\sqrt{2}) \Leftrightarrow 2I_2 = \sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}), \text{ οπότε } I_2 = \frac{\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})}{2}$$

Επομένως:

$$E = I_1 + I_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})}{2} = \frac{1 + \sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})}{2} \text{ τ.μ.}$$

ii) Θεωρώ συνάρτηση $\Phi(x) = xh(x) - f(x) + x + 1$, $x \in [0, +\infty)$

Η συνάρτηση Φ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$, με

$$\begin{aligned}
 \Phi'(x) &= (x)'h(x) + xh'(x) - f'(x) + 1 = h(x) + x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) + 1 = \\
 &= h(x) + x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) + 1 = h(x) \quad (6)
 \end{aligned}$$

Είναι $h'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Επομένως, για κάθε $x > 0$ είναι $h(x) > h(0) \Rightarrow h(x) > \ln f(0) \Rightarrow h(x) > \ln 1 \Rightarrow h(x) > 0$ (7)

Από τις σχέσεις (6) και (7) συμπεραίνουμε ότι $\Phi'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Είναι:

$$\begin{cases} \Phi \text{ συνεχής στο } [0, +\infty) \\ \Phi(x) > 0 \text{ στο } (0, +\infty) \end{cases}$$

Άρα η συνάρτηση Φ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, οπότε για κάθε $x > 0$ είναι:

$$\Phi(x) > \Phi(0) \Rightarrow xh(x) - f(x) + x + 1 > 0 \cdot h(0) - f(0) + 0 + 1 \stackrel{(3)}{\Rightarrow}$$

$$xh(x) - f(x) + x + 1 > 0 \stackrel{x>0}{\Rightarrow} h(x) > \frac{f(x) - x - 1}{x}$$

Δηλαδή $h(x) > \frac{f(x) - x - 1}{x}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

ΘΕΜΑ 17ο :

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $4f''(x)(f(x))^3 = -1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ (1)
- $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ (2)
- $2f'(1) = f(1) = 1$ (3)

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

β) Να αποδείξετε ότι $(2f(x)f'(x))^2 = 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

γ) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

δ) Αν $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, τότε:

- i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $M(a, f(a))$, με $a > 0$.
- ii) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη (ε) και τον άξονα $x'x$.
- iii) Αν ένα σημείο M κινείται στη γραφική παράσταση της f έτσι, ώστε να απομακρύνεται από τον άξονα $y'y$ με ρυθμό 2 μονάδες το δευτερόλεπτο, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E του χωρίου Ω τη χρονική στιγμή κατά την οποία η τετμημένη του είναι ίση με 4 μονάδες.
- iv) Να βρείτε $\lambda \in (-a, a)$ τέτοιο, ώστε η ευθεία με εξίσωση $x = \lambda$ να χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισοεμβαδικά χωρία.

ΛΥΣΗ

α) Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$, τότε από τη σχέση (1) έχουμε:

$$4f''(x_0)(f(x_0))^3 = -1 \Rightarrow 4f''(x_0) \cdot 0 = -1 \Rightarrow 0 = -1,$$

που είναι άτοπο. Άρα $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ (4)

β) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$\begin{aligned} 4f''(x)(f(x))^3 &= -1 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 4f''(x)(f(x))^3 f'(x) = -f'(x) \Leftrightarrow \\ 4f''(x)f'(x) &= -(f(x))^{-3} f'(x) \Leftrightarrow [2(f'(x))^2]' = \left[-\frac{(f(x))^{-2}}{-2} \right]' \stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} \\ 2(f'(x))^2 &= \frac{1}{2(f(x))^2} + c \end{aligned} \quad (5)$$

Για $x = 1$ από τη σχέση (5) έχουμε:

$$2(f'(1))^2 = \frac{1}{2(f(1))^2} + c \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + c \Leftrightarrow c = 0 \quad (6)$$

Από τις σχέσεις (5) και (6) έχουμε:

$$2(f'(x))^2 = \frac{1}{2(f(x))^2} \Leftrightarrow 4(f(x))^2 (f'(x))^2 = 1 \Leftrightarrow (2f(x)f'(x))^2 = 1 \quad (7)$$

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = 2f(x)f'(x), \quad x \in (0, +\infty)$$

Από τη σχέση (7) έχουμε:

$$g^2(x) = 1, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

Από τις σχέσεις (2) και (4), έχουμε ότι $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Άρα η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$ και επειδή $g(1) = 2f(1)f'(1) = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1 > 0$ συμπεραίνουμε ότι $g(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Επομένως για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$g(x) = 1 \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$(f^2(x))' = (x)' \Leftrightarrow f^2(x) = x + c_1$$

Για $x=1$ έχουμε:

$$f^2(1) = 1 + c_1 \Leftrightarrow 1 = 1 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$$

Άρα είναι:

$$f^2(x) = x, \quad x \in (0, +\infty)$$

Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και από τη σχέση (4) έχουμε ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$ και επειδή $f(1) = 1 > 0$ συμπεραίνουμε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Επομένως έχουμε:

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$ ισχύει $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$

Άρα είναι:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \in (0, +\infty) \\ 0, & x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [0, +\infty)$$

δ) i) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $M(a, f(a))$, με $a > 0$ είναι:

$$\varepsilon: y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Είναι:

$$f(\alpha) = \sqrt{\alpha} \quad \text{και} \quad f'(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$$

Επομένως:

$$\varepsilon : y - \sqrt{\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}(x - \alpha) \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon : x - 2\sqrt{\alpha} \cdot y + \alpha = 0 \quad (7)$$

ii) Το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη (ε) και τον άξονα x είναι:

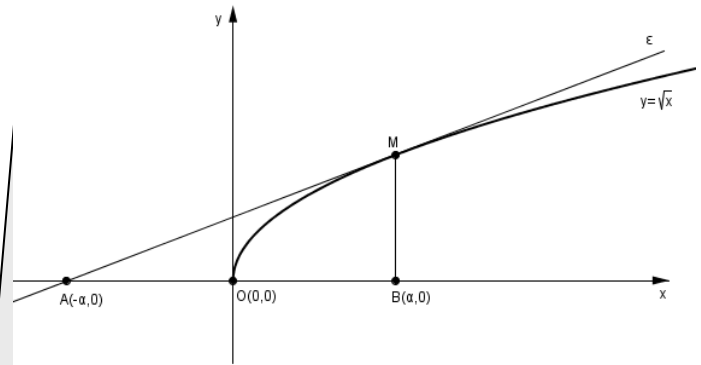
$$E = (A M B) - \int_0^{\alpha} f(x) dx = \frac{1}{2}(AB)(BM) - \int_0^{\alpha} \sqrt{x} dx = \frac{1}{2}(2\alpha)\sqrt{\alpha} - \int_0^{\alpha} x^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \alpha\sqrt{\alpha} - \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\alpha} =$$

$$= \alpha\sqrt{\alpha} - \left(\frac{2}{3} \alpha^{\frac{3}{2}} - 0 \right) =$$

$$= \alpha\sqrt{\alpha} - \frac{2}{3} \alpha\sqrt{\alpha} = \frac{1}{3} \alpha\sqrt{\alpha}$$

$$\text{Δηλαδή } E = \frac{1}{3} \alpha \sqrt{\alpha} \text{ τ.μ.}$$



iii) Έστω ότι την τυχαία χρονική στιγμή t είναι:

- $x_M = \alpha(t)$ (τετμημένη του σημείου M) και
- $E = E(t)$ (εμβαδόν του χωρίου Ω)

Τη χρονική στιγμή t_0 είναι:

- $x_M = \alpha(t_0) = 4$ μονάδες και
- $\alpha'(t_0) = 2$ μονάδες/sec,

Είναι:

$$E(t) = \frac{1}{3} (\alpha(t))^{\frac{3}{2}} \quad \text{και} \quad E'(t) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} (\alpha(t))^{\frac{1}{2}} \alpha'(t) = \frac{1}{2} (\alpha(t))^{\frac{1}{2}} \alpha'(t)$$

Τη χρονική στιγμή t_0 είναι:

$$E'(t_0) = \frac{1}{2} (\alpha(t_0))^{\frac{1}{2}} \alpha'(t_0) = \frac{1}{2} \cdot 4^{\frac{1}{2}} \cdot 2 = 2 \text{ τετραγωνικές μονάδες/sec}$$

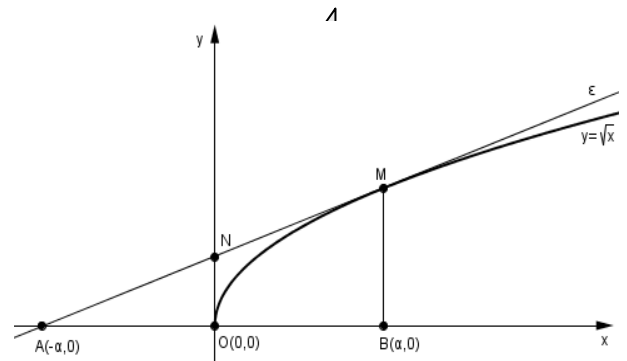
iv) Έστω N το σημείο τομής της εφαπτομένης (ε) και του άξονα $y'y$.

Για $x=0$ από τη σχέση (7) έχουμε:

$$y = \frac{\sqrt{\alpha}}{2}, \text{ οπότε } N \left(0, \frac{\sqrt{\alpha}}{2} \right)$$

Το εμβαδόν του τριγώνου OAN είναι:

$$E_1 = (OAN) = \frac{1}{2} (OA)(ON) = \frac{1}{2} \alpha \frac{\sqrt{\alpha}}{2} = \frac{1}{4} \alpha \sqrt{\alpha}$$



Από την προφανή σχέση $\frac{1}{4} \alpha \sqrt{\alpha} > \frac{1}{6} \alpha \sqrt{\alpha}$ προκύπτει ότι $E_1 > \frac{E}{2}$, οπότε η ζητούμενη ευθεία, που χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία, θα έχει εξίσωση $x = \lambda$ με $\lambda \in (-\alpha, 0)$

Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση $x = \lambda$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\Gamma(\lambda, 0)$ και την ευθεία ε στο σημείο Δ .

Για $x = \lambda$ από τη σχέση (7) έχουμε

$$y = \frac{\lambda + \alpha}{2\sqrt{\alpha}},$$

$$\text{οπότε } \Delta \left(\lambda, \frac{\lambda + \alpha}{2\sqrt{\alpha}} \right)$$

Είναι:

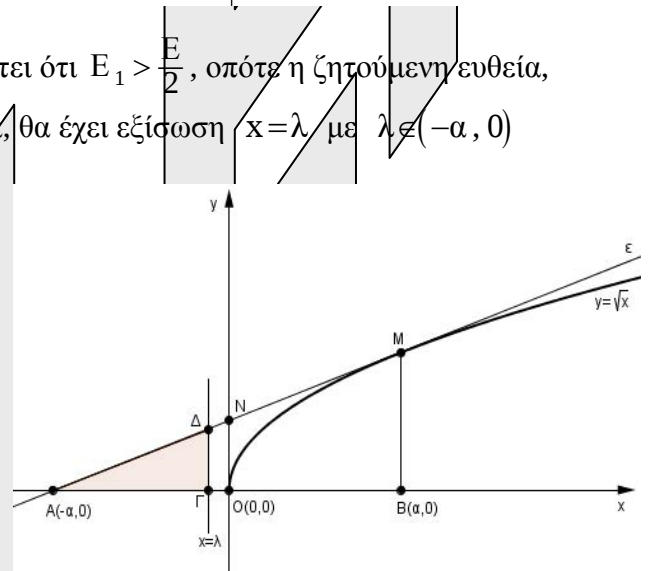
$$E_2 = (A\Gamma\Delta) = \frac{1}{2} (A\Gamma)(\Gamma\Delta) = \frac{1}{2} (\lambda + \alpha) \frac{\lambda + \alpha}{2\sqrt{\alpha}} = \frac{(\lambda + \alpha)^2}{4\sqrt{\alpha}}$$

Έχουμε:

$$E_2 = \frac{E}{2} \Leftrightarrow \frac{(\lambda + \alpha)^2}{4\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \alpha \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow \frac{(\lambda + \alpha)^2}{4\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{6} \alpha \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$(\lambda + \alpha)^2 = \frac{2}{3} \alpha^2 \Leftrightarrow |\lambda + \alpha| = \frac{\sqrt{6}}{3} |\alpha| \Leftrightarrow \begin{matrix} \lambda + \alpha > 0 \\ \alpha > 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \lambda + \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3} \alpha \Leftrightarrow$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{6}}{3} \alpha - \alpha \Leftrightarrow \lambda = \left(\frac{\sqrt{6}}{3} - 1 \right) \alpha \Leftrightarrow \lambda = \frac{\sqrt{6} - 3}{3} \alpha$$



ΘΕΜΑ 18ο :

Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, οι οποίες ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\bullet \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty) \quad (1)$$

$$\bullet g^2(x) = g'(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty) \quad (2)$$

$$\bullet f(1) = 2$$

$$\bullet g(1) = -1$$

α) Να βρείτε τις συναρτήσεις f και g

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις C_f , C_g και τις ευθείες με $x=1$ και $x=2$

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))^{-\frac{1}{g(x)}}$

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{2e^{x-1}}{f'(x)-1} + \frac{2\ln x + 3}{g'(x)+1} = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα

(1, e)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση $\frac{f(x)}{g(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων, οπότε η σχέση

(1) ισοδύναμα γράφεται

$$\frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (3)$$

Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, οπότε

$$g^2(x) = g'(x) \Rightarrow \frac{g'(x)}{g^2(x)} = 1 \Rightarrow \left(-\frac{1}{g(x)} \right)' = (x)' \Rightarrow -\frac{1}{g(x)} = x + c_1$$

Είναι:

$$g(1) = -1, \text{ οπότε } c_1 = 0$$

Άρα:

$$-\frac{1}{g(x)} = x \Rightarrow g(x) = -\frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty) \quad (4)$$

Η σχέση (3) λόγω των σχέσεων (2) και (4) γράφεται:

$$f'(x)g(x) - g'(x)f(x) = f'(x) \Rightarrow f'(x) \cdot \left(-\frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x^2} f(x) = f'(x) \Rightarrow$$

$$\left(1 + \frac{1}{x} \right) f'(x) = -\frac{1}{x^2} f(x) \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{x} \right) f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x} \right)' f(x) \Rightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{1 + \frac{1}{x}} \right)' = 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{1 + \frac{1}{x}} = c_2 \Rightarrow f(x) = c_2 \left(1 + \frac{1}{x} \right), \quad x \in (0, +\infty)$$

Είναι:

$$f(1) = 2, \text{ οπότε } c_2 = 1$$

Άρα:

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

β) Στο διάστημα $[1, 2]$ ισχύει:

$$f(x) - g(x) = 1 + \frac{1}{x} - \left(-\frac{1}{x} \right) = 1 + \frac{2}{x} > 0,$$

οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = \int_1^2 \left(1 + \frac{2}{x}\right) dx = [x + 2\ln x]_1^2 = 1 + 2\ln 2$$

γ) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} \quad \text{και} \quad g(x) = -\frac{1}{x}$$

οπότε το ζητούμενο όριο λαμβάνει τη μορφή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ και επειδή για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}, \text{ αρκεί να υπολογίσουμε το όριο } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \right]$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \right] \stackrel{+\infty \cdot 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = 1, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^1 = e$$

δ) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad \text{και} \quad g'(x) = \frac{1}{x^2},$$

οπότε

$$f'(x) - 1 = -\left[g'(x) + 1\right] = -\frac{1}{x^2} - 1 \neq 0$$

και η δοθείσα εξίσωση στο διάστημα $[1, e]$ είναι ισοδύναμη με την $2e^{x-1} - 2\ln x - 3 = 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = 2e^{x-1} - 2\ln x - 3, \quad x \in [1, e]$$

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $h(x) = 0$, έχει μια ακριβώς ρίζα στο διάστημα $(1, e)$

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[1, e]$, ως άθροισμα συνεχών
- $h(1) = 2 - 3 = -1 < 0$ και $h(e) = 2e^{e-1} - 5 = 2\left(e^{e-1} - \frac{5}{2}\right) > 0$, γιατί $e > \frac{5}{2}$ και $e-1 > 1$,

$$\text{οπότε } h(1) \cdot h(e) < 0$$

Άρα η συνάρτηση h ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano, οπότε η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, e)$.

Για κάθε $x \in (1, e)$ έχουμε:

$$h'(x) = 2\left(e^{x-1} - \frac{1}{x}\right) > 0$$

αφού για $1 < x < e$ είναι:

$$\begin{cases} x-1 > 0 \\ \frac{1}{x} < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{x-1} > 1 \\ -\frac{1}{x} > -1 \end{cases} \xrightarrow{(+)} e^{x-1} - \frac{1}{x} > 0$$

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η εξίσωση $h(x) = 0$ θα έχει μια ακριβώς ρίζα στο διάστημα $(1, e)$

ΘΕΜΑ 19ο :

Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\bullet f''(x) - f(x) = (4x+2)e^x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$\bullet f'(0) = f(0) = 0 \quad (2)$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^2 e^x$, $x \in \mathbb{R}$

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (-1, 1)$ τέτοια, ώστε $f''(\xi_1) \cdot f''(\xi_2) = 3$

ε) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{x-1}^x f(t) dt$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\begin{aligned} f''(x) - f(x) &= (4x+2)e^x \Leftrightarrow f''(x) - f'(x) + f'(x) - f(x) = (4x+2)e^x \Leftrightarrow \\ f''(x)e^{-x} - f'(x)e^{-x} + f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} &= 4x+2 \Leftrightarrow \\ (f'(x))'e^{-x} + f'(x)(e^{-x})' + f'(x)e^{-x} - f(x)(e^{-x})' &= (2x^2+2x)' \Leftrightarrow \\ (f'(x)e^{-x})' + (f(x)e^{-x})' &= (2x^2+2x)' \Leftrightarrow \\ (f'(x)e^{-x} + f(x)e^{-x})' &= (2x^2+2x)' \Leftrightarrow \\ f'(x)e^{-x} + f(x)e^{-x} &= 2x^2 + 2x + c_1 \quad (3) \end{aligned}$$

Για $x = 0$ από τη σχέση (3) έχουμε:

$$f'(0)e^0 + f(0)e^0 = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + c_1 \xrightarrow{(2)} c_1 = 0$$

Άρα η σχέση (3) γράφεται:

$$f'(x)e^{-x} + f(x)e^{-x} = 2x^2 + 2x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\begin{aligned} f'(x)e^{-x} + f(x)e^{-x} &= 2x^2 + 2x \xrightarrow{\cdot e^{2x}} f'(x)e^x + f(x)e^x = 2x^2 e^{2x} + 2x e^{2x} \Leftrightarrow \\ f'(x)e^x + f(x)(e^x)' &= x^2(e^{2x})' + (x^2)'e^{2x} \Leftrightarrow (f(x)e^x)' = (x^2 e^{2x})' \Leftrightarrow \\ f(x)e^x &= x^2 e^{2x} + c_2 \quad (4) \end{aligned}$$

Για $x = 0$ από τη σχέση (4) έχουμε:

$$f(0)e^0 = 0 \cdot e^0 + c_2 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} c_2 = 0$$

Άρα η σχέση (4) γράφεται:

$$f(x)e^x = x^2 e^{2x} \Leftrightarrow f(x) = x^2 e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

β) • Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

• Για $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x e^x) = +\infty$$

Άρα η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν έχει ασύμπτωτη της μορφής

$$y = \lambda x + \beta$$

στο $+\infty$

• Για $x \in (-\infty, 0)$ είναι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^x) \stackrel{(+\infty) \cdot 0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} \stackrel{D.L.H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2)'}{(e^{-x})'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} \stackrel{\frac{-\infty}{-\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x)'}{(-e^{-x})'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x) = 2 \cdot 0 = 0 \quad (5) \end{aligned}$$

Άρα η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο $-\infty$

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x = x(x+2)e^x$$

Είναι:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x+2)e^x = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ή $x = 0$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x(x+2)e^x > 0 \Leftrightarrow x < -2$ ή $x > 0$

Το πρόσημο της $f'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$4e^{-2}$	0		
		$\tau. \mu.$	$ο. \epsilon.$		

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -2]$ και $[0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2, 0]$

Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = -2$ με τιμή $f(-2) = 4e^{-2}$ και ολικό ελάχιστο στο $x_2 = 0$ με ελάχιστη τιμή $f(0) = 0$, αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, (σχέση (5))

δ) Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως γινόμενο παραγωγισίμων συναρτήσεων, άρα ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ σε δύο διαστήματα, στα $[-1, 0]$ και $[0, 1]$, οπότε θα υπάρχουν:

$$\bullet \xi_1 \in (-1, 0) \text{ τέτοιο, ώστε } f''(\xi_1) = \frac{f'(0) - f'(-1)}{0 - (-1)} = \frac{0 - (-1) \cdot 1 \cdot e^{-1}}{1} = e^{-1}$$

$$\bullet \xi_2 \in (0, 1) \text{ τέτοιο, ώστε } f''(\xi_2) = \frac{f'(1) - f'(0)}{1 - 0} = \frac{1 \cdot 3 \cdot e - 0}{1} = 3e$$

Άρα έχουμε:

$$f''(\xi_1)f''(\xi_2) = e^{-1} \cdot 3e \Leftrightarrow f''(\xi_1)f''(\xi_2) = 3$$

ε) Για $t \in [x-1, x]$ με $x < -2$ έχουμε:

$$x-1 \leq t \leq x \xRightarrow{f \uparrow} f(x-1) \leq f(t) \leq f(x)$$

Επομένως:

$$\int_{x-1}^x f(x-1)dt \leq \int_{x-1}^x f(t)dt \leq \int_{x-1}^x f(x)dt \Leftrightarrow$$

$$f(x-1) \int_{x-1}^x 1dt \leq \int_{x-1}^x f(t)dt \leq f(x) \int_{x-1}^x 1dt \Leftrightarrow$$

$$f(x-1) \cdot (x - (x-1)) \leq \int_{x-1}^x f(t)dt \leq f(x) \cdot (x - (x-1)) \Leftrightarrow$$

$$f(x-1) \leq \int_{x-1}^x f(t)dt \leq f(x)$$

Για $x \in (-\infty, 0)$ είναι:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \text{ (σχέση (5))}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x-1) = \lim_{\substack{x-1=t \\ t \rightarrow -\infty}} f(t) = 0, \text{ (σχέση (5))}$$

Άρα από το Κριτήριο Παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{x-1}^x f(t)dt = 0$

ΘΕΜΑ 20ο :

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$\int_1^x f(t)dt + x \ln\left(\frac{x}{4}\right) - x + 1 + 2\ln 2 = \int_1^x \left(\int_1^u \frac{f(t)}{t+1} dt \right) du, \quad x > 0 \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη με $\left(\frac{f(x)}{x+1}\right)' = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$, $x > 0$ και να βρείτε στη συνέχεια τον τύπο της f

β) Αν $f(x) = (x+1) \ln \frac{x+1}{x}$, $x > 0$, τότε:

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f και να βρείτε το σύνολο τιμών της f

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x+1 = xe^{\frac{2012}{x+1}}$, $x > 0$ έχει μία ακριβώς θετική ρίζα

iii) Να αποδείξετε ότι $f(x) + 2\ln 2 \geq 2f\left(\frac{x+1}{2}\right)$, $x > 0$

iv) Να αποδείξετε ότι $\int_x^{2012} tf(t)dt > x \int_x^{2012} f(t)dt$, $x \in (0, 2012)$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $(0, +\infty)$, άρα η συνάρτηση $\int_1^x f(t)dt$, $x \in (0, +\infty)$

είναι παραγωγίσιμη με $\left(\int_1^x f(t)dt\right)' = f(x)$, $x > 0$.

Η συνάρτηση $\frac{f(t)}{t+1}$ είναι συνεχής στο διάστημα $(0, +\infty)$ ως πηλίκο συνεχών, άρα η συνάρτηση

$g(u) = \int_1^u \frac{f(t)}{t+1} dt$, $u > 0$ είναι παραγωγίσιμη με $g'(u) = \left(\int_1^u \frac{f(t)}{t+1} dt\right)' = \frac{f(u)}{u+1}$, $u > 0$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο διάστημα $(0, +\infty)$ ως παραγωγίσιμη, άρα η συνάρτηση

$\int_1^x g(u)du$, $x \in (0, +\infty)$ είναι παραγωγίσιμη με $\left(\int_1^x g(u)du\right)' = g(x)$, $x > 0$.

Επομένως τα μέλη της (1) είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο διάστημα $(0, +\infty)$, άρα παραγωγίζοντας έχουμε:

$$\left(\int_1^x f(t)dt + x \ln\left(\frac{x}{4}\right) - x + 1 + 2\ln 2\right)' = \left(\int_1^x g(u)du\right)', \text{ οπότε}$$

$$f(x) + \ln\left(\frac{x}{4}\right) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = -\ln\left(\frac{x}{4}\right) + g(x), \quad x > 0 \quad (2)$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$, ως άθροισμα παραγωγίσιμων με

$$f'(x) = -\frac{1}{x} + g'(x) \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{1}{x} + \frac{f(x)}{x+1} \Leftrightarrow f'(x) - \frac{f(x)}{x+1} = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x+1)f'(x)-f(x)}{x+1} = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{(x+1)f'(x)-f(x)}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{x+1}\right)' = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x+1}\right)' = (\ln(x+1) - \ln x)' \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x+1} = \ln(x+1) - \ln x + c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad x > 0 \quad (3)$$

Για $x=1$ από τη σχέση (2) έχουμε $f(1) = -\ln\left(\frac{1}{4}\right) + g(1) \Leftrightarrow f(1) = \ln 4 + 0 \Leftrightarrow f(1) = 2\ln 2$

και από τη σχέση (3) έχουμε $\frac{f(1)}{2} = \ln 2 + c \Leftrightarrow \frac{2\ln 2}{2} = \ln 2 + c \Leftrightarrow c = 0$

Άρα

$$\frac{f(x)}{x+1} = \ln(x+1) - \ln x, \quad x > 0 \Leftrightarrow f(x) = (x+1)\ln \frac{x+1}{x}, \quad x > 0$$

β) i) Η f είναι παραγωγίμη στο $(0, +\infty)$ με

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left((x+1)\ln \frac{x+1}{x} \right)' = (x+1)' \ln \frac{x+1}{x} + (x+1) \left(\ln \frac{x+1}{x} \right)' = \\ &= \ln \frac{x+1}{x} + (x+1) \cdot \frac{x}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{x} \right)' = \ln \frac{x+1}{x} + x \cdot \frac{(x+1)'x - (x+1)(x)'}{x^2} = \\ &= \ln \frac{x+1}{x} + \frac{x - (x+1)}{x} = \ln \frac{x+1}{x} - \frac{1}{x}, \quad x > 0 \end{aligned}$$

Η συνάρτηση $g(t) = \ln t$ σε κάθε διάστημα $[x, x+1]$, $x > 0$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ., άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο, ώστε

$$g'(\xi) = \frac{g(x+1) - g(x)}{(x+1) - x} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \ln(x+1) - \ln x \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \ln \frac{x+1}{x} \quad (4)$$

Είναι:

$$0 < x < \xi < x+1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{\xi} \Leftrightarrow \ln \frac{x+1}{x} < \frac{1}{x} \Leftrightarrow \ln \frac{x+1}{x} - \frac{1}{x} < 0 \quad (5)$$

Λόγω της (5) είναι $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Είναι:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left((x+1) \cdot \ln \frac{x+1}{x} \right) = +\infty \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty, \quad t = \frac{x+1}{x} \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(x+1) \cdot \frac{1}{x} \right] = +\infty$$

Άρα η ευθεία $x=0$ (άξονας $y'y$) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left((x+1) \cdot \ln \frac{x+1}{x} \right) \stackrel{(\infty)0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{x+1}{x}}{\frac{1}{x+1}} \stackrel{\frac{0}{0}}{\stackrel{DLH}{=}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\ln \frac{x+1}{x} \right)'}{\left(\frac{1}{x+1} \right)'} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{x} \right)'}{\left(\frac{1}{x+1} \right)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{x+1} \cdot \frac{(x+1)'x - (x+1)(x)'}{x^2}}{-\frac{1}{(x+1)^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{x+1} \cdot \frac{x - (x+1)}{x^2}}{-\frac{1}{(x+1)^2}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{x+1} \cdot \left(\frac{-1}{x^2} \right)}{-\frac{1}{(x+1)^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1
 \end{aligned}$$

Άρα η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A = (0, +\infty)$ άρα το σύνολο τιμών της είναι το $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = (1, +\infty)$

ii) Για $x > 0$ η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται:

$$\begin{aligned}
 x+1 &= x \cdot e^{\frac{2012}{x+1}} \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} = e^{\frac{2012}{x+1}} \Leftrightarrow \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) = \ln e^{\frac{2012}{x+1}} \Leftrightarrow \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) = \frac{2012}{x+1} \Leftrightarrow \\
 (x+1) \cdot \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) &= 2012 \Leftrightarrow f(x) = 2012 \quad (6)
 \end{aligned}$$

Η f είναι συνάρτηση 1-1, ως γνησίως φθίνουσα στο $A = (0, +\infty)$ και $2012 \in f(A)$, άρα η εξίσωση (6) έχει μία ακριβώς λύση ως προς x στο $A = (0, +\infty)$.

Δηλαδή η εξίσωση $x+1 = x \cdot e^{\frac{2012}{x+1}}$, $x > 0$ έχει μία ακριβώς θετική ρίζα.

iii) 1^{ος} τρόπος: (ανισότητα Jensen) $f(x) + 2 \ln 2 \geq 2f\left(\frac{x+1}{2}\right) \Leftrightarrow f(x) + f(1) \geq 2f\left(\frac{x+1}{2}\right) \quad (7)$

που ισχύει για κάθε $x > 0$, γιατί η f είναι κυρτή. Πράγματι:

Για $x=1$ η (7) ισχύει ως ισότητα.

Για $x > 1$ η f στα διαστήματα $\left[1, \frac{x+1}{2}\right]$ και $\left[\frac{x+1}{2}, x\right]$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις

του Θ.Μ.Τ., άρα υπάρχουν $\xi_1 \in \left(1, \frac{x+1}{2}\right)$ και $\xi_2 \in \left(\frac{x+1}{2}, x\right)$ τέτοια, ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{x+1}{2}\right) - f(1)}{\frac{x+1}{2} - 1} = \frac{f\left(\frac{x+1}{2}\right) - f(1)}{\frac{x-1}{2}} \quad \text{και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x) - f\left(\frac{x+1}{2}\right)}{x - \frac{x+1}{2}} = \frac{f(x) - f\left(\frac{x+1}{2}\right)}{\frac{x-1}{2}}$$

Για κάθε $x > 0$ η f' είναι παραγωγίμη με $f''(x) = \frac{x+1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

Είναι:

$$0 < \xi_1 < \xi_2 \Leftrightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f\left(\frac{x+1}{2}\right) - f(1)}{\frac{x+1}{2} - 1} < \frac{f(x) - f\left(\frac{x+1}{2}\right)}{\frac{x-1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$f\left(\frac{x+1}{2}\right) - f(1) < f(x) - f\left(\frac{x+1}{2}\right) \Leftrightarrow f(x) + f(1) > 2f\left(\frac{x+1}{2}\right) \Leftrightarrow f(x) + 2\ln 2 > 2f\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

Ομοίως αν $0 < x < 1$

Άρα σε κάθε περίπτωση είναι:

$$f(x) + 2\ln 2 \geq 2f\left(\frac{x+1}{2}\right), \text{ για κάθε } x > 0$$

2^{ος} τρόπος (με τη βοήθεια ακρότατου)

Υπόδειξη: αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = f(x) - 2f\left(\frac{x+1}{2}\right) + 2\ln 2, \quad x > 0 \text{ έχει ελάχιστο το } 0.$$

iv) 1^{ος} τρόπος: (με τη βοήθεια της μονοτονίας)

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = \int_x^{2012} tf(t)dt - x \int_x^{2012} f(t)dt = - \int_{2012}^x tf(t)dt + x \int_{2012}^x f(t)dt, \quad x \in (0, 2012]$$

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη γιατί οι συναρτήσεις $f(t)$, $tf(t)$ είναι συνεχείς, με

$$h'(x) = \left(- \int_{2012}^x tf(t)dt + x \int_{2012}^x f(t)dt \right)' = -xf(x) + \int_{2012}^x f(t)dt + xf(x) = \int_{2012}^x f(t)dt, \quad x \in (0, 2012]$$

Για κάθε $x \in (0, 2012]$ είναι:

$$h''(x) = \left(\int_{2012}^x f(t)dt \right)' = f(x) > 0$$

αφού το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $f(A) = (1, +\infty)$

Άρα η συνάρτηση h' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, 2012]$, οπότε

$$\text{για } 0 < x < 2012 \text{ ισχύει } h'(x) < h'(2012) \stackrel{h'(2012)=0}{\Leftrightarrow} h'(x) < 0$$

Έχουμε:

$$\begin{cases} h \text{ συνεχής στο } (0, 2012] \\ h'(x) < 0 \text{ στο } (0, 2012) \end{cases}$$

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 2012]$

Επομένως για κάθε $x \in (0, 2012)$ ισχύει:

$$h(x) > h(2012) = 0 \Rightarrow - \int_{2012}^x t f(t) dt + x \int_{2012}^x f(t) dt > 0 \Rightarrow$$

$$\int_x^{2012} t f(t) dt - x \int_x^{2012} f(t) dt > 0 \Rightarrow \int_x^{2012} t f(t) dt > x \int_x^{2012} f(t) dt$$

2^{ος} τρόπος

Για κάθε $x \in (0, 2012)$ είναι :

$$\int_x^{2012} t f(t) dt > x \int_x^{2012} f(t) dt \Leftrightarrow \int_x^{2012} t f(t) dt - x \int_x^{2012} f(t) dt > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_x^{2012} t f(t) dt - \int_x^{2012} x f(t) dt > 0 \Leftrightarrow \int_x^{2012} (t-x) f(t) dt > 0$$

που ισχύει γιατί η συνάρτηση $(t-x)f(t)$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[x, 2012]$,

αφού $x \in (0, 2012)$ και $(t-x)f(t) \geq 0$, για κάθε $t \in [x, 2012]$ με το ίσο να ισχύει μόνο

για $t=x$, άρα $\int_x^{2012} (t-x)f(t) dt > 0$

ΘΕΜΑ 21ο :

Έστω η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(f'(x)) + f(x) = 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ (1)
- $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ (2)
- $f(1) = 0$ (3)

α) i) Να βρείτε το $f'(1)$

ii) Να αποδείξετε ότι $f'(f'(x)) = x$, $x \in (0, +\infty)$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $k \in \mathbb{R}$ η ευθεία $\varepsilon: y = x + k$ έχει δυο κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f

δ) Αν $k < -1$ και $A(a, f(a)), B(\beta, f(\beta))$ με $a < \beta$, τα κοινά σημεία της ευθείας (ε) με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $a\beta(\ln \xi - 1) = k\xi^2$

ΛΥΣΗ

α) i) Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, άρα είναι και «1-1»

Από τη σχέση (1) για $x=1$ έχουμε:

$$f(f'(1)) + f(1) = 0 \Rightarrow f(f'(1)) = 0 \stackrel{(3)}{\Rightarrow} f'(1) = 1$$

$$f(f'(1)) = f(1) \xRightarrow{f: \langle 1,1 \rangle} f'(1) = 1 \quad (4)$$

ii) Αν στη σχέση (1) θέσουμε όπου x το $f'(x)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f(f'(f'(x))) + f(f'(x)) &= 0 \xRightarrow{+f(x)} \\ f(f'(f'(x))) + \underbrace{f(f'(x)) + f(x)}_{=0} &= f(x) \xRightarrow{(1)} \\ f(f'(f'(x))) &= f(x) \xRightarrow{f: \langle 1,1 \rangle} f'(f'(x)) = x, \quad x \in (0, +\infty) \end{aligned} \quad (5)$$

β) Η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$, άρα η συνάρτηση f' είναι

παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, οπότε και η συνάρτηση $f(f'(x))$ είναι παραγωγίσιμη, ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων. Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη της σχέσης (1) έχουμε:

$$\begin{aligned} f(f'(x)) + f(x) &= 0 \Rightarrow (f(f'(x)) + f(x))' = (0)' \Rightarrow \\ f'(f'(x)) \cdot f''(x) + f'(x) &= 0 \xRightarrow{(5)} xf''(x) + f'(x) = 0 \Rightarrow \\ (xf'(x))' &= 0 \Rightarrow xf'(x) = c_1, \quad x \in (0, +\infty) \text{ και } c_1 \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (6)$$

Από τη σχέση (6) για $x=1$ έχουμε:

$$1 \cdot f'(1) = c_1 \xRightarrow{(4)} c_1 = 1$$

Άρα για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$xf'(x) = 1 \xRightarrow{\div x > 0} f'(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow f'(x) = (\ln x)' \Leftrightarrow f(x) = \ln x + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R} \quad (7)$$

Από τη σχέση (7) για $x=1$ έχουμε:

$$f(1) = \ln 1 + c_2 \xRightarrow{(3)} c_2 = 0$$

Άρα:

$$f(x) = \ln x, \quad x \in (0, +\infty) \quad (8)$$

γ) Αρκεί να βρούμε για ποιες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $\ln x = x + \kappa$ έχει δύο λύσεις.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \ln x - x - \kappa$, $x \in (0, +\infty)$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο:

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

Είναι:

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1)$
- $g'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (1, +\infty)$

Το πρόσημο της $g'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον παρακάτω

πίνακα.

x	01 $+\infty$		
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$		$-1-\kappa$	

μέγιστο

Είναι:

$$g(1) = \ln 1 - 1 - \kappa = -1 - \kappa$$

- Η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1]$
- Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$
- Η συνάρτηση g παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 1$ με μέγιστη τιμή $g(1) = -1 - \kappa$

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - x - \kappa) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x - \kappa) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{\ln x}{x} - 1 - \frac{\kappa}{x} \right) \right] = -\infty$, γιατί
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} - 1 - \frac{\kappa}{x} \right) = 0 - 1 - 0 = -1$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

Το σύνολο τιμών της συνάρτησης g είναι:

$$g(\Delta) = g(\Delta_1) \cup g(\Delta_2)$$

- Η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1]$, οπότε είναι:

$$g(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x), g(1) \right] = (-\infty, -1 - \kappa]$$

- Η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$, οπότε είναι:

$$g(\Delta_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), g(1) \right] = (-\infty, -1 - \kappa]$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης g είναι:

$$g(\Delta) = g(\Delta_1) \cup g(\Delta_2) = (-\infty, -1 - \kappa]$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι, η συνάρτηση g λαμβάνει κάθε τιμή του συνόλου τιμών της, εκτός από την μέγιστη, ακριβώς δύο φορές.

Άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει δύο ρίζες σε κάθε περίπτωση που η μέγιστη τιμή της είναι θετική, δηλαδή όταν $-1 - \kappa > 0$ που σημαίνει ότι $\kappa < -1$

δ) 1^{ος} τρόπος:

Αν $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$ είναι τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = x + \kappa$ με $\kappa < -1$, τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \bullet f(\alpha) &= \alpha + \kappa \stackrel{(8)}{\Rightarrow} \ln \alpha = \alpha + \kappa \Rightarrow \frac{\ln \alpha}{\alpha} = 1 + \frac{\kappa}{\alpha} \\ \bullet f(\beta) &= \beta + \kappa \stackrel{(8)}{\Rightarrow} \ln \beta = \beta + \kappa \Rightarrow \frac{\ln \beta}{\beta} = 1 + \frac{\kappa}{\beta} \end{aligned}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις προηγούμενες σχέσεις έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\ln \alpha}{\alpha} - \frac{\ln \beta}{\beta} &= \left(1 + \frac{\kappa}{\alpha}\right) - \left(1 + \frac{\kappa}{\beta}\right) \Rightarrow \\ \frac{\ln \alpha}{\alpha} - \frac{\ln \beta}{\beta} &= \frac{\kappa}{\alpha} - \frac{\kappa}{\beta} \Rightarrow \frac{\ln \alpha}{\alpha} - \frac{\ln \beta}{\beta} = \kappa \frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta} \Rightarrow \\ \frac{\ln \beta}{\beta} - \frac{\ln \alpha}{\alpha} &= -\kappa \frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta} \Rightarrow \frac{\frac{\ln \beta}{\beta} - \frac{\ln \alpha}{\alpha}}{\beta - \alpha} = -\frac{\kappa}{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (9)$$

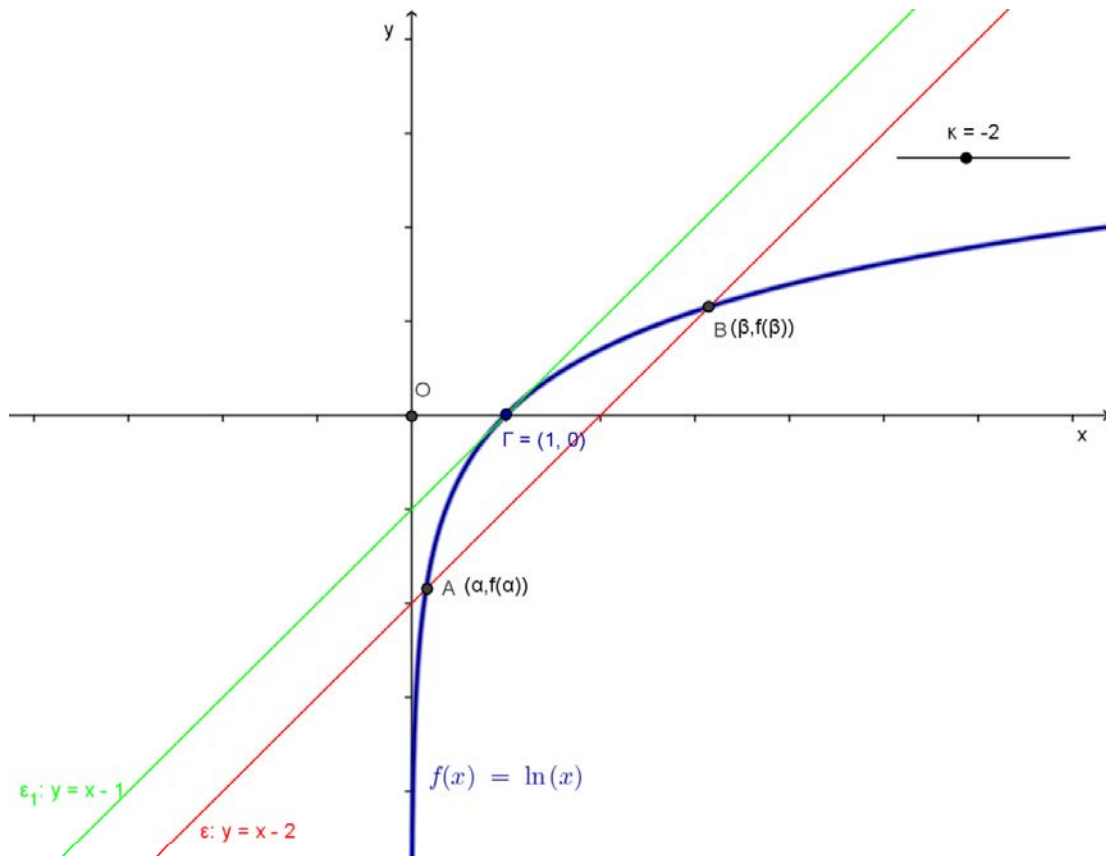
Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x \in [\alpha, \beta]$

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \quad (10)$$

Η συνάρτηση h ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει

$$\begin{aligned} h'(\xi) &= \frac{h(\beta) - h(\alpha)}{\beta - \alpha} \stackrel{(10)}{\Rightarrow} \frac{1 - \ln \xi}{\xi^2} = \frac{\frac{\ln \beta}{\beta} - \frac{\ln \alpha}{\alpha}}{\beta - \alpha} \stackrel{(9)}{\Rightarrow} \\ &= \frac{1 - \ln \xi}{\xi^2} = -\frac{\kappa}{\alpha\beta} \Rightarrow \alpha\beta(1 - \ln \xi) = -\kappa \xi^2 \Rightarrow \alpha\beta(\ln \xi - 1) = \kappa \xi^2 \end{aligned}$$

**2^{ος} τρόπος:**

Αν $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$ είναι τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = x + \kappa$ με $\kappa < -1$, τότε έχουμε:

- $f(\alpha) = \alpha + \kappa \Rightarrow \ln \alpha = \alpha + \kappa$, με $0 < \alpha < 1$
- $f(\beta) = \beta + \kappa \Rightarrow \ln \beta = \beta + \kappa$, με $\beta > 1$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \alpha\beta(\ln x - 1) - \kappa x^2$, $x \in [\alpha, \beta]$

♦ Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$$\begin{aligned} \diamond \quad \varphi(\alpha) &= \alpha\beta(\ln \alpha - 1) - \kappa \alpha^2 \stackrel{\ln \alpha = \alpha + \kappa}{=} \alpha\beta(\alpha + \kappa - 1) - \kappa \alpha^2 = \\ &= \alpha(\alpha\beta + \beta\kappa - \beta - \kappa\alpha) = \alpha \left[\underbrace{\beta(\alpha - 1)}_{< 0} + \underbrace{\kappa(\beta - \alpha)}_{< 0} \right] < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \diamond \quad \varphi(\beta) &= \alpha\beta(\ln \beta - 1) - \kappa \beta^2 \stackrel{\ln \beta = \beta + \kappa}{=} \alpha\beta(\beta + \kappa - 1) - \kappa \beta^2 = \\ &= \beta(\alpha\beta + \alpha\kappa - \alpha - \kappa\beta) = \beta \left[\underbrace{\alpha(\beta - 1)}_{> 0} + \underbrace{\kappa(\alpha - \beta)}_{> 0} \right] > 0 \end{aligned}$$

οπότε $\varphi(\alpha)\varphi(\beta) < 0$

Η συνάρτηση φ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$\varphi(\xi) = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta(\ln\xi - 1) - \kappa\xi^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta(\ln\xi - 1) = \kappa\xi^2$$

ΘΕΜΑ 22ο :

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με:

- $f(x) = xe^x + \alpha$
- $g(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Αν οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g των συναρτήσεων f, g αντίστοιχα δέχονται, σε κοινό τους σημείο, κοινή εφαπτομένη (ε), που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha = 0, \quad \beta = -\frac{3}{2} \quad \text{και η κοινή εφαπτομένη } (\varepsilon) \text{ είναι η ευθεία με εξίσωση } y = x$$

β) Να βρείτε το εμβαδόν E_1 του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της

συνάρτησης f , την ευθεία (ε) και την ευθεία με εξίσωση $x = t, \quad t > 0$

γ) Να βρείτε το εμβαδόν E_2 του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης g , την ευθεία (ε) και την ευθεία με εξίσωση $x = t, \quad t > 0$

δ) Να αποδείξετε ότι $E_1(t) < E_2(t) + te^t$ για κάθε $t > 0$

ΛΥΣΗ

α) Οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα δέχονται κοινή εφαπτομένη (ε), σε κοινό τους σημείο $M(x_0, y_0)$, αν και μόνο αν

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = g'(x_0) = \lambda \end{cases}, \quad (\text{όπου } \lambda \text{ ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας } (\varepsilon))$$

Η εφαπτομένη (ε) διέρχεται από την αρχή των αξόνων, άρα έχει εξίσωση της μορφής $y = \lambda x$

Άρα:

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) = \lambda x_0 & (1) \\ f'(x_0) = g'(x_0) = \lambda & (2) \end{cases}$$

Οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, με:

- $f'(x) = (xe^x + \alpha)' = e^x + xe^x = (x+1)e^x, \quad x \in \mathbb{R}$
- $g'(x) = \left(-\frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + \beta\right)' = -e^{2x} + 2e^x = e^x(2 - e^x), \quad x \in \mathbb{R}$

Για $x = x_0$ από τη σχέση (2) έχουμε:

$$f'(x_0) = g'(x_0) \Leftrightarrow (x_0+1)e^{x_0} = e^{x_0}(2 - e^{x_0}) \Leftrightarrow x_0+1 = 2 - e^{x_0} \Leftrightarrow e^{x_0} + x_0 - 1 = 0 \quad (3)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = e^x + x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$h'(x) = (e^x + x - 1)' = e^x + 1 > 0$$

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι και «1-1»

Η εξίσωση (3) ισοδύναμα γράφεται:

$$h(x_0) = h(0) \Leftrightarrow x_0 = 0$$

Για $x_0 = 0$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\bullet f(0) = \lambda \cdot 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

$$\bullet g(0) = \lambda \cdot 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}e^0 + 2e^0 + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -2 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \beta = -\frac{3}{2}$$

Για $x_0 = 0$ από τη σχέση (2) έχουμε:

$$\bullet f'(0) = \lambda \Leftrightarrow \lambda = (0+1)e^0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Άρα η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης (ε) είναι: $y = x$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\bullet f'(x) = (x+1)e^x$$

$$\bullet f''(x) = ((x+1)e^x)' = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$$

Είναι:

$$f''(x) = (x+2)e^x > 0 \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty) \subseteq (-2, +\infty)$$

Άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $[0, +\infty)$, οπότε η γραφική της παράσταση C_f βρίσκεται από την εφαπτομένη (ε): $y = x$ και «πάνω», δηλαδή ισχύει:

$$f(x) \geq x \Leftrightarrow f(x) - x \geq 0 \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty)$$

με το «ίσον» να ισχύει μόνο για $x = 0$ (τεταμημένη του σημείου επαφής)

Επομένως το εμβαδόν E_1 του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , την ευθεία (ε) και την ευθεία με εξίσωση $x = t$, $t > 0$, είναι:

$$\begin{aligned} E_1(t) &= \int_0^t (f(x) - x) dx = \int_0^t (xe^x - x) dx = \int_0^t xe^x dx - \int_0^t x dx = \int_0^t x(e^x)' dx - \int_0^t x dx = \\ &= [xe^x]_0^t - \int_0^t (x)' e^x dx - \frac{1}{2} [x^2]_0^t = te^t - \int_0^t e^x dx - \frac{1}{2} t^2 = \\ &= te^t - e^t + 1 - \frac{1}{2} t^2 = te^t - e^t - \frac{1}{2} t^2 + 1, \quad t > 0 \end{aligned}$$

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\bullet g'(x) = e^x(2 - e^x) = 2e^x - e^{2x}$$

$$\bullet g''(x) = (-e^{2x} + 2e^x)' = -2e^{2x} + 2e^x = 2e^x(1 - e^x)$$

Είναι:

$$g''(x) = 2e^x(1 - e^x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Επίσης η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, άρα είναι κοίλη στο διάστημα $[0, +\infty)$, οπότε η γραφική της παράσταση C_g βρίσκεται από την εφαπτομένη (ε): $y = x$ και «κάτω», δηλαδή ισχύει:

$$g(x) \leq x \Leftrightarrow g(x) - x \leq 0 \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty)$$

με το «ίσον» να ισχύει μόνο για $x = 0$ (τετμημένη του σημείου επαφής)

Επομένως το εμβαδόν E_2 του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης g , την ευθεία (ε) και την ευθεία με εξίσωση $x = t$, $t > 0$, είναι:

$$\begin{aligned} E_2(t) &= \int_0^t (x - g(x)) dx = \int_0^t x dx - \int_0^t g(x) dx = \frac{1}{2} [x^2]_0^t - \int_0^t \left(-\frac{1}{2} e^{2x} + 2e^x - \frac{3}{2} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{4} [e^{2x}]_0^t - 2[e^x]_0^t + \frac{3}{2}(t-0) = \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{4} (e^{2t} - 1) - 2(e^t - 1) + \frac{3}{2} t = \\ &= \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{4} e^{2t} - \frac{1}{4} - 2e^t + 2 + \frac{3}{2} t = \frac{1}{4} e^{2t} - 2e^t + \frac{1}{2} t^2 + \frac{3}{2} t + \frac{7}{4}, \quad t > 0 \end{aligned}$$

δ) Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $t > 0$ είναι:

$$E_1(t) < E_2(t) + te^t \Leftrightarrow$$

$$te^t - e^t - \frac{1}{2} t^2 + 1 < \frac{1}{4} e^{2t} - 2e^t + \frac{1}{2} t^2 + \frac{3}{2} t + \frac{7}{4} + te^t$$

$$e^t - \frac{1}{4} e^{2t} - t^2 - \frac{3}{2} t - \frac{3}{4} < 0, \quad t > 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\Phi(t) = e^t - \frac{1}{4} e^{2t} - t^2 - \frac{3}{2} t - \frac{3}{4}, \quad t \geq 0$$

Για κάθε $t > 0$ είναι:

- $\Phi'(t) = e^t - \frac{1}{2} e^{2t} - 2t - \frac{3}{2}$
- $\Phi''(t) = \left(e^t - \frac{1}{2} e^{2t} - 2t - \frac{3}{2} \right)' = e^t - e^{2t} - 2 = e^t(1 - e^t) - 2$

Είναι:

$$\Phi''(t) = e^t(1 - e^t) - 2 < 0, \quad \text{για κάθε } t > 0$$

Αφού για:

$$t > 0 \Leftrightarrow e^t > e^0 \Leftrightarrow e^t > 1 \Leftrightarrow 1 - e^t < 0$$

Η συνάρτηση Φ είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, άρα η

συνάρτηση Φ' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$

Επομένως για κάθε $t > 0$ είναι:

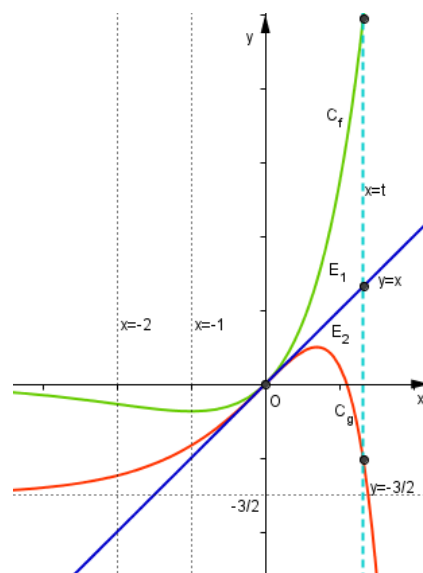
$$t > 0 \Rightarrow \Phi'(t) < \Phi'(0)$$

Όμως

$$\Phi'(0) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1 < 0$$

Άρα:

$$\Phi'(t) < 0, \quad t > 0$$



Επειδή η συνάρτηση Φ είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση Φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$

Επομένως για κάθε $t > 0$ είναι:

$$t > 0 \stackrel{\Phi \downarrow}{\Rightarrow} \Phi(t) < \Phi(0)$$

Όμως

$$\Phi(0) = e^0 - \frac{1}{4}e^0 - \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = 0$$

Άρα:

$$\Phi(t) < 0, \quad t > 0$$

Δηλαδή:

$$E_1(t) < E_2(t) + t \cdot e^t, \quad t > 0$$

ΘΕΜΑ 23ο :

α) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$, $a > 0$ με $f(a-x) + f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0, a]$

Να αποδείξετε ότι
$$\int_0^a \frac{f(x)}{f(a-x) + f(x)} dx = \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(a-x) + f(x)} dx \quad (1)$$

β) Αν $f(x) = \sin x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, τότε:

i) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\eta \mu x + \sin x} dx$$

ii) Αν επιπλέον g είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και

ισχύει η σχέση $(f(x)g(x))' = f'(x)g'(x)$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (1), τότε να αποδείξετε

ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $2g'(\xi) = g(\xi)$

ΛΥΣΗ

α) Στο ολοκλήρωμα του πρώτου μέλους θέτουμε $x = a - u$, οπότε $a - x = u$ και $dx = -du$

Για $x = 0$ είναι $u = a$ και για $x = a$ είναι $u = 0$

Έχουμε:

$$\int_0^a \frac{f(x)}{f(a-x) + f(x)} dx = \int_a^0 \frac{f(a-u)}{f(u) + f(a-u)} (-du) = - \int_a^0 \frac{f(a-u)}{f(a-u) + f(u)} du =$$

$$= \int_0^{\alpha} \frac{f(\alpha-u)}{f(\alpha-u)+f(u)} du = \int_0^{\alpha} \frac{f(\alpha-x)}{f(\alpha-x)+f(x)} dx$$

β) i) Η συνάρτηση $f(x) = \sin x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι συνεχής και ικανοποιεί τη σχέση

$$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + \sin x = \cos x + \sin x \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Επομένως, για $f(x) = \sin x$ και $\alpha = \frac{\pi}{2}$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + \sin x} dx \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx$$

Θέτουμε:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx \quad \text{και} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx$$

Είναι:

$$\bullet \quad I = J$$

και

$$\bullet \quad I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2}$$

Άρα $2I = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{4}$, δηλαδή

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx = \frac{\pi}{4}$$

ii) Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, άρα και η συνάρτηση

$f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, με

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = f'(x)g'(x), \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad (3)$$

Για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι $f(x) = \sin x$ και $f'(x) = -\cos x$, οπότε η σχέση (3) γράφεται:

$$\begin{aligned} (-\cos x) \cdot g(x) + \sin x \cdot g'(x) &= (-\cos x) \cdot g'(x) \Leftrightarrow \\ (\cos x + \sin x) \cdot g'(x) &= \cos x \cdot g(x) \Leftrightarrow \\ \frac{g'(x)}{g(x)} &= \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad (4) \end{aligned}$$

Είναι:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{g'(x)}{g(x)} dx \stackrel{(4)}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx = \frac{\pi}{4}$$

Επομένως έχουμε:

$$\left[\ln g(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \ln g\left(\frac{\pi}{2}\right) - \ln g(0) = \frac{\pi}{4} \quad (5)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = \ln g(x), \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, με $h'(x) = (\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$

Επομένως η συνάρτηση h ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε

$$\begin{aligned} h'(\xi) &= \frac{h\left(\frac{\pi}{2}\right) - h(0)}{\frac{\pi}{2} - 0} \Leftrightarrow \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} = \frac{\ln g\left(\frac{\pi}{2}\right) - \ln g(0)}{\frac{\pi}{2}} \stackrel{(5)}{\Leftrightarrow} \\ \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} &= \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2g'(\xi) = g(\xi) \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 24ο :

Έστω η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $xf'(x) + x^2 f''(x) = 2$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ (1)
- $f(1) = 0$ (2)

$$\bullet f'(1)=2 \quad (3)$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln^2 x+2\ln x$, $x \in (0, +\infty)$

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=e$

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu\alpha + \int_1^{\alpha} f(x)dx}{\alpha \ln^2 \alpha + 1}$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} x f'(x) + x^2 f''(x) &= 2 \Leftrightarrow f'(x) + x f''(x) = \frac{2}{x} \Leftrightarrow \\ (x f'(x))' &= (2 \ln x)' \Rightarrow x f'(x) = 2 \ln x + c_1, c_1 \in \mathbb{R} \quad (4) \end{aligned}$$

Από τη σχέση (4) για $x=1$ έχουμε:

$$1 \cdot f'(1) = 2 \ln 1 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 2 \quad (3)$$

Άρα για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} x f'(x) &= 2 \ln x + 2 \Leftrightarrow f'(x) = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} + 2 \frac{1}{x} \Leftrightarrow \\ f'(x) &= 2 \ln x (\ln x)' + 2 (\ln x)' \Leftrightarrow f'(x) = (\ln^2 x + 2 \ln x)' \Leftrightarrow \\ f(x) &= \ln^2 x + 2 \ln x + c_2, c_2 \in \mathbb{R} \quad (5) \end{aligned}$$

Από τη σχέση (5) για $x=1$ έχουμε:

$$f(1) = \ln^2 1 + 2 \ln 1 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 0 \quad (2)$$

Άρα:

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x, \quad x \in (0, +\infty)$$

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[1, e]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, e]$, επομένως το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=e$, είναι:

$$\begin{aligned} E &= \int_1^e f(x) dx = \int_1^e (\ln^2 x + 2 \ln x) dx = \int_1^e (x)' \ln^2 x dx + 2 \int_1^e \ln x dx = \\ &= [x \ln^2 x]_1^e - 2 \int_1^e x \ln x \cdot \frac{1}{x} dx + 2 \int_1^e \ln x dx = e \ln^2 e - 2 \int_1^e \ln x dx + 2 \int_1^e \ln x dx = e \end{aligned}$$

γ) Με διαδικασία ανάλογη αυτής που χρησιμοποιήσαμε στον υπολογισμό του εμβαδού, βρίσκουμε ότι:

$$\int_1^{\alpha} f(x) dx = [x \ln^2 x]_1^{\alpha} - 2 \int_1^{\alpha} \ln x dx + 2 \int_1^{\alpha} \ln x dx = \alpha \ln^2 \alpha \quad (6)$$

οπότε για κάθε $\alpha \in (1, +\infty)$ έχουμε:

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu\alpha + \int_1^{\alpha} f(x)dx}{\alpha \ln^2 \alpha + 1} \stackrel{(6)}{=} \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu\alpha + \alpha \ln^2 \alpha}{\alpha \ln^2 \alpha + 1} =$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{\alpha \ln^2 \alpha \left(1 + \frac{\eta\mu\alpha}{\alpha \ln^2 \alpha}\right)}{\alpha \ln^2 \alpha \left(1 + \frac{1}{\alpha \ln^2 \alpha}\right)} = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{\eta\mu\alpha}{\alpha \ln^2 \alpha}}{1 + \frac{1}{\alpha \ln^2 \alpha}} = 1, \text{ γιατί}$$

- $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} (\alpha \ln^2 \alpha) = +\infty$, οπότε $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha \ln^2 \alpha} = 0$
- $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha \ln^2 \alpha}\right) = 1$
- $\left| \frac{\eta\mu\alpha}{\alpha \ln^2 \alpha} \right| \leq \frac{1}{\alpha \ln^2 \alpha} \Rightarrow -\frac{1}{\alpha \ln^2 \alpha} \leq \frac{\eta\mu\alpha}{\alpha \ln^2 \alpha} \leq \frac{1}{\alpha \ln^2 \alpha}$

Είναι:

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\alpha \ln^2 \alpha}\right) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha \ln^2 \alpha} = 0$$

οπότε από το Κριτήριο Παρεμβολής, συμπεραίνουμε ότι:

- $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu\alpha}{\alpha \ln^2 \alpha} = 0$, οπότε $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\eta\mu\alpha}{\alpha \ln^2 \alpha}\right) = 1$

ΘΕΜΑ 25ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_0^{x^3} e^{t^2} dt$. Να αποδείξετε ότι:

- Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$
- Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f , στο σημείο της $O(0,0)$ είναι ο άξονας $x'x$
- $f(x) \geq \frac{1}{3}x^9$ για κάθε $x \geq 0$
- $6 \int_0^1 x^2 f(x) dx - 2 \int_0^1 e^{x^2} dx = 1 - e$

ΛΥΣΗ

- Η συνάρτηση e^{t^2} είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα η συνάρτηση $h(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε και η συνάρτηση $f(x) = h(x^3)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως σύνθεση με παραγωγισίμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$f'(x) = (h(x^3))' = h'(x^3)(x^3)' = e^{x^6} \cdot 3x^2 = 3x^2 e^{x^6}, \quad x \in \mathbb{R}$$

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f , στο σημείο της $O(0,0)$ είναι:

$$(\varepsilon) : y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

Είναι:

$$f(0) = \int_0^0 e^{t^2} dt = 0 \quad \text{και} \quad f'(0) = 0 \cdot e^0 = 0$$

Άρα:

$$(\varepsilon) : y - 0 = 0 \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y = 0$$

Δηλαδή, ο άξονας $x'x$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f , στο σημείο της $O(0,0)$

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^9, \quad x \in \mathbb{R}$$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη, ως διαφορά παραγωγίσιμων με παράγωγο:

$$g'(x) = f'(x) - 3x^8 = 3x^2 e^{x^6} - 3x^8 = 3x^2 (e^{x^6} - x^6), \quad x \in \mathbb{R}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$e^x \geq x + 1 > x \quad (\text{γνωστή άσκηση} - \text{θέλει απόδειξη})$$

οπότε:

$$e^{x^6} > x^6, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα:

$$g'(x) = 3x^2 (e^{x^6} - x^6) > 0, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^*$$

Είναι:

$$\begin{cases} g \text{ συνεχής στο } \mathbb{R} \\ g'(x) > 0 \text{ στο } \mathbb{R}^* \end{cases}, \quad \text{οπότε η συνάρτηση } g \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}$$

Επομένως για κάθε $x \geq 0$ έχουμε:

$$x \geq 0 \Rightarrow g(x) \geq g(0) \Rightarrow f(x) - \frac{1}{3}x^9 \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq \frac{1}{3}x^9$$

δ) Είναι:

$$6 \int_0^1 x^2 f(x) dx = 2 \int_0^1 3x^2 f(x) dx = 2 \int_0^1 (x^3)' f(x) dx =$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \left(\left[x^3 f(x) \right]_0^1 - \int_0^1 x^3 f'(x) dx \right) = 2f(1) - 2 \int_0^1 x^3 f'(x) dx = \\
 &= 2 \int_0^1 e^{x^2} dx - \int_0^1 6x^5 e^{x^6} dx = 2 \int_0^1 e^{x^2} dx - \int_0^1 e^{x^6} (x^6)' dx = \\
 &= 2 \int_0^1 e^{x^2} dx - \int_0^1 (e^{x^6})' dx = 2 \int_0^1 e^{x^2} dx - \left[e^{x^6} \right]_0^1 = 2 \int_0^1 e^{x^2} dx - e + 1
 \end{aligned}$$

Δείξαμε ότι:

$$6 \int_0^1 x^2 f(x) dx = 2 \int_0^1 e^{x^2} dx - e + 1$$

Άρα:

$$6 \int_0^1 x^2 f(x) dx - 2 \int_0^1 e^{x^2} dx = 1 - e$$

ΘΕΜΑ 26ο :

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\bullet \quad 2 \sin x + \int_0^x t f(t) dt = \int_0^x \left(\int_0^u f(t) dt \right) du - x \sin x + 2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$\bullet \quad f(0) = 0 \quad (2)$$

$$\bullet \quad f'(0) = \alpha \quad (3)$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 1 - \sin x$, $x \in \mathbb{R}$

γ) Να βρείτε:

i) Την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο

σημείο της με τετμημένη $\frac{2\pi}{3}$

ii) Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , από την εφαπτομένη (ε) της C_f και τις ευθείες με εξισώσεις $x = \frac{2\pi}{3}$

και $x = \frac{4\pi}{3}$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα η συνάρτηση $g(u) = \int_0^u f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη

στο $\mathbb{R}$, άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε η $\int_0^x g(u)du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt \right) du$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση $tf(t)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και η συνάρτηση $\int_0^x tf(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη

στο $\mathbb{R}$. Επίσης οι συναρτήσεις $2\sin x$ και $-x\eta\mu x + 2$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$

Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη της σχέσης (1) έχουμε:

$$-2\eta\mu x + xf(x) = \int_0^x f(t)dt - \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$$

$$xf(x) = \int_0^x f(t)dt + \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x, \quad x \in \mathbb{R} \quad (4)$$

Από τη σχέση (4) για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ έχουμε:

$$f(x) = \frac{\int_0^x f(t)dt + \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x}{x} \quad (5)$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$, γιατί ο τύπος της f προκύπτει από πράξεις μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων σε καθένα από αυτά τα διαστήματα.

Από τη σχέση (3) έχουμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 0$, οπότε είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

Προσδιορισμός του πραγματικού αριθμού α :

Για $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ έχουμε:

$$\alpha = f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \stackrel{f(0)=0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \quad (6)$$

Είναι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &\stackrel{(6)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t)dt + \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x}{x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \text{D.L.H} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x}{2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + x\eta\mu x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x} + \eta\mu x \right) = \frac{1}{2} \alpha \end{aligned}$$

οπότε, λόγω της σχέσης (6) είναι:

$$\alpha = \frac{1}{2} \alpha \Leftrightarrow 2\alpha = \alpha \Leftrightarrow \alpha = 0$$

β) Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης (4) έχουμε:

$$(xf(x))' = \left(\int_0^x f(t) dt + \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x \right)' \Rightarrow$$

$$f(x) + xf'(x) = f(x) + \sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x \Rightarrow$$

$$xf'(x) = x\eta\mu x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ έχουμε:

$$f'(x) = \eta\mu x = (-\sigma\upsilon\nu x)'$$

οπότε:

$$f(x) = \begin{cases} -\sigma\upsilon\nu x + c_1, & x \in (-\infty, 0) \\ 0, & x = 0 \\ -\sigma\upsilon\nu x + c_2, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$, οπότε έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (-\sigma\upsilon\nu x + c_1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\sigma\upsilon\nu x + c_2) = 0 \Rightarrow$$

$$-\sigma\upsilon\nu 0 + c_1 = -\sigma\upsilon\nu 0 + c_2 = 0 \Rightarrow$$

$$-1 + c_1 = -1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 1$$

Επομένως

$$f(x) = \begin{cases} -\sigma\upsilon\nu x + 1, & x \in (-\infty, 0) \\ 0, & x = 0 \\ -\sigma\upsilon\nu x + 1, & x \in (0, +\infty) \end{cases} \Rightarrow f(x) = 1 - \sigma\upsilon\nu x, \quad x \in \mathbb{R}$$

γ) i) Είναι:

$$\bullet f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1 - \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{3} = 1 - \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 1 - \left(-\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3}\right) = 1 + \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\bullet f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \eta\mu \frac{2\pi}{3} = \eta\mu\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη $\frac{2\pi}{3}$ είναι:

$$\varepsilon: y - \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{2\pi}{3} \right) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{9 - 2\sqrt{3}\pi}{6}$$

- ii) Στο διάστημα $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$ η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, με:

$$f'(x) = \eta\mu x \quad \text{και} \quad f''(x) = \sigma\upsilon\nu x < 0$$

οπότε η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα αυτό.

Επομένως η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο της με τετμημένη $\frac{2\pi}{3}$, βρίσκεται από την C_f και «πάνω»

Επομένως το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , από την εφαπτομένη (ε) της C_f και τις ευθείες με εξισώσεις $x = \frac{2\pi}{3}$ και $x = \frac{4\pi}{3}$ είναι:

$$\begin{aligned} E &= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{9-2\sqrt{3}\pi}{6} - f(x) \right) dx = \\ &= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \left(\sigma\upsilon\nu x + \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{9-2\sqrt{3}\pi}{6} - 1 \right) dx = \\ &= [\eta\mu x]_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{16\pi^2}{9} - \frac{4\pi^2}{9} \right) + \frac{3-2\sqrt{3}\pi}{6} \cdot \frac{2\pi}{3} = \\ &= \frac{\sqrt{3}\pi^2 + 3\pi - 9\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 2012

ΘΕΜΑ 27^ο:

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$\int_1^{f(x)} e^t \left(\frac{1}{t} + \ln t \right) dt = e^{f(x)} [x + \ln(x^2 + 1)], \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- α) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$
 γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 3$
 δ) Αν για τη συνεχή συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει:

$$h(f(x) + x - 3) = f(h(x)) + h(x) - 3, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

τότε, να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης h έχει με την ευθεία $y = x$ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

- ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 2e - 1$

ΛΥΣΗ

- α) Η συνάρτηση $e^t \left(\frac{1}{t} + \ln t \right)$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Οι συναρτήσεις $1/t$ και $f(x)$ (όρια ολοκλήρωσης) ορίζονται στο $\mathbb{R}$. Επειδή το $1 \in (0, +\infty)$, για να

ορίζεται η συνάρτηση $\int_1^{f(x)} e^t \left(\frac{1}{t} + \ln t \right) dt$ πρέπει και αρκεί $f(x) \in (0, +\infty)$

Δηλαδή:

$$f(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\int_1^{f(x)} e^t \left(\frac{1}{t} + \ln t \right) dt = e^{f(x)} [x + \ln(x^2 + 1)] \Leftrightarrow$$

$$\int_1^{f(x)} \left(e^t \frac{1}{t} + e^t \ln t \right) dt = e^{f(x)} [x + \ln(x^2 + 1)] \Leftrightarrow$$

$$\int_1^{f(x)} (e^t \ln t)' dt = e^{f(x)} [x + \ln(x^2 + 1)] \Leftrightarrow$$

$$[e^t \ln t]_1^{f(x)} = e^{f(x)} [x + \ln(x^2 + 1)] \Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)} \ln f(x) = e^{f(x)} [x + \ln(x^2 + 1)] \quad e^{f(x)} \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln f(x) = x + \ln(x^2 + 1) \Leftrightarrow \ln f(x) = \ln e^x + \ln(x^2 + 1) \Leftrightarrow$$

$$\ln f(x) = \ln [e^x (x^2 + 1)] \Leftrightarrow f(x) = e^x (x^2 + 1), \quad x \in \mathbb{R}$$

γ) 1^{ος} τρόπος:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - 3$, $x \in [0, 1]$

♦ Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[0, 1]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

♦ $\circ g(0) = f(0) - 3 = 1 - 3 = -2 < 0$

$\circ g(1) = f(1) - 3 = 2e - 3 > 0$

οπότε $g(0)g(1) < 0$

Η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[0, 1]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 3$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως γινόμενο παραγωγισίμων συναρτήσεων, με παράγωγο:

$$f'(x) = (e^x(x^2 + 1))' = e^x(x^2 + 1) + 2xe^x = e^x(x^2 + 1 + 2x) = e^x(x + 1)^2$$

Ισχύουν:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.
- $f'(x) > 0$, για κάθε $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε το x_0 είναι μοναδικό.

2^{ος} τρόπος:

Η συνάρτηση f στο κλειστό διάστημα $[0, 1]$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Ενδιάμεσων Τιμών, διότι είναι συνεχής σε αυτό ως γινόμενο συνεχών και $f(0) = 1 \neq 2e = f(1)$

Είναι $f(0) = 1 < 3 < 2e = f(1)$, άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 3$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως γινόμενο παραγωγισίμων συναρτήσεων, με παράγωγο:

$$f'(x) = (e^x(x^2 + 1))' = e^x(x^2 + 1) + 2xe^x = e^x(x^2 + 1 + 2x) = e^x(x + 1)^2$$

Ισχύουν:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.
- $f'(x) > 0$, για κάθε $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε το x_0 είναι μοναδικό.

δ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$h(f(x) + x - 3) = f(h(x)) + h(x) - 3$$

Για $x = x_0$ έχουμε:

$$h(f(x_0) + x_0 - 3) = f(h(x_0)) + h(x_0) - 3 \Rightarrow$$

$$h(3 + x_0 - 3) = f(h(x_0)) + h(x_0) - 3 \Rightarrow h(x_0) = f(h(x_0)) + h(x_0) - 3 \Rightarrow$$

$$f(h(x_0)) = 3 \Rightarrow f(h(x_0)) = f(x_0) \Rightarrow h(x_0) = x_0$$

Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης h έχει με την ευθεία $y = x$ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

ε) Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[0, 1]$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = e^x(x+1)^2$

Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{e^1(1^2 + 1) - e^0(0^2 + 1)}{1 - 0} \Leftrightarrow f'(\xi) = 2e - 1$$

ΘΕΜΑ 28^ο:

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \int_{-x}^x \frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1} dt$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 1 + e^{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f , ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

γ) Αν $h(x) = \int_1^{x^3} f(t) dt$, $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

i) $\int_0^1 h(x) dx + \int_0^1 \sqrt[3]{x} f(x) dx = 0$

ii) Υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = -\frac{h(x_0)}{\sqrt[3]{x_0}}$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση $\frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Οι συναρτήσεις $-x$ και x (όρια ολοκλήρωσης) ορίζονται στο $\mathbb{R}$

Επομένως η συνάρτηση $f(x) = \int_{-x}^x \frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1} dt$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-x}^x \frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1} dt = \int_{-x}^0 \frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1} dt + \int_0^x \frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1} dt = \\ &= \int_0^x \frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1} dt - \int_0^{-x} \frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1} dt \end{aligned}$$

Η συνάρτηση $\varphi(x) = \int_0^x \frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1} dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης $\frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1}$. Επίσης η συνάρτηση $\varphi(-x) = \int_0^{-x} \frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1} dt$ είναι παραγωγίσιμη στο

$\mathbb{R}$, ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\int_0^x \frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1} dt \right)' - \left(\int_0^{-x} \frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1} dt \right)' = \\ &= \frac{e^x + e^{x^2}}{e^x + 1} - \frac{e^{-x} + e^{x^2}}{e^{-x} + 1} (-x)' = \frac{e^x + e^{x^2}}{e^x + 1} + \frac{\frac{1}{e^x} + e^{x^2}}{\frac{1}{e^x} + 1} = \\ &= \frac{e^x + e^{x^2}}{e^x + 1} + \frac{1 + e^x e^{x^2}}{1 + e^x} = \frac{e^x + e^{x^2}}{e^x + 1} + \frac{e^x + e^{x^2}}{e^x + 1} = \\ &= \frac{e^x(1 + e^{x^2}) + (1 + e^{x^2})}{e^x + 1} = \frac{(1 + e^{x^2})(e^x + 1)}{e^x + 1} = 1 + e^{x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f''(x) = (1 + e^{x^2})' = e^{x^2} (x^2)' = 2xe^{x^2}$$

Είναι:

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, +\infty)$
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0)$

Το πρόσημο της $f''(x)$ καθώς η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της συνάρτησης f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\cap$	0	$\cup$

Σ.Κ.

Είναι:

- $\begin{cases} f \text{ συνεχής στο } (-\infty, 0] \\ f''(x) < 0 \text{ στο } (-\infty, 0) \end{cases}$ Άρα η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 0]$
- $\begin{cases} f \text{ συνεχής στο } [0, +\infty) \\ f''(x) > 0 \text{ στο } (0, +\infty) \end{cases}$ Άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $[0, +\infty)$
- $f''(0) = 0$ και εκατέρωθεν του $x_0 = 0$ αλλάζει η κυρτότητα της συνάρτησης f , άρα το σημείο $(0, f(0))$, δηλαδή το $O(0, 0)$ είναι σημείο καμπής της συνάρτησης f

γ) i) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$w(x) = \int_1^x f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

Είναι:

$$h(x) = \int_1^{x^3} f(t) dt = w(x^3), \quad x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Η συνάρτηση w είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης f , με παράγωγο:

$$w'(x) = \left(\int_1^x f(t) dt \right)' = f(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Άρα η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων, με παράγωγο:

$$h'(x) = (w(x^3))' = w'(x^3) \cdot (x^3)' = 3x^2 \cdot f(x^3), \quad x \in \mathbb{R}$$

Είναι:

$$\begin{aligned} \int_0^1 h(x) dx &= \int_0^1 (x)' h(x) dx = [x h(x)]_0^1 - \int_0^1 x h'(x) dx = \\ &= h(1) - \int_0^1 x \cdot 3x^2 \cdot f(x^3) dx \stackrel{h(1)=0}{=} - \int_0^1 x \cdot 3x^2 \cdot f(x^3) dx \end{aligned}$$

Θέτουμε:

$$u = x^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{u}, \quad u \geq 0 \quad \text{και} \quad du = 3x^2 dx$$

Για $x = 0$ είναι $u = 0$ και για $x = 1$ είναι $u = 1$

Άρα έχουμε:

$$\int_0^1 h(x) dx = - \int_0^1 x \cdot 3x^2 \cdot f(x^3) dx = - \int_0^1 \sqrt[3]{u} f(u) du = - \int_0^1 \sqrt[3]{x} f(x) dx$$

Είναι:

$$\int_0^1 h(x) dx = - \int_0^1 \sqrt[3]{x} f(x) dx$$

Οπότε:

$$\int_0^1 h(x) dx + \int_0^1 \sqrt[3]{x} f(x) dx = 0 \quad (3)$$

ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = \int_0^x h(t) dt + \int_0^x \sqrt[3]{t} f(t) dt, \quad x \in [0, 1]$$

Η συνάρτηση $\int_0^x h(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$, ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης h και η συνάρτηση $\int_0^x \sqrt[3]{t} f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$, ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης $\sqrt[3]{t} f(t)$, οπότε και η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$, ως άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\int_0^x h(t) dt \right)' + \left(\int_0^x \sqrt[3]{t} f(t) dt \right)' = \\ &= h(x) + \sqrt[3]{x} f(x), \quad x \in [0, 1] \end{aligned}$$

Είναι:

- $g(0) = 0$ και
- $g(1) = \int_0^1 h(x) dx + \int_0^1 \sqrt[3]{x} f(x) dx \stackrel{(\beta)}{=} 0$

οπότε $g(0) = g(1)$

Επομένως η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0, 1]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow h(x_0) + \sqrt[3]{x_0} f(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = -\frac{h(x_0)}{\sqrt[3]{x_0}}$$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$, με παράγωγο:

$$\begin{aligned} g''(x) &= h'(x) + (\sqrt[3]{x})' f(x) + \sqrt[3]{x} f'(x) = \\ &= h'(x) + \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' f(x) + \sqrt[3]{x} f'(x) = \\ &= 3x^{\frac{1}{3}-1} f(x) + \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} f(x) + \sqrt[3]{x} (1+e^{x^2}) = \\ &= 3x^{\frac{1}{3}-1} f(x) + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} f(x) + \sqrt[3]{x} (1+e^{x^2}) \end{aligned}$$

Από το (α) ερώτημα έχουμε:

$$f'(x) = 1 + e^{x^2} > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Επίσης έχουμε:

$$f(0) = \int_0^0 \frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1} dt = 0$$

Επομένως:

- για $x < 0 \xRightarrow{f \uparrow} f(x) < f(0) \Rightarrow f(x) < 0$
- για $x > 0 \xRightarrow{f \uparrow} f(x) > f(0) \Rightarrow f(x) > 0$

Άρα για κάθε $x \in (0,1)$ είναι:

$$f(x) > 0 \quad \text{και} \quad f(x^3) > 0$$

Επομένως:

$$g''(x) > 0 \quad \text{για κάθε} \quad x \in (0,1)$$

Οπότε η συνάρτηση g' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,1)$, άρα το $x_0 \in (0,1)$ είναι μοναδικό.

ΘΕΜΑ 29ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\bullet \quad f(x-y) = f(x) - f(y) - 1, \quad \text{για κάθε} \quad x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+1}{x} = 2 \quad (2)$$

$$\bullet \quad |z-i|(f(x)+1) \leq \eta\mu 2x, \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad z \in \mathbb{C} \quad (3)$$

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z

β) Αν z_1, z_2 είναι δύο μιγαδικοί του προηγούμενου γεωμετρικού τόπου με $|z_1 - z_2| = 2$, τότε να αποδείξετε ότι $|z_1 + z_2| = 2$

γ) Να αποδείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

ii) $f(x) = 2x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^x \frac{f(t)}{e^t} dt, \quad x \in \mathbb{R}$

ε) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{f(t)}{e^t} dt \quad \text{και} \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_0^x \frac{f(t)}{e^t} dt$$

στ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\int_0^x \frac{f(t)}{e^t} dt = 0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 + 2\rho_2 > 1$

ΛΥΣΗ

α) Για $x = y = 0$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(0) = f(0) - f(0) - 1 \Leftrightarrow f(0) = -1 \quad (4)$$

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = |z - i|(f(x) + 1) - \eta\mu 2x$, $x \in \mathbb{R}$
- Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$|z - i|(f(x) + 1) \leq \eta\mu 2x \Leftrightarrow$$

$$|z - i|(f(x) + 1) - \eta\mu 2x \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$g(x) \leq 0 \Leftrightarrow g(x) \leq g(0)$$

Άρα η συνάρτηση g παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο εσωτερικό σημείο $x_0 = 0$ του πεδίου ορισμού της.

- Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1}{x} = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - (-1)}{x} = 2 \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 2 \Leftrightarrow f'(0) = 2 \quad (5)$$

Άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 2$, οπότε και η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $g'(0) = |z - i|f'(0) - 2\sin 0 \stackrel{(5)}{=} 2|z - i| - 2 \quad (6)$

Ισχύουν λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεώρηματος Fermat, οπότε

$$g'(0) = 0 \stackrel{(6)}{\Leftrightarrow} 2|z - i| - 2 = 0 \Leftrightarrow |z - i| = 1$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(0, 1)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

- β)** Έστω A και B οι εικόνες αντίστοιχα των μιγαδικών z_1 και z_2 στο μιγαδικό επίπεδο, τότε είναι: $(AB) = |z_1 - z_2|$, άρα $(AB) = 2$. Επειδή τα σημεία A, B ανήκουν στον προηγούμενο κύκλο, που έχει ακτίνα $\rho = 1$, συμπεραίνουμε ότι τα A, B είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου αυτού.

Αν M είναι η εικόνα του μιγαδικού $z_1 + z_2$, τότε το παραλληλόγραμμο $OAMB$ είναι ορθογώνιο, αφού η γωνία $\widehat{AOB}$ βαίνει σε ημικύκλιο.

1ος τρόπος:

Οι διαγώνιοι του ορθογώνιου είναι ίσοι, δηλαδή

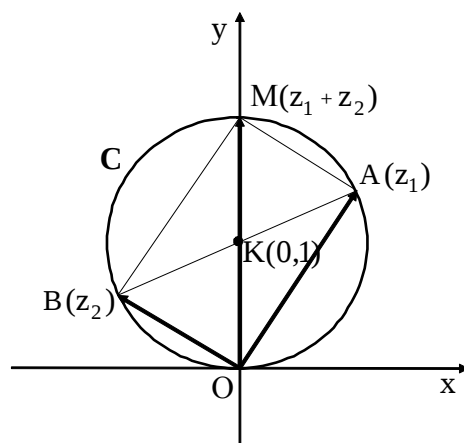
$$(OM) = (AB) \Leftrightarrow |z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$$

Επομένως $|z_1 + z_2| = 2$

2ος τρόπος:

Οι διαγώνιοι OM και AB διχοτομούνται, άρα το κέντρο K του κύκλου, θα είναι το κοινό μέσο των δύο διαγωνίων,

Άρα $|z_1 + z_2| = (OM) = 2(OK) = 2\rho = 2 \cdot 1 = 2$



- γ) i) Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq x_0$ θέτουμε $x = x_0 - h$, οπότε όταν το $x \rightarrow x_0$ το $h \rightarrow 0$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{x_0 - h - x_0} \stackrel{(1)}{=} \\ \frac{f(x_0) - f(h) - 1 - f(x_0)}{-h} &= \frac{-f(h) - 1}{-h} = \frac{f(h) + 1}{h} \end{aligned}$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) + 1}{h} \stackrel{(2)}{=} 2$$

Άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f'(x_0) = 2$. Γενικά η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2$

- ii) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x) = 2 \Leftrightarrow f'(x) = (2x)', \text{ οπότε } f(x) = 2x + c, \quad x \in \mathbb{R}$$

Για $x = 0$ έχουμε:

$$f(0) = 2 \cdot 0 + c \stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} c = -1$$

Άρα

$$f(x) = 2x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

- δ) Είναι:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{f(t)}{e^t} dt &= \int_0^x \frac{2t-1}{e^t} dt = \int_0^x (2t-1)e^{-t} dt = - \int_0^x (2t-1)(e^{-t})' dt = \\ &= - \left[(2t-1)e^{-t} \right]_0^x + \int_0^x (2t-1)e^{-t} dt = - \left((2x-1)e^{-x} - (2 \cdot 0 - 1)e^0 \right) + \int_0^x 2e^{-t} dt = \\ &= - (2x-1)e^{-x} - 1 - 2 \int_0^x e^{-t} (-t)' dt = - (2x-1)e^{-x} - 1 - 2 \left[e^{-t} \right]_0^x = \\ &= - (2x-1)e^{-x} - 1 - 2(e^{-x} - e^0) = -2xe^{-x} + e^{-x} - 1 - 2e^{-x} + 2 = \\ &= -2xe^{-x} - e^{-x} + 1 = \frac{-2x}{e^x} - \frac{1}{e^x} + 1 = \frac{e^x - 2x - 1}{e^x} \end{aligned}$$

- ε) Είναι:

$$i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{f(t)}{e^t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 2x - 1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - 2 \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} \right) = 1, \text{ γιατί}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x}) \stackrel{u=-x}{=} \lim_{u \rightarrow -\infty} (e^u) = 0 \quad \text{και}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x}) \stackrel{u=-x}{=} \lim_{u \rightarrow -\infty} (1 - e^u) = 1 - 0 = 1$$

$$\text{ii)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_0^x \frac{f(t)}{e^t} dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 2x - 1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} [1 + (-2x - 1)e^{-x}] = +\infty, \text{ γιατί}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x) = +\infty \quad \text{και}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty$$

$$\sigma\tau) \text{ Θεωρούμε τη συνάρτηση } F(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{e^t} dt \stackrel{(\delta)}{=} \frac{e^x - 2x - 1}{e^x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Η συνάρτηση $\frac{f(t)}{e^t}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με

$$F'(x) = \left(\int_0^x \frac{f(t)}{e^t} dt \right)' = \frac{f(x)}{e^x} = \frac{2x-1}{e^x}$$

Είναι:

$$\bullet F'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{e^x} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\bullet F'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{e^x} > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

Το πρόσημο της $F'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της F φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$F'(x)$		0	+
$F(x)$	$+\infty$	ελάχιστο	1

Για $x=0$ είναι $F(0) = \int_0^0 \frac{f(t)}{e^t} dt = 0$, άρα η εξίσωση $F(x) = 0$ στο διάστημα $\Delta_1 = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ έχει

ρίζα την $\rho_1 = 0$, που είναι και μοναδική, αφού η συνάρτηση F είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_1 .
Είναι:

$$\bullet F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}} - 2 \cdot \frac{1}{2} - 1}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{e} - 2}{\sqrt{e}} < 0, \text{ γιατί } e < 4 \Rightarrow \sqrt{e} < 2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{f(t)}{e^t} dt \stackrel{(\varepsilon), (i)}{=} 1$$

Η συνάρτηση F είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$, άρα είναι

$$F(\Delta_2) = \left[F\left(\frac{1}{2}\right), \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \right) = \left[\frac{\sqrt{e} - 2}{\sqrt{e}}, 1 \right)$$

Το $0 \in F(\Delta_2)$, άρα η εξίσωση $F(x) = 0$ στο διάστημα $\Delta_2 = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ έχει μια ρίζα ρ_2 , που είναι και μοναδική, αφού η συνάρτηση F είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_2

Επειδή $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{e}-2}{\sqrt{e}} \neq 0$, συμπεραίνουμε ότι $\rho_2 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\rho_2 > 1$, οπότε $\rho_1 + 2\rho_2 = 0 + 2\rho_2 = 2\rho_2 > 1$

Επομένως η εξίσωση $\int_0^x \frac{f(t)}{e^t} dt = 0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 + 2\rho_2 > 1$

ΘΕΜΑ 30ο :

Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h} = 4 \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2} + \kappa, \quad x > 0 \quad (1)$$

όπου κ είναι η ελάχιστη τιμή του μέτρου των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει:

$$|z-3|^2 + |z+3|^2 = 2 \cdot (8 + |z^2 - 9|) \quad (2)$$

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

γ) Να αποδείξετε ότι $f(4-x) + f(x) \geq 2f(2)$, για κάθε $x > 0$ και ότι $\int_1^3 f(x) dx > 2f(2)$

δ) Αν επιπλέον είναι $f'(1) = 0$ και $f(1) = -1$, τότε να αποδείξετε ότι $f(x) = 2\ln^2 x + x^2 - 2x$, $x > 0$

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$|z-3|^2 + |z+3|^2 = 2 \cdot (8 + |z^2 - 9|) \Leftrightarrow |z-3|^2 - 2|z-3||z+3| + |z+3|^2 = 16 \Leftrightarrow$$

$$(|z-3| - |z+3|)^2 = 16 \Leftrightarrow ||z-3| - |z+3|| = 4 \quad (\text{Ορισμός υπερβολής})$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο είναι υπερβολή με εστίες τα σημεία $E(3, 0)$, $E'(-3, 0)$, κορυφές τα σημεία $A(2, 0)$, $A'(-2, 0)$

και εξίσωση $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

β) Λόγω του ερωτήματος (α) ισχύει $|z| \geq \alpha = 2$ για κάθε μιγαδικό z που η εικόνα του ανήκει στην υπερβολή C , άρα $\kappa = 2$

Είναι:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x) - (f'(x-h) - f'(x))}{2h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} + \frac{f'(x-h) - f'(x)}{-h} \right) = \frac{1}{2} (f''(x) + f''(x)) = f''(x), \end{aligned}$$

γιατί

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x-h) - f'(x)}{-h} \stackrel{-h=\omega}{=} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{f'(x+\omega) - f'(x)}{\omega} = f''(x)$$

και η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.

Από την (1) έχουμε:

$$f''(x) = 4 \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2} + 2 \Leftrightarrow f''(x) = 2 \cdot \frac{2 - 2 \ln x + x^2}{x^2}, x > 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 2 - 2 \ln x + x^2, x > 0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $g'(x) = -\frac{2}{x} + 2x = \frac{2(x^2 - 1)}{x}, x > 0$

Είναι:

$$\bullet \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x = 1 \quad \text{και} \quad \bullet \quad g'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x > 1$$

Το πρόσημο της $g'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		0	+
$g(x)$		3	

ελάχιστο

- Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1]$
- Η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$
- Η συνάρτηση g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ με ελάχιστη τιμή $g(1) = 3$

Άρα $g(x) \geq 3$, για κάθε $x > 0$.

Επομένως $f''(x) = 2 \cdot \frac{g(x)}{x^2} > 0$, για κάθε $x > 0$, δηλαδή η συνάρτηση f είναι κυρτή.

γ) 1^{ος} τρόπος: (με τη βοήθεια ακρότατου)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(4-x) + f(x), x > 0$

Η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x) = -f'(4-x) + f'(x), x > 0$

Είναι:

- $h'(x) = 0 \Leftrightarrow -f'(4-x) + f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(4-x) = f'(x) \stackrel{f' \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} 4-x = x \Leftrightarrow x = 2$
- $h'(x) > 0 \Leftrightarrow -f'(4-x) + f'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(4-x) < f'(x) \stackrel{f' \uparrow}{\Leftrightarrow} 4-x < x \Leftrightarrow x > 2$

Το πρόσημο της $h'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της h φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0	2	$+\infty$
$h'(x)$		0	+
$h(x)$		$2f(2)$	

ελάχιστο

- Η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 2]$
- Η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$
- Η συνάρτηση h παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 2$, με ελάχιστη τιμή $h(2) = 2f(2)$

Άρα για κάθε $x > 0$ είναι $h(x) \geq 2f(2) \Leftrightarrow f(4-x) + f(x) \geq 2f(2)$ (3)

2^{ος} τρόπος (ανισότητα Jensen)

Υπόδειξη:

Για $x = 2$ ισχύει ως ισότητα

Για $x > 2$ εφαρμόζουμε το ΘΜΤ για την f στα διαστήματα $[4-x, 2]$ και $[2, x]$

Για $0 < x < 2$ εφαρμόζουμε το ΘΜΤ για την f στα διαστήματα $[x, 2]$ και $[2, 4-x]$

και επειδή f' γνησίως αύξουσα γιατί f κυρτή, ... προκύπτει το ζητούμενο.

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Phi(x) = f(4-x) + f(x) - 2f(2)$, $x > 0$

Η Φ είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 3]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και $\Phi(x) \geq 0$,

για κάθε $x \in [1, 3]$ με το ίσο να ισχύει μόνο για $x = 2$, λόγω της σχέσης (3), άρα

$$\begin{aligned} \int_1^3 (f(4-x) + f(x) - 2f(2)) dx &> 0 \Leftrightarrow \int_1^3 f(4-x) dx + \int_1^3 f(x) dx - 2f(2) \int_1^3 dx > 0 \quad (*) \\ 2 \int_1^3 f(x) dx &> 2f(2) \int_1^3 dx \Leftrightarrow \int_1^3 f(x) dx > f(2) \cdot (3-1) \Leftrightarrow \int_1^3 f(x) dx > 2f(2) \end{aligned}$$

(*) Είναι:

$$\int_1^3 f(4-x) dx = \int_1^3 f(x) dx$$

Πράγματι, αν θέσουμε $4-x = t$, τότε $dt = (4-x)' dx = -dx$

Για $x = 1$ είναι $t = 3$ και $x = 3$ είναι $t = 1$, οπότε έχουμε:

$$\int_1^3 f(4-x) dx = - \int_3^1 f(t) dt = \int_1^3 f(t) dt = \int_1^3 f(x) dx$$

δ) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε

$$f''(x) = 4 \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2} + 2 \Leftrightarrow (f'(x))' = 4 \cdot \frac{(\ln x)' x - (x)' \ln x}{x^2} + (2x)' \Leftrightarrow$$

$$(f'(x))' = 4 \left(\frac{\ln x}{x} \right)' + (2x)' \Leftrightarrow (f'(x))' = \left(4 \frac{\ln x}{x} + 2x \right)' \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = 4 \frac{\ln x}{x} + 2x + c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad x > 0$$

Για $x = 1$ είναι $f'(1) = 2 + c \Leftrightarrow c = -2$, γιατί $f'(1) = 0$

Άρα $f'(x) = 4 \frac{\ln x}{x} + 2x - 2, \quad x > 0$

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$f'(x) = 4 \frac{\ln x}{x} + 2x - 2 \Leftrightarrow f'(x) = 4 \ln x (\ln x)' + (x^2 - 2x)' \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = (2 \ln^2 x + x^2 - 2x)' \Leftrightarrow f(x) = 2 \ln^2 x + x^2 - 2x + c, \quad c \in \mathbb{R}, x > 0$$

Για $x=1$ είναι $f(1) = -1 + c \Leftrightarrow c = 0$, γιατί $f(1) = -1$

Άρα $f(x) = 2 \ln^2 x + x^2 - 2x, \quad x > 0$

ΘΕΜΑ 31ο :

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z με $z \neq -1$, και η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\bullet \quad x e^x f'(e^x) = 2x^2 + |(z+1) \cdot x|, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^* \quad (1)$$

$$\bullet \quad f(1) = -1 \quad (2)$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \ln^2 x - |z+1| \cdot \ln x - 1, & 0 < x < 1 \\ \ln^2 x + |z+1| \cdot \ln x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο ακριβώς $\xi_1, \xi_2 \in (0, +\infty)$ τέτοια, ώστε να ισχύει:

$$\xi_1 \cdot \xi_2 = 1 \quad \text{ή} \quad \frac{\xi_1}{\xi_2} = e^{|z+1|}$$

δ) Έστω E το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g , όπου $g(x) = \ln^2 x - 1, x > 0$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=e$ και $x=e^2$. Αν $E=e^2$ να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z ανήκουν σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε:

$$x e^x f'(e^x) = 2x^2 + |(z+1) \cdot x| \Leftrightarrow x e^x f'(e^x) = 2x^2 + |z+1| \cdot |x| \Leftrightarrow$$

$$e^x f'(e^x) = 2x + |z+1| \cdot \frac{|x|}{x} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x f'(e^x) = 2x - |z+1|, & x < 0 \\ e^x f'(e^x) = 2x + |z+1|, & x > 0 \end{cases}$$

Για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ έχουμε:

$$e^x f'(e^x) = 2x - |z+1| \Leftrightarrow (f(e^x))' = (x^2 - |z+1| \cdot x)' \Leftrightarrow$$

$$f(e^x) = x^2 - |z+1| \cdot x + c_1, \quad x < 0$$

Θέτουμε $e^x = u > 0$, άρα $x = \ln u$

Για $x < 0$ είναι $e^x < e^0 = 1$, άρα $0 < u < 1$, οπότε έχουμε:

$$f(u) = \ln^2 u - |z+1| \cdot \ln u + c_1, \quad 0 < u < 1$$

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$e^x f'(e^x) = 2x + |z+1| \Leftrightarrow (f(e^x))' = (x^2 + |z+1| \cdot x)' \Leftrightarrow$$

$$f(e^x) = x^2 + |z+1| \cdot x + c_2, \quad x > 0$$

Θέτουμε $e^x = u > 0$, άρα $x = \ln u$

Για $x > 0$ είναι $e^x > e^0 = 1$, άρα $u > 1$, οπότε έχουμε:

$$f(u) = \ln^2 u + |z+1| \cdot \ln u + c_2, \quad u > 1$$

Άρα

$$f(u) = \begin{cases} \ln^2 u - |z+1| \cdot \ln u + c_1, & 0 < u < 1 \\ \ln^2 u + |z+1| \cdot \ln u + c_2, & u > 1 \end{cases}$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 1, οπότε $\lim_{u \rightarrow 1^-} f(u) = \lim_{u \rightarrow 1^+} f(u) = f(1)$, δηλαδή $c_1 = c_2 = -1$

Άρα

$$f(u) = \begin{cases} \ln^2 u - |z+1| \cdot \ln u - 1, & 0 < u < 1 \\ \ln^2 u + |z+1| \cdot \ln u - 1, & u \geq 1 \end{cases}$$

Επομένως

$$f(x) = \begin{cases} \ln^2 x - |z+1| \cdot \ln x - 1, & 0 < x < 1 \\ \ln^2 x + |z+1| \cdot \ln x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

γ) • Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με $f'(x) = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} - |z+1| \cdot \frac{1}{x} = \frac{2\ln x - |z+1|}{x}$

• Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με

$$f'(x) = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} + |z+1| \cdot \frac{1}{x} = \frac{2\ln x + |z+1|}{x}$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1) \cup (1, +\infty)$, με:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2\ln x - |z+1|}{x}, & x \in (0, 1) \\ \frac{2\ln x + |z+1|}{x}, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

• Για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $\ln x < 0$, οπότε $f'(x) = \frac{2\ln x - |z+1|}{x} < 0$

• Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ είναι $\ln x > 0$, οπότε $f'(x) = \frac{2\ln x + |z+1|}{x} > 0$

Το πρόσημο της $f'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$

ελάχιστο

Έχουμε:

- $\begin{cases} f \text{ συνεχής στο } (0, 1] \\ f'(x) < 0 \text{ στο } (0, 1) \end{cases}$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$
- $\begin{cases} f \text{ συνεχής στο } [1, +\infty) \\ f'(x) > 0 \text{ στο } (1, +\infty) \end{cases}$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$
- Η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$ με ελάχιστη τιμή $f(1)=-1$

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln^2 x - |z+1| \cdot \ln x - 1) = +\infty$,
γιατί $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln^2 x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-|z+1| \cdot \ln x) = +\infty$, αφού $|z+1| > 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln^2 x + |z+1| \cdot \ln x - 1) = +\infty$,
γιατί $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln^2 x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (|z+1| \cdot \ln x) = +\infty$, αφού $|z+1| > 0$

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1]$, οπότε είναι:

$$f(\Delta_1) = [f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)) = [-1, +\infty)$$

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$, οπότε είναι:

$$f(\Delta_2) = [f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = [-1, +\infty)$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι:

$$f(\Delta) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = [-1, +\infty)$$

- γ) • Το $0 \in f(\Delta_1)$, άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ρίζα $\xi_1 \in (0, 1)$, ($\xi_1 \neq 1$, επειδή $f(1) = -1$) και μάλιστα μοναδική, αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1]$
- Το $0 \in f(\Delta_2)$, άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ρίζα $\xi_2 \in (1, +\infty)$, ($\xi_2 \neq 1$, αφού $f(1) = -1$) και μάλιστα μοναδική, αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$

Επομένως υπάρχουν δύο ακριβώς $\xi_1, \xi_2 \in (0, +\infty)$, με $\xi_1 \neq \xi_2$ αφού ανήκουν σε διαφορετικά διαστήματα τέτοια, ώστε $f(\xi_1) = 0$ και $f(\xi_2) = 0$

Δηλαδή

$$\ln^2 \xi_1 - |z+1| \cdot \ln \xi_1 - 1 = 0, \text{ με } \xi_1 \in (0, 1)$$

$$\ln^2 \xi_2 + |z+1| \cdot \ln \xi_2 - 1 = 0, \text{ με } \xi_2 \in (1, +\infty)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις έχουμε:

$$\ln^2 \xi_1 - \ln^2 \xi_2 - |z+1| \cdot \ln \xi_1 - |z+1| \cdot \ln \xi_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\ln \xi_1 - \ln \xi_2) \cdot (\ln \xi_1 + \ln \xi_2) - |z+1| \cdot (\ln \xi_1 + \ln \xi_2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\ln \xi_1 + \ln \xi_2) \cdot (\ln \xi_1 - \ln \xi_2 - |z+1|) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \ln \xi_1 + \ln \xi_2 = 0 \\ \text{ή} \\ \ln \xi_1 - \ln \xi_2 - |z+1| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(\xi_1 \xi_2) = 0 \\ \text{ή} \\ \ln \frac{\xi_1}{\xi_2} = |z+1| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 \xi_2 = 1 \\ \text{ή} \\ \frac{\xi_1}{\xi_2} = e^{|z+1|} \end{cases}$$

δ) Για κάθε $x \in [e, e^2]$ έχουμε:

$$f(x) - g(x) = \ln^2 x + |z+1| \cdot \ln x - 1 - \ln^2 x + 1 = |z+1| \cdot \ln x > 0$$

Επίσης η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο $[e, e^2] \subseteq (0, +\infty)$, οπότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις C_f, C_g των συναρτήσεων f, g και τις ευθείες με εξισώσεις $x = e$ και $x = e^2$ είναι:

$$E = \int_e^{e^2} (f(x) - g(x)) dx$$

Από υπόθεση είναι $E = e^2$, οπότε έχουμε:

$$e^2 = \int_e^{e^2} (|z+1| \cdot \ln x) dx \Leftrightarrow e^2 = |z+1| \cdot \int_e^{e^2} \ln x dx \Leftrightarrow e^2 = |z+1| \cdot \int_e^{e^2} (x)' \ln x dx \Leftrightarrow$$

$$e^2 = |z+1| \cdot \left([x \ln x]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} x (\ln x)' dx \right) \Leftrightarrow e^2 = |z+1| \cdot \left(e^2 \ln e^2 - e \ln e - \int_e^{e^2} x \cdot \frac{1}{x} dx \right) \Leftrightarrow$$

$$e^2 = |z+1| \cdot \left(2e^2 - e - \int_e^{e^2} 1 dx \right) \Leftrightarrow e^2 = |z+1| \cdot (2e^2 - e - (e^2 - e)) \Leftrightarrow e^2 = |z+1| \cdot e^2 \Leftrightarrow |z+1| = 1$$

Επομένως οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z ανήκουν στον κύκλο που έχει κέντρο το σημείο $K(-1, 0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

ΘΕΜΑ 32ο :

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$\left| z + \frac{3}{2}i \right| > \left| 3z + \frac{1}{2}i \right| \quad (1)$$

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z

β) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (|z|^x + 2012^{1-x})$$

γ) Αν f είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση, που είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή στο $\mathbb{R}$ και z_1, z_2 είναι δυο μιγαδικοί αριθμοί, που ικανοποιούν την (1), τότε να αποδείξετε ότι, για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό α , με $\alpha \geq 0$, ισχύει:

$$2f\left(\frac{|3z_1 + 7z_2|}{5}\right) < f(1-\alpha) + f(1+\alpha)$$

ΛΥΣΗ

α) Έστω z ένας τυχαίος μιγαδικός που ικανοποιεί την (1). Τότε έχουμε:

$$\left|z + \frac{3}{2}i\right| > \left|3z + \frac{1}{2}i\right| \Leftrightarrow$$

$$|2z + 3i| > |6z + i| \Leftrightarrow$$

$$|2z + 3i|^2 > |6z + i|^2 \Leftrightarrow$$

$$(2z + 3i)(2\bar{z} - 3i) > (6z + i)(6\bar{z} - i) \Leftrightarrow$$

$$4z\bar{z} - 6zi + 6\bar{z}i + 9 > 36z\bar{z} - 6zi + 6\bar{z}i + 1 \Leftrightarrow$$

$$32z\bar{z} < 8 \Leftrightarrow z\bar{z} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow |z|^2 < \frac{1}{4} \Leftrightarrow |z| < \frac{1}{2}$$

Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι τα εσωτερικά σημεία του κύκλου με κέντρο το σημείο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = \frac{1}{2}$

β) Επειδή $|z| < \frac{1}{2}$ για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$0 < |z|^x + (2012)^{1-x} < \left(\frac{1}{2}\right)^x + (2012)^{1-x} \quad (2)$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2012)^{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2012}{(2012)^x} = 0, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2012)^x = +\infty$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^x + (2012)^{1-x} \right] = 0 \quad (3)$$

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0 \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (2), (3) και (4) με τη βοήθεια του κριτηρίου παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [|z|^x + (2012)^{1-x}] = 0$$

γ) Είναι:

$$\frac{|3z_1 + 7z_2|}{5} \leq \frac{3|z_1| + 7|z_2|}{5} < \frac{3 \cdot \frac{1}{2} + 7 \cdot \frac{1}{2}}{5} = 1$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε:

$$f\left(\frac{|3z_1 + 7z_2|}{5}\right) < f(1) \Rightarrow 2f\left(\frac{|3z_1 + 7z_2|}{5}\right) < 2f(1)$$

Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό α με $\alpha \geq 0$, ισχύει:

$$2f(1) \leq f(1-\alpha) + f(1+\alpha)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $\alpha = 0$ τότε η ισχύει η ισότητα.
- Αν $\alpha > 0$ τότε εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση f σε καθένα από τα διαστήματα $[1-\alpha, 1]$ και $[1, 1+\alpha]$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (1-\alpha, 1)$ και $\xi_2 \in (1, 1+\alpha)$ τέτοια, ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(1) - f(1-\alpha)}{1 - (1-\alpha)} = \frac{f(1) - f(1-\alpha)}{\alpha} \quad \text{και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(1+\alpha) - f(1)}{1+\alpha - 1} = \frac{f(1+\alpha) - f(1)}{\alpha}$$

Η συνάρτηση f είναι κυρτή, άρα η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε έχουμε:

$$1-\alpha < \xi_1 < 1 < \xi_2 < 1+\alpha \Rightarrow \xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$$

Άρα

$$\frac{f(1) - f(1-\alpha)}{\alpha} < \frac{f(1+\alpha) - f(1)}{\alpha} \Rightarrow$$

$$f(1) - f(1-\alpha) < f(1+\alpha) - f(1) \Rightarrow$$

$$2f(1) < f(1-\alpha) + f(1+\alpha)$$

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση ισχύει $2f(1) \leq f(1-\alpha) + f(1+\alpha)$

Άρα για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό α , με $\alpha \geq 0$, ισχύει:

$$2f\left(\frac{|3z_1 + 7z_2|}{5}\right) < f(1-\alpha) + f(1+\alpha)$$

ΘΕΜΑ 33ο :

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\bullet \quad f(xy) = f(x)f(y) + \frac{x^2 + y^2}{xy}, \quad \text{για κάθε } x, y \in (0, +\infty) \quad (1)$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

β) Να βρείτε το $f(1)$

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} f(x) \right]^{x^2}$

ε) Να λύσετε την εξίσωση $x \left(x + \sin \frac{\pi}{x} \right) = x - 1$ στο διάστημα $(0, +\infty)$

στ) Να αποδείξετε ότι $\int_{\frac{1}{e}}^{\exp x} \frac{1}{f\left(\frac{1}{t}\right)} dt + \int_{\frac{1}{e}}^{\exp x} \frac{1}{t^2 f(t)} dt = 1$, για κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$

ζ) Αν g είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ και $a > 0$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{\frac{1}{a}}^a g(f(x)) \frac{\ln x}{x} dx$$

ΛΥΣΗ

α) Έστω ότι υπάρχει θετικός αριθμός ρ τέτοιος, ώστε $f(\rho) = 0$ (2)

Για $x = \rho$ και $y = 1$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(\rho) = 0 - \frac{\rho^2 + 1}{\rho} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \rho^2 + 1 = 0 \Rightarrow \rho^2 = -1$$

που είναι άτοπο. Άρα $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

β) Για $x = y = 1$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(1) = f^2(1) - 2 \Leftrightarrow f^2(1) - f(1) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(1) = 2 \quad \text{ή} \quad f(1) = -1$$

Το γεγονός ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ μας εξασφαλίζει ότι υπάρχει θετικός αριθμός x_0 τέτοιος, ώστε για οποιοδήποτε $M > 0$ να ισχύει $f(x) > M$ για κάθε $x > x_0$. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση f για κατάλληλο x , παίρνει θετική τιμή. Εξάλλου η f , ως συνεχής συνάρτηση που δεν μηδενίζεται για καμία τιμή του x , διατηρεί σταθερό πρόσημο, οπότε $f(x) > 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$, οπότε $f(1) = 2$

γ) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και $y = 1$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(x) = 2f(x) - \frac{x^2 + 1}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} \Rightarrow f(x) = x + \frac{1}{x}$$

δ) Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} f(x) \right]^{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x} \right) \right]^{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} = e^1 = e, \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \left(\frac{1}{x^2} \right)'}{\left(\frac{1}{x^2} \right)'} = 1$$

ε) Στο διάστημα $(0, +\infty)$ έχουμε:

$$x\left(x + \sin \frac{\pi}{x}\right) = x - 1 \Leftrightarrow x + \sin \frac{\pi}{x} = 1 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 1 - \sin \frac{\pi}{x} \Leftrightarrow f(x) = 1 - \sin \frac{\pi}{x} \quad (3)$$

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x^2 + 1 \geq 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$$

Επομένως για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι $f(x) = x + \frac{1}{x} \geq 2$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$, δηλαδή η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=1$, το $f(1)=2$

Επίσης για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει $1 - \sin \frac{\pi}{x} \leq 2$

Επομένως η εξίσωση (3) θα έχει λύση αν και μόνο αν

$$\begin{cases} f(x) = 2 \\ 1 - \sin \frac{\pi}{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{x} = 2 \\ \sin \frac{\pi}{x} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

στ) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = \int_{\frac{1}{e}}^{\varepsilon\varphi x} \frac{1}{f\left(\frac{1}{t}\right)} dt + \int_{\frac{1}{e}}^{\sigma\varphi x} \frac{1}{t^2 f(t)} dt, \quad x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $h(x) = 1$ για κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$

Στο διάστημα αυτό, η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη με:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{f\left(\frac{1}{\varepsilon\varphi x}\right)} \cdot (\varepsilon\varphi x)' + \frac{1}{\sigma\varphi^2 x \cdot f(\sigma\varphi x)} \cdot (\sigma\varphi x)' = \\ &= \frac{1}{f\left(\frac{1}{\varepsilon\varphi x}\right)} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sigma\varphi^2 x \cdot f(\sigma\varphi x)} \cdot \frac{-1}{\eta\mu^2 x} = \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon\varphi x} + \varepsilon\varphi x} \cdot (1 + \varepsilon\varphi^2 x) - \frac{1}{\sigma\varphi^2 x \cdot \left(\frac{1}{\sigma\varphi x} + \sigma\varphi x\right)} \cdot (1 + \sigma\varphi^2 x) = \\ &= \frac{\varepsilon\varphi x}{1 + \varepsilon\varphi^2 x} \cdot (1 + \varepsilon\varphi^2 x) - \frac{\sigma\varphi x}{\sigma\varphi^2 x \cdot (1 + \sigma\varphi^2 x)} \cdot (1 + \sigma\varphi^2 x) = \\ &= \varepsilon\varphi x - \frac{1}{\sigma\varphi x} = \varepsilon\varphi x - \varepsilon\varphi x = 0 \end{aligned}$$

Δηλαδή η h είναι σταθερή συνάρτηση στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$

Είναι:

$$\begin{aligned}
 h\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{t + \frac{1}{t}} dt + \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{t^2 \left(t + \frac{1}{t}\right)} dt = \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{t}{t^2 + 1} dt + \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{t(t^2 + 1)} dt = \\
 &= \int_{\frac{1}{e}}^1 \left(\frac{t}{t^2 + 1} + \frac{1}{t(t^2 + 1)} \right) dt = \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{t^2 + 1}{t(t^2 + 1)} dt = \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{t} dt = \left[\ln t \right]_{\frac{1}{e}}^1 = \\
 &= \ln 1 - \ln \frac{1}{e} = \ln 1 - (\ln 1 - \ln e) = \ln e = 1
 \end{aligned}$$

Άρα $h(x) = 1$ για κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$

ζ) Είναι:

$$I = \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} g(f(x)) \frac{\ln x}{x} dx = \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} g\left(x + \frac{1}{x}\right) \frac{\ln x}{x} dx$$

Θέτουμε:

$$u = \frac{1}{x}, \text{ οπότε } x = \frac{1}{u} \text{ και } dx = -\frac{1}{u^2} du$$

Για $x = \frac{1}{\alpha}$ είναι $u = \alpha$ και για $x = \alpha$ είναι $u = \frac{1}{\alpha}$

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} g\left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \int_{\alpha}^{\frac{1}{\alpha}} g\left(\frac{1}{u} + u\right) \ln \frac{1}{u} \cdot u \cdot \left(-\frac{1}{u^2}\right) du = \\
 &= \int_{\alpha}^{\frac{1}{\alpha}} g\left(\frac{1}{u} + u\right) \cdot (-\ln u) \cdot \left(-\frac{1}{u}\right) du = \int_{\alpha}^{\frac{1}{\alpha}} g\left(\frac{1}{u} + u\right) \frac{\ln u}{u} du = \\
 &= - \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} g\left(\frac{1}{u} + u\right) \frac{\ln u}{u} du = -I
 \end{aligned}$$

Είναι $I = -I$, δηλαδή $2I = 0$, οπότε $I = 0$

ΘΕΜΑ 34ο :

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) \ln f(x) + 2xf'(x) = 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ (1)

- $f(x) > 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ (2)

• $f(1) = e$

(3)

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$, $x \in (0, +\infty)$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και να αποδείξετε ότι $2e^{\frac{1}{\sqrt{x}}-1} \geq 3-x$

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_e^{e^2} f^{-1}(x) \left(1 - \frac{2}{\ln x}\right) dx$

ε) Να αποδείξετε ότι $e + \sqrt[3]{e} > 2\sqrt[5]{e}$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$f(x) \ln f(x) + 2x f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln f(x) + \sqrt{x} \frac{f'(x)}{f(x)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\sqrt{x} \ln f(x))' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \ln f(x) = c$$

Είναι:

$$f(1) = e, \text{ οπότε } c = 1$$

Άρα:

$$\sqrt{x} \ln f(x) = 1 \Leftrightarrow \ln f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow f(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}, x \in (0, +\infty)$$

β) Έστω $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $f(x_1) = f(x_2)$, τότε έχουμε:

$$e^{\frac{1}{\sqrt{x_1}}} = e^{\frac{1}{\sqrt{x_2}}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x_1}} = \frac{1}{\sqrt{x_2}} \Rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η συνάρτηση f είναι «1-1», οπότε αντιστρέφεται.

Για να βρούμε την αντίστροφη της f , θέτουμε $f(x) = y$ και λύνουμε ως προς x .

Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{cases} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = y \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} = \ln y \\ y > 0 \\ \ln y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = \frac{1}{\ln y} \\ y > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\ln^2 y} \\ y > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y) = \frac{1}{\ln^2 y} \\ y > 1 \end{cases}$$

Άρα

$$f^{-1}: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f^{-1}(x) = \frac{1}{\ln^2 x}$$

γ) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, με:

$$f'(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)' = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \frac{-(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \frac{-1}{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}{2x\sqrt{x}} < 0$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, με:

$$f''(x) = -\frac{\frac{-e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}{2x\sqrt{x}} \cdot 2x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} \cdot e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}{4x^3} = \frac{3\sqrt{x} + 1}{4x^3} \cdot e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} > 0$$

Άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$

Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $x_0=1$, είναι:

$$(\varepsilon) : y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

Είναι:

$$f(1) = e \quad \text{και} \quad f'(1) = -\frac{e}{2}$$

οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$(\varepsilon) : y - e = -\frac{e}{2}(x - 1) \Rightarrow (\varepsilon) : y = -\frac{e}{2}x + \frac{3e}{2}$$

Η συνάρτηση είναι κυρτή, οπότε η εφαπτομένη της, με εξαίρεση το σημείο επαφής, είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της f . Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq -\frac{e}{2}x + \frac{3e}{2} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \geq -\frac{e}{2}x + \frac{3e}{2} \Leftrightarrow \\ e^{\frac{1}{\sqrt{x}}-1} &\geq \frac{-x+3}{2} \Leftrightarrow 2e^{\frac{1}{\sqrt{x}}-1} \geq 3-x \end{aligned}$$

δ) Με δεδομένο ότι $f^{-1}(x) = \frac{1}{\ln^2 x}$, έχουμε:

$$I = \int_e^{e^2} f^{-1}(x) \left(1 - \frac{2}{\ln x} \right) dx = \int_e^{e^2} \frac{1}{\ln^2 x} dx - \int_e^{e^2} \frac{2}{\ln^3 x} dx$$

Αν θέσουμε $I_1 = \int_e^{e^2} \frac{1}{\ln^2 x} dx$, τότε

$$I_1 = \int_e^{e^2} x' \cdot \frac{1}{\ln^2 x} dx = \left[\frac{x}{\ln^2 x} \right]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} x \cdot \frac{-1}{\ln^3 x} \cdot \frac{2}{x} dx = \frac{e^2}{4} - e + \int_e^{e^2} \frac{2}{\ln^3 x} dx$$

οπότε

$$I = \frac{e^2}{4} - e + \int_e^{e^2} \frac{2}{\ln^3 x} dx - \int_e^{e^2} \frac{2}{\ln^3 x} dx = \frac{e^2}{4} - e$$

ε) Σε καθένα από τα διαστήματα $[1, 25]$ και $[25, 49]$ εφαρμόζεται το Θεώρημα Μέσης Τιμής, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (1, 25)$ και $\xi_2 \in (25, 49)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(25) - f(1)}{24} \quad \text{και} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(49) - f(25)}{24}$$

και η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε

$$f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Rightarrow f(25) - f(1) < f(49) - f(25) \Rightarrow$$

$$2f(25) < f(1) + f(49) \Rightarrow 2e^{\frac{1}{5}} < e + e^{\frac{1}{7}} \Rightarrow e + \sqrt[7]{e} > 2\sqrt[5]{e}$$

ΘΕΜΑ 35ο :

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\bullet f'(-x)f(x) = -x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$\bullet f(0) = 1 \quad (2)$$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(-x)}{f(x)}, x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 0$

β) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, το οποίο και να προσδιορίσετε.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή.

δ) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$

ε) Να μελετήσετε ως προς το πρόσημο τη συνάρτηση $h(x) = \int_1^x f(t) dt$

στ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_h τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0, x = 1$ και τον άξονα $x'x$

ΛΥΣΗ

α) Για $x = 0$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f'(0) \cdot f(0) = 0 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} f'(0) \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 0$$

β) Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$ (3)

Για $x = x_0$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f'(-x_0) \cdot f(x_0) = -x_0 \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} f'(-x_0) \cdot 0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0$$

δηλαδή $f(0) = 0$, που είναι άτοπο, αφού από υπόθεση είναι $f(0) = 1$

Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \neq 0$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο $\mathbb{R}$, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, και επειδή $f(0) = 1 > 0$, θα είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

γ) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων με:

$$g'(x) = \frac{-f'(-x) \cdot f(x) - f'(-x) \cdot f(-x)}{f^2(x)}, x \in \mathbb{R} \quad (4)$$

Αν στη σχέση (1), όπου x θέσουμε το $-x$ έχουμε:

$$f'(x) \cdot f(-x) = x, \quad x \in \mathbb{R} \quad (5)$$

Η σχέση (4) με βάση τις σχέσεις (1) και (5) γράφεται:

$$g'(x) = \frac{-(-x) - x}{f^2(x)} = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

Άρα η συνάρτηση g είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$, οπότε $g(x) = c$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για $x = 0$ είναι:

$$g(0) = c \Leftrightarrow \frac{f(0)}{f(0)} = c \Leftrightarrow c = 1$$

οπότε:

$$g(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

δ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$g(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{f(-x)}{f(x)} = 1 \Leftrightarrow f(-x) = f(x) \quad (6)$$

Από τις σχέσεις (5) και (6) για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(x)f'(x) = x \Rightarrow \left(\frac{1}{2}f^2(x)\right)' = \left(\frac{1}{2}x^2\right)' \Rightarrow f^2(x) = x^2 + c$$

και επειδή $f(x) > 0$ θα είναι $f(x) = \sqrt{x^2 + c}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για $x = 0$ είναι:

$$f(0) = \sqrt{0 + c} \Leftrightarrow 1 = \sqrt{c} \quad \text{άρα} \quad c = 1$$

οπότε ο τύπος της f είναι:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

ε) Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη, ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης f με $h'(x) = f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Είναι:

$$h(1) = \int_1^1 f(t)dt = 0 \quad (8)$$

άρα ο αριθμός 1 είναι λύση της εξίσωσης $h(x) = 0$ και μάλιστα μοναδική, αφού η συνάρτηση

h

είναι γνησίως αύξουσα άρα και «1-1» στο $\mathbb{R}$.

Επομένως:

- Για $x \in (-\infty, 1) \Rightarrow h(x) < h(1) \Leftrightarrow h(x) < 0$
- Για $x \in (1, +\infty) \Rightarrow h(x) > h(1) \Leftrightarrow h(x) > 0$

στ) Η συνάρτηση h είναι συνεχής και $h(x) < 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$, οπότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_h τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$, $x = 1$ και τον άξονα $x'x$, είναι:

$$\begin{aligned}
 E &= -\int_0^1 h(x) dx = -\int_0^1 x' h(x) dx = -[x h(x)]_0^1 + \int_0^1 x h'(x) dx = \\
 &= -h(1) + \int_0^1 x f(x) dx \stackrel{(8)}{=} \int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 x \sqrt{x^2 + 1} dx
 \end{aligned}$$

Θέτουμε:

$$x^2 + 1 = u, \text{ οπότε } 2x dx = du$$

Όταν $x=0$ το $u=1$ και όταν $x=1$ το $u=2$

Επομένως έχουμε:

$$E = \frac{1}{2} \int_0^1 2x \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^2 = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

ΘΕΜΑ 36ο :

Δίνεται η συνάρτηση $G(x) = \int_0^{\ln x} \frac{e^t}{e^t + x} dt$, $x > 0$

α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης G

β) Αν $G(x) = \ln \frac{2x}{1+x}$, $x > 0$, τότε:

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση G ως προς τη μονοτονία.

ii) Να βρείτε το πρόσημο της G , για τις διάφορες τιμές του x

iii) Να βρείτε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης G , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία με εξίσωση $x = \lambda$, $0 < \lambda < 1$

iv) Να αποδείξετε ότι $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda) = \ln 2$

v) Να αποδείξετε ότι $\int_e^x \frac{1}{G(t)} dt > \frac{x-e}{G(x)}$, για κάθε $x > e$

ΛΥΣΗ

α) 1^{ος} τρόπος:

Θέτουμε:

$$e^t + x = u, \text{ οπότε } e^t dt = du$$

Όταν $t=0$ το $u=x+1$ και όταν $t=\ln x$ το $u=2x$

Επομένως για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$G(x) = \int_0^{\ln x} \frac{e^t}{e^t + x} dt = \int_{x+1}^{2x} \frac{1}{u} du = [\ln u]_{x+1}^{2x} = \ln(2x) - \ln(x+1) = \ln \frac{2x}{x+1} \quad (1)$$

2^{ος} τρόπος:

$$G(x) = \int_0^{\ln x} \frac{e^t}{e^t + x} dt = \int_0^{\ln x} \frac{(e^t + x)'}{e^t + x} dt = \int_0^{\ln x} [\ln(e^t + x)]' dt =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[\ln(e^t + x) \right]_0^{\ln x} = \ln(e^{\ln x} + x) - \ln(e^0 + x) = \\
 &= \ln(2x) - \ln(x+1) = \ln \frac{2x}{x+1}, \quad x > 0
 \end{aligned}$$

β) i) Η G είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$G'(x) = \frac{1}{\frac{2x}{x+1}} \cdot \left(\frac{2x}{x+1} \right)' = \frac{x+1}{2x} \cdot \frac{2(x+1) - 2x}{(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)} > 0 \quad (2)$$

Επομένως η συνάρτηση G είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$

ii) Είναι:

$$G(1) = \int_0^1 \frac{e^t}{e^t + x} dt = 0$$

άρα ο αριθμός 1 είναι λύση της εξίσωσης $G(x) = 0$ και μάλιστα μοναδική, αφού η συνάρτηση G είναι γνησίως αύξουσα, άρα και «1-1» στο $(0, +\infty)$

Επομένως:

- Για $0 < x < 1 \Rightarrow G(x) < G(1) \Leftrightarrow G(x) < 0$
- Για $x > 1 \Rightarrow G(x) > G(1) \Leftrightarrow G(x) > 0$
- Για $x = 1 \Rightarrow G(x) = G(1) \Leftrightarrow G(x) = 0$

iii) Η συνάρτηση G είναι συνεχής και $G(x) < 0$ για κάθε $x \in [\lambda, 1] \subseteq [0, 1]$, οπότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_G , τον άξονα x και την ευθεία με εξίσωση $x = \lambda$, $0 < \lambda < 1$ είναι:

$$\begin{aligned}
 E &= - \int_{\lambda}^1 G(x) dx = \int_1^{\lambda} G(x) dx = \int_1^{\lambda} x' G(x) dx = \left[x G(x) \right]_1^{\lambda} - \int_1^{\lambda} x G'(x) dx \stackrel{(1),(2)}{=} \\
 &= \left[x \ln \frac{2x}{x+1} \right]_1^{\lambda} - \int_1^{\lambda} x \frac{1}{x(x+1)} dx = \lambda \ln \frac{2\lambda}{\lambda+1} - \int_1^{\lambda} \frac{1}{x+1} dx = \\
 &= \lambda \ln \frac{2\lambda}{\lambda+1} - \left[\ln|x+1| \right]_1^{\lambda} = \lambda \ln \frac{2\lambda}{\lambda+1} - \ln(\lambda+1) + \ln 2, \quad 0 < \lambda < 1
 \end{aligned}$$

iv) Είναι:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} [\lambda \ln 2\lambda - \lambda \ln(\lambda+1) - \ln(\lambda+1) + \ln 2] = \\
 &= \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} [\lambda \ln 2\lambda - (\lambda+1) \ln(\lambda+1) + \ln 2] = \ln 2
 \end{aligned}$$

διότι:

- $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} (\lambda \ln 2\lambda) \stackrel{0 \cdot (-\infty)}{=} \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\ln 2\lambda}{\frac{1}{\lambda}} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\lambda}}{-\frac{1}{\lambda^2}} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} (-\lambda) = 0$
- $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} [(\lambda+1) \ln(\lambda+1)] = 0$

ν) Για $e < t \leq x \Rightarrow 0 < G(t) \leq G(x) \Rightarrow \frac{1}{G(t)} \geq \frac{1}{G(x)} \Rightarrow \frac{1}{G(t)} - \frac{1}{G(x)} \geq 0$, οπότε

$$\int_e^x \left(\frac{1}{G(t)} - \frac{1}{G(x)} \right) dt > 0 \quad (3), \text{ αφού } \frac{1}{G(t)} - \frac{1}{G(x)} \text{ δεν είναι παντού μηδέν.}$$

Από τη σχέση (3) έχουμε:

$$\int_e^x \frac{1}{G(t)} dt > \int_e^x \frac{1}{G(x)} dt \Rightarrow \int_e^x \frac{1}{G(t)} dt > \frac{1}{G(x)} (x - e) \Rightarrow \int_e^x \frac{1}{G(t)} dt > \frac{x - e}{G(x)}, \quad x > e$$

ΘΕΜΑ 37ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\bullet f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty) \quad (1)$$

$$\bullet f(0) = 1 \quad (2)$$

Αν το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης

$g(x) = \int_0^x f(t) dt$, τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x = u$, με $u > 0$ είναι

$$E(u) = u \int_0^u f(t) dt + \frac{1}{2} f(u) \quad (3), \text{ τότε:}$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{-x^2}$, $x \geq 0$

β) Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x g(t) dt}{x^v} \quad \text{για τις διάφορες τιμές του } v \in \mathbb{N} \text{ με } v \geq 1$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} f(t) dt$$

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx > \frac{1}{2\sqrt{e}}$

ΛΥΣΗ

α) Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι:

$$f(t) > 0 \text{ για κάθε } t \in [0, x], \text{ με } x > 0$$

οπότε

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt > 0 \text{ για κάθε } x > 0$$

Άρα το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης

$g(x) = \int_0^x f(t) dt$, τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x = u$, με $u > 0$ είναι:

$$E(u) = \int_0^u \left(\int_0^x f(t) dt \right) dx \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε:

$$\int_0^u \left(\int_0^x f(t) dt \right) dx = u \int_0^u f(t) dt + \frac{1}{2} f(u) \quad (5)$$

Παραγωγίζοντας λοιπόν και τα δύο μέλη της σχέσης (5) έχουμε:

$$\int_0^u f(t) dt = \int_0^u f(t) dt + u f(u) + \frac{1}{2} f'(u) \Leftrightarrow$$

$$u f(u) + \frac{1}{2} f'(u) = 0 \Leftrightarrow f'(u) = -2u f(u) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{f'(u)}{f(u)} = -2u \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} (\ln f(u))' = (-u^2)' \Leftrightarrow \ln f(u) = -u^2 + c \quad (6)$$

Είναι:

$$f(0) = 1, \text{ οπότε } c = 0$$

Άρα η σχέση (6) γράφεται:

$$\ln f(u) = -u^2 \Leftrightarrow f(u) = e^{-u^2}, \quad u > 0 \quad (7)$$

Από τις σχέσεις (2) και (7) συμπεραίνουμε ότι:

$$f(x) = e^{-x^2}, \quad x \geq 0$$

β) i) Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $v=1$, τότε έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x g(t) dt}{x^v} \stackrel{v=1}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x g(t) dt}{x} \stackrel{\frac{0}{0} (*)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^x f(t) dt = 0$$

(*) Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, άρα η συνάρτηση $G(x) = \int_0^x g(t) dt$ είναι

παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$, οπότε είναι και συνεχής, άρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = G(0) = 0$

- Αν $v \geq 2$, τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x g(t) dt}{x^v} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{v x^{v-1}} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g'(x)}{v(v-1)x^{v-2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{v(v-1)x^{v-2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x^2}}{v(v-1)x^{v-2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{-x^2}}{v(v-1)} \cdot \frac{1}{x^{v-2}} \right) \end{aligned}$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x^2}}{v(v-1)} = \frac{1}{v(v-1)} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{v-2}} = \begin{cases} 1, & \text{αν } v=2 \\ +\infty, & \text{αν } v>2 \end{cases}$$

Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x g(t) dt}{x^v} = \begin{cases} 0 & , \text{αν } v = 1 \\ \frac{1}{2} & , \text{αν } v = 2 \\ +\infty & , \text{αν } v > 2 \end{cases}$$

ii) Για $x > 0$ έχουμε:

$$x \leq t \leq x+1 \Rightarrow x^2 \leq t^2 \leq (x+1)^2 \Leftrightarrow -(x+1)^2 \leq -t^2 \leq -x^2 \Leftrightarrow e^{-(x+1)^2} \leq e^{-t^2} \leq e^{-x^2}$$

οπότε:

$$\int_x^{x+1} e^{-(x+1)^2} dt \leq \int_x^{x+1} e^{-t^2} dt \leq \int_x^{x+1} e^{-x^2} dt \Leftrightarrow$$

$$e^{-(x+1)^2} (x+1-x) \leq \int_x^{x+1} e^{-t^2} dt \leq e^{-x^2} (x+1-x) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{e^{(x+1)^2}} \leq \int_x^{x+1} f(t) dt \leq \frac{1}{e^{x^2}}$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{(x+1)^2}} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0$$

Άρα από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} f(t) dt = 0$

γ) Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

- $f'(x) = -2xe^{-x^2}$
- $f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$

Είναι:

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{-x^2}(2x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2e^{-x^2}(2x^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

Το πρόσημο της $f''(x)$ καθώς η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της συνάρτησης f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$		0	
$f(x)$	$\cap$	Σ.Κ.	$\cup$

Είναι:

- $\begin{cases} f \text{ συνεχής στο } \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\ f''(x) < 0 \text{ στο } \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$ Άρα η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$
- $\begin{cases} f \text{ συνεχής στο } \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right) \\ f''(x) > 0 \text{ στο } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right) \end{cases}$ Άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$
- $f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$ και εκατέρωθεν του $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ αλλάζει η κυρτότητα της συνάρτησης f , άρα το σημείο $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$, δηλαδή το $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ είναι σημείο καμπής της συνάρτησης f

δ) Στο (γ) ερώτημα αποδείξαμε ότι για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) = -2xe^{-x^2} < 0$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$, άρα και στο $\left(0, \frac{1}{2}\right)$,
οπότε έχουμε:

$$0 < x < \frac{1}{2} \Rightarrow f(0) > f(x) > f\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right) > 0$$

Άρα:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right) dx &> 0 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx > \int_0^{\frac{1}{2}} f\left(\frac{1}{2}\right) dx \Leftrightarrow \\ \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx &> e^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2} - 0\right) \Leftrightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx > \frac{1}{2\sqrt{e}} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 38ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_x^{x^2} e^{x-t} dt$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 1 - e^{-x^2+x}$, $x \in \mathbb{R}$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

δ) Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

ii) $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$

ε) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \cdot \eta\mu(2012x) \right)$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2012 \cdot f(x) + \frac{\eta\mu x}{x} \right)$$

στ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = (2x-1)f(x)$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = \frac{1}{2}$ και $x = 1$

ΛΥΣΗ

α) 1^{ος} τρόπος:

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^{x^2} e^{x-t} dt = - \int_x^{x^2} e^{x-t} (x-t)' dt = - \left[e^{x-t} \right]_x^{x^2} = \\ &= - \left(e^{x-x^2} - e^{x-x} \right) = -e^{-x^2+x} + 1 \end{aligned}$$

2^{ος} τρόπος:

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f(x) = \int_x^{x^2} e^{x-t} dt = \int_x^{x^2} e^x e^{-t} dt = e^x \left(\int_0^{x^2} e^{-t} dt - \int_0^x e^{-t} dt \right)$$

Η συνάρτηση e^{-t} είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, επομένως οι συναρτήσεις $\int_0^{x^2} e^{-t} dt$ και $\int_0^x e^{-t} dt$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Επίσης η e^x είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^x \right)' \left(\int_0^{x^2} e^{-t} dt - \int_0^x e^{-t} dt \right) + e^x \left(\int_0^{x^2} e^{-t} dt - \int_0^x e^{-t} dt \right)' = \\ &= e^x \left(\int_0^{x^2} e^{-t} dt - \int_0^x e^{-t} dt \right) + e^x \left(e^{-x^2} (x^2)' - e^{-x} \right) = \\ &= f(x) + e^x (2xe^{-x^2} - e^{-x}) = f(x) + 2xe^{-x^2+x} - 1, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) + 2xe^{-x^2+x} - 1 \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = 2xe^{-x^2+x} - 1 \Leftrightarrow \\ f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} &= 2xe^{-x^2+x} e^{-x} - e^{-x} \Leftrightarrow \\ f'(x)e^{-x} + (e^{-x})' f(x) &= 2xe^{-x^2} - e^{-x} \Leftrightarrow \\ (f(x)e^{-x})' &= (-e^{-x^2} + e^{-x})' \end{aligned}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f(x)e^{-x} = -e^{-x^2} + e^{-x} + c \quad (1)$$

Για $x = 0$ από τη δοθείσα σχέση έχουμε $f(0) = \int_0^0 e^{0-t} dt = 0$ και από τη σχέση (1) έχουμε $c = 0$,
 οπότε:

$$f(x)e^{-x} = -e^{-x^2} + e^{-x} \cdot e^x \Leftrightarrow f(x) = -e^{-x^2+x} + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο:

$$f'(x) = -e^{-x^2+x}(-x^2+x)' = (2x-1)e^{-x^2+x}$$

Είναι:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (2x-1)e^{-x^2+x} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow (2x-1)e^{-x^2+x} > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$

Το πρόσημο της $f'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$		$1 - \sqrt[4]{e}$	

ελάχιστο

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, \frac{1}{2}]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\frac{1}{2}, +\infty)$. Επίσης η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = \frac{1}{2}$ με ελάχιστη τιμή $f\left(\frac{1}{2}\right) = -e^{-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} + 1 = -e^{\frac{1}{4}} + 1 = 1 - \sqrt[4]{e}$

γ) • Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

• Για $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x^2+x}) &= \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^{-x^2+x} + 1) = 0 + 1 = 1 \quad (2) \end{aligned}$$

Άρα η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο $+\infty$

• Για $x \in (-\infty, 0)$ είναι:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x^2+x}) = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^{-x^2+x} + 1) = 0 + 1 = 1 \quad (3)$

Άρα η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο $-\infty$

δ) Το πρόσημο της συνάρτησης $-x^2 + x$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$-x^2 + x$	$-$	$+$	0	$-$

i) Για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ είναι:

$$-x^2 + x < 0 \Leftrightarrow e^{-x^2+x} < e^0 \Leftrightarrow e^{-x^2+x} < 1 \Leftrightarrow$$

$$-e^{-x^2+x} > -1 \Leftrightarrow -e^{-x^2+x} + 1 > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$$

ii) Για κάθε $x \in [0, 1]$ είναι:

$$-x^2 + x \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x^2+x} \geq e^0 \Leftrightarrow e^{-x^2+x} \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$-e^{-x^2+x} \leq -1 \Leftrightarrow -e^{-x^2+x} + 1 \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq 0$$

ε) i) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$\left| \frac{\eta\mu(2012x)}{x} \right| = \frac{|\eta\mu(2012x)|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} = \frac{1}{x}$$

Άρα:

$$\left| \frac{\eta\mu(2012x)}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \Leftrightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\eta\mu(2012x)}{x} \leq \frac{1}{x}$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Επομένως από το Κριτήριο Παρεμβολής προκύπτει ότι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu(2012x)}{x} = 0$

Από τη σχέση (2) έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \cdot \eta\mu(2012x) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) \cdot \frac{\eta\mu(2012x)}{x} \right) = 1 \cdot 0 = 0$$

ii) Για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ είναι:

$$\left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| = \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$$

Άρα:

$$\left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| \leq -\frac{1}{x} \Leftrightarrow -\left(-\frac{1}{x}\right) \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq -\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq -\frac{1}{x}$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$$

Επομένως από το Κριτήριο Παρεμβολής προκύπτει ότι και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$

Από τη σχέση (3) έχουμε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$, οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2012 \cdot f(x) + \frac{\eta\mu x}{x} \right) = 2012 \cdot 1 + 0 = 2012$$

στ) Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Επίσης για κάθε $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \subseteq [0, 1]$ είναι $2x-1 \geq 0$ και $f(x) \leq 0$, οπότε $g(x) = (2x-1)f(x) \leq 0$. Άρα το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = \frac{1}{2}$ και $x = 1$, είναι:

$$\begin{aligned} E &= \int_{\frac{1}{2}}^1 -g(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 -(2x-1)f(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-2x)(-e^{-x^2+x} + 1) dx = \\ &= -\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-2x) \cdot e^{-x^2+x} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-2x) dx = -\int_{\frac{1}{2}}^1 (e^{-x^2+x})' dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (x-x^2)' dx = \\ &= -\left[e^{-x^2+x}\right]_{\frac{1}{2}}^1 + \left[x-x^2\right]_{\frac{1}{2}}^1 = -\left(1-e^{\frac{1}{4}}\right) + \left(0-\frac{1}{4}\right) = e^{\frac{1}{4}} - \frac{5}{4} = \sqrt[4]{e} - \frac{5}{4} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 39ο :

Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\bullet (f''(x)+1)\sin x - f'(x) \int_{-x}^x \frac{\sin u}{1+e^u} du = 0, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (1)$$

$$\bullet f''(0)+1=f'(0)=f(0)=0 \quad (2)$$

α) Να αποδείξετε ότι $\int_{-x}^x \frac{\sin u}{1+e^u} du = \eta\mu x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln(\sin x)$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

δ) Να αποδείξετε ότι $\sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \geq \sin\alpha \cdot \sin\beta$ για κάθε $\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

ε) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta \mu^2 x}$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$\int_{-x}^x \frac{\sin u}{1+e^u} du = \int_{-x}^0 \frac{\sin u}{1+e^u} du + \int_0^x \frac{\sin u}{1+e^u} du \quad (3)$$

Είναι:

$$I_1 = \int_{-x}^0 \frac{\sin u}{1+e^u} du$$

Θέτουμε:

$$u = -t, \text{ οπότε } du = -dt$$

Για $u = -x$ είναι $t = x$ και για $u = 0$ είναι $t = 0$

Έχουμε:

$$I_1 = \int_x^0 \frac{\sin(-t)}{1+e^{-t}} (-dt) = - \int_x^0 \frac{e^t \sin t}{e^t(1+e^{-t})} dt = \int_0^x \frac{e^t \sin t}{1+e^t} dt = \int_0^x \frac{e^u \sin u}{1+e^u} du \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_{-x}^x \frac{\sin u}{1+e^u} du &= \int_0^x \frac{e^u \sin u}{1+e^u} du + \int_0^x \frac{\sin u}{1+e^u} du = \int_0^x \left(\frac{e^u \sin u}{1+e^u} + \frac{\sin u}{1+e^u} \right) du = \\ &= \int_0^x \frac{(e^u + 1) \sin u}{1+e^u} du = \int_0^x \sin u du = [\eta \mu u]_0^x = \eta \mu x - \eta \mu 0 = \eta \mu x \quad (5) \end{aligned}$$

β) Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} (f''(x) + 1) \sin x - f'(x) \int_{-x}^x \frac{\sin u}{1+e^u} du &= 0 \stackrel{(5)}{\Leftrightarrow} (f''(x) + 1) \sin x - f'(x) \eta \mu x = 0 \Leftrightarrow \\ f''(x) \sin x - f'(x) \eta \mu x &= -\sin x \Leftrightarrow (f'(x) \sin x)' = (-\eta \mu x)' \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$f'(x)\sin x = -\eta\mu x + c_1, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Για $x=0$ έχουμε:

$$f'(0)\sin 0 = -\eta\mu 0 + c_1 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 0 \cdot 1 = 0 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$$

Άρα για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$f'(x)\sin x = -\eta\mu x \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{\eta\mu x}{\sin x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{\sin x} (\sin x)' \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = (\ln(\sin x))' \Leftrightarrow f(x) = \ln(\sin x) + c_2, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Για $x=0$ έχουμε:

$$f(0) = \ln(\sin 0) + c_2 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 0 = \ln 1 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 0$$

Άρα:

$$f(x) = \ln(\sin x), \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

γ) Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$f'(x) = (\ln(\sin x))' = \frac{1}{\sin x} (\sin x)' = -\frac{\eta\mu x}{\sin x} = -\epsilon\phi x$$

$$f''(x) = (-\epsilon\phi x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} < 0$$

Άρα η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

δ) Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $\alpha = \beta$, τότε ισχύει η ισότητα.
- Αν $\alpha < \beta$, τότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ σε δύο διαστήματα, στα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$, οπότε θα υπάρχουν:

$$\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right) \text{ τέτοιο, ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} \Leftrightarrow f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

$$\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right) \text{ τέτοιο, ώστε } f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} \Leftrightarrow f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

Η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, άρα η συνάρτηση f' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό, οπότε ισχύει:

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \xi_1 < \xi_2 < \beta < \frac{\pi}{2} \xRightarrow{f' \downarrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Rightarrow \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} > \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \xRightarrow{\beta-\alpha > 0}$$

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha) > f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Rightarrow 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > f(\alpha) + f(\beta) \Rightarrow$$

$$2\ln\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > \ln(\sin\alpha) + \ln(\sin\beta) \Rightarrow \ln\left(\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > \ln(\sin\alpha\sin\beta) \Rightarrow$$

$$\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2} > \sin\alpha\sin\beta$$

- Αν $\alpha > \beta \Leftrightarrow \beta < \alpha$, τότε η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ σε δύο διαστήματα, στα $\left[\beta, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \alpha\right]$, οπότε με όμοιο τρόπο καταλήγουμε στην αποδεικτέα σχέση.

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση ισχύει η σχέση:

$$\sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \geq \sin\alpha\sin\beta, \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

ε) Για x « κοντά στο 0 » έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu^2 x} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{(\eta\mu^2 x)'} \stackrel{\text{D.L.H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2\eta\mu x \cos x} \stackrel{(2)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f'(x) - f'(0)}{x} \cdot \frac{x}{2\eta\mu x \cos x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \cos x} \right) = f''(0) \cdot \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot \cos 0} = -1 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 2010

ΘΕΜΑ 1ο :

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z(t) = \frac{1}{2+it}$, $t \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $z(t) + \overline{z(t)} = 4z(t) \cdot \overline{z(t)}$.
- β) Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z(t)$ είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{1}{4}$.
- γ) Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z(t)$ και $z\left(-\frac{4}{t}\right)$, $t \in \mathbb{R}^*$ είναι αντιδιαμετρικά σημεία του προηγούμενου κύκλου.
- δ) Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z(1)$, $z(-4)$ και $z(2010)$ είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου.

ΛΥΣΗ

α) Είναι $z(t) + \overline{z(t)} = 4z(t) \cdot \overline{z(t)} \Leftrightarrow \frac{1}{2+it} + \overline{\left(\frac{1}{2+it}\right)} = 4 \cdot \frac{1}{2+it} \cdot \overline{\left(\frac{1}{2+it}\right)} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{2+it} + \frac{1}{2-it} = 4 \cdot \frac{1}{2+it} \cdot \frac{1}{2-it} \Leftrightarrow 2-it+2+it=4 \Leftrightarrow 4=4$ αληθές.

β) Είναι $\left| z(t) - \frac{1}{4} \right| = \left| \frac{1}{2+it} - \frac{1}{4} \right| = \left| \frac{4-(2+it)}{4(2+it)} \right| = \frac{|2-it|}{|4(2+it)|} = \frac{|2+it|}{4|(2+it)|} = \frac{1}{4}$.

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z(t)$ είναι ο κύκλος (C) με κέντρο το σημείο $K\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{1}{4}$.

- γ) Στο (β) ερώτημα αποδείξαμε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ο μιγαδικός αριθμός $z(t) = \frac{1}{2+it}$ ανήκει στον κύκλο (C) με κέντρο το σημείο $K\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{1}{4}$, άρα και για $-\frac{4}{t} \in \mathbb{R}$ ο μιγαδικός αριθμός $z\left(-\frac{4}{t}\right)$ ανήκει στον ίδιο κύκλο.

Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι $\left| z(t) - z\left(-\frac{4}{t}\right) \right| = 2\rho = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \left| z(t) - z\left(-\frac{4}{t}\right) \right| &= \left| \frac{1}{2+it} - \frac{1}{2+i\left(-\frac{4}{t}\right)} \right| = \left| \frac{1}{2+it} - \frac{t}{2t-4i} \right| = \left| \frac{1}{2+it} - \frac{t}{2(t-2i)} \right| = \\ &= \left| \frac{1}{2+it} - \frac{it}{2(2+it)} \right| = \left| \frac{2-it}{2(2+it)} \right| = \frac{|2-it|}{|2(2+it)|} = \frac{|2+it|}{2|(2+it)|} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Άρα οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z(t)$ και $z\left(-\frac{4}{t}\right)$ είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου (C) για κάθε $t \in \mathbb{R}^*$.

δ) Για $t = 1$ οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z(1)$ και $z\left(-\frac{4}{1}\right) = z(-4)$ είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου (C) , σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα.

Είναι $z(1) \neq z(2010) \neq z(-4)$. Πράγματι

$$\frac{1}{2+i} \neq \frac{1}{2+2010i} \neq \frac{1}{2-4i} \Leftrightarrow 2+i \neq 2+2010i \neq 2-4i \Leftrightarrow i \neq 2010i \neq -4i \text{ αληθές, οπότε οι εικόνες}$$

των μιγαδικών αριθμών $z(1)$, $z(-4)$ και $z(2010)$ είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν οι εικόνες των μιγαδικών $z(1)$ και $z(-4)$.

ΘΕΜΑ 2ο :

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = \lambda(1+i) + 1-i$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής στην οποία ανήκει η εικόνα του z .

β) Για ποια τιμή του λ , το $|z|$ γίνεται ελάχιστο;

γ) Υποθέτουμε ότι $\lambda > 0$. Αν $|z| = 2\sqrt{2}$ και $w = \frac{z}{\sqrt{3}-i}$ τότε:

i) Να αποδείξετε ότι $\lambda = \sqrt{3}$.

ii) Να βρείτε τις τιμές του θετικού ακέραιου αριθμού n , ώστε $w^{2n} \in \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

α) Θέτουμε $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ και έχουμε:

$$z = \lambda + \lambda i + 1 - i \Leftrightarrow x + yi = (\lambda + 1) + (\lambda - 1)i \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = \lambda - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = x - 1 \\ \lambda = y + 1 \end{cases} \Rightarrow y + 1 = x - 1 \Leftrightarrow$$

$x - y - 2 = 0$. Άρα η εικόνα του z κινείται στην ευθεία $\varepsilon: x - y - 2 = 0$.

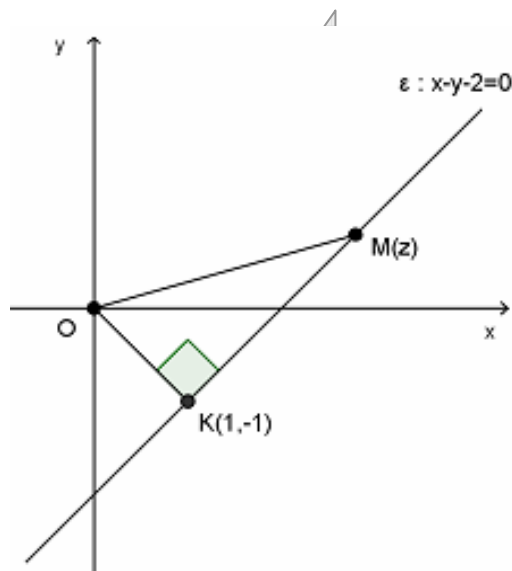
β) Η εικόνα $M(z)$ ανήκει στην ευθεία ε , επομένως το $|z| = (OM)$ γίνεται ελάχιστο, όταν το M συμπίπτει με το ίχνος K της κάθετης από το O στην ευθεία ε . Προσδιορίζουμε το K ως σημείο τομής της OK με την ευθεία ε . Είναι:

$$OK \perp \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_{OK} \cdot \lambda_{\varepsilon} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{OK} = -1.$$

Άρα η εξίσωση της ευθείας OK είναι: $OK : y = -x$.

$$\text{Λύνουμε το σύστημα : } \begin{cases} y = -x \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Άρα $K(1, -1)$, οπότε το $|z|$ γίνεται ελάχιστο, όταν $z = 1 - i$. Επομένως $\lambda = x - 1 = 1 - 1 = 0$.



2ος τρόπος Έχουμε: $z = \lambda + \lambda i + 1 - i = (\lambda + 1) + (\lambda - 1)i$. Άρα

$$|z| = \sqrt{(\lambda + 1)^2 + (\lambda - 1)^2} = \sqrt{2\lambda^2 + 2}. \text{ Οπότε ελάχιστο } |z| = \sqrt{2}, \text{ για } \lambda = 0.$$

γ) i) Έχουμε:

$$|z| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(\lambda + 1)^2 + (\lambda - 1)^2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2(\lambda^2 + 1)} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \lambda^2 = 3 \Leftrightarrow \lambda = \sqrt{3}.$$

ii) Για $\lambda = \sqrt{3}$ έχουμε:

$$w = \frac{\sqrt{3}(1+i) + (1-i)}{\sqrt{3}-i} = \frac{\sqrt{3}(1+i) - i(1+i)}{\sqrt{3}-i} = \frac{(\sqrt{3}-i)(1+i)}{\sqrt{3}-i} = 1+i.$$

$$\text{Επομένως } w^2 = (1+i)^2 = 1+2i-1 = 2i \text{ και } w^{2v} = (w^2)^v = 2^v \cdot i^v.$$

$$\text{Επειδή } w^{2v} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow i^v \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 4\kappa, & \kappa \in \mathbb{N}^* \\ v = 4\kappa + 2, & \kappa \in \mathbb{N} \end{cases}. \text{ Άρα } v \in \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}.$$

ΘΕΜΑ 3ο :

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z , u και w , οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z| = \sqrt{2}, \operatorname{Re}\left(\frac{u+3i}{u-3i}\right) = 0, u \neq 3i \text{ και } (w+2)^8 = 16(w+1)^8.$$

α) Να βρείτε τα μέτρα των u και w .

β) Να αποδείξετε ότι $z + u + w \neq 0$.

γ) Να αποδείξετε ότι $|z + u + w| = \frac{1}{6}|2zu + 2uw + 9zw|$.

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{u+3i}{u-3i}\right) = 0, \text{ άρα ο αριθμός } \frac{u+3i}{u-3i} \text{ είναι φανταστικός, οπότε έχουμε:}$$

$$\begin{aligned} \frac{u+3i}{u-3i} &= -\overline{\left(\frac{u+3i}{u-3i}\right)} \Leftrightarrow \frac{u+3i}{u-3i} = -\frac{\overline{u+3i}}{\overline{u-3i}} \Leftrightarrow \frac{u+3i}{u-3i} = -\frac{\bar{u}-3i}{\bar{u}+3i} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (u+3i)(\bar{u}+3i) = -(u-3i)(\bar{u}-3i) \Leftrightarrow u\bar{u}+3iu+3i\bar{u}-9 = -u\bar{u}+3iu+3i\bar{u}+9 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2u\bar{u} = 18 \Leftrightarrow 2|u|^2 = 18 \Leftrightarrow |u|^2 = 9 \Leftrightarrow |u| = 3. \end{aligned}$$

Είναι:

$$\begin{aligned} (w+2)^8 &= 16(w+1)^8 \Rightarrow |(w+2)^8| = |16(w+1)^8| \Leftrightarrow |w+2|^8 = 16|w+1|^8 \Leftrightarrow \\ |w+2| &= \sqrt[8]{16}|w+1| \Leftrightarrow |w+2|^2 = 2|w+1|^2 \Leftrightarrow (w+2)(\bar{w}+2) = 2(w+1)(\bar{w}+1) \Leftrightarrow \\ w\bar{w} + 2w + 2\bar{w} + 4 &= 2w\bar{w} + 2w + 2\bar{w} + 2 \Leftrightarrow w\bar{w} = 2 \Leftrightarrow |w|^2 = 2 \Leftrightarrow |w| = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

β) Υποθέτουμε ότι:

$$z+u+w=0 \Leftrightarrow z+w=-u \Rightarrow |u|=|z+w| \leq |z|+|w| \Rightarrow 3 \leq \sqrt{2}+\sqrt{2} \Leftrightarrow 3 \leq 2\sqrt{2}, \text{ που είναι άτοπο.}$$

Άρα $z+u+w \neq 0$.

γ) Έχουμε:

$$|z| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z|^2 = 2 \Leftrightarrow z\bar{z} = 2 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{2}{z}. \text{ Ομοίως είναι } \bar{u} = \frac{9}{u} \text{ και } \bar{w} = \frac{2}{w}.$$

Είναι:

$$\begin{aligned} |z+u+w| &= |\overline{z+u+w}| = |\bar{z} + \bar{u} + \bar{w}| = \left| \frac{2}{z} + \frac{9}{u} + \frac{2}{w} \right| = \left| \frac{2uw + 9zw + 2zu}{z \cdot u \cdot w} \right| = \\ &= \frac{|2uw + 9zw + 2zu|}{|z| \cdot |u| \cdot |w|} = \frac{|2uw + 9zw + 2zu|}{\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{6} |2uw + 9zw + 2zu|. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4ο :

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w, u . Αν ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z|=|w|=|u|=1 \quad (1), \quad z+w+u \neq 0 \quad (2) \quad \text{και} \quad z^2+w^2+u^2=0 \quad (3)$$

να αποδείξετε ότι:

α) $|z^2 + w^2| = |w^2 + u^2| = |u^2 + z^2|$

β) $\frac{1}{z^2} + \frac{1}{w^2} + \frac{1}{u^2} = 0$

γ) Οι εικόνες των αριθμών z, w, u, zwu και $\frac{zw+wu+uz}{z+w+u}$ είναι ομοκυκλικά σημεία.

δ) $|z + w + u| = 2$

ΛΥΣΗ

α) Από τη σχέση (3) έχουμε:

$$\begin{aligned} \bullet \quad z^2 + w^2 &= -u^2 \Rightarrow |z^2 + w^2| = |-u^2| \Rightarrow |z^2 + w^2| = |u|^2 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} |z^2 + w^2| = 1. \\ \bullet \quad w^2 + u^2 &= -z^2 \Rightarrow |w^2 + u^2| = |-z^2| \Rightarrow |w^2 + u^2| = |z|^2 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} |w^2 + u^2| = 1. \\ \bullet \quad u^2 + z^2 &= -w^2 \Rightarrow |u^2 + z^2| = |-w^2| \Rightarrow |u^2 + z^2| = |w|^2 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} |u^2 + z^2| = 1. \end{aligned}$$

Επομένως $|z^2 + w^2| = |w^2 + u^2| = |u^2 + z^2|$.

β) Είναι:

$$|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z \bar{z} = 1 \stackrel{z \neq 0}{\Leftrightarrow} \bar{z} = \frac{1}{z}.$$

Ομοίως έχουμε $\bar{w} = \frac{1}{w}$ και $\bar{u} = \frac{1}{u}$.

Έχουμε:

$$\begin{aligned} z^2 + w^2 + u^2 &= 0 \Rightarrow \overline{z^2 + w^2 + u^2} = \bar{0} \Rightarrow \bar{z}^2 + \bar{w}^2 + \bar{u}^2 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (\bar{z})^2 + (\bar{w})^2 + (\bar{u})^2 &= 0 \Rightarrow \frac{1}{z^2} + \frac{1}{w^2} + \frac{1}{u^2} = 0. \end{aligned}$$

γ) Είναι:

$$\begin{aligned} \bullet \quad |z| &= |w| = |u| = 1. \\ \bullet \quad |z w u| &= |z| \cdot |w| \cdot |u| = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1. \\ \bullet \quad \frac{|z w + w u + u z|}{|z + w + u|} &= \frac{|z w + w u + u z|}{|z + w + u|} = \frac{|z w + w u + u z|}{|z + w + u|} = \frac{|z w + w u + u z|}{|\bar{z} + \bar{w} + \bar{u}|} = \\ &= \frac{|z w + w u + u z|}{\left| \frac{1}{z} + \frac{1}{w} + \frac{1}{u} \right|} = \frac{|z w + w u + u z|}{\left| \frac{w u + u z + z w}{z w u} \right|} = \frac{|z w + w u + u z|}{|z w + w u + u z|} \cdot |z w u| = 1. \end{aligned}$$

Άρα οι εικόνες των αριθμών $z, w, u, z w u$ και $\frac{z w + w u + u z}{z + w + u}$ ανήκουν στον μοναδιαίο κύκλο, οπότε είναι ομοκυκλικά σημεία.

δ) Είναι:

$$\begin{aligned} (z + w + u)^2 &= z^2 + w^2 + u^2 + 2zw + 2wu + 2uz \stackrel{(3)}{\Rightarrow} (z + w + u)^2 = 2zw + 2wu + 2uz \Rightarrow \\ \Rightarrow |(z + w + u)^2| &= |2(zw + wu + uz)| \Rightarrow |z + w + u|^2 = 2|zw + wu + uz| \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |z + w + u| = 2 \frac{|zw + wu + uz|}{|z + w + u|} \Rightarrow |z + w + u| = 2 \frac{|zw + wu + uz|}{|z + w + u|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z + w + u| = 2 \cdot 1 \Rightarrow |z + w + u| = 2.$$

ΘΕΜΑ 5ο :

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z = 2 + \sin(\pi t) + (5 + \eta\mu(\pi t))i$, $t \in [0, +\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι $|z - 2 - 5i| = 1$.

β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z|$.

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει $t \in [0, +\infty)$ τέτοιος, ώστε η εικόνα του z να βρίσκεται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $\delta : y = x$.

δ) Έστω $w \in \mathbb{C}$ τέτοιος, ώστε $|w - 1| = |w - i|$. Να αποδείξετε ότι $|z - w| \geq \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1$.

ΛΥΣΗ

α) Είναι $|z - 2 - 5i| = |\sin(\pi t) + i\eta\mu(\pi t)| = \sqrt{\sin^2(\pi t) + \eta\mu^2(\pi t)} = 1$.

β) Επειδή $|z - (2 + 5i)| = 1$, η εικόνα $M(z)$ κινείται στον κύκλο C με κέντρο $K(2, 5)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

Καθώς η εικόνα $M(z)$ κινείται στον κύκλο C , διαπιστώνουμε ότι ισχύει

$$(OM_1) \leq (OM) \leq (OM_2) \Leftrightarrow (OM_1) \leq |z| \leq (OM_2),$$

όπου M_1, M_2 είναι τα σημεία τομής της ευθείας OK και του κύκλου C .

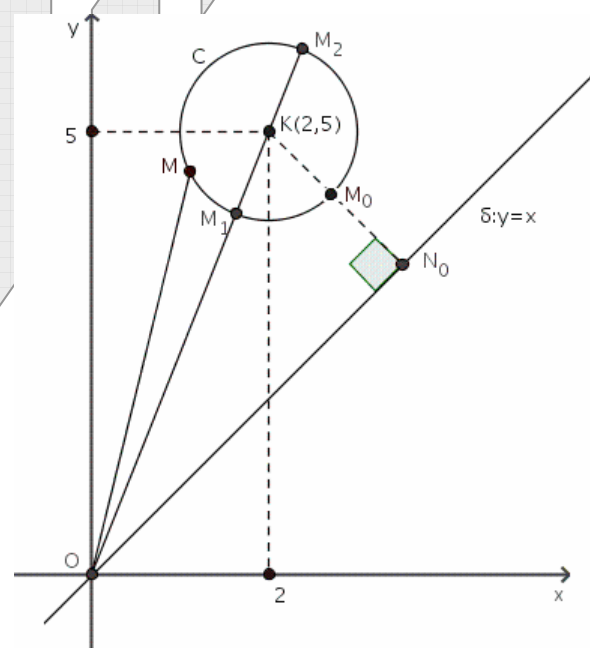
Επομένως:

- Η ελάχιστη τιμή του $|z|$ είναι:

$$\min |z| = (OK) - \rho = \sqrt{29} - 1$$

- Η μέγιστη τιμή του $|z|$ είναι

$$\max |z| = (OK) + \rho = \sqrt{29} + 1$$



γ) Βρίσκουμε την απόσταση $d(K, \delta) = \frac{|2 - 5|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} > 1 = \rho$, άρα ο κύκλος C και η ευθεία δ δεν

έχουν κοινό σημείο, επομένως δεν υπάρχει εικόνα $M(z)$ η οποία να ανήκει στην ευθεία δ .

2ος τρόπος Έχουμε $x = 2 + \sin(\pi t)$ και $y = 5 + \eta\mu(\pi t)$ Επειδή $x = y \Leftrightarrow$

$$2 + \sin(\pi t) = 5 + \eta\mu(\pi t) \Leftrightarrow \sin(\pi t) - \eta\mu(\pi t) = 3. \text{ Αποπο αφού } -2 \leq \sin(\pi t) - \eta\mu(\pi t) \leq 2$$

δ) Επειδή $|w - 1| = |w - i|$, η εικόνα $N(w)$ κινείται στην ευθεία $\delta : y = x$. Καθώς η εικόνα $M(z)$

κινείται στον κύκλο C και η εικόνα $N(w)$ κινείται στην ευθεία $\delta: y = x$, διαπιστώνουμε ότι

η ελάχιστη τιμή του $|z - w| = (MN)$ είναι $\min |z - w| = (M_0 N_0) = d(K, \delta) - \rho = \frac{3}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1$.

Επομένως ισχύει: $|z - w| \geq \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1$.

ΘΕΜΑ 6ο :

α) Αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z ανήκει σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$, να αποδείξετε ότι το ίδιο ισχύει και για την εικόνα του μιγαδικού αριθμού $w = \frac{1-2z}{z-2}$, $z \neq 2$.

β) Αν $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $|z - w| = 2\sqrt{\frac{1-x^2}{5-4x}}$, $-1 \leq x \leq 1$.

γ) Να βρείτε τους μιγαδικούς z και w ώστε, το $|z - w|$ να είναι μέγιστο και να υπολογίσετε την μέγιστη τιμή του.

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} \alpha) \text{ Είναι: } w = \frac{1-2z}{z-2} &\Leftrightarrow w(z-2) = 1-2z \Leftrightarrow wz - 2w = 1-2z \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow wz + 2z = 1+2w \Leftrightarrow (w+2)z = 1+2w \Leftrightarrow z = \frac{1+2w}{w+2}. \end{aligned}$$

Επειδή $|z|=1$ έχουμε:

$$\left| \frac{1+2w}{w+2} \right| = 1 \Leftrightarrow |1+2w| = |w+2| \Leftrightarrow |1+2w|^2 = |w+2|^2 \Leftrightarrow (1+2w)(1+2\bar{w}) = (w+2)(\bar{w}+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+2\bar{w}+2w+4w\bar{w} = w\bar{w}+2w+2\bar{w}+4 \Leftrightarrow 3|w|^2 = 3 \Leftrightarrow |w|^2 = 1 \Leftrightarrow |w| = 1.$$

β) Είναι: $|z|=1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 1 - x^2$ (1). Επειδή $y^2 \geq 0$ έχουμε:

$1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$. Είναι:

$$\begin{aligned} |z - w|^2 &= \left| z - \frac{1-2z}{z-2} \right|^2 = \left| \frac{z^2 - 2z - 1 + 2z}{z-2} \right|^2 = \left| \frac{z^2 - 1}{z-2} \right|^2 = \left| \frac{(x+yi)^2 - 1}{x+yi-2} \right|^2 \stackrel{(1)}{=} \\ &= \left| \frac{x^2 + x^2 - 1 + 2xyi - 1}{(x-2) + yi} \right|^2 = \frac{4|x^2 - 1 + xyi|^2}{|(x-2) + yi|^2} = \frac{4[(x^2 - 1)^2 + (xy)^2]}{(x-2)^2 + y^2} = \frac{4(x^4 - 2x^2 + 1 + x^2y^2)}{x^2 - 4x + 4 + y^2} \stackrel{(1)}{=} \\ &= \frac{4[x^4 - 2x^2 + 1 + x^2(1 - x^2)]}{x^2 - 4x + 4 + 1 - x^2} = \frac{4(x^4 - 2x^2 + 1 + x^2 - x^4)}{5 - 4x} = \frac{4(1 - x^2)}{5 - 4x}. \end{aligned}$$

γ) Η μέγιστη τιμή του $|z - w|$ είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = \frac{4(1-x^2)}{5-4x}$.

Έχουμε:

$$f'(x) = 4 \left(\frac{1-x^2}{5-4x} \right)' = 4 \frac{-2x(5-4x) - (1-x^2)(-4)}{(5-4x)^2} = \frac{4(4x^2 - 10x + 4)}{(5-4x)^2}.$$

Αν $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 10x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{10 \pm 6}{8}$. Άρα $x = \frac{1}{2}$ δεκτή ή $x = 2$ απορρίπτεται.

$$\text{Για } x = \frac{1}{2} \text{ η } f \text{ παρουσιάζει μέγιστο το } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right]}{5 - 4 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{3} = 1.$$

Άρα $\max |z - w| = 1$. Επίσης για $x = \frac{1}{2}$ έχουμε $y^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. Άρα είναι

$$z = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ και } w = \frac{1 - 2 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} - 2} = \frac{i\sqrt{3}}{-\frac{3}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ή}$$

$$w = \frac{1 - 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} - 2} = \frac{-i\sqrt{3}}{-\frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

ΘΕΜΑ 7ο :

Έστω συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) = 2$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $f(f(x)) + 4f(x) = 6 - x^4$ (1).

α) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$ και $f(-2)$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = 0$.

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 4f(x) - 5}{x - 1} = -4$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(f(x))$.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(f(x)) + 1 = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

ΛΥΣΗ

α) Για $x = 0$ από την (1) έχουμε: $f(f(0)) + 4f(0) = 6 \Rightarrow f(2) + 4 \cdot 2 = 6 \Rightarrow f(2) = -2$.

Για $x = 2$ από την (1) έχουμε: $f(f(2)) + 4f(2) = 6 - 2^4 \Rightarrow f(-2) + 4 \cdot (-2) = 6 - 16 \Rightarrow f(-2) = -2$.

β) Είναι $f(-2) = -2 < 0 < 2 = f(0)$ και η f είναι συνεχής στο $[-2, 0]$, επομένως από θεώρημα

ενδιαμέσων τιμών θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-2, 0)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

Για $x = x_0$ από την (1) έχουμε:

$$f(f(x_0)) + 4f(x_0) = 6 - x_0^4 \Rightarrow f(0) + 4 \cdot 0 = 6 - x_0^4 \Rightarrow 2 = 6 - x_0^4 \Rightarrow x_0^4 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0 = \sqrt{2} \text{ ή } x_0 = -\sqrt{2} \Rightarrow x_0 = -\sqrt{2}, \text{ αφού } x_0 \in (-2, 0). \text{ Άρα } f(-\sqrt{2}) = 0.$$

Είναι $f(2) = -2 < 0 < 2 = f(0)$ και η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$, επομένως από Θεώρημα

Ενδιαμέσων Τιμών θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 0$.

Για $x = x_1$ από την (1) έχουμε:

$$f(f(x_1)) + 4f(x_1) = 6 - x_1^4 \Rightarrow f(0) + 4 \cdot 0 = 6 - x_1^4 \Rightarrow 2 = 6 - x_1^4 \Rightarrow x_1^4 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \sqrt{2} \text{ ή } x_1 = -\sqrt{2} \Rightarrow x_1 = \sqrt{2}, \text{ αφού } x_1 \in (0, 2). \text{ Άρα } f(\sqrt{2}) = 0.$$

γ) Για $x \neq 1$, θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{x^4 + 4f(x) - 5}{x - 1}$, οπότε $f(x) = \frac{(x-1)g(x) - x^4 + 5}{4}$ (2)

Από υπόθεση είναι $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -4$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)g(x) - x^4 + 5}{4} = 1$, και

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f(x)) \stackrel{u=f(x)}{=} \lim_{u \rightarrow 1} f(u) = 1.$$

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(f(x)) + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[-\sqrt{2}, 0]$ και $[0, \sqrt{2}]$, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, της $f(f(x))$ που είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών και της σταθερής συνάρτησης 1.

Είναι:

$$\square g(-\sqrt{2}) = f(f(-\sqrt{2})) + 1 = f(0) + 1 = 2 + 1 = 3.$$

$$\square g(0) = f(f(0)) + 1 = f(2) + 1 = -2 + 1 = -1.$$

$$\square g(\sqrt{2}) = f(f(\sqrt{2})) + 1 = f(0) + 1 = 2 + 1 = 3.$$

$$\text{Επομένως } g(-\sqrt{2}) \cdot g(0) = -3 < 0 \text{ και } g(0) \cdot g(\sqrt{2}) = -3 < 0.$$

Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Bolzano σε δύο διαστήματα, άρα η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(f(x)) + 1 = 0$

θα έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-\sqrt{2}, 0)$ και μια τουλάχιστον ρίζα στο

διάστημα $(0, \sqrt{2})$, δηλαδή δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

ΘΕΜΑ 8ο :

Δίνεται η συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{f(x+1)} = 1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από την αρχή των

αξόνων.

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{x}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει την ευθεία $y = x - 1$ σε ένα ακριβώς σημείο (x_0, y_0) με $x_0 \in (0, 1)$.

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{f(x+1)} = 1 \Leftrightarrow \lim_{\substack{u=x+1 \\ u \rightarrow 0}} \frac{u}{f(u)} = 1 \quad (1).$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(u) = \frac{u}{f(u)}$, για u κοντά στο 0, οπότε $g(u) \cdot f(u) = u$ και από (1)

έχουμε $\lim_{u \rightarrow 0} g(u) = 1 \quad (2).$

Είναι $\lim_{u \rightarrow 0} [g(u) \cdot f(u)] = \lim_{u \rightarrow 0} u \Leftrightarrow \lim_{u \rightarrow 0} g(u) \cdot \lim_{u \rightarrow 0} f(u) = 0 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \lim_{u \rightarrow 0} f(u) = 0$ και αφού η f είναι συνεχής ισχύει $f(0) = 0$, δηλαδή η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Για x κοντά στο 0 είναι:

$$\frac{f(\eta\mu x)}{x} = \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} \cdot \frac{\eta\mu x}{x}$$

Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} \stackrel{u=\eta\mu x}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{u}{f(u)}} \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{1} = 1.$$

Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

γ) Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = x - 1$ έχει μία ακριβώς ρίζα $x_0 \in (0, 1)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $h(0) = f(0) - 0 + 1 = 1 > 0$ και $h(1) = f(1) - 1 + 1 = f(1) < 0$, γιατί η f είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση, οπότε $1 > 0 \Leftrightarrow f(1) < f(0) = 0$. Άρα $h(0)h(1) < 0$.

Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Bolzano, άρα η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x - 1$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα $x_0 \in (0, 1)$.

Για $x_1, x_2 \in (0, 1)$ με $x_1 < x_2$ ισχύουν:

$$f(x_1) > f(x_2) \quad \text{και} \quad -x_1 + 1 > -x_2 + 1,$$

οπότε προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$f(x_1) - x_1 + 1 > f(x_2) - x_2 + 1 \Leftrightarrow h(x_1) > h(x_2).$$

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1)$, οπότε η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

Δηλαδή η εξίσωση $f(x) = x - 1$ έχει μία ακριβώς ρίζα $x_0 \in (0, 1)$.

ΘΕΜΑ 9ο :

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση $f^2(x) = x^6$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

γ) Αν $f(-2) > 0$ και $f(2) < 0$, να αποδείξετε ότι $f(x) = -x^3$.

δ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .

ε) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} .

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0 \Leftrightarrow x^6 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει στο $\mathbb{R}$ μοναδική ρίζα την $x = 0$.

β) Η συνάρτηση f στο $(-\infty, 0)$ είναι συνεχής και δε μηδενίζεται, οπότε σε αυτό το διάστημα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Η συνάρτηση f στο $(0, +\infty)$ είναι συνεχής και δε μηδενίζεται, οπότε σε αυτό το διάστημα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

γ) Η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-\infty, 0)$ και από υπόθεση είναι $f(-2) > 0$, οπότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$. Επομένως στο διάστημα αυτό έχουμε:

$$f^2(x) = x^6 \Leftrightarrow f(x) = -x^3, \text{ αφού } x < 0.$$

Επειδή $f(0) = 0$ έχουμε τελικά:

$$f(x) = -x^3 \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 0] \quad (1).$$

Η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$ και από υπόθεση είναι $f(2) < 0$, οπότε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Επομένως στο διάστημα αυτό έχουμε:

$$f^2(x) = x^6 \Leftrightarrow f(x) = -x^3, \text{ αφού } x > 0.$$

Επειδή $f(0) = 0$ έχουμε τελικά:

$$f(x) = -x^3 \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty) \quad (2).$$

Συνδυάζοντας τις περιπτώσεις (1) και (2) έχουμε:

$$f(x) = -x^3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

δ) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$, τότε έχουμε διαδοχικά:

$$-x_1^3 = -x_2^3 \Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η f είναι «1-1» στο $\mathbb{R}$, οπότε αντιστρέφεται.

Για να ορίσουμε τη συνάρτηση f^{-1} , λύνουμε την εξίσωση $y = f(x)$ ως προς x .

Έχουμε:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = -x^3 \Leftrightarrow (-x)^3 = y \Leftrightarrow -x = \begin{cases} -\sqrt[3]{-y}, & y < 0 \\ \sqrt[3]{y}, & y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{cases} \sqrt[3]{-y}, & y < 0 \\ -\sqrt[3]{y}, & y \geq 0 \end{cases}.$$

Επειδή ισχύει η ισοδυναμία $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ έχουμε $f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{-y}, & y < 0 \\ -\sqrt[3]{y}, & y \geq 0 \end{cases}.$

Επομένως:
$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{-x}, & x < 0 \\ -\sqrt[3]{x}, & x \geq 0 \end{cases}.$$

ε) Λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = f(x) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases} &\stackrel{f:1-1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y = f(x) \\ f(y) = f(f^{-1}(x)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ f(y) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ x = f(y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^3 \\ x = -y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^3 \\ x + y = -x^3 - y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^3 \\ x^3 + y^3 + x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^3 \\ (x+y) \underbrace{(x^2 - xy + y^2 + 1)}_{\neq 0} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^3 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^3 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = -x^3 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x = 0 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1)(x-1) = 0 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ ή } x = 0 \text{ ή } x = 1 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (-1, 1) \text{ ή } (0, 0) \text{ ή } (1, -1). \end{aligned}$$

Άρα τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι τα:

$$A(-1, 1), \quad O(0, 0) \quad \text{και} \quad B(1, -1).$$

ΘΕΜΑ 10ο :

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $z \in \mathbb{C} - \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$ έτσι, ώστε να ισχύουν:

$$(1) \quad f^2(x) + \eta \mu^2 x = 2x f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και}$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \ell, \text{ με } \ell = \frac{|z-2|}{|2z-1|}.$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $|z-2| = |2z-1|$

ii) Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z ανήκουν στον κύκλο $C : x^2 + y^2 = 1$.

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{x^2 - x}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

δ) Να βρείτε όλους τους δυνατούς τύπους της συνάρτησης f .

ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(|z + 3 - 4i| + 5)x = x^3 + 10$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[1, 2]$.

ΛΥΣΗ

α) i) Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της σχέσης (1) με $x^2 \neq 0$ έχουμε

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 = 2 \frac{f(x)}{x} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^* \quad (3).$$

Από τη σχέση (2) έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \ell$, $\ell \in \mathbb{R}$. Αν πάρουμε τα όρια και των δύο μελών στη σχέση (3) έχουμε:

$$\ell^2 + 1 = 2\ell \Leftrightarrow \ell^2 - 2\ell + 1 = 0 \Leftrightarrow (\ell - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \ell = 1, \quad \text{δηλαδή} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad (4).$$

Επομένως έχουμε $\frac{|z-2|}{|2z-1|} = 1 \Leftrightarrow |z-2| = |2z-1|$.

ii) Είναι $|z-2|^2 = |2z-1|^2 \Leftrightarrow (z-2)(\bar{z}-2) = (2z-1)(2\bar{z}-1) \Leftrightarrow z\bar{z} - 2z - 2\bar{z} + 4 = 4z\bar{z} - 2z - 2\bar{z} + 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3z\bar{z} = 3 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$. Αν θέσουμε $z = x + yi$, τότε $x^2 + y^2 = 1$.

Επομένως οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z ανήκουν στον κύκλο $C : x^2 + y^2 = 1$.

β) Για x κοντά στο $x_0 = 0$ έχουμε:

$$\frac{f(\eta\mu x)}{x^2 - x} = \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} \cdot \frac{\eta\mu x}{x^2 - x} = \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{1}{x-1}$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} \stackrel{u=\eta\mu x}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{u} \stackrel{(4)}{=} 1$ (5), οπότε έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x-1} \stackrel{(5)}{=} 1 \cdot 1 \cdot (-1) = -1.$$

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f^2(x) - 2xf(x) + x^2 = x^2 - \eta\mu^2 x \Leftrightarrow (f(x) - x)^2 = x^2 - \eta\mu^2 x \Leftrightarrow g^2(x) = x^2 - \eta\mu^2 x \quad (6).$$

$$\text{Είναι } g(x) = 0 \Leftrightarrow g^2(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - \eta\mu^2 x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = x^2 \Leftrightarrow |\eta\mu x| = |x| \Leftrightarrow x = 0.$$

Θυμίζουμε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|\eta\mu x| \leq |x|$ και ότι η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$.

Άρα για $x \neq 0$ έχουμε $|\eta\mu x| < |x| \Leftrightarrow \eta\mu^2 x < x^2 \Leftrightarrow x^2 - \eta\mu^2 x > 0 \Leftrightarrow g^2(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) \neq 0$

Η συνάρτηση λοιπόν $g(x) = f(x) - x$ είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και δε μηδενίζεται στο $\mathbb{R}^*$, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$

και $(0, +\infty)$.

δ) Διακρίνουμε περιπτώσεις:

♦ Στο διάστημα $(-\infty, 0)$ έχουμε:

• Αν $g(x) < 0$, τότε από τη σχέση (6) έχουμε

$$g(x) = -\sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \Leftrightarrow f(x) - x = -\sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \Leftrightarrow f(x) = x - \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \quad (I).$$

• Αν $g(x) > 0$, τότε από τη σχέση (6) έχουμε

$$g(x) = \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \Leftrightarrow f(x) - x = \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \quad (II).$$

♦ Στο διάστημα $(0, +\infty)$ έχουμε:

• Αν $g(x) < 0$, τότε από τη σχέση (6) έχουμε

$$g(x) = -\sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \Leftrightarrow f(x) - x = -\sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \Leftrightarrow f(x) = x - \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \quad (III).$$

• Αν $g(x) > 0$, τότε από τη σχέση (6) έχουμε

$$g(x) = \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \Leftrightarrow f(x) - x = \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \quad (IV).$$

Συνδυάζοντας τις περιπτώσεις:

➤ (I) και (III) και επειδή $f(0) = 0$ έχουμε $f(x) = x - \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}$, $x \in \mathbb{R}$.

➤ (I) και (IV) και επειδή $f(0) = 0$ έχουμε $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}, & x < 0 \\ x + \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}, & x \geq 0 \end{cases}$.

➤ (II) και (III) και επειδή $f(0) = 0$ έχουμε $f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}, & x < 0 \\ x - \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}, & x \geq 0 \end{cases}$.

➤ (II) και (IV) και επειδή $f(0) = 0$ έχουμε $f(x) = x + \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}$, $x \in \mathbb{R}$.

ε) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = x^3 - (|z+3-4i|+5)x+10$, $x \in [1, 2]$, η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$ και ισχύει:

$$h(1) = 1 - (|z+3-4i|+5) \cdot 1 + 10 = 6 - |z+3-4i|$$

$$h(2) = 8 - (|z+3-4i|+5) \cdot 2 + 10 = 8 - 2 \cdot |z+3-4i| = 2 \cdot (4 - |z+3-4i|)$$

$$\text{Όμως } ||z| - |3-4i|| \leq |z+3-4i| \leq |z| + |3-4i| \Leftrightarrow |1-5| \leq |z+3-4i| \leq 1+5 \Leftrightarrow 4 \leq |z+3-4i| \leq 6.$$

Άρα $h(1) \geq 0$ και $h(2) \leq 0$, οπότε $h(1)h(2) \leq 0$.

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

• Αν $h(1)h(2) = 0$, τότε $h(1) = 0$ ή $h(2) = 0$, άρα ρίζες της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 1 και 2.

• Αν $h(1)h(2) < 0$, τότε ισχύει το Θεώρημα Bolzano, οπότε η εξίσωση $h(x) = 0$ θα έχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (1, 2)$.

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in [1, 2]$.

ΘΕΜΑ 11ο :

Έστω οι μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί z, w . Αν $\frac{z}{w} = 1 + i\sqrt{3}$ και η εικόνα A του μιγαδικού αριθμού z , στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει στο κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=2$, τότε:

A) Να αποδείξετε ότι:

α) Η εικόνα B του μιγαδικού w ανήκει στο μοναδιαίο κύκλο.

β) $|z - w| = \sqrt{3}$ και $|z + w| = \sqrt{7}$.

B) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $|(\xi^3 - 2)z + \xi w| + |\xi^2 z + w| = 2e^\xi$.

Γ) Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|(3i - 4)x - xz| - 2010}{\eta\mu x + x} = \kappa$, να αποδείξετε ότι $3 \leq \kappa \leq 7$.

ΛΥΣΗ

A) α) Η εικόνα A του μιγαδικού αριθμού z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει στον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=2$, άρα ισχύει $|z|=2$. Είναι $\frac{z}{w} = 1 + i\sqrt{3} \Leftrightarrow w = \frac{z}{1 + i\sqrt{3}}$.

$$\text{Άρα } |w| = \left| \frac{z}{1 + i\sqrt{3}} \right| \Leftrightarrow |w| = \frac{|z|}{|1 + i\sqrt{3}|} \Leftrightarrow |w| = \frac{2}{\sqrt{1+3}} \Leftrightarrow |w| = \frac{2}{2} \Leftrightarrow |w| = 1.$$

Επομένως η εικόνα B του μιγαδικού w ανήκει στο μοναδιαίο κύκλο.

β) Είναι:

$$\frac{z}{w} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1} \Leftrightarrow \frac{z - w}{w} = \frac{1 + i\sqrt{3} - 1}{1} \Leftrightarrow \frac{z - w}{w} = i\sqrt{3}$$

$$\text{Άρα } \left| \frac{z - w}{w} \right| = |i\sqrt{3}| \Leftrightarrow \frac{|z - w|}{|w|} = \sqrt{0^2 + (\sqrt{3})^2} \stackrel{|w|=1}{\Leftrightarrow} |z - w| = \sqrt{3}.$$

Είναι:

$$\frac{z}{w} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1} \Leftrightarrow \frac{z + w}{w} = \frac{1 + i\sqrt{3} + 1}{1} \Leftrightarrow \frac{z + w}{w} = 2 + i\sqrt{3}$$

$$\text{Άρα } \left| \frac{z + w}{w} \right| = |2 + i\sqrt{3}| \Leftrightarrow \frac{|z + w|}{|w|} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} \stackrel{|w|=1}{\Leftrightarrow} |z + w| = \sqrt{7}.$$

B) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = |(x^3 - 2)z + xw| + |x^2 z + w| - 2e^x$ στο διάστημα $[0, 1]$.

• Η h συνεχής στο $[0, 1]$ ως πράξη συνεχών.

• $h(0) = |-2z| + |w| - 2e^0 = 2|z| + |w| - 2 = 3 > 0$

$$h(1) = |-z + w| + |z + w| - 2e = |z - w| + |z + w| - 2e = \sqrt{3} + \sqrt{7} - 2e < 0$$

Άρα $h(0) \cdot h(1) < 0$.

Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Bolzano, οπότε θα υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $h(\xi) = 0$.

$$\text{Είναι } h(\xi) = 0 \Leftrightarrow |(\xi^3 - 2)z + \xi w| + |\xi^2 z + w| - 2e^\xi = 0 \Leftrightarrow |(\xi^3 - 2)z + \xi w| + |\xi^2 z + w| = 2e^\xi$$

Γ) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$\bullet \frac{|(3i-4)x - xz| - 2010}{\eta\mu x + x} = \frac{|(3i-4) - z| \cdot x - 2010}{\eta\mu x + x} = \frac{|(3i-4) - z| - \frac{2010}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x} + 1}$$

$$\bullet \left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| = \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} = \frac{1}{x}, \text{ οπότε } -\frac{1}{x} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, οπότε από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$.

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|(3i-4)x - xz| - 2010}{\eta\mu x + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|(3i-4) - z| - \frac{2010}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x} + 1} = |(3i-4) - z|, \text{ οπότε } \kappa = |(3i-4) - z|.$$

$$\text{Ισχύει } ||3i-4| - |z|| \leq |(3i-4) - z| \leq |3i-4| + |z| \Leftrightarrow |5-2| \leq \kappa \leq 5+2 \Leftrightarrow 3 \leq \kappa \leq 7.$$

ΘΕΜΑ 12ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $u = \frac{1}{f(\alpha)} + \beta i$ και $w = \frac{1}{f(\beta)} - \alpha i$.

α) Να αποδείξετε ότι $\operatorname{Re}(uw) = \frac{1}{f(\alpha)f(\beta)} + \alpha\beta$ και $\operatorname{Im}(uw) = \frac{\beta}{f(\beta)} - \frac{\alpha}{f(\alpha)}$.

β) Αν $\operatorname{Im}(uw) = 0$ και $0 \notin [\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi}$.

γ) Αν $\operatorname{Re}(uw) = 0$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α, β είναι ετερόσημοι.

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(f(2004)f(2010) \cdot x^2 \eta\mu \frac{1}{x} \right)$.

ΛΥΣΗ

α) Είναι $uw = \left(\frac{1}{f(\alpha)} + \beta i \right) \left(\frac{1}{f(\beta)} - \alpha i \right) = \left(\frac{1}{f(\alpha)f(\beta)} + \alpha\beta \right) + \left(\frac{\beta}{f(\beta)} - \frac{\alpha}{f(\alpha)} \right) i$,

άρα $\operatorname{Re}(uw) = \frac{1}{f(\alpha)f(\beta)} + \alpha\beta$ και $\operatorname{Im}(uw) = \frac{\beta}{f(\beta)} - \frac{\alpha}{f(\alpha)}$.

β) Είναι $\operatorname{Im}(uw) = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta}{f(\beta)} = \frac{\alpha}{f(\alpha)} \Leftrightarrow \frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{f(\beta)}{\beta}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \in [\alpha, \beta]$.

- Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $[α,β]$ με $h'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$.

- $\frac{f(α)}{α} = \frac{f(β)}{β}$

Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Rolle στο διάστημα $[α,β]$, οπότε θα υπάρχει $ξ \in (α,β)$ τέτοιο, ώστε

$$h'(ξ) = 0 \Leftrightarrow \frac{ξf'(ξ) - f(ξ)}{ξ^2} = 0 \Leftrightarrow f'(ξ) = \frac{f(ξ)}{ξ}.$$

γ) Είναι $\operatorname{Re}(uw) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{f(α)f(β)} + αβ = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{f(α)f(β)} = -αβ \quad (1).$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, επομένως $f(α)f(β) > 0$ (2). Από (1) και (2) έχουμε $αβ < 0$, άρα οι αριθμοί $α, β$ είναι ετερόσημοι.

δ) Για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ έχουμε:

$$f(2004)f(2010) \cdot x^2 \eta\mu \frac{1}{x} = f(2004)f(2010) \cdot x \cdot \frac{\eta\mu \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

Έχουμε:

- Επειδή η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, οι αριθμοί $f(2004)$ και $f(2010)$ είναι ομόσημοι, άρα $f(2004) \cdot f(2010) > 0$.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\eta\mu t}{t} = 1$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$.

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(2004)f(2010) \cdot x^2 \eta\mu \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(2004)f(2010) \cdot x \cdot \frac{\eta\mu \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \right) = -\infty.$$

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 2010

ΘΕΜΑ 13ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, e) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 0$ η οποία για κάθε $x \in (0, e)$ ικανοποιεί τη σχέση $\ln(f'(x)) = f(x) - \ln x$.

A. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

B. Αν $f(x) = -\ln(1 - \ln x)$, $x \in (0, e)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e)$.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

γ) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος.

δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $1 - \ln x = \frac{1}{e^a}$, για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

A. Για κάθε $x \in (0, e)$ είναι:

$$\begin{aligned} \ln(f'(x)) &= f(x) - \ln x \Leftrightarrow f'(x) = e^{f(x) - \ln x} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{e^{f(x)}} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f'(x) \cdot e^{-f(x)} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \left(-e^{-f(x)}\right)' = (\ln x)' \Leftrightarrow -e^{-f(x)} = \ln x + c. \end{aligned}$$

Είναι $f(1) = 0$, οπότε $-e^0 = \ln 1 + c \Leftrightarrow c = -1$.

Επομένως έχουμε:

$$-e^{-f(x)} = \ln x - 1 \Leftrightarrow e^{-f(x)} = 1 - \ln x \Leftrightarrow -f(x) = \ln(1 - \ln x) \Leftrightarrow f(x) = -\ln(1 - \ln x), \quad x \in (0, e).$$

B. α) Για κάθε $x \in (0, e)$ είναι:

$$f'(x) = (-\ln(1 - \ln x))' = -\frac{1}{1 - \ln x} (1 - \ln x)' = \frac{1}{x(1 - \ln x)}.$$

Είναι $0 < x < e \Rightarrow \ln x < \ln e \Rightarrow \ln x < 1 \Rightarrow 1 - \ln x > 0$. Άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, e)$.

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e)$.

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, e)$, άρα το σύνολο τιμών της είναι το $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow e^-} f(x) \right)$.

Είναι:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln(1 - \ln x)) \stackrel{1 - \ln x = t}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} (-\ln t) = -\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^-} (-\ln(1 - \ln x)) \stackrel{1 - \ln x = t}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} (-\ln t) = +\infty.$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $f(A) = \mathbb{R}$.

γ) Για κάθε $x \in (0, e)$ είναι:

$$f''(x) = \left(\frac{1}{x(1 - \ln x)} \right)' = \frac{-[x(1 - \ln x)]'}{[x(1 - \ln x)]^2} = \frac{-(1 - \ln x) + 1}{x^2(1 - \ln x)^2} = \frac{\ln x}{x^2(1 - \ln x)^2}$$

Το πρόσημο της f'' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f' , φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

x	0	1	e
f''		- 0 +	
f'		↘ 1 ↗	

ελάχ.

Έχουμε:

- Η f' είναι συνεχής στο $(0, 1]$ και $f''(x) < 0$ στο $(0, 1)$, άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$.
- Η f' είναι συνεχής στο $[1, e)$ και $f''(x) > 0$ στο $(1, e)$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, e)$.
- Η f' παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$, με ελάχιστη τιμή $f'(1)=1$.

Άρα ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος, όταν $x=1$.

δ) Για κάθε $x \in (0, e)$ είναι:

$$1 - \ln x = \frac{1}{e^a} \Leftrightarrow \ln(1 - \ln x) = -a \Leftrightarrow -\ln(1 - \ln x) = a \Leftrightarrow f(x) = a.$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e)$ και το σύνολο τιμών της είναι το $f((0, e)) = \mathbb{R}$.

Άρα για κάθε $a \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $f(x) = a$ έχει μοναδική λύση.

ΘΕΜΑ 14ο :

Θεωρούμε συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και το μιγαδικό αριθμό $z = e^x + g(x)i$.

A. Αν ισχύει $|z|^2 = (\operatorname{Re}(z))^2(1+x^2)$, $g(1) = e$ και $g(-1) = -\frac{1}{e}$ να αποδείξετε ότι $g(x) = xe^x$.

B. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f(0) = 1$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $g(x) = f'(x) - f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right)$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και η $C_{f^{-1}}$ διέρχεται από τα σημεία $A(1, 0)$ και $B\left(\frac{3e}{2}, 1\right)$.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 = e^{-x} - 2$ έχει ακριβώς μία πραγματική λύση.

ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon : ex - 2y + 3 = 0$.

ΛΥΣΗ

A. Έχουμε:

$$|z|^2 = (\operatorname{Re}(z))^2(1+x^2) \Leftrightarrow \left(\sqrt{e^{2x} + g^2(x)} \right)^2 = e^{2x}(1+x^2) \Leftrightarrow g^2(x) = e^{2x}x^2 \Leftrightarrow |g(x)| = |xe^x| \quad (1).$$

Είναι:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow |g(x)| = 0 \Leftrightarrow |xe^x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει στο $\mathbb{R}$ μοναδική ρίζα την $x = 0$.

- Η συνάρτηση g στο $(-\infty, 0)$ είναι συνεχής και δε μηδενίζεται, οπότε σε αυτό το διάστημα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Είναι $g(-1) = -\frac{1}{e} < 0$, οπότε $g(x) < 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 0)$.

Επομένως στο διάστημα $(-\infty, 0)$ έχουμε:

$$|g(x)| = |xe^x| \Leftrightarrow g(x) = xe^x, \text{ αφού } x < 0.$$

Επειδή $g(0) = 0$ έχουμε τελικά:

$$g(x) = xe^x \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 0] \quad (1).$$

- Η συνάρτηση g στο $(0, +\infty)$ είναι συνεχής και δε μηδενίζεται, οπότε σε αυτό το διάστημα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Είναι $g(1) = e > 0$, οπότε $g(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Επομένως στο διάστημα $(0, +\infty)$ έχουμε:

$$|g(x)| = |xe^x| \Leftrightarrow g(x) = xe^x, \text{ αφού } x > 0.$$

Επειδή $g(0) = 0$ έχουμε τελικά:

$$g(x) = xe^x \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty) \quad (2).$$

Συνδυάζοντας τις περιπτώσεις (1) και (2) έχουμε $g(x) = xe^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Β. α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\begin{aligned} g(x) = f'(x) - f(x) &\Leftrightarrow xe^x = f'(x) - f(x) \Leftrightarrow e^x f'(x) - e^x f(x) = xe^{2x} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{e^x f'(x) - e^x f(x)}{e^{2x}} = x \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{e^x} \right)' = \left(\frac{x^2}{2} \right)' . \text{ Άρα } \frac{f(x)}{e^x} = \frac{x^2}{2} + c, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } f(0) = 1 \text{ άρα } c = 1, \text{ επομένως } f(x) = e^x \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x) = \left[e^x \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right) \right]' = e^x \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right) + e^x x = e^x \left(\frac{x^2}{2} + x + 1 \right) = \frac{1}{2} (x^2 + 2x + 2) e^x > 0,$$

επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και «1-1», οπότε αντιστρέφεται.

Ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow f^{-1}(1) = 0 \quad \text{και} \quad f(1) = \frac{3}{2}e \Leftrightarrow f^{-1}\left(\frac{3}{2}e\right) = 1$$

Άρα η $C_{f^{-1}}$ διέρχεται από τα σημεία $A(1, 0)$ και $B\left(\frac{3e}{2}, 1\right)$.

γ) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα το σύνολο τιμών της είναι το $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$.

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2}{2} + 1}{e^{-x}} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{\text{D.L.H.}}{=}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-e^{-x}} \stackrel{\frac{-\infty}{-\infty}}{\underset{\text{D.L.H.}}{=}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0. \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right) &= +\infty, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty. \end{aligned}$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $f(A) = (0, +\infty)$.

δ) Η αρχική εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$x^2 = e^{-x} - 2 \Leftrightarrow x^2 + 2 = \frac{1}{e^x} \Leftrightarrow e^x (x^2 + 2) = 1 \Leftrightarrow e^x \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}.$$

Επειδή το $\frac{1}{2} \in (0, +\infty) = f(A)$ η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$, άρα και η ισοδύναμή της εξίσωση $x^2 = e^{-x} - 2$ έχει μία πραγματική ρίζα, η οποία είναι και μοναδική, γιατί η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ε) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ με $f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 2)e^x$, άρα ισχύει

$$\text{Θ.Μ.Τ. επομένως θα υπάρχει } x_0 \in (0, 1) \text{ τέτοιο, ώστε } f'(x_0) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{\frac{3e}{2} - e}{1 - 0} = \frac{e}{2}.$$

Είναι $\varepsilon: y = \frac{e}{2}x + \frac{3}{2}$, άρα ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε είναι $\lambda_\varepsilon = \frac{e}{2}$.

Παρατηρούμε ότι $f'(x_0) = \lambda_\varepsilon$, οπότε υπάρχει σημείο της C_f με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$ στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: ex - 2y + 3 = 0$.

ΘΕΜΑ 15ο :

A) Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι "1-1" και συνεχής σε ένα διάστημα Δ , τότε είναι γνησίως μονότονη στο Δ .

B) Έστω συνάρτηση f τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f^{(3)}(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν $f'(2) > 0$, $f^{(3)}(2) > 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) + f(4-x) = 3$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η f'' είναι γνησίως μονότονη.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2f(x) = 3$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο $\mathbb{R}$.

δ) Αν η γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο M , να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_g στο σημείο M σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .

ε) Για $x \geq 2$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2f(x+1) = f(x) + f(x+2)$ είναι αδύνατη.

ΛΥΣΗ

A) Έστω $x_1, x_2, x_3 \in \Delta$ με $x_1 < x_2 < x_3$, οπότε αφού η f είναι "1-1" οι τιμές $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ θα είναι διαφορετικές μεταξύ τους ανά δύο.

Υποθέτουμε επίσης ότι η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως μονότονη, οπότε δεν θα ισχύει καμία από τις σχέσεις $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$ και $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$. Δηλαδή το $f(x_2)$ δεν θα βρίσκεται ανάμεσα στο $f(x_1)$ και στο $f(x_3)$.

Επομένως θα ισχύει μία από τις παρακάτω ανισότητες:

$$f(x_1) < f(x_3) < f(x_2) \quad (1)$$

$$f(x_2) < f(x_3) < f(x_1) \quad (2)$$

$$f(x_2) < f(x_1) < f(x_3) \quad (3)$$

$$f(x_3) < f(x_1) < f(x_2) \quad (4)$$

Ας υποθέσουμε ότι ισχύει η (1), τότε εφόσον το $f(x_3)$ βρίσκεται μεταξύ του $f(x_1)$ και του $f(x_2)$, θα υπάρχει σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = f(x_3)$. Επομένως για $x_1 < \xi < x_2 < x_3$, δηλαδή για $\xi < x_3$ έχουμε $f(\xi) = f(x_3)$ που είναι άτοπο, αφού η f είναι "1-1". Ομοίως θα καταλήξουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε ότι ισχύει μία από τις ανισότητες (2), (3) και (4).

Β) α) Κατ' αρχάς θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f'' είναι "1-1".

Αν υποθέσουμε ότι η f'' δεν είναι "1-1", τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$ τέτοια, ώστε $f''(x_1) = f''(x_2)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $x_1 < x_2$, οπότε έχουμε:

- Η f'' είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[x_1, x_2]$, αφού η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
- $f''(x_1) = f''(x_2)$.

Άρα η f'' ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f^{(3)}(\xi) = 0$, που είναι άτοπο, αφού από υπόθεση είναι $f^{(3)}(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η συνάρτηση f'' είναι "1-1" στο $\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε η f'' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Επίσης η f'' είναι "1-1", οπότε σύμφωνα με το (Α) ερώτημα η f'' είναι γνησίως μονότονη.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) + f(4-x) = 3$. Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη έχουμε:

$$f'(x) - f'(4-x) = 0 \quad \text{και} \quad f''(x) + f''(4-x) = 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Για } x=2 \text{ είναι } f''(2) + f''(4-2) = 0 \Leftrightarrow 2f''(2) = 0 \Leftrightarrow f''(2) = 0 \quad (1).$$

Η f'' είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και επειδή από υπόθεση είναι $f^{(3)}(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ συμπεραίνουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ή $f^{(3)}(x) > 0$ ή $f^{(3)}(x) < 0$. Όμως $f^{(3)}(2) > 0$, άρα $f^{(3)}(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Για $x < 2$ είναι $f''(x) < f''(2) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} f''(x) < 0$, ενώ για $x > 2$ είναι $f''(x) > f''(2) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} f''(x) > 0$.

Το πρόσημο της f'' καθώς και η κυρτότητα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f''	-	0	+
f	$\cap$	3/2	$\cup$

Σ. Κ.

Για $x=2$ από την αρχική σχέση έχουμε:

$$f(2) + f(4-2) = 3 \Leftrightarrow 2f(2) = 3 \Leftrightarrow f(2) = \frac{3}{2} \quad (2).$$

Έχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 2]$ και $f''(x) < 0$ στο $(-\infty, 2)$, άρα η f κοίλη στο $(-\infty, 2]$.
- Η f είναι συνεχής στο $[2, +\infty)$ και $f''(x) > 0$ στο $(2, +\infty)$, άρα η f κυρτή στο $[2, +\infty)$.
- Η f παρουσιάζει καμπή στο $x_0=2$ και το σημείο καμπής είναι το $A\left(2, \frac{3}{2}\right)$.

γ) Από τη σχέση (2) συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $2f(x) = 3$ έχει ρίζα τον αριθμό $x=2$. Θα αποδείξουμε τώρα ότι η παραπάνω ρίζα είναι μοναδική.

Από το (β) ερώτημα έχουμε:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f''	-	0	+
f'		$f'(2)$	

ελάχ.

Η συνάρτηση f' παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $x_0=2$, άρα $f'(x) \geq f'(2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Όμως από υπόθεση είναι $f'(2) > 0$, άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η ρίζα $x=2$ είναι μοναδική.

δ) Αν x_0 η τετμημένη του σημείου M , στο οποίο η C_g τέμνει τον άξονα $x'x$, τότε έχουμε:

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 0 \quad (3).$$

$$\text{Για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι } g'(x) = \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

$$\text{Άρα } g'(x_0) = \frac{[f'(x_0)]^2 - f(x_0)f''(x_0)}{[f'(x_0)]^2} \stackrel{(3)}{=} \frac{[f'(x_0)]^2}{[f'(x_0)]^2} = 1, \text{ οπότε ο συντελεστής διεύθυνσης της}$$

εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_g , της συνάρτησης g στο σημείο M , στο οποίο η C_g τέμνει τον άξονα $x'x$ είναι $\lambda_\varepsilon = g'(x_0) = 1$, οπότε η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον άξονα $x'x$ είναι 45° .

ε) Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται $f(x+1) - f(x) = f(x+2) - f(x+1)$ (4).

Για $x \geq 2$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[x, x+1]$ και $[x+1, x+2]$, άρα θα υπάρξει:

- $\xi_1 \in (x, x+1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} \Leftrightarrow f(x+1) - f(x) = f'(\xi_1)$.
- $\xi_2 \in (x+1, x+2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_2) = \frac{f(x+2) - f(x+1)}{(x+2) - (x+1)} \Leftrightarrow f(x+2) - f(x+1) = f'(\xi_2)$

Η εξίσωση (4) ισοδύναμα γράφεται $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$ (5). Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$, άρα θα είναι και "1-1", οπότε από (5) έχουμε $\xi_1 = \xi_2$ που είναι αδύνατο, γιατί τα ξ_1, ξ_2 ανήκουν σε διαφορετικά διαστήματα.

Άρα η εξίσωση $2f(x+1) = f(x) + f(x+2)$ είναι αδύνατη, για $x \geq 2$.

ΘΕΜΑ 16ο :

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f'(x) = \frac{2e^x + x^2}{e^x + x^2} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f , ως προς την κυρτότητα.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

δ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+2010) - f(x))$.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{2e^x + x^2}{e^x + x^2} \right)' = \frac{(2e^x + x^2)'(e^x + x^2) - (2e^x + x^2)(e^x + x^2)'}{(e^x + x^2)^2} = \\ &= \frac{(2e^x + 2x)(e^x + x^2) - (2e^x + x^2)(e^x + 2x)}{(e^x + x^2)^2} = \\ &= \frac{2e^{2x} + 2x^2e^x + 2xe^x + 2x^3 - 2e^{2x} - 4xe^x - x^2e^x - 2x^3}{(e^x + x^2)^2} = \\ &= \frac{x^2e^x - 2xe^x}{(e^x + x^2)^2} = \frac{(x^2 - 2x)e^x}{(e^x + x^2)^2} = \frac{x(x-2)e^x}{(e^x + x^2)^2}. \end{aligned}$$

Το πρόσημο της f'' καθώς και η κυρτότητα της f φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f''	$+$	0	$-$	0
f	$\cup$	$\cap$	$\cup$	

Έχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$ και $f''(x) > 0$ στο $(-\infty, 0)$, άρα η f κυρτή στο $(-\infty, 0]$.
- Η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$ και $f''(x) < 0$ στο $(0, 2)$, άρα η f κοίλη στο $[0, 2]$.
- Η f είναι συνεχής στο $[2, +\infty)$ και $f''(x) > 0$ στο $(2, +\infty)$, άρα η f κυρτή στο $[2, +\infty)$.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{2e^x + x^2}{e^x + x^2} - 1 = \frac{2e^x + x^2 - e^x - x^2}{e^x + x^2} = \frac{e^x}{e^x + x^2} > 0.$$

Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) > 0$, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επίσης η f είναι συνεχής, οπότε το σύνολο τιμών της f είναι το $f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$.

Για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ έχουμε:

$$g(x) < g(0) \Leftrightarrow f(x) - x < f(0) \Leftrightarrow f(x) < x + f(0) \quad (2).$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + f(0)) = -\infty$, άρα $x + f(0) < 0$, επομένως και $f(x) < 0$ σε περιοχή του $-\infty$, οπότε

$$\text{από (2) έχουμε } f(x) < x + f(0) < 0 \Leftrightarrow 0 > \frac{1}{f(x)} > \frac{1}{x + f(0)}.$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x + f(0)} = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} 0 = 0$, οπότε από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$ και $f(x) < 0$ σε περιοχή του $-\infty$, συμπεραίνουμε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$g(x) > g(0) \Leftrightarrow f(x) - x > f(0) \Leftrightarrow f(x) > x + f(0) \quad (1).$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + f(0)) = +\infty$, άρα $x + f(0) > 0$, επομένως και $f(x) > 0$ σε περιοχή του $+\infty$, οπότε

$$\text{από (1) έχουμε } f(x) > x + f(0) > 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{x + f(0)}.$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + f(0)} = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0$, οπότε από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$ και $f(x) > 0$ σε περιοχή του $+\infty$, συμπεραίνουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $f(\mathbb{R}) = (-\infty, +\infty)$.

δ) Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[x, x+2010]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x, x+2010)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x+2010)-f(x)}{x+2010-x} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(x+2010)-f(x)}{2010} \Leftrightarrow f(x+2010)-f(x) = 2010f'(\xi).$$

Για $x > 2$ η συνάρτηση f είναι κυρτή, οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Επομένως για $2 < x < \xi < x+2010 \Rightarrow f'(x) < f'(\xi) < f'(x+2010) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2010f'(x) < 2010f'(\xi) < 2010f'(x+2010) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2010f'(x) < f(x+2010)-f(x) < 2010f'(x+2010).$$

Για $x > 2$ είναι:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x + x^2}{e^x + x^2} \stackrel{\text{D.L.H. } x \rightarrow +\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x + 2x}{e^x + 2x} \stackrel{\text{D.L.H. } x \rightarrow +\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x + 2}{e^x + 2} \stackrel{\text{D.L.H. } x \rightarrow +\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{e^x} = 2.$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2010f'(x)) = 2010 \cdot 2 = 4020.$$

• Αν θέσουμε $x+2010 = u$, τότε όταν το $x \rightarrow +\infty$ και το $u \rightarrow +\infty$, άρα έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2010f'(x+2010)) = \lim_{u \rightarrow +\infty} (2010f'(u)) = 2010 \cdot 2 = 4020.$$

Από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+2010)-f(x)) = 4020.$

ΘΕΜΑ 17ο :

Έστω συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f(1)=0$. Αν η συνάρτηση f ο f' ορίζεται στο $(0, +\infty)$ και για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει $(f \circ f')(x) = -f(x)$ (1), να αποδείξετε ότι:

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f' είναι το $A_{f'} = (0, +\infty)$.

β) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

γ) $f'(1) = 1$.

δ) $(f' \circ f')(x) = x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

ε) $xf''(x) + f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

στ) $f(x) = \ell \ln x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

ΛΥΣΗ

α) Κατ' αρχάς είναι $A_{f'} \subseteq A_f = (0, +\infty)$. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- ή $A_{f'} = (0, +\infty)$
- ή θα υπάρχει $x_0 \in (0, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $x_0 \notin A_{f'}$.

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $x_0 \notin A_{f'}$, τότε και με δεδομένο ότι $A_{f \circ f'} = \{x \in A_{f'} / f'(x) \in A_f\}$ συμπεραίνουμε ότι το $x_0 \notin A_{f \circ f'}$, το οποίο είναι άτοπο, γιατί $x_0 \in (0, +\infty)$ και $A_{f \circ f'} = (0, +\infty)$ από υπόθεση. Άρα $A_{f'} = (0, +\infty)$.

β) Από το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ f'$:

$$A_{f \circ f'} = \{x \in A_{f'} / f'(x) \in A_f\} = \{x \in A_{f'} / f'(x) \in (0, +\infty)\}$$

προκύπτει ότι $f'(x) \in (0, +\infty)$ για κάθε $x \in A_{f'}$, δηλαδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

γ) Για $x=1$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$(f \circ f')(1) = -f(1) \stackrel{f(1)=0}{\Leftrightarrow} (f \circ f')(1) = 0 \stackrel{f(1)=0}{\Leftrightarrow} f(f'(1)) = f(1) \stackrel{f:1-1}{\Leftrightarrow} f'(1) = 1.$$

δ) Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ μπορούμε να θέσουμε στη σχέση (1) όπου x το $f'(x)$, οπότε για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} (f \circ f')(f'(x)) &= -f(f'(x)) \Leftrightarrow f(f'(f'(x))) = -(f \circ f')(x) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} f(f'(f'(x))) = -(-f(x)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(f'(f'(x))) = f(x) \stackrel{f:1-1}{\Leftrightarrow} f'(f'(x)) = x \Leftrightarrow (f' \circ f')(x) = x \quad (2). \end{aligned}$$

ε) Επειδή η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, παραγωγίζοντας τα μέλη της σχέσης (1) έχουμε:

$$\begin{aligned} (f(f'(x)))' &= (-f(x))' \Leftrightarrow f'(f'(x)) \cdot f''(x) = -f'(x) \Leftrightarrow (f' \circ f')(x) \cdot f''(x) = -f'(x) \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow x f''(x) = -f'(x) \Leftrightarrow x f''(x) + f'(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty). \end{aligned}$$

στ) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$x f''(x) + f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x f'(x))' = 0 \Leftrightarrow x f'(x) = c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Για $x=1$ είναι $f'(1) = c_1 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} c_1 = 1$, άρα $x f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(x) = \ln x + c_2, \quad x \in (0, +\infty)$.

Όμως $f(1) = 0$, άρα $c_2 = 0$, οπότε $f(x) = \ln x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 18ο :

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$f^2(x) + 2xf(x) = 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

A. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) + x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

B. Αν $f(0) = 1$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x$, $x \in \mathbb{R}$.

β. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\eta\mu f(x))$.

δ. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .

ε. Να αποδείξετε ότι $\int_1^0 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(\sqrt{2}-1)$.

ΛΥΣΗ

A. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f^2(x) + 2xf(x) = 1 &\Leftrightarrow f^2(x) + 2xf(x) + x^2 = 1 + x^2 \Leftrightarrow (f(x) + x)^2 = 1 + x^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow g^2(x) = 1 + x^2 \quad (1), \text{ όπου } g(x) = f(x) + x, x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $1 + x^2 > 0 \Leftrightarrow g^2(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) \neq 0$ και επειδή η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως άθροισμα συνεχών, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

B. α) Για $x = 0$ έχουμε $g(0) = f(0) + 0 = 1 > 0$, οπότε $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αφού $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, από (1) ισοδύναμα έχουμε:

$$g(x) = \sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow f(x) + x = \sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{1+x^2} - x, x \in \mathbb{R}.$$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} - x > \sqrt{x^2} - x = |x| - x \geq x - x = 0$$

Άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (2).

γ) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$|\eta\mu f(x)| \leq |f(x)| \stackrel{(2)}{=} f(x), \text{ άρα } -f(x) \leq \eta\mu f(x) \leq f(x).$$

$$\text{Είναι } f(x) = \sqrt{1+x^2} - x = \frac{(\sqrt{1+x^2} - x)(\sqrt{1+x^2} + x)}{\sqrt{1+x^2} + x} = \frac{1+x^2 - x^2}{\sqrt{1+x^2} + x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x},$$

$$\text{οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} + 1} \right) = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Επίσης έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-f(x)) = 0$.

Επομένως από Κριτήριο Παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\eta\mu f(x)) = 0$.

δ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x) = \left(\sqrt{1+x^2} - x \right)' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1 = \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{-f(x)}{\sqrt{1+x^2}} \stackrel{(2)}{<} 0.$$

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, άρα είναι «1-1», οπότε αντιστρέφεται.

Για να ορίσουμε τη συνάρτηση f^{-1} , λύνουμε την εξίσωση $y = f(x)$ ως προς x .

Έχουμε:

$$\begin{aligned} y = \sqrt{1+x^2} - x &\Leftrightarrow y+x = \sqrt{1+x^2} \stackrel{y+x \geq 0}{\Leftrightarrow} (y+x)^2 = 1+x^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y^2 + 2xy + x^2 = 1+x^2 \Leftrightarrow 2xy = 1-y^2 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} x = \frac{1-y^2}{2y} \quad (3). \end{aligned}$$

Είναι $y+x \geq 0 \Leftrightarrow y + \frac{1-y^2}{2y} \geq 0 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 2y^2 + 1 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 + 1 \geq 0$, που είναι αληθές.

Η (3) $\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{1-y^2}{2y}$, $y > 0$.

Επομένως $f^{-1}(x) = \frac{1-x^2}{2x}$ με $x > 0$.

ε. Από το (δ) ερώτημα έχουμε $f'(x) = \frac{-f(x)}{\sqrt{1+x^2}} \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = -\frac{f'(x)}{f(x)}$, άρα

$$\int_1^0 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_1^0 -\frac{f'(x)}{f(x)} dx = -\int_1^0 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \left[\ln(f(x)) \right]_0^1 = \ln(\sqrt{2}-1).$$

ΘΕΜΑ 19ο :

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $0 < a < \beta$ τέτοια, ώστε για τους μιγαδικούς

$z_1 = a + if(a)$ και $z_2 = \beta + if(\beta)$ να ισχύει $w = \frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $|z_1 + iz_2| = |z_1 - iz_2|$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[a, \beta]$.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f , που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

δ) Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow a} \int_a^x \frac{f(x+a-t)}{(x-a)(x+a-t)} dt = 1$, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=1$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (a, β) .

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει $z_1 = wz_2$, με $w \in \mathbb{R}$. Άρα

$$|z_1 + iz_2| = |z_1 - iz_2| \Leftrightarrow |wz_2 + iz_2| = |wz_2 - iz_2| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z_2| \cdot |w + i| = |z_2| \cdot |w - i| \stackrel{z_2 \neq 0}{\Leftrightarrow} |w + i| = |w - i| \stackrel{w \in \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} \sqrt{w^2 + 1} = \sqrt{w^2 + 1}, \text{ αληθής.}$$

β) Έχουμε $w = \frac{\alpha + if(\alpha)}{\beta + if(\beta)} = \frac{(\alpha + if(\alpha))(\beta - if(\beta))}{(\beta + if(\beta))(\beta - if(\beta))} = \frac{\alpha\beta + f(\alpha)f(\beta)}{\beta^2 + f^2(\beta)} + \frac{\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)}{\beta^2 + f^2(\beta)}i$

$$\text{Είναι } w \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)}{\beta^2 + f^2(\beta)} = 0 \Leftrightarrow \beta f(\alpha) - \alpha f(\beta) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{f(\beta)}{\beta} \quad (1).$$

Θεωρούμε συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \in [\alpha, \beta]$, με $0 < \alpha < \beta$.

□ Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, ως πηλίκο

$$\text{παραγωγισίμων συναρτήσεων με } g'(x) = \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2}.$$

$$\square \text{ Είναι } g(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{f(\beta)}{\beta} = g(\beta).$$

Άρα η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

γ) Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Rolle, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$$g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{x_0 f'(x_0) - f(x_0)}{x_0^2} = 0 \Leftrightarrow x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0 \quad (2).$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $(x_0, f(x_0))$ είναι:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = f'(x_0)x + f(x_0) - x_0 f'(x_0) \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} y = f'(x_0)x$$

Άρα υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f , που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

δ) Είναι $\int_a^x \frac{f(x+\alpha-t)}{(x-\alpha)(x+\alpha-t)} dt = \frac{1}{x-\alpha} \int_a^x \frac{f(x+\alpha-t)}{x+\alpha-t} dt$. Θέτουμε $x+\alpha-t=u$, οπότε $-dt=du$.

Για $t=\alpha$ το $u=x$ και για $t=x$ το $u=\alpha$, οπότε

$$\int_a^x \frac{f(x+\alpha-t)}{(x-\alpha)(x+\alpha-t)} dt = \frac{1}{x-\alpha} \int_a^x \frac{f(x+\alpha-t)}{x+\alpha-t} dt = \frac{1}{x-\alpha} \int_x^\alpha -\frac{f(u)}{u} du = \frac{1}{x-\alpha} \int_\alpha^x \frac{f(u)}{u} du.$$

$$\begin{aligned} \text{Είναι: } \lim_{x \rightarrow \alpha} \int_{\alpha}^x \frac{f(x + \alpha - t)}{(x - \alpha)(x + \alpha - t)} dt &= 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{1}{x - \alpha} \int_{\alpha}^x \frac{f(u)}{u} du = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\int_{\alpha}^x \frac{f(u)}{u} du}{x - \alpha} = 1 \Leftrightarrow \frac{0}{0} \text{ D.L.H} \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{1} = 1 \Leftrightarrow \frac{f(\alpha)}{\alpha} = 1 \quad (3). \end{aligned}$$

$$\text{Από (1) και (3) έχουμε } \frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{f(\beta)}{\beta} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) = \alpha \\ f(\beta) = \beta \end{cases}$$

Θεωρούμε συνάρτηση $h(x) = f(x) - x$, $x \in [\alpha, \beta]$, με $0 < \alpha < \beta$.

□ Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, ως διαφορά παραγωγισίμων συναρτήσεων με $h'(x) = f'(x) - 1$.

$$\square \text{ Είναι } \begin{cases} h(\alpha) = f(\alpha) - \alpha = 0 \\ h(\beta) = f(\beta) - \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow h(\alpha) = h(\beta)$$

Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Rolle, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = 1.$$

ΘΕΜΑ 20ο :

Έστω συνεχής συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$f(x) = \int_1^x \frac{t+1}{t(e^{f(t)}+1)} dt \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

α) Να αποδείξετε ότι $e^{f(x)} + f(x) = x + \ln x$, $x \in (0, +\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$.

γ) Αν $0 < \alpha < \beta < \gamma$ να αποδείξετε ότι $\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} > \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta}$.

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνεχούς συνάρτησης g , για την οποία ισχύει

$$g^2(x) = f\left(\frac{e^x}{x}\right) \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty) \text{ και } g(1) = 1.$$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση $\frac{t+1}{t(e^{f(t)}+1)}$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, το $1 \in (0, +\infty)$, άρα η συνάρτηση

$$f(x) = \int_1^x \frac{t+1}{t(e^{f(t)}+1)} dt \quad \text{είναι παραγωγίσιμη στο } (0, +\infty) \text{ με } f'(x) = \frac{x+1}{x(e^{f(x)}+1)}.$$

Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$f'(x) = \frac{x+1}{x(e^{f(x)}+1)} \Leftrightarrow xe^{f(x)}f'(x) + xf'(x) = x+1 \Leftrightarrow e^{f(x)}f'(x) + f'(x) = 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^{f(x)} + f(x))' = (x + \ln x)' \Leftrightarrow e^{f(x)} + f(x) = x + \ln x + c.$$

Για $x = 1$ έχουμε $e^{f(1)} + f(1) = 1 + \ln 1 + c \Leftrightarrow e^0 + 0 = 1 + 0 + c \Leftrightarrow c = 0.$

Άρα για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε $e^{f(x)} + f(x) = x + \ln x.$

β) Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$e^{f(x)} + f(x) = x + \ln x \Leftrightarrow e^{f(x)} + f(x) = e^{\ln x} + \ln x \quad (1).$$

Θεωρούμε συνάρτηση $\varphi(x) = e^x + x, \quad x \in \mathbb{R}.$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\varphi'(x) = e^x + 1 > 0$, οπότε η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και «1-1».

Από (1) ισοδύναμα έχουμε $\varphi(f(x)) = \varphi(\ln x) \Leftrightarrow f(x) = \ln x, \quad x \in (0, +\infty).$

γ) Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x} \quad \text{και} \quad f''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0,$$

άρα η συνάρτηση f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty).$

Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha, \beta]$ και $[\beta, \gamma]$, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον:

- $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ και
- $\xi_2 \in (\beta, \gamma)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_2) = \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta}.$

Είναι $0 < \alpha < \xi_1 < \beta < \xi_2 < \gamma$ και η συνάρτηση f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$,

$$\text{οπότε } f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} > \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta}.$$

δ) Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$g^2(x) = f\left(\frac{e^x}{x}\right) \Leftrightarrow g^2(x) = \ln\left(\frac{e^x}{x}\right) \Leftrightarrow g^2(x) = \ln e^x - \ln x \Leftrightarrow g^2(x) = x - \ln x \quad (2).$$

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0 > 0$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = 0$, τότε $x_0 - \ln x_0 = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 = x_0$ που είναι άτοπο, γιατί $\ln x \leq x - 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. (Εφαρμογή 2 σχολ. Βιβλίου σελ. 266).

Άρα $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Η συνάρτηση g λοιπόν είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και δε μηδενίζεται στο διάστημα αυτό, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $g(1)=1>0$ συμπεραίνουμε ότι $g(x)>0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Επομένως από (2) προκύπτει ότι $g(x) = \sqrt{x - \ln x}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$g'(x) = \left(\sqrt{x - \ln x} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{x - \ln x}} (x - \ln x)' = \frac{x-1}{2x\sqrt{x - \ln x}}.$$

Είναι $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ και $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$, άρα ο πίνακας μονοτονίας και ακροτάτων της συνάρτησης g είναι:

x	0	1	$+\infty$
g'	—	0	+
g	$\searrow$	1	$\nearrow$

ελάχ.

Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$, γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ με ελάχιστη τιμή $g(1) = 1$.

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x - \ln x} = +\infty, \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \ln x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x - \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x} \sqrt{1 - \frac{\ln x}{x}} \right) = +\infty, \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{\ln x}{x}} = 1.$$

Άρα το σύνολο τιμών της g είναι το $g(A) = [1, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 21ο :

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) = 0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$f(x) \geq x e^{2x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 1$.

β) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x)}{x \ln x} = 1$.

γ) Αν $\int_0^1 f(x) e^{-x} dx = 1$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 1]$.

ΛΥΣΗ

α) Θεωρούμε συνάρτηση $g(x) = f(x) - xe^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \geq xe^{2x} \Leftrightarrow f(x) - xe^{2x} \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(0)$.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση g παρουσιάζει στο εσωτερικό σημείο $x_0 = 0$ του πεδίου ορισμού της τοπικό ακρότατο.

Επίσης η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x) = (f(x) - xe^{2x})' = f'(x) - e^{2x} - 2xe^{2x}$, άρα είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 0$ με $g'(0) = f'(0) - 1$.

Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Fermat, οπότε $g'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 1$.

β) Είναι $f'(0) = 1$, οπότε για $x \neq 0$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x)}{x \eta \mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x)}{x^2 \eta \mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{f(x)}{x} \right)^2 \frac{1}{\eta \mu x} \right] = 1^2 \cdot \frac{1}{1} = 1.$$

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \geq xe^{2x} \Leftrightarrow f(x)e^{-x} \geq xe^x \Leftrightarrow f(x)e^{-x} - xe^x \geq 0 \Leftrightarrow h(x) \geq 0$, όπου $h(x) = f(x)e^{-x} - xe^x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Είναι } \int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 x(e^x)' dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 x'e^x dx = e - \int_0^1 e^x dx = e - [e^x]_0^1 = e - (e - 1) = 1,$$

$$\text{οπότε } \int_0^1 h(x) dx = \int_0^1 (f(x)e^{-x} - xe^x) dx = \int_0^1 f(x)e^{-x} dx - \int_0^1 xe^x dx = 1 - 1 = 0.$$

$$\text{Έχουμε λοιπόν } h(x) = f(x)e^{-x} - xe^x \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } \int_0^1 h(x) dx = 0 \quad (1).$$

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$ τέτοιο, ώστε $h(x_0) \neq 0$, τότε $h(x_0) > 0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $h(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$ αλλά η συνεχής συνάρτηση h δεν είναι παντού μηδέν,

$$\text{οπότε } \int_0^1 h(x) dx > 0, \text{ που είναι άτοπο λόγω της (1).}$$

Επομένως για κάθε $x \in [0, 1]$ είναι $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)e^{-x} - xe^x = 0 \Leftrightarrow f(x) = xe^{2x}$.

ΘΕΜΑ 22ο :

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = \frac{1}{e-1}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$xf'(x) - f(x) = \frac{-x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*.$$

α) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} dx$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

γ) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 1$ και $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

δ) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

ΛΥΣΗ

α) Θέτουμε $u = e^x - 1$, οπότε $du = e^x dx$. Άρα:

$$\int \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} dx = \int \frac{1}{u^2} du = \int u^{-2} du = \frac{u^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{u} + c = -\frac{1}{e^x - 1} + c, \text{ όπου } x \in (-\infty, 0) \text{ ή } x \in (0, +\infty).$$

β) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} xf'(x) - f(x) &= \frac{-x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = -\frac{e^x}{(e^x - 1)^2} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = -\frac{e^x}{(e^x - 1)^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} &= -\int \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} dx \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = -\left(-\frac{1}{e^x - 1} + c_1\right) \Leftrightarrow f(x) = \frac{x}{e^x - 1} - c_1 x. \end{aligned}$$

Για $x=1$ έχουμε $f(1) = \frac{1}{e-1} - c_1 \Leftrightarrow \frac{1}{e-1} = \frac{1}{e-1} - c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$. Άρα $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

γ) Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, οπότε $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x} = 1$, άρα $f(0) = 1$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, οπότε ισχύει:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x}{e^x - 1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^x}{e^x - 1 + xe^x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-e^x}{2e^x + xe^x} = -\frac{1}{2},$$

άρα $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

δ) Για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ ομοίως έχουμε:

$$\begin{aligned} xf'(x) - f(x) &= \frac{-x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = -\frac{e^x}{(e^x - 1)^2} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = -\frac{e^x}{(e^x - 1)^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = -\int \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} dx \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = -\left(-\frac{1}{e^x - 1} + c_2\right) \Leftrightarrow f(x) = \frac{x}{e^x - 1} - c_2 x. \end{aligned}$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ ισχύει:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{x}{e^x - 1} - c_2 x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - c_2 x(e^x - 1) - e^x + 1}{x(e^x - 1)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \stackrel{\text{DLH}}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - c_2(e^x - 1) - c_2 x e^x - e^x}{e^x - 1 + x e^x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \stackrel{\text{D.L.H.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2c_2 e^x - c_2 x e^x - e^x}{2e^x + x e^x} = \frac{-2c_2 - 1}{2} \end{aligned}$$

Είναι $f'(0) = -\frac{1}{2}$, άρα έχουμε $\frac{-2c_2 - 1}{2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow c_2 = 0$. Άρα $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$, για κάθε $x \in (-\infty, 0)$.

$$\text{Επομένως } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

ΘΕΜΑ 23ο :

Έστω συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f(x) = \int_0^x \frac{2}{1 + 3f^2(t)} dt$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f^3(x) + f(x) = 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{2}{1 + 3f^2(t)} dt$.

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 2x_0$.

ε) Να αποδείξετε ότι $\int_0^x f(t) dt \leq x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

στ) Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ να βρείτε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{και} \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^3(x)}{x}.$$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση $\frac{2}{1+3f^2(t)}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε η συνάρτηση $f(x) = \int_0^x \frac{2}{1+3f^2(t)} dt$ ορίζεται

στο $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \frac{2}{1+3f^2(x)}$ (1).

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x) = \frac{2}{1+3f^2(x)} \Leftrightarrow f'(x) + 3f^2(x)f'(x) = 2 \Leftrightarrow [f(x) + f^3(x)]' = (2x)' \Leftrightarrow f^3(x) + f(x) = 2x + c.$$

Για $x=0$ είναι $f(0) = \int_0^0 \frac{2}{1+3f^2(t)} dt = 0$. Άρα $f^3(0) + f(0) = 0 + c \Leftrightarrow c = 0$.

Επομένως $f^3(x) + f(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R}$ (2).

β) Από τη σχέση (1) έχουμε $f'(x) = \frac{2}{3f^2(x)+1} > 0$, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα είναι «1-1», οπότε αντιστρέφεται.

γ) Είναι $\int_0^1 \frac{2}{1+3f^2(t)} dt = f(1)$.

Από τη σχέση (2) για $x=1$ έχουμε $f^3(1) + f(1) = 2 \Leftrightarrow f^3(1) + f(1) - 2 = 0$ (3).

Χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner

1	0	1	-2	1
///	1	1	2	
1	1	2	0	

η εξίσωση (3) ισοδύναμα γράφεται

$$(f(1)-1) \underbrace{(f^2(1)+f(1)+2)}_{\neq 0} = 0 \Leftrightarrow f(1)=1.$$

Άρα $\int_0^1 \frac{2}{1+3f^2(t)} dt = 1$.

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

- Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $[0, 1]$ με $g'(x) = f'(x) - 2x$.
- Είναι $g(0) = g(1)$, αφού $g(0) = 0$ και $g(1) = 0$.

Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Rolle, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε

$$g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) - 2x_0 = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 2x_0.$$

ε) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \int_0^x f(t)dt - x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι } \varphi'(x) = \left(\int_0^x f(t)dt - x^2 \right)' = f(x) - 2x \stackrel{(2)}{=} -f^3(x).$$

$$\text{Από τη σχέση (2) έχουμε } f(x)(f^2(x)+1) = 2x \Leftrightarrow f(x) = \frac{2x}{f^2(x)+1}, \text{ άρα } \varphi'(x) = -\frac{8x^3}{(f^2(x)+1)^3}, x \in \mathbb{R}.$$

Είναι:

$$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow -8x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ και } \varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow -8x^3 > 0 \Leftrightarrow x^3 < 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

Το πρόσημο της φ' , η μονοτονία και τα ακρότατα της φ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
φ'	+	0	-
φ		0	

μέγ.

Η φ παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 0$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\varphi(x) \leq \varphi(0)$. Άρα είναι

$$\int_0^x f(t)dt - x^2 \leq 0 \Leftrightarrow \int_0^x f(t)dt \leq x^2, x \in \mathbb{R}.$$

στ) i) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$f^3(x) + f(x) = 2x \Leftrightarrow f(x)(f^2(x)+1) = 2x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{2}{1+f^2(x)}$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+f^2(x)) = +\infty, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1+f^2(x)} = 0, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

ii) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$f^3(x) + f(x) = 2x \Leftrightarrow f^3(x) = 2x - f(x) \Leftrightarrow \frac{f^3(x)}{x} = 2 - \frac{f(x)}{x}$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{f(x)}{x} \right) = 2 - 0 = 2, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^3(x)}{x} = 2.$$

ΘΕΜΑ 24ο :

Δίνεται η συνάρτηση f , που είναι ορισμένη και συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ικανοποιεί τη σχέση

$$f(x) = \int_x^0 \left(\int_0^\pi f(t) \eta_{\mu x} dx \right) dt + x^2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

γ) Αν $f(x) = \frac{1}{2}e^{-2x} + x - \frac{1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, τότε:

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f , ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

iii) Για τις διάφορες τιμές του $k \in \mathbb{R}$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = k$.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(x) = -\int_0^x f(t) \left(\int_0^\pi \eta \mu x dx \right) dt + x^2 \quad (1).$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $\int_0^\pi \eta \mu x dx = [-\sigma \nu x]_0^\pi = -\sigma \nu \pi + \sigma \nu 0 = 2$.

Άρα η (1) γράφεται: $f(x) = -2 \int_0^x f(t) dt + x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$

Η συνάρτηση $\int_0^x f(t) dt$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης f .

Άρα η συνάρτηση $f(x) = -2 \int_0^x f(t) dt + x^2$ είναι παραγωγίσιμη, ως άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων με παράγωγο $f'(x) = -2f(x) + 2x, \quad x \in \mathbb{R}.$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x) + 2f(x) = 2x \Leftrightarrow e^{2x} f'(x) + e^{2x} 2f(x) = e^{2x} 2x \Leftrightarrow (e^{2x} f(x))' = 2xe^{2x}, \text{ άρα } e^{2x} f(x) = \int 2xe^{2x} dx \quad (2).$$

$$\text{Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα } \int 2xe^{2x} dx = \int x(e^{2x})' dx = xe^{2x} - \int e^{2x} dx = xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + c \quad (3).$$

$$\text{Η } (2) \Leftrightarrow e^{2x} f(x) = xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + c \Leftrightarrow f(x) = ce^{-2x} + x - \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}. \text{ Όμως } f(0) = 0, \text{ άρα } c = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Επομένως } f(x) = \frac{1}{2}e^{-2x} + x - \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

γ) i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x) = -e^{-2x} + 1 = 1 - \frac{1}{e^{2x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x}}.$$

Είναι:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{και} \quad f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{2x} > 1 \Leftrightarrow x > 0.$$

Το πρόσημο της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	-	0	+
f	↘ 0 ↗		

ελάχ.

Έχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$ και $f'(x) < 0$ στο $(-\infty, 0)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.
- Η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και $f'(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.
- Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$, με ελάχιστη τιμή $f(0) = 0$.

ii) ◦ Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (-\infty, 0]$, άρα $f(\Delta_1) = [f(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x))$.

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(\frac{e^{-2x}}{2x} + 1 - \frac{1}{2x} \right) \right] = +\infty,$$

γιατί $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{2x} \right) = 1 - 0 = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-2x}}{x} \stackrel{\frac{+\infty}{-\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2e^{-2x}) = -\infty$.

Άρα $f(\Delta_1) = [0, +\infty)$.

◦ Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = [0, +\infty)$, άρα $f(\Delta_2) = [f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x))$.

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} e^{-2x} + x - \frac{1}{2} \right) = +\infty,$$

γιατί $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} e^{-2x} \right) = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{1}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$.

Άρα $f(\Delta_2) = [0, +\infty)$.

Επομένως το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι $f(\Delta) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = [0, +\infty)$.

iii) Αν $\kappa < 0$, τότε η εξίσωση $f(x) = \kappa$ είναι αδύνατη.

Αν $\kappa = 0$, τότε η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει μια λύση.

Αν $\kappa > 0$, τότε η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει δύο λύσεις.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 2010

ΘΕΜΑ 25ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, η οποία

ικανοποιεί τη σχέση $\int_1^{f(x)} (3t^2 + 2) dt = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f^3(x) + 2f(x) = x + 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f , της συνάρτησης f και τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

δ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f , που διέρχεται από το σημείο $A(-1, 0)$.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\int_1^{f(x)} (3t^2 + 2) dt = x \Rightarrow \left[t^3 + 2t \right]_1^{f(x)} = x \quad \text{άρα} \quad f^3(x) + 2f(x) - 3 = x \Leftrightarrow f^3(x) + 2f(x) = x + 3 \quad (1).$$

β) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και η f^3 είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της (1) έχουμε:

$$3f^2(x)f'(x) + 2f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x)(3f^2(x) + 2) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{3f^2(x) + 2} \quad (2).$$

Είναι $f'(x) = \frac{1}{3f^2(x) + 2} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,

άρα είναι και «1-1», οπότε αντιστρέφεται.

Ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \quad \text{με} \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad \text{αφού} \quad f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}.$$

Η (1) ισοδύναμα γράφεται $y^3 + 2y = f^{-1}(y) + 3 \Leftrightarrow f^{-1}(y) = y^3 + 2y - 3$, $y \in \mathbb{R}$.

Άρα $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^{-1}(x) = x^3 + 2x - 3$ (3).

γ) 1^{ος} τρόπος:

Είναι $f^{-1}(0) = -3$, άρα $f(-3) = 0$, οπότε το $K(-3, 0)$ είναι το κοινό σημείο της C_f με τον άξονα $x'x$.

Είναι $f^{-1}(1) = 0$, άρα $f(0) = 1$, οπότε το $\Lambda(0, 1)$ είναι το κοινό σημείο της C_f με τον άξονα $y'y$.

Το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f και τους άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι:

$$E(\Omega) = \int_{-3}^0 |f(x)| dx.$$

Θέτουμε $y = f(x)$ άρα $x = f^{-1}(y) = y^3 + 2y - 3$ οπότε $dx = (y^3 + 2y - 3)' dy = (3y^2 + 2) dy$.

Επίσης ισχύουν οι ισοδυναμίες $x = -3 \Leftrightarrow y = 0$ και $x = 0 \Leftrightarrow y = 1$, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_{-3}^0 |f(x)| dx = \int_0^1 |y| (3y^2 + 2) dy = \int_0^1 y (3y^2 + 2) dy = \\ &= \int_0^1 (3y^3 + 2y) dy = \left[\frac{3y^4}{4} + y^2 \right]_0^1 = \frac{3}{4} + 1 - 0 = \frac{7}{4} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

2^{ος} τρόπος:

Τα κοινά σημεία της C_f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι αντίστοιχα τα $K(-3, 0)$ και $\Lambda(0, 1)$.

Τα συμμετρικά των K, Λ ως προς την ευθεία $\delta: y = x$ είναι τα σημεία $K'(0, -3)$ και $\Lambda'(1, 0)$.

Είναι $f^{-1}(x) = x^3 + 2x - 3 = (x - 1)(x^2 + x + 3)$, οπότε στο διάστημα $[0, 1]$ είναι $f^{-1}(x) \leq 0$.

Λόγω συμμετρίας των C_f και $C_{f^{-1}}$ ως προς την ευθεία $\delta: y = x$ το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega) = - \int_0^1 f^{-1}(x) dx = - \int_0^1 (x^3 + 2x - 3) dx = - \left[\frac{x^4}{4} + x^2 - 3x \right]_0^1 = - \left(\frac{1}{4} + 1 - 3 \right) = \frac{7}{4} \text{ τ.μ.}$$

δ) 1^{ος} τρόπος:

Έστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής και ε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο M , τότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow \varepsilon: y - f(x_0) = \frac{1}{3f^2(x_0) + 2}(x - x_0).$$

Επειδή η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $A(-1, 0)$, θα ισχύει:

$$0 - f(x_0) = \frac{1}{3f^2(x_0) + 2}(-1 - x_0) \Leftrightarrow 3f^3(x_0) + 2f(x_0) = x_0 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2f^3(x_0) + (f^3(x_0) + 2f(x_0)) = x_0 + 1 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 2f^3(x_0) + x_0 + 3 = x_0 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^3(x_0) = -1 \Leftrightarrow f(x_0) = -1.$$

Από την (1) έχουμε $(-1)^3 + 2(-1) = x_0 + 3 \Leftrightarrow x_0 = -6$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(-6, -1)$ είναι:

$$\varepsilon: y - (-1) = \frac{1}{3(-1)^2 + 2}(x - (-6)) \Leftrightarrow \varepsilon: y = \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}.$$

2^{ος} τρόπος:

Το συμμετρικό του σημείου $A(-1, 0)$ ως προς την ευθεία $\delta: y = x$ είναι το σημείο $B(0, -1)$. Βρίσκουμε την εξίσωση της εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$ που διέρχεται από το σημείο B .

Έστω $N(x_0, f^{-1}(x_0))$ το σημείο επαφής και ζ η εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο N , τότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$\zeta: y - f^{-1}(x_0) = (f^{-1})'(x_0) \cdot (x - x_0) \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} \zeta: y - (x_0^3 + 2x_0 - 3) = (3x_0^2 + 2)(x - x_0).$$

Επειδή η ευθεία ζ διέρχεται από το σημείο $B(0, -1)$, θα ισχύει:

$$\begin{aligned} -1 - (x_0^3 + 2x_0 - 3) &= (3x_0^2 + 2)(0 - x_0) \Leftrightarrow -x_0^3 - 2x_0 + 2 = -3x_0^3 - 2x_0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x_0^3 = -2 \Leftrightarrow x_0^3 = -1 \Leftrightarrow x_0 = -1. \end{aligned}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $(f^{-1})'(x) = (x^3 + 2x - 3)' = 3x^2 + 2$ (4).

Από τις σχέσεις (3) και (4) για $x_0 = -1$ έχουμε $f^{-1}(-1) = -6$ και $(f^{-1})'(-1) = 5$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο $N(-1, -6)$ είναι:

$$\zeta: y - (-6) = 5(x - (-1)) \Leftrightarrow \zeta: y = 5x - 1.$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε τη συμμετρική της $\zeta: y = 5x - 1$, ως προς την ευθεία $\delta: y = x$, που είναι η ευθεία ε . Αντιμεταθέτοντας τις μεταβλητές x, y έχουμε $\varepsilon: x = 5y - 1 \Leftrightarrow \varepsilon: y = \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}$.

ΘΕΜΑ 26ο :

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_x = (x - 2) \cdot (\sqrt{e^{2x} - 2} + i\sqrt{2})$, $1 \leq x \leq 2$ και η συνάρτηση $f(x) = |z_x|$.

α) Να αποδείξετε ότι η $f(x) = (2 - x)e^x$, $1 \leq x \leq 2$.

β) Να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό z με το μέγιστο μέτρο.

γ) Να αποδείξετε ότι:

i) Η f αντιστρέφεται.

ii) Η γραφική παράσταση $C_{f^{-1}}$ της συνάρτησης f^{-1} και η ευθεία $y = x$ έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (1, 2)$.

iii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^e f^{-1}(x) dx$.

ΛΥΣΗ

α) Είναι $|z_x| = |x-2| \cdot \left| \sqrt{e^{2x}-2} + i\sqrt{2} \right| = |x-2| \cdot \sqrt{e^{2x}-2+2} = (2-x)e^x$, αφού $1 \leq x \leq 2$.

Άρα $f(x) = (2-x)e^x$, $x \in [1, 2]$.

β) Για κάθε $x \in (1, 2)$ είναι:

$$f'(x) = [(2-x)e^x]' = -e^x + (2-x)e^x = (1-x)e^x$$

Η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως γινόμενο συνεχών και $f'(x) < 0$ στο $(1, 2)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, 2]$. Επομένως η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 1$.

Άρα ο μιγαδικός αριθμός με το μέγιστο μέτρο είναι ο $z = -\sqrt{e^2-2} - i\sqrt{2}$.

γ) i) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, 2]$ άρα είναι και «1-1», οπότε αντιστρέφεται.

ii) Αρκεί να αποδείξουμε ότι η C_f με την ευθεία $\delta: y = x$, έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, αφού η ευθεία δ είναι ο άξονας συμμετρίας των C_f και $C_{f^{-1}}$.

Τα κοινά σημεία των C_f και της ευθείας $\delta: y = x$, προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης $f(x) = x \Leftrightarrow (2-x)e^x - x = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = (2-x)e^x - x$, $x \in [1, 2]$.

- Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[1, 2]$, ως πράξεις συνεχών.
- $g(1)g(2) = (e-1)(-2) < 0$.

Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Bolzano, οπότε η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

Για κάθε $x \in [1, 2]$ είναι:

$$g'(x) = [(2-x)e^x - x]' = -e^x + (2-x)e^x - 1 = \underbrace{(1-x)e^x}_{\leq 0} - \underbrace{1}_{< 0} < 0.$$

Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε η ρίζα είναι μοναδική.

iii) Είναι $I = \int_0^e f^{-1}(x) dx$. Θέτουμε $f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u)$, άρα $dx = f'(u)du$.

Για $x = 0$ έχουμε $u = f^{-1}(0) \Leftrightarrow f(u) = 0 \Leftrightarrow f(u) = f(2) \Leftrightarrow u = 2$.

Για $x = e$ έχουμε $u = f^{-1}(e) \Leftrightarrow f(u) = e \Leftrightarrow f(u) = f(1) \Leftrightarrow u = 1$.

Άρα έχουμε:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^e f^{-1}(x) dx = \int_2^1 u f'(u) du = [uf(u)]_2^1 - \int_2^1 f(u) du = f(1) - 2f(2) + \int_1^2 (2-u)e^u du = \\ &= e + \int_1^2 (2-u)(e^u)' du = e + [(2-u)e^u]_1^2 - \int_1^2 (2-u)' e^u du = e - e + \int_1^2 e^u du = [e^u]_1^2 = e^2 - e. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 27ο :

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = a + bi$ για τον οποίο ισχύει:

$$(e^{|z-1|} - e)x \geq e^{|z+i|x^2} - 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

A. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες του z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν στον κύκλο με κέντρο το σημείο $K(1,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

B. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του μέτρου $|z - 2 + 3i|$.

Γ. Μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $(0,2)$, δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό και ικανοποιεί τις σχέσεις $f^2(x) + x^2 = 2x$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,2)$.

α) Να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

β) Να αποδείξετε ότι η C_f είναι τμήμα του κύκλου στον οποίο ανήκουν οι εικόνες του z .

γ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $G(x) = \int_1^{\ln x} f(t) dt$.

ΛΥΣΗ

A. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = (e^{|z-1|} - e)x - e^{|z+i|x^2} + 1, x \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$(e^{|z-1|} - e)x \geq e^{|z+i|x^2} + 1 \Leftrightarrow (e^{|z-1|} - e)x - e^{|z+i|x^2} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(0).$$

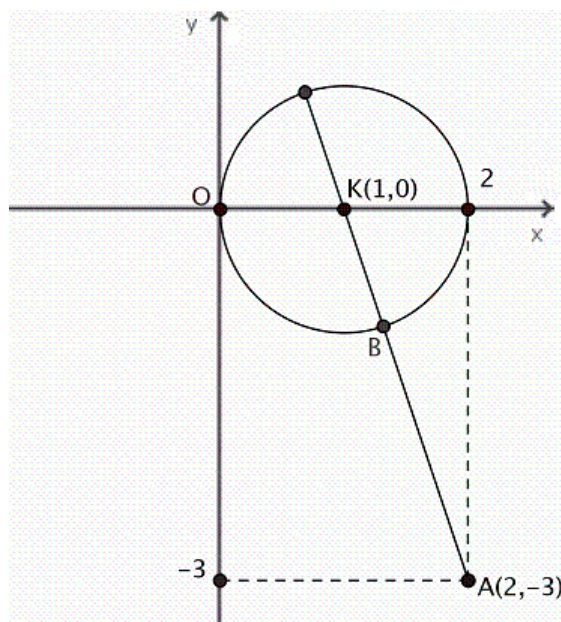
Άρα η συνάρτηση g παρουσιάζει ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο $x_0 = 0$ του πεδίου ορισμού της. Επίσης η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = -2|z+i|x e^{|z+i|x^2} + e^{|z-1|} - e$, επομένως είναι παραγωγίσιμη και στο σημείο $x_0 = 0$. Άρα ισχύει το Θεώρημα Fermat, οπότε

$$g'(0) = 0 \Leftrightarrow e^{|z-1|} - e = 0 \Leftrightarrow e^{|z-1|} = e \Leftrightarrow |z-1| = 1.$$

Άρα οι εικόνες του z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν στον κύκλο με κέντρο το σημείο $K(1,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

B. Το μέτρο $|z - 2 + 3i|$ ισούται με την απόσταση της εικόνας του z από το σημείο $A(2, -3)$.

$$|z - 2 + 3i|_{\min} = (AB) = (AK) - R = \sqrt{1+9} - 1 = \sqrt{10} - 1.$$



Γ. α) Για κάθε $x \in (0, 2)$ είναι:

- $2f(x)f'(x) + 2x = 2$
- $2(f'(x))^2 + 2f(x)f''(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow (f'(x))^2 + f(x)f''(x) + 1 = 0 \quad (1).$

Έστω ότι η C_f έχει σημείο καμπής στο x_0 , τότε $f''(x_0) = 0$.

Για $x = x_0$ από την (1) προκύπτει $(f'(x_0))^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (f'(x_0))^2 = -1$, που είναι άτοπο.

Άρα η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

β) Για κάθε $x \in (0, 2)$ είναι:

$$f^2(x) + x^2 = 2x \stackrel{f(x)=y}{\Leftrightarrow} y^2 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow y^2 + x^2 - 2x + 1 = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1 \quad (2).$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και δε μηδενίζεται στο $(0, 2)$, επομένως διατηρεί σταθερό πρόσημο, άρα από τη σχέση (2) έχουμε:

$$\bullet \quad f(x) = \sqrt{1 - (x-1)^2}, \quad x \in (0, 2) \quad \text{ή} \quad \bullet \quad f(x) = -\sqrt{1 - (x-1)^2}, \quad x \in (0, 2)$$

Επομένως η C_f είναι τμήμα του κύκλου με κέντρο το σημείο $K(1, 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

γ) Η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο $(0, 2)$ και οι συναρτήσεις $h(x) = 1$ και $\varphi(x) = \ln x$, ορίζονται αντίστοιχα στο $\mathbb{R}$ και στο $(0, +\infty)$. Επομένως:

$$x \in A_G \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A_h \cap A_\varphi \\ h(x), \varphi(x) \text{ ανήκουν στο ίδιο διάστημα του πεδίου ορισμού της } f. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \cap (0, +\infty) \\ \varphi(x) \in (0, 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0, +\infty) \\ 0 < \ln x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0, +\infty) \\ e^0 < x < e^2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < e^2. \text{ Άρα } A_G = (1, e^2).$$

ΘΕΜΑ 28ο :

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$, $xy \neq 0$ με $|z^2 + i| = |z^2 - 3i|$.

α) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες του μιγαδικού z είναι σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{2x}$, $x \neq 0$.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύουν:

$$\text{i) } (f \circ f)(x) = x \quad \text{και} \quad \text{ii) } \operatorname{Im}(iz) - (f \circ f)(x) = 0.$$

γ) Έστω τυχαίο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ της C_f . Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από την εφαπτομένη της C_f στο σημείο M και τους άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι σταθερό.

δ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $G(x) = \int_2^{f(x)} \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}} dt$.

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\begin{aligned}
 |z^2 + i| &= |z^2 - 3i| \Leftrightarrow |z^2 + i|^2 = |z^2 - 3i|^2 \Leftrightarrow (z^2 + i)(\bar{z}^2 - i) = (z^2 - 3i)(\bar{z}^2 + 3i) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \cancel{z^2 \bar{z}^2} - iz^2 + i\bar{z}^2 + 1 = \cancel{z^2 \bar{z}^2} + 3iz^2 - 3i\bar{z}^2 + 9 \Leftrightarrow 4i\bar{z}^2 - 4iz^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow i(\bar{z}^2 - z^2) - 2 = 0 \Leftrightarrow \stackrel{z=x+iy}{i(-4xyi)} = 2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2x}, \quad x \neq 0. \quad \text{Άρα } f(x) = \frac{1}{2x}, \quad x \neq 0.
 \end{aligned}$$

β) i) Έχουμε:

$$A_{f \circ f} = \left\{ x \in A_f / f(x) \in A_f \right\} = \left\{ x \neq 0 / \frac{1}{2x} \neq 0 \right\} = \mathbb{R}^*.$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ είναι:

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{1}{2f(x)} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2x}} = x, \quad x \neq 0.$$

ii) Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ είναι:

$$iz = i(x + yi) = -y + ix, \quad \text{άρα } \operatorname{Im}(iz) = x = (f \circ f)(x).$$

$$\text{Επομένως } \operatorname{Im}(iz) - (f \circ f)(x) = x - x = 0.$$

γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης ε της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι:

$$\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - \frac{1}{2x_0} = -\frac{1}{2x_0^2}(x - x_0).$$

Η ευθεία ε τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως στα σημεία $A(2x_0, 0)$, $B(0, \frac{1}{x_0})$.

Το εμβαδόν του τριγώνου MAB είναι:

$$E = \frac{1}{2} \cdot |2x_0| \cdot \left| \frac{1}{x_0} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| 2x_0 \cdot \frac{1}{x_0} \right| = 1 \text{ τ.μ.}$$

δ) Η συνάρτηση $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}}$ είναι ορισμένη και συνεχής στο $A_g = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ και οι

συναρτήσεις $h(x) = 2$ και $f(x) = \frac{1}{2x}$, ορίζονται αντίστοιχα στο $\mathbb{R}$ και στο $\mathbb{R}^*$. Επομένως:

$$x \in A_G \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A_h \cap A_f \\ h(x), f(x) \text{ ανήκουν στο ίδιο διάστημα του πεδίου ορισμού της } g. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \cap \mathbb{R}^* \\ f(x) \in (1, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R}^* \\ \frac{1}{2x} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R}^* \\ \frac{1-2x}{2x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{2}. \quad \text{Άρα } A_G = \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

ΘΕΜΑ 29ο :

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = \int_1^x \left(e^{t^2} - \frac{e^a}{t} \right) dt$, $a > 0$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης F .

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = \frac{e^a}{x} - \frac{\alpha \cdot e^{\frac{\alpha^2}{x^2}}}{x^2}$, $x > 0$.

γ) Αν $F(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha = 1$ και ii) $\int_{\frac{1}{2}}^1 e^{t^2} dt \leq e \ln 2$.

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση $g(t) = e^{t^2} - \frac{e^a}{t}$ είναι ορισμένη και συνεχής στο $A_g = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και οι

συναρτήσεις $h(x) = 1$ και $\varphi(x) = \frac{\alpha}{x}$, ορίζονται αντίστοιχα στο $\mathbb{R}$ και στο $\mathbb{R}^*$. Επομένως:

$$\begin{aligned} x \in A_F &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in A_h \cap A_\varphi \\ h(x), \varphi(x) \text{ ανήκουν στο ίδιο διάστημα του πεδίου ορισμού της } g. \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \cap \mathbb{R}^* \\ \varphi(x) \in (0, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R}^* \\ \frac{\alpha}{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R}^* \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0, +\infty). \text{ Άρα } A_F = (0, +\infty). \end{aligned}$$

β) Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση των παραγωγισίμων συναρτήσεων $\varphi(x) = \frac{\alpha}{x}$

και $T(x) = \int_1^x g(t) dt$, η οποία είναι παραγωγίσιμη ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης g .

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$F'(x) = \left(e^{\left(\frac{\alpha}{x}\right)^2} - \frac{e^a}{\frac{\alpha}{x}} \right) \left(-\frac{\alpha}{x^2} \right) = \left(e^{\frac{\alpha^2}{x^2}} - \frac{x e^a}{\alpha} \right) \left(-\frac{\alpha}{x^2} \right) = \frac{e^a}{x} - \frac{\alpha \cdot e^{\frac{\alpha^2}{x^2}}}{x^2}, \quad x > 0.$$

γ) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι $F(x) \geq 0 \Leftrightarrow F(x) \geq F(\alpha)$.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση F παρουσιάζει στο εσωτερικό σημείο $x_0 = \alpha > 0$ του πεδίου ορισμού της ελάχιστο και αφού η F είναι παραγωγίσιμη ισχύει Θεώρημα Fermat, οπότε:

$$F'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^a}{\alpha} - \frac{\alpha \cdot e}{\alpha^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{e^a - e}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow e^a = e \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

δ) Για $\alpha=1$ έχουμε $F(x) = \int_1^{\frac{1}{x}} \left(e^{t^2} - \frac{e}{t} \right) dt$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $F(x) \geq 0$, οπότε

$$\begin{aligned} F(2) \geq 0 &\Leftrightarrow \int_1^{\frac{1}{2}} \left(e^{t^2} - \frac{e}{t} \right) dt \geq 0 \Leftrightarrow \int_1^{\frac{1}{2}} e^{t^2} dt - \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{e}{t} dt \geq 0 \Leftrightarrow \int_1^{\frac{1}{2}} e^{t^2} dt \geq \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{e}{t} dt \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \int_1^{\frac{1}{2}} e^{t^2} dt \geq e \left[\ln t \right]_1^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \int_1^{\frac{1}{2}} e^{t^2} dt \geq e \left(\ln \frac{1}{2} - \ln 1 \right) \Leftrightarrow \int_1^{\frac{1}{2}} e^{t^2} dt \geq -e \ln 2 \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 e^{t^2} dt \leq e \ln 2. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 30ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x}{x^2-1}$, $x \neq \pm 1$

A) Να βρείτε:

- Το σύνολο τιμών της f .
- Τις ασύμπτωτες της C_f .

B) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=2$ και $x=e$.

Γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\kappa) = \int_2^{\kappa} \frac{x^3-5x}{x^2-1} dx - \int_{\kappa}^2 f(x) dx$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $g(\kappa) = 6$.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $a \in (-1, 1)$ ισχύει $\int_{-a}^a f(x) \sin x dx = 0$.

ΛΥΣΗ

A) α) Για κάθε $x \in A_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ έχουμε:

$$f'(x) = \frac{(4x)'(x^2-1) - (4x)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \frac{4(x^2-1) - (4x)(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{-4(x^2+1)}{(x^2-1)^2} < 0.$$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
f'	-		-		-
f					

Είναι:

- $f'(x) < 0$ στο $(-\infty, -1)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1)$.
- $f'(x) < 0$ στο $(-1, 1)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1, 1)$.
- $f'(x) < 0$ στο $(1, +\infty)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$.

Βρίσκουμε τα όρια στα άκρα των διαστημάτων του A_f .

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x} = 0.$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0.$
- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{4x}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{4x}{x-1} \cdot \frac{1}{x+1} \right) = -\infty$, γιατί $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{4x}{x-1} = 2 > 0$ και $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x+1} = -\infty.$
- $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{4x}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{4x}{x-1} \cdot \frac{1}{x+1} \right) = +\infty$, γιατί $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{4x}{x-1} = 2 > 0$ και $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+1} = +\infty.$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{4x}{x+1} \cdot \frac{1}{x-1} \right) = -\infty$, γιατί $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x}{x+1} = 2 > 0$ και $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty.$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{4x}{x+1} \cdot \frac{1}{x-1} \right) = +\infty$, γιατί $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x}{x+1} = 2 > 0$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty.$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $f(A) = (-\infty, +\infty)$.

- β) • Η ευθεία με εξίσωση $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$, αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$
- Η ευθεία με εξίσωση $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$
- Η ευθεία με εξίσωση $x=-1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f , αφού $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty.$
- Η ευθεία με εξίσωση $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f , αφού $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty.$

B) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[2, e]$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [2, e]$, οπότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=2$ και $x=e$, είναι:

$$\begin{aligned} E &= \int_2^e f(x) dx = \int_2^e \frac{4x}{x^2-1} dx = 2 \int_2^e \frac{2x}{x^2-1} dx = 2 \int_2^e \frac{1}{x^2-1} (x^2-1)' dx = \\ &= 2 \left[\ln |x^2-1| \right]_2^e = 2 \ln(e^2-1) - 2 \ln 3 = 2 \ln \frac{e^2-1}{3} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

Γ) α) Η συνάρτηση g γράφεται:

$$g(\kappa) = \int_2^\kappa \frac{x^3-5x}{x^2-1} dx = \int_2^\kappa \frac{4x}{x^2-1} dx = \int_2^\kappa \frac{x^3-5x}{x^2-1} dx + \int_2^\kappa \frac{4x}{x^2-1} dx = \int_2^\kappa \frac{x^3-5x+4x}{x^2-1} dx = \int_2^\kappa \frac{x^3-x}{x^2-1} dx$$

Η συνάρτηση $\frac{x^3-x}{x^2-1}$ είναι συνεχής στο $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$. Επειδή το $2 \in (1, +\infty)$

για να ορίζεται η g αρκεί το $\kappa \in (1, +\infty)$. Άρα $A_g = (1, +\infty)$.

Για κάθε $\kappa \in (1, +\infty)$ έχουμε:

$$g(\kappa) = \int_2^{\kappa} \frac{x^3 - x}{x^2 - 1} dx = \int_2^{\kappa} \frac{x(x^2 - 1)}{x^2 - 1} dx = \int_2^{\kappa} x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^{\kappa} = \frac{\kappa^2}{2} - \frac{2^2}{2} = \frac{\kappa^2 - 4}{2}.$$

Η εξίσωση $g(\kappa) = 6$ ισοδύναμα γράφεται $\frac{\kappa^2 - 4}{2} = 6 \Leftrightarrow \kappa^2 - 4 = 12 \Leftrightarrow \kappa^2 = 16 \Leftrightarrow \kappa = \pm 4$.

Η λύση $\kappa = 4$ είναι δεκτή, ενώ η λύση $\kappa = -4$ απορρίπτεται γιατί $\kappa \in (1, +\infty)$.

β) Η συνάρτηση $\varphi(x) = f(x) \cdot \sin x = \frac{4x \sin x}{x^2 - 1}$ είναι ορισμένη στο $(-1, 1)$ και είναι περιττή.

Πράγματι, για κάθε $x \in (-1, 1)$ έχουμε:

- $-x \in (-1, 1)$
- $\varphi(-x) = \frac{4(-x) \sin(-x)}{(-x)^2 - 1} = -\frac{4x \sin x}{x^2 - 1} = -\varphi(x).$

$$\text{Είναι } \int_{-a}^a \varphi(x) dx = \int_{-a}^0 \varphi(x) dx + \int_0^a \varphi(x) dx = I_1 + I_2$$

Θέτουμε $x = -u$, οπότε $dx = -du$. Για $x = -a$ το $u = a$, ενώ για $x = 0$ το $u = 0$.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-a}^0 \varphi(x) dx = \int_a^0 \varphi(-u) (-du) = - \int_a^0 \varphi(-u) du = \\ &= \int_0^a \varphi(-u) du \stackrel{\varphi: \text{περιττή}}{=} \int_0^a -\varphi(u) du = - \int_0^a \varphi(u) du = -I_2 \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } \int_{-a}^a \varphi(x) dx = I_1 + I_2 = -I_2 + I_2 = 0.$$

ΘΕΜΑ 31ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$\int_0^{f(x)} (e^t + 1) dt = x - 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $e^{f(x)} + f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κοιλότητα και να βρείτε το πρόσημό της.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1$ και $x = 1 + e$.

ε) Να αποδείξετε ότι $(x-1)f'(x) < f(x) < \frac{x-1}{2}$, για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\int_0^{f(x)} (e^t + 1) dt = x - 1 \Leftrightarrow [e^t + t]_0^{f(x)} = x - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)} + f(x) - (e^0 + 0) = x - 1 \Leftrightarrow e^{f(x)} + f(x) = x \quad (1).$$

β) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και η $e^{f(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως σύνθεση παραγωγισίμων, οπότε παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της (1) έχουμε:

$$(e^{f(x)} + f(x))' = (x)' \Leftrightarrow e^{f(x)} f'(x) + f'(x) = 1 \Leftrightarrow (e^{f(x)} + 1)f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)} + 1} \quad (2).$$

Είναι $f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)} + 1} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και «1-1», οπότε αντιστρέφεται.

Ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \quad \text{με } x, y \in \mathbb{R}, \text{ αφού } f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}.$$

Η (1) ισοδύναμα γράφεται $e^y + y = f^{-1}(y) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = e^y + y, y \in \mathbb{R}.$

Άρα $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^{-1}(x) = e^x + x \quad (3).$

γ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε και η $e^{f(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως σύνθεση παραγωγισίμων, άρα και η $\frac{1}{e^{f(x)} + 1}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκo παραγωγισίμων,

οπότε η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = -\frac{e^{f(x)} f'(x)}{(e^{f(x)} + 1)^2} < 0$,

άρα η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

Για $x=0$ από τη σχέση (3) έχουμε $f^{-1}(0) = 1$ άρα $f(1) = 0 \quad (4).$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε:

- Για $x < 1 \Rightarrow f(x) < f(1) \Rightarrow f(x) < 0$
- Για $x > 1 \Rightarrow f(x) > f(1) \Rightarrow f(x) > 0$.

δ) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1, e+1]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, e+1]$, επομένως το

εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , τον

άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=1+e$ είναι:

Είναι $E(\Omega) = \int_1^{1+e} f(x) dx$. Θέτουμε $f(x) = u \Leftrightarrow x = f^{-1}(u) \Leftrightarrow x = e^u + u$, άρα $dx = (e^u + 1)du$.

Για $x = 1$ έχουμε $1 = f^{-1}(u) \Leftrightarrow f^{-1}(0) = f^{-1}(u) \Leftrightarrow u = 0$.

Για $x = 1 + e$ έχουμε $1 + e = f^{-1}(u) \Leftrightarrow f^{-1}(1) = f^{-1}(u) \Leftrightarrow u = 1$.

Άρα έχουμε:

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_1^{1+e} f(x) dx = \int_0^1 u(e^u + 1) du = \int_0^1 u e^u du + \int_0^1 u du = \int_0^1 u(e^u)' du + \int_0^1 u du = \\ &= \left[u e^u \right]_0^1 - \int_0^1 (u)' e^u du + \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1 = e - \int_0^1 e^u du + \frac{1}{2} = e - \left[e^u \right]_0^1 + \frac{1}{2} = e - (e - 1) + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

ε) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[1, x]$, άρα ισχύει το Θ.Μ.Τ., οπότε θα υπάρχει ένα

$$\text{τουλάχιστον } \xi \in (1, x) \text{ τέτοιο, ώστε } f'(\xi) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} f'(\xi) = \frac{f(x)}{x - 1} \quad (5).$$

Η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$, άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως για $1 < \xi < x \Rightarrow f'(1) > f'(\xi) > f'(x) \Rightarrow f'(x) < f'(\xi) < f'(1) \quad (6).$

$$\text{Για } x = 1 \text{ από τη σχέση (2) έχουμε } f'(1) = \frac{1}{e^{f(1)} + 1} \stackrel{(4)}{=} \frac{1}{e^0 + 1} = \frac{1}{2} \quad (7).$$

$$\text{Η (6)} \stackrel{(5),(7)}{\Rightarrow} f'(x) < \frac{f(x)}{x - 1} < \frac{1}{2} \stackrel{x > 1}{\Rightarrow} (x - 1)f'(x) < f(x) < \frac{x - 1}{2}.$$

ΘΕΜΑ 32ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις $f^4(x) + 3f'(x) = 0$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτησης f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$, $x \geq 0$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο $A(0, f(0))$.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$, την εφαπτομένη ε και την ευθεία με εξίσωση $x = 7$.

ε) Να αποδείξετε ότι $2f(\sin^2 \alpha) < f(1) + f(\sin 2\alpha)$ με $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in [0, +\infty)$ είναι:

- $f'(x) = -\frac{1}{3}f^4(x) < 0$, αφού $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.
- $f''(x) = -\frac{4}{3}f^3(x)f'(x) = -\frac{4}{3}f^3(x)\left(-\frac{1}{3}f^4(x)\right) = \frac{4}{9}f^7(x)$.

Η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$, άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[0, +\infty)$. Επειδή $f(0) = 1 > 0$, συμπεραίνουμε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$. Άρα $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$, οπότε η f είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$.

β) Για κάθε $x \in [0, +\infty)$ έχουμε:

$$f^4(x) + 3f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3f'(x) = f^4(x) \Leftrightarrow -3f^{-4}(x)f'(x) = 1, \text{ άρα}$$

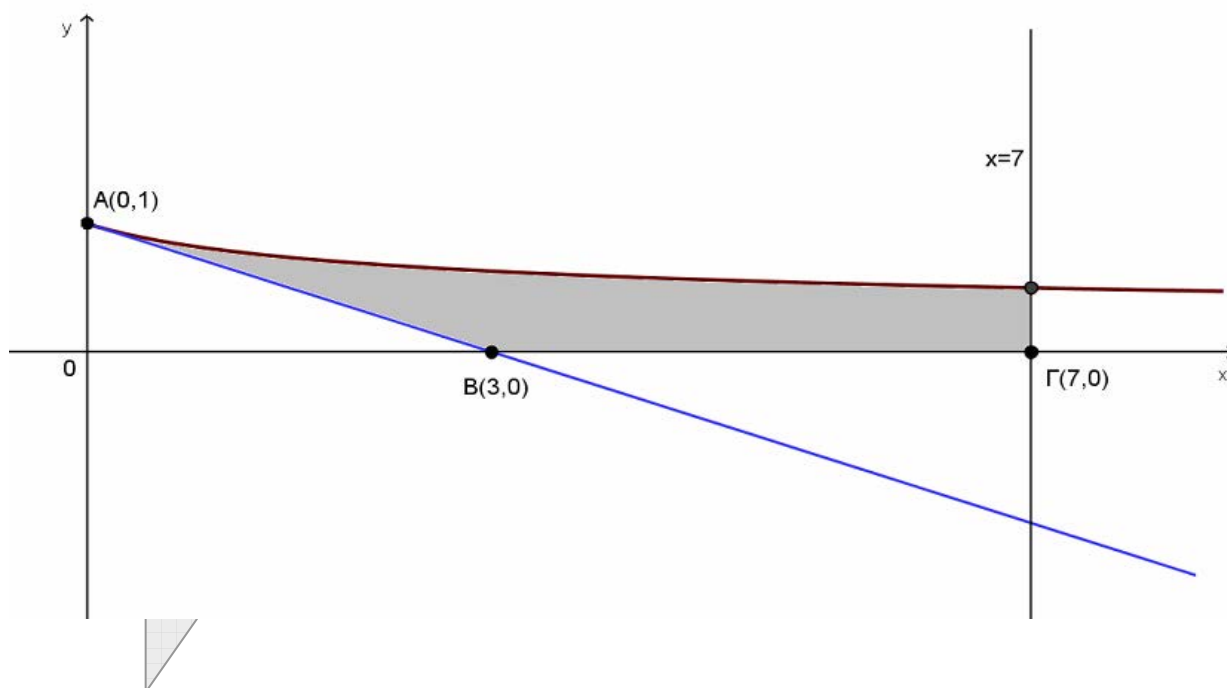
$$\int -3f^{-4}(x)f'(x)dx = \int 1dx \Leftrightarrow -3\frac{f^{-3}(x)}{-3} = x + c \Leftrightarrow \frac{1}{f^3(x)} = x + c.$$

Είναι $f(0) = 1$, άρα $c = 1$, οπότε $\frac{1}{f^3(x)} = x + 1 \Leftrightarrow f^3(x) = \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}, x \in [0, +\infty)$.

γ) Η εξίσωση εφαπτομένης ε της C_f στο σημείο της $A(0,1)$ είναι:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 1 = -\frac{1}{3}x \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + 1 \quad (1).$$

δ) Για $y = 0$ από την (1) έχουμε $-\frac{1}{3}x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 3$. Άρα η εφαπτομένη ε τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(3,0)$. Το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$, την εφαπτομένη ε και την ευθεία με εξίσωση $x = 7$, είναι:



$$E(\Omega) = \int_0^7 \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} dx - (OAB) = \int_0^7 (x+1)^{-\frac{1}{3}} dx - \frac{1}{2}(OA)(OB) =$$

$$= \left[\frac{(x+1)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} \right]_0^7 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 = \frac{3}{2} \left[\sqrt[3]{(x+1)^2} \right]_0^7 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}(4-1) - \frac{3}{2} = 3 \text{ τ.μ.}$$

ε) Γνωρίζουμε ότι:

$$\sin 2\alpha = 2\sin^2\alpha - 1, \text{ άρα } \sin^2\alpha - \sin 2\alpha = 1 - \sin^2\alpha > 0 \text{ για κάθε } \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[\sin 2\alpha, \sin^2\alpha]$ και $[\sin^2\alpha, 1]$, οπότε θα υπάρχει:

- $\xi_1 \in (\sin 2\alpha, \sin^2\alpha)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(\sin^2\alpha) - f(\sin 2\alpha)}{\sin^2\alpha - \sin 2\alpha} = \frac{f(\sin^2\alpha) - f(\sin 2\alpha)}{1 - \sin^2\alpha}$ και
- $\xi_2 \in (\sin^2\alpha, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_2) = \frac{f(1) - f(\sin^2\alpha)}{1 - \sin^2\alpha} = \frac{f(1) - f(\sin^2\alpha)}{1 - \sin^2\alpha}$.

Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Αρα για $\xi_1 < \xi_2$ είναι $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$ οπότε έχουμε:

$$f(\sin^2\alpha) - f(\sin 2\alpha) < f(1) - f(\sin^2\alpha) \Leftrightarrow 2f(\sin^2\alpha) < f(1) + f(\sin 2\alpha).$$

ΘΕΜΑ 33ο :

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x) + f(x) = e^{-3x^2} + e^{-x^2}$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \frac{1}{f(x)} - e \cdot f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx + e \int_1^0 f(x) dx < e - 1$.

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = \int_1^{2x} \frac{1}{f(t)} dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε την παράγωγό της.

ε) Να αποδείξετε ότι $\int_0^{\frac{1}{2}} h(x) dx = \frac{1-e}{4}$.

ΛΥΣΗ

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^3 + x$, $x \in \mathbb{R}$, οπότε η (1) γράφεται $g(f(x)) = g(e^{-x^2})$ (2).

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι «1-1». Επομένως από τη σχέση (2) έχουμε $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\varphi(x) = \frac{1}{f(x)} - e \cdot f(x) = e^{x^2} - e \cdot e^{-x^2} = e^{x^2} - e^{1-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $\varphi'(x) = e^{x^2} 2x - e^{1-x^2} (-2x) = 2x(e^{x^2} + e^{1-x^2})$.

Είναι:

- $\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(e^{x^2} + e^{1-x^2}) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- $\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x(e^{x^2} + e^{1-x^2}) > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

Το πρόσημο της φ' , η μονοτονία και τα ακρότατα της φ φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
φ'	-	0	+
φ		ελάχ.	

Έχουμε:

- Η φ είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$ και $\varphi'(x) < 0$ στο $(-\infty, 0)$, άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.
- Η φ είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και $\varphi'(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$, άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.
- Η φ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$, με ελάχιστη τιμή $\varphi(0) = 1 - e$.

$$\begin{aligned} \gamma) \text{ Αρκεί να δείξουμε ότι } \int_0^1 e^{x^2} dx + e \int_1^0 e^{-x^2} dx < e - 1 &\Leftrightarrow \int_0^1 e^{x^2} dx - \int_0^1 e^{1-x^2} dx < e - 1 \Leftrightarrow \\ \int_0^1 (e^{x^2} - e^{1-x^2}) dx < e - 1 &\Leftrightarrow \int_0^1 \varphi(x) dx < e - 1. \end{aligned}$$

Η συνάρτηση φ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$, άρα για κάθε $x \in [0, 1]$ είναι

$$\varphi(0) \leq \varphi(x) \leq \varphi(1). \text{ Είναι } \varphi(0) = e^0 - e^{1-0} = 1 - e \text{ και } \varphi(1) = e - e^0 = e - 1, \text{ άρα } 1 - e \leq \varphi(x) \leq e - 1.$$

Είναι $e - 1 \geq \varphi(x) \Leftrightarrow e - 1 - \varphi(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [0, 1]$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$.

$$\text{Επομένως } \int_0^1 [e - 1 - \varphi(x)] dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (e - 1) dx - \int_0^1 \varphi(x) dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (e - 1) dx > \int_0^1 \varphi(x) dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \varphi(x) dx < \int_0^1 (e - 1) dx \Leftrightarrow \int_0^1 \varphi(x) dx < e - 1.$$

δ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$h(x) = \int_1^{2x} \frac{1}{f(t)} dt \Leftrightarrow h(x) = \int_1^{2x} \frac{1}{e^{-t^2}} dt \Leftrightarrow h(x) = \int_1^{2x} e^{t^2} dt.$$

Η συνάρτηση e^{t^2} είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, η συνάρτηση $2x$ ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε και η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με

$$h'(x) = \left(\int_1^{2x} e^{t^2} dt \right)' = e^{(2x)^2} (2x)' = 2e^{4x^2}.$$

ε) Είναι:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} h(x) dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} (x)' h(x) dx = [xh(x)]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x h'(x) dx = \frac{1}{2} h\left(\frac{1}{2}\right) - \int_0^{\frac{1}{2}} x \cdot 2e^{4x^2} dx = \\ &= 0 - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} (e^{4x^2})' dx = -\frac{1}{4} [e^{4x^2}]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4} (e - 1) = \frac{1-e}{4}. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 34ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$, η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) > 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad \int \frac{(x-1)^2 f(x)}{x^2 + 1} dx = f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R} \quad (2).$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f , ως προς τη μονοτονία.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

δ) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - \ln(x^4 + 1) < 1 - \ln 2$.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $\int \frac{(x-1)^2 f(x)}{x^2 + 1} dx = f(x) + c$, άρα

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x-1)^2 f(x)}{x^2 + 1} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} - \frac{2x}{x^2 + 1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 1 - \frac{2x}{x^2 + 1} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} (\ln f(x))' = (x - \ln(x^2 + 1))' \Leftrightarrow \ln f(x) = x - \ln(x^2 + 1) + c_1. \end{aligned}$$

Για $x = 0$ έχουμε $\ln f(0) = -\ln 1 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$.

Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\ln f(x) = x - \ln(x^2 + 1) \Leftrightarrow \ln f(x) = \ln e^x - \ln(x^2 + 1) \Leftrightarrow \ln f(x) = \ln \frac{e^x}{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}.$$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2+1) - 2xe^x}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}.$$

Είναι:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty).$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	+	0	+
f	↗	↘	↗

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε το σύνολο τιμών της είναι:

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right).$$

Έχουμε:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^x \cdot \frac{1}{x^2+1} \right) = 0$, γιατί $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2+1} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(x^2+1)'} \stackrel{\text{D.L.H.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} \stackrel{\text{D.L.H.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty.$

Επομένως το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$.

δ) Είναι:

$$\begin{aligned} x^2 - \ln(x^4 + 1) &< 1 - \ln 2 \Leftrightarrow x^2 < 1 - \ln 2 + \ln(x^4 + 1) \Leftrightarrow x^2 < \ln e - \ln 2 + \ln(x^4 + 1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 < \ln \frac{e(x^4 + 1)}{2} \Leftrightarrow e^{x^2} < \frac{e(x^4 + 1)}{2} \Leftrightarrow \frac{e^{x^2}}{x^4 + 1} < \frac{e}{2} \Leftrightarrow \frac{e^{x^2}}{(x^2)^2 + 1} < \frac{e}{2} \Leftrightarrow f(x^2) < f(1) \quad (3). \end{aligned}$$

Για τους αριθμούς x^2 και 1 υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις: ή $x^2 > 1$, ή $x^2 = 1$, ή $x^2 < 1$.

Αν υποθέσουμε ότι $x^2 > 1$ και με δεδομένο ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, προκύπτει $f(x^2) > f(1)$ που είναι άτοπο λόγω της (3). Αν υποθέσουμε ότι $x^2 = 1$, τότε από τον ορισμό της συνάρτησης προκύπτει $f(x^2) = f(1)$ που επίσης είναι άτοπο λόγω της (3).

Άρα από τη σχέση (3) προκύπτει $x^2 < 1$. Έχουμε λοιπόν $x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

ΘΕΜΑ 35ο :

Δίνεται η συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z_x = f(x) + xi$, $x \in [\alpha, \beta]$ με $\alpha > 0$.

α) Αν $\operatorname{Re}(z_\alpha) = \operatorname{Im}(\bar{z}_\beta)$ και $\operatorname{Re}(\bar{z}_\beta) = \operatorname{Im}(z_\alpha)$, να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$, σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

β) Αν $\int_{\alpha}^{x_0} f(x) dx = -1$ και $\int_{\beta}^{x_0} f(x) dx = -3$, τότε:

i) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f , της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = \alpha$ και $x = \beta$.

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιοι, ώστε να ισχύει $\frac{3}{f(\xi_2)} - \frac{1}{f(\xi_1)} = \beta - \alpha$.

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $z_\alpha = f(\alpha) + \alpha i$ και $\bar{z}_\beta = f(\beta) - \beta i$.

Είναι:

- $\operatorname{Re}(z_\alpha) = \operatorname{Im}(\bar{z}_\beta)$, οπότε $f(\alpha) = -\beta < 0$,
- $\operatorname{Re}(\bar{z}_\beta) = \operatorname{Im}(z_\alpha)$, οπότε $f(\beta) = \alpha > 0$, αφού $0 < \alpha < \beta$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha)f(\beta) = -\alpha\beta < 0$.

Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Bolzano, οπότε θα υπάρχει ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και μάλιστα μοναδικό, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

β) i) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$, οπότε:

- Για $\alpha \leq x \leq x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$, άρα $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, x_0]$.
- Για $x_0 \leq x \leq \beta \Rightarrow f(x_0) \leq f(x)$, άρα $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [x_0, \beta]$.

Επομένως το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f , της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = \alpha$ και $x = \beta$, είναι:

$$E = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx = \int_{\alpha}^{x_0} (-f(x)) dx + \int_{x_0}^{\beta} f(x) dx = -(-1) + 3 = 4 \text{ τ.μ.}$$

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in [\alpha, \beta]$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, ως αρχική συνάρτηση της συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha, \beta]$ με $g'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x)$. Άρα η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta]$, οπότε θα υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha, x_0)$ και $\xi_2 \in (x_0, \beta)$ τέτοια, ώστε:

$$\bullet \quad g'(\xi_1) = \frac{g(x_0) - g(\alpha)}{x_0 - \alpha} = \frac{\int_a^{x_0} f(t)dt - \int_a^{\alpha} f(t)dt}{x_0 - \alpha} = \frac{-1 - 0}{x_0 - \alpha} = \frac{-1}{x_0 - \alpha}$$

και

$$\bullet \quad g'(\xi_2) = \frac{g(\beta) - g(x_0)}{\beta - x_0} = \frac{\int_a^{\beta} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt}{\beta - x_0} = \frac{\int_a^{\beta} f(t)dt + \int_{x_0}^{\alpha} f(t)dt}{\beta - x_0} = \frac{\int_{x_0}^{\beta} f(t)dt}{\beta - x_0} = \frac{3}{\beta - x_0}.$$

$$\text{Άρα έχουμε: } g'(\xi_1) = \frac{-1}{x_0 - \alpha} \Leftrightarrow f(\xi_1) = \frac{-1}{x_0 - \alpha} \Leftrightarrow x_0 - \alpha = \frac{-1}{f(\xi_1)} \quad (1)$$

$$\text{και} \quad g'(\xi_2) = \frac{3}{\beta - x_0} \Leftrightarrow f(\xi_2) = \frac{3}{\beta - x_0} \Leftrightarrow \beta - x_0 = \frac{3}{f(\xi_2)} \quad (2)$$

$$\text{Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε} \quad \frac{3}{f(\xi_2)} - \frac{1}{f(\xi_1)} = \beta - \alpha.$$

ΘΕΜΑ 36ο :

Δίνεται συνάρτηση $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη, με $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f''(x) = 2f(x)f'(x)$, για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = f^2(x) + 1$, για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$ είναι «1-1» στο $\mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = g(f(x)) - g(\epsilon\phi x)$ είναι σταθερή στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και στη συνέχεια να βρείτε τον τύπο της.

δ) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \epsilon\phi x$, για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

ε) Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_g , της συνάρτησης g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=1$, να αποδείξετε ότι $g(1) = E + \frac{\ln 2}{2}$.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$(f'(x))' = (f^2(x))' \Leftrightarrow f'(x) = f^2(x) + c.$$

Όμως $f'(0) = f^2(0) + c \Leftrightarrow 1 = 0 + c \Leftrightarrow c = 1$. Άρα $f'(x) = f^2(x) + 1$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

β) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης $\frac{1}{1+t^2}$, με

$g'(x) = \left(\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt\right)' = \frac{1}{1+x^2}$. Είναι $g'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα η g είναι και «1-1».

γ) Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(f(x))f'(x) - g'(\varepsilon\phi x)(\varepsilon\phi x)' \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow h'(x) = \frac{1}{1+f^2(x)}(1+f^2(x)) - \frac{1}{1+\varepsilon\phi^2 x} \cdot (1+\varepsilon\phi^2 x)' = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Επομένως η συνάρτηση h είναι σταθερή. Έστω $h(x) = c_1$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Για $x = 0$ έχουμε $h(0) = c_1 \Leftrightarrow g(f(0)) - g(\varepsilon\phi 0) = c_1 \Leftrightarrow g(0) - g(0) = c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$.

Άρα $h(x) = 0$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

δ) Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow g(f(x)) - g(\varepsilon\phi x) = 0 \Leftrightarrow g(f(x)) = g(\varepsilon\phi x) \stackrel{g:1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = \varepsilon\phi x.$$

ε) Η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$, άρα για κάθε $x \in [0, 1]$ είναι $g(0) \leq g(x) \leq g(1)$, οπότε $g(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [0, 1]$. Επομένως το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_g , της συνάρτησης g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = 1$, είναι:

$$\begin{aligned} E &= \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 (x)' g(x) dx = [x g(x)]_0^1 - \int_0^1 x \cdot g'(x) dx = g(1) - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \\ &= g(1) - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx = g(1) - \frac{1}{2} [\ln|1+x^2|]_0^1 = g(1) - \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1) = g(1) - \frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

Είναι $E = g(1) - \frac{\ln 2}{2}$, οπότε $g(1) = E + \frac{\ln 2}{2}$.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 2008

ΘΕΜΑ 1^ο

Έστω $z \in \mathbb{C}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \beta$ και $(1+iz)^\nu = \frac{\alpha+\beta i}{\beta+\alpha i}$ (1)

- α) Να αποδείξετε ότι ο z δεν είναι πραγματικός αριθμός.
 β) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημεία κύκλου του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
 γ) Να βρείτε τους μιγαδικούς z που έχουν το μέγιστο και το ελάχιστο μέτρο.
 δ) Να αποδείξετε ότι $4 < |z-3+4i| < 7$
 ε) Αν οι $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ικανοποιούν την (1) να αποδείξετε ότι $|z_1 - z_2| \leq 2$

Λύση

α) Έστω $z \in \mathbb{R}$, τότε από την (1) έχουμε

$$\left| (1+iz)^\nu \right| = \left| \frac{\alpha+\beta i}{\beta+\alpha i} \right| \Leftrightarrow |1+iz|^\nu = \frac{|\alpha+\beta i|}{|\beta+\alpha i|} \Leftrightarrow |1+iz|^\nu = 1 \Leftrightarrow |1+iz| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{1+z^2} = 1 \Leftrightarrow z = 0,$$

όμως για $z = 0$ η (1) γράφεται $\frac{\alpha+\beta i}{\beta+\alpha i} = 1 \Leftrightarrow (\alpha-\beta) + (\beta-\alpha)i = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$, άτοπο από υπόθεση.

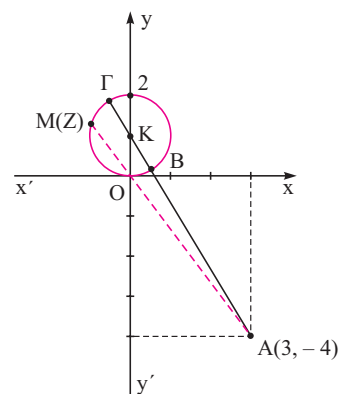
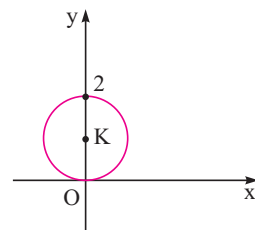
β) Από την (1) έχουμε

$$|1+iz| = 1 \Leftrightarrow |iz - i^2| = 1 \Leftrightarrow |i| \cdot |z-i| = 1 \Leftrightarrow |z-i| = 1,$$

άρα οι εικόνες του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημεία του κύκλου με κέντρο το $K(0,1)$ και ακτίνα $\rho=1$.

γ) Είναι $|z|_{\text{μεγ}} = 2$, όταν $z = 2i$ και $|z|_{\text{ελ}} = 0$, όταν $z = 0$

δ) Το $|z-3+4i| = |z-(3-4i)|$ και παριστάνει την απόσταση των εικόνων $M(z)$ των μιγαδικών αριθμών z από το σημείο $A(3,-4)$. Αν B, Γ είναι τα σημεία τομής της ευθείας AK με τον κύκλο, τότε έχουμε:
 $(AB) \leq (AM) \leq (A\Gamma)$, όμως $(AK) = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$ και
 $(AB) = (AK) - \rho = \sqrt{34} - 1$, $(A\Gamma) = (AK) + \rho = \sqrt{34} + 1$, επομένως
 $\sqrt{34} - 1 \leq |z-3+4i| \leq \sqrt{34} + 1$, όμως $\sqrt{34} + 1 < 7$ και $4 < \sqrt{34} - 1$, άρα
 $4 < |z-3+4i| < 7$



ε) Οι εικόνες Δ, E των z_1, z_2 είναι σημεία του κύκλου $|z-i|=1$, άρα $|z_1 - z_2| = (\Delta E) \leq 2\rho = 2$

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται οι μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \rho$ και

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{z_2}{z_3}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{z_3}{z_1}\right) = -\frac{1}{2}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $z_1 + z_2 + z_3 = 0$

β) Το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των z_1, z_2, z_3 είναι ισόπλευρο.

Λύση

α) Έχουμε $2\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{z_1}{z_2} + \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \Leftrightarrow 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2}{z_2 \bar{z}_2} \Leftrightarrow z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = -|z_2|^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = -\rho^2 \quad (1).$$

Ομοίως έχουμε $z_2 \bar{z}_3 + \bar{z}_2 z_3 = -\rho^2 \quad (2)$ και $z_1 \bar{z}_3 + \bar{z}_1 z_3 = -\rho^2 \quad (3)$

Είναι $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow |z_1 + z_2 + z_3| = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (z_1 + z_2 + z_3)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z_1 + z_2 + z_3)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_1 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + z_1 \bar{z}_3 + z_2 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_3 + z_3 \bar{z}_1 + z_3 \bar{z}_2 + z_3 \bar{z}_3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z_1|^2 + (z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1) + |z_2|^2 + (z_2 \bar{z}_3 + z_3 \bar{z}_2) + |z_3|^2 + (z_1 \bar{z}_3 + z_3 \bar{z}_1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho^2 - \rho^2 + \rho^2 - \rho^2 + \rho^2 - \rho^2 = 0, \text{ αληθές. Άρα } z_1 + z_2 + z_3 = 0.$$

β) Αρκεί να δείξουμε ότι $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$.

Επειδή $z_2 = -z_1 - z_3$ διαδοχικά έχουμε:

$$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| \Leftrightarrow |z_1 + z_1 + z_3| = |-z_1 - z_3 - z_3| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |2z_1 + z_3|^2 = |z_1 + 2z_3|^2 \Leftrightarrow (2z_1 + z_3)(\bar{2z_1 + z_3}) = (z_1 + 2z_3)(\bar{z_1 + 2z_3}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4z_1 \bar{z}_1 + 2z_1 \bar{z}_3 + 2\bar{z}_1 z_3 + z_3 \bar{z}_3 = z_1 \bar{z}_1 + 2z_1 \bar{z}_3 + 2z_3 \bar{z}_1 + 4z_3 \bar{z}_3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3|z_1|^2 = 3|z_3|^2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_3|, \text{ αληθές. Άρα } |z_1 - z_2| = |z_2 - z_3|.$$

Ομοίως δείχνουμε ότι $|z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$, οπότε $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$.

Άρα το τρίγωνο που ορίζουν οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 είναι ισόπλευρο.

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η εξίσωση $z^2 - az + \beta = 0$, $z \in \mathbb{C}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και z_1, z_2 , είναι οι ρίζες της με $z_1 = 2 + i$

1) Να βρείτε τους αριθμούς α, β .

2) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $z_1^{2008} + z_2^{2008}$ είναι πραγματικός.

3) Έστω $A(z_1), B(z_2), \Gamma(z_3)$ οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2, z_3 αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο με $z_3 = \frac{z_1}{z_2} + \frac{1}{5} \cdot (17 + i)$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

β) Αν $|w - z_1| = |\bar{w} - z_1|$, να αποδείξετε ότι $w \in \mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών w , που επαληθεύουν την εξίσωση $|w - z_2| + |\bar{w} - z_2| = 10$, βρίσκονται σε έλλειψη.

Λύση

1) Έχουμε την εξίσωση $z^2 - az + \beta = 0$ (1), $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Αφού $z_1 = 2 + i$ ρίζα της (1) τότε ρίζα της θα είναι και η $z_2 = \bar{z}_1 = 2 - i$, οπότε από τις σχέσεις Vieta

$$\text{έχουμε: } z_1 + z_2 = -\frac{-a}{1} \Leftrightarrow (2 + i) + (2 - i) = a \Leftrightarrow a = 4$$

$$z_1 z_2 = \frac{\beta}{1} \Leftrightarrow (2 + i)(2 - i) = \beta \Leftrightarrow 2^2 + 1^2 = \beta \Leftrightarrow \beta = 5$$

2) Έστω $u = z_1^{2008} + z_2^{2008} = z_1^{2008} + (\bar{z}_1)^{2008}$

$$\bar{u} = \overline{z_1^{2008} + z_2^{2008}} = \overline{z_1^{2008}} + \overline{(\bar{z}_1)^{2008}} = (\bar{z}_1)^{2008} + z_1^{2008} = u$$

$$\text{Έχουμε } \bar{u} = u \Leftrightarrow u - \bar{u} = 0 \Leftrightarrow 2i \cdot \text{Im}(u) = 0 \Leftrightarrow \text{Im}(u) = 0 \Leftrightarrow u \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} 3) \text{ α) Είναι } z_3 &= \frac{z_1}{z_2} + \frac{1}{5}(17 + i) = \frac{2 + i}{2 - i} + \frac{1}{5}(17 + i) = \frac{(2 + i)^2}{2^2 + 1^2} + \frac{1}{5}(17 + i) = \frac{4 + 4i - 1}{5} + \frac{1}{5}(17 + i) = \\ &= \frac{3 + 4i + 17 + i}{5} = \frac{20 + 5i}{5} = 4 + i \end{aligned}$$

Οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο αντίστοιχα είναι $A(2, 1)$, $B(2, -1)$ και $\Gamma(4, 1)$. Έχουμε:

$$(AB) = |z_2 - z_1| = |2 - i - 2 - i| = |-2i| = |-2| \cdot |i| = 2$$

$$(B\Gamma) = |z_3 - z_2| = |4 + i - 2 - i| = |2 + 2i| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$(A\Gamma) = |z_1 - z_3| = |2 + i - 4 - i| = |-2| = 2$$

Παρατηρούμε ότι $AB = A\Gamma$. Επίσης $AB^2 = 2^2 = 4$, $A\Gamma^2 = 2^2 = 4$, $B\Gamma^2 = 8$, δηλαδή

$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$, άρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

$$\beta) |w - z_1| = |\overline{w} - z_1| \Leftrightarrow |w - z_1| = |\overline{w} - \overline{z_2}| \Leftrightarrow |w - z_1| = |\overline{w} - \overline{z_2}| \stackrel{|\overline{z}|=|z|}{\Leftrightarrow} |w - z_1| = |w - z_2| \quad (1)$$

(εξίσωση μεσοκαθέτου)

Έστω: $w = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, $M(x, y)$ η εικόνα του στο μιγαδικό επίπεδο τότε η (1) γίνεται:

$$|x + yi - 2 - i| = |x + yi - 2 + i| \Leftrightarrow |(x-2) + (y-1)i| = |(x-2) + (y+1)i| \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} \Leftrightarrow \cancel{(x-2)^2} + \cancel{y^2} - 2y + 1 = \cancel{(x-2)^2} + \cancel{y^2} + 2y + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 0. \text{ Άρα } w \in \mathbb{R}.$$

$$\gamma) |w - z_2| + |\overline{w} - z_2| = 10 \Leftrightarrow |w - z_2| + |\overline{w} - \overline{z_1}| = 10 \Leftrightarrow |w - z_2| + |\overline{w} - \overline{z_1}| = 10 \stackrel{|\overline{z}|=|z|}{\Leftrightarrow}$$

$$|w - z_2| + |w - z_1| = 10 (= 2 \cdot 5 = 2 \cdot \alpha) \quad (1)$$

Παρατηρούμε ότι $|z_2 - z_1| = 2 \cdot 1 = 2\gamma$

Έχουμε $2\gamma < 2\alpha$ άρα η (1) είναι εξίσωση έλλειψης.

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και ο μιγαδικός αριθμός $z \in \mathbb{C}$. Αν ισχύει $f'(x)i^{-2008} + 2xi^{-2006} = |2z + 2|i^{2007} - |z - 1|i^{-2009}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$ και $|z - 1| = |2z + 2|$

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο.

γ) Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων δίνονται η γραφική παράσταση της f και το ορθογώνιο με κορυφές $O(0, 0)$, $A(\kappa, 0)$, $B(\kappa, \kappa^2 + 1)$ και $\Gamma(0, \kappa^2 + 1)$, $\kappa > 0$. Να βρείτε την τιμή του κ ώστε η γραφική παράσταση της f να διαιρεί το ορθογώνιο $OAB\Gamma$ σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

Λύση

$$\alpha) f'(x)i^{-2008} + 2xi^{-2006} = |2z + 2|i^{2007} - |z - 1|i^{-2009} \quad (1)$$

$$i^{-2008} = \frac{1}{i^{2008}} = \frac{1}{i^{4 \cdot 502}} = \frac{1}{(i^4)^{502}} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$i^{-2006} = \frac{1}{i^{2006}} = \frac{1}{i^{4 \cdot 501 + 2}} = \frac{1}{i^2} = -1$$

$$i^{2007} = i^{4 \cdot 501 + 3} = i^3 = i^2 \cdot i = -i,$$

$$i^{-2009} = \frac{1}{i^{2009}} = \frac{1}{i^{4 \cdot 502 + 1}} = \frac{1}{i} = \frac{-i}{-i^2} = -i$$

$$(1) \Leftrightarrow f'(x) - 2x = -|2z + 2|i + |z - 1|i \Leftrightarrow f'(x) + |2z + 2|i = 2x + |z - 1|i \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 2x \\ |2z + 2| = |z - 1| \end{cases} \text{ και}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f'(x) = 2x \Leftrightarrow f'(x) = (x^2)'$, άρα υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$, ώστε

$$f(x) = x^2 + c, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Για $x = 0$ έχουμε $f(0) = 1 \Leftrightarrow 0^2 + c = 1 \Leftrightarrow c = 1$, άρα $f(x) = x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

β) $|2z + 2| = |z - 1| \Leftrightarrow |2(z + 1)| = |z - 1| \Leftrightarrow 2|z + 1| = |z - 1| \quad (2)$

Έστω $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ και $M(x, y)$ η εικόνα του στο μιγαδικό επίπεδο, τότε η (2) γράφεται:

$$2|x + yi + 1| = |x + yi - 1| \Leftrightarrow 2|x + 1 + yi| = |x - 1 + yi| \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \Leftrightarrow 4(x^2 + 2x + 1 + y^2) = x^2 - 2x + 1 + y^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 8x + 4 + 4y^2 - x^2 + 2x - 1 - y^2 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 10x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{10}{3}x + 1 = 0 \quad (3)$$

Η εξίσωση (3) είναι της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ με $A = \frac{10}{3}$, $B = 0$ και $\Gamma = 1$.

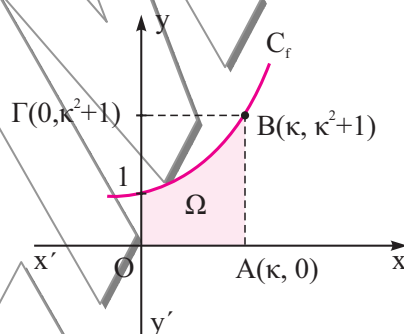
Παρατηρούμε ότι $A^2 + B^2 - 4\Gamma = \left(\frac{10}{3}\right)^2 - 4 \cdot 1 = \frac{100}{9} - 4 = \frac{64}{9} > 0$.

Άρα η (3) είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο το σημείο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ δηλαδή $K\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$ και

ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{4}{3}$. Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι

ο κύκλος με κέντρο $K\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{4}{3}$

γ)



Αν Ω το χωρίο που περικλείεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = \kappa$, τότε το εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega) = \int_0^\kappa |f(x)| dx = \int_0^\kappa |x^2 + 1| dx = \int_0^\kappa (x^2 + 1) dx$$

Το εμβαδόν E' του ορθογώνιου $OAB\Gamma$ είναι $E' = \beta \cdot \nu = \kappa \cdot (\kappa^2 + 1)$ άρα πρέπει:

$$E(\Omega) = \frac{1}{2} E' \Leftrightarrow \int_0^\kappa (x^2 + 1) dx = \frac{1}{2} \kappa (\kappa^2 + 1) \Leftrightarrow \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_0^\kappa = \frac{1}{2} \kappa (\kappa^2 + 1) \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{3} \kappa^2 + 1 \right) \kappa = \frac{1}{2} \kappa (\kappa^2 + 1) \Leftrightarrow \frac{1}{3} \kappa^2 + 1 = \frac{1}{2} \kappa^2 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \kappa^2 = 3 \text{ άρα } \kappa = \sqrt{3}$$

ΘΕΜΑ 5^ο

Δίνεται συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ με $f(-1) > 0$ και ο μιγαδικός αριθμός

$$z = \frac{f(-1)f(0)}{2} + \frac{4\sqrt{3}}{f(1)}i, \text{ για τον οποίο ισχύει ότι } |z| = \frac{z}{2}(1 - \sqrt{3}i). \text{ Να αποδείξετε ότι}$$

α) $f(-1)f(0)f(1) = 8$

β) $2\operatorname{Re}(z) = |z|$

γ) $f(-1) < 2 < f(1)$

δ) η f αντιστρέφεται και ισχύει $-1 < f^{-1}(\sqrt{|z|}) < 0$

Λύση

α) Είναι $-1 < 0 < 1$ και f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως $f(-1) < f(0) < f(1)$, όμως $f(-1) > 0$, άρα $f(1) > f(0) > 0$ (1).

Επίσης έχουμε

$$\begin{aligned} |z| &= \frac{z}{2}(1 - \sqrt{3}i) = \frac{1}{2} \left(\frac{f(-1)f(0)}{2} + \frac{4\sqrt{3}}{f(1)}i \right) (1 - \sqrt{3}i) = \\ &= \frac{f(-1)f(0)}{4} + \frac{6}{f(1)} + i \left(\frac{2\sqrt{3}}{f(1)} - \frac{\sqrt{3}f(-1)f(0)}{4} \right) \end{aligned}$$

Όμως $|z|$ είναι πραγματικός αριθμός, άρα

$$\frac{2\sqrt{3}}{f(1)} - \frac{\sqrt{3}f(-1)f(0)}{4} = 0 \Leftrightarrow 8\sqrt{3} - \sqrt{3}f(-1)f(0)f(1) = 0 \Leftrightarrow f(-1)f(0)f(1) = 8 \quad (2)$$

β) Έχουμε $|z| = \frac{f(-1)f(0)}{4} + \frac{6}{f(1)}$ με αντικατάσταση του $f(1) = \frac{8}{f(-1)f(0)}$ σύμφωνα με

$$\text{τη σχέση (2), προκύπτει ότι } |z| = \frac{f(-1)f(0)}{4} + \frac{6f(-1)f(0)}{8} = f(-1)f(0) = 2\operatorname{Re}(z).$$

γ) Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι, αν οι τιμές $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ είναι μικρότερες του 2 τότε το γινόμενο τους θα είναι μικρότερο του 8. Άτοπο γιατί το γινόμενό τους είναι ίσο με 8. Άρα θα υπάρχει κάποια τιμή από τις τρεις μεγαλύτερη του 2 και αυτή είναι η $f(1)$. Αν οι παραπάνω τιμές είναι μεγαλύτερες του 2 τότε το γινόμενό τους θα είναι μεγαλύτερο του 8. Άτοπο, άρα θα υπάρχει κάποια τιμή από τις τρεις μικρότερη του 2 και αυτή είναι η $f(-1)$. Επομένως ισχύει $f(-1) < 2 < f(1)$.

δ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, θα είναι και " $1-1$ ", οπότε αντιστρέφεται. Θέλουμε

$$-1 < f^{-1}(\sqrt{|z|}) < 0 \Leftrightarrow f(-1) < \sqrt{|z|} < f(0) \Leftrightarrow f(-1) < \sqrt{f(-1)f(0)} < f(0) \Leftrightarrow$$

$$f^2(-1) < f(-1)f(0) < f^2(0) \Leftrightarrow \begin{cases} f^2(-1) < f(-1)f(0) \\ f(-1)f(0) < f^2(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) < f(0) \\ f(-1) < f(0) \end{cases}$$

που είναι αληθές γιατί $f(0) > f(-1) > 0$. Επομένως ισχύει και η αρχική.

Θέμα 6^ο

A) Έστω $w \in \mathbb{C}$ τέτοιος, ώστε $\alpha w + \beta \bar{w} + \gamma = 0$, όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq \beta$. Να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha \bar{w} + \beta w + \gamma = 0$ ii) $w \in \mathbb{R}$

B) Αν ο μιγαδικός αριθμός z επαληθεύει τη σχέση $2z^3\bar{z} + 5z\bar{z}^3 + 7 = 0$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $z^3\bar{z} = z\bar{z}^3 = -1$ ii) $|z| = 1$

β) Να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό z .

Λύση

A) i) Είναι $\alpha w + \beta \bar{w} + \gamma = 0$ (1)

Παίρνοντας τους συζυγείς και των δύο μελών της (1) έχουμε $\alpha \bar{w} + \beta w + \gamma = 0$ (2)

ii) Αφαιρώντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha(w - \bar{w}) - \beta(w - \bar{w}) &= 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)(w - \bar{w}) = 0 \stackrel{\alpha \neq \beta}{\Leftrightarrow} w = \bar{w} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow w - \bar{w} &= 0 \Leftrightarrow 2i \cdot \operatorname{Im}(w) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(w) = 0 \Leftrightarrow w \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

B) α) i) Είναι $2z^3\bar{z} + 5z\bar{z}^3 + 7 = 0$ (3)

Παίρνοντας τους συζυγείς και των δύο μελών της (3) έχουμε $2\bar{z}^3z + 5z\bar{z}^3 + 7 = 0$ (4)

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (3) και (4) έχουμε

$$3z\bar{z}^3 - 3z^3\bar{z} = 0 \Leftrightarrow z\bar{z}^3 = z^3\bar{z} \quad (5)$$

Από (3) και (5) προκύπτει ότι $z\bar{z}^3 = z^3\bar{z} = -1$

ii) Είναι $z^3\bar{z} = -1$, οπότε $|z^3\bar{z}| = 1 \Leftrightarrow |z|^3|\bar{z}| = 1 \Leftrightarrow |z|^3|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^4 = 1 \stackrel{|z| \geq 0}{\Leftrightarrow} |z| = 1$

β) Έχουμε $|z| = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$ και $z^3\bar{z} = -1$ οπότε $z^3 \frac{1}{z} = -1 \Leftrightarrow z^2 = -1 \Leftrightarrow z = \pm i$

ΘΕΜΑ 7^ο

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση g με:

$$g(x) = \frac{(1-f(\kappa))x^7 + x^5 + 1}{f(\kappa)x^6 + 4x^4 + 2}, \quad \kappa \in \mathbb{R}$$

α) Να αιτιολογήσετε την άποψη ότι έχει νόημα η αναζήτηση των ορίων:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

γ) Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(2008) < 0$, να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$

δ) Αν $f(\kappa) \in [0, 1]$ και για τη συνάρτηση $h(x) = g(x) + 2008 + \beta$, $x \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1, \text{ να βρείτε τις τιμές των } \beta \text{ και } f(\kappa).$$

Λύση

α) Είναι $g(x) = \frac{(1-f(\kappa))x^7 + x^5 + 1}{f(\kappa)x^6 + 4x^4 + 2}, \quad \kappa \in \mathbb{R}$

Μπορούμε να αναζητήσουμε τα $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ αν το πεδίο ορισμού της g περιέχει διάστημα της μορφής $(-\infty, \alpha)$ και $(\beta, +\infty)$ αντίστοιχα. Επειδή η g είναι ρητή της μορφής $g(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ το πεδίο

ορισμού είναι $D_g = \mathbb{R} - \{x_0 \in \mathbb{R} : Q(x_0) = 0\}$

Επειδή μόνο μεμονωμένες τιμές μπορεί να μηδενίζουν τον παρονομαστή άρα το πεδίο ορισμού της g περιέχει διάστημα της μορφής $(-\infty, \alpha)$ και $(\beta, +\infty)$.

β) Αν $f(\kappa) \neq 0$ και $f(\kappa) \neq 1$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-f(\kappa))x^7 + x^5 + 1}{f(\kappa)x^6 + 4x^4 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1-f(\kappa)}{f(\kappa)} \cdot x \right] = \frac{1-f(\kappa)}{f(\kappa)} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} x$$

Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i) Αν $\frac{1-f(\kappa)}{f(\kappa)} > 0 \Leftrightarrow (1-f(\kappa))f(\kappa) > 0 \Leftrightarrow 0 < f(\kappa) < 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

ii) Αν $\frac{1-f(\kappa)}{f(\kappa)} < 0 \Leftrightarrow f(\kappa) < 0 \text{ ή } f(\kappa) > 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

iii) Αν $f(\kappa) = 1$ τότε $g(x) = \frac{x^5 + 1}{x^6 + 4x^4 + 2}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 + 1}{x^6 + 4x^4 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5}{x^6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

iv) Αν $f(\kappa) = 0$ τότε $g(x) = \frac{x^7 + x^5 + 1}{4x^4 + 2}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^7}{4x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4} x^3 \right) = +\infty$

Επομένως $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } 0 \leq f(\kappa) < 1 \\ -\infty, & \text{αν } f(\kappa) < 0 \text{ ή } f(\kappa) > 1 \\ 0, & \text{αν } f(\kappa) = 1 \end{cases}$

γ) Από υπόθεση γνωρίζουμε ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και f συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, όμως $f(2008) < 0$ άρα και $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα και $f(\kappa) < 0$.

Άρα $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \frac{1 - f(\kappa)}{f(\kappa)} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} x$

Έχουμε $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$, $f(\kappa) < 0$, $1 - f(\kappa) > 0$, άρα $\frac{1 - f(\kappa)}{f(\kappa)} < 0$ επομένως $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$

δ) $h(x) = g(x) + 2008 + \beta \Leftrightarrow h(x) - \beta = g(x) + 2008$

Από το (β) ερώτημα προκύπτει ότι αν το $f(\kappa) \in [0, 1)$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

Άρα και $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$, άτοπο γιατί $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1$

Αν $f(\kappa) = 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - \beta) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) + 2008) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) + 2008 = 0 + 2008 = 2008$,

άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - \beta) = 2008 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \beta = 2008 \Leftrightarrow 1 - \beta = 2008 \Leftrightarrow \beta = -2007$

ΘΕΜΑ 8^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 a^{\frac{1}{x}} + a^x - 2ax$, με $a > 1$.

α) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

δ) Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση $f(x) = 0$.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

α) Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^2 \cdot \alpha^{\frac{1}{x}} \right) = +\infty$, γιατί $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{u = \frac{1}{x} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0}} \alpha^u = \lim_{u \rightarrow 0} \alpha^u \stackrel{\alpha^x \text{ συνεχής στο } 0}{=} \alpha^0 = 1$.

Επίσης $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2\alpha x) = +\infty$, άρα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x^2 \cdot \alpha^{\frac{1}{x}} \right) \stackrel{u = \frac{1}{x}}{=} \lim_{\substack{u = \frac{1}{x} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty}} \left(\frac{1}{u^2} \cdot \alpha^u \right) = 0$, γιατί $\lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{1}{u^2} = 0$ και $\lim_{u \rightarrow -\infty} \alpha^u = 0$.

Επίσης $\lim_{x \rightarrow 0^-} \alpha^x = \alpha^0 = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0^-} (-2\alpha x) = 0$, άρα $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^2 \cdot \alpha^{\frac{1}{x}} \right) \stackrel{u = \frac{1}{x}}{=} \lim_{\substack{u = \frac{1}{x} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty}} \frac{\alpha^u}{u^2} \stackrel{\left(\frac{+}{+} \right)}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha^u)'}{(u^2)'} \stackrel{\text{D.L.H}}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^u \cdot \ln \alpha}{2u} \stackrel{\left(\frac{+}{+} \right)}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^u \cdot (\ln \alpha)^2}{2} \stackrel{\text{D.L.H}}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^u \cdot (\ln \alpha)^2}{2} = +\infty$.

Επίσης $\lim_{x \rightarrow 0^+} \alpha^x = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-2\alpha x) = 0$, άρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(x \cdot \alpha^{\frac{1}{x}} + \frac{\alpha^x}{x} - 2\alpha \right) \right] = +\infty$

β) Για κάθε $x \in A$ η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = 2x \cdot \alpha^{\frac{1}{x}} + x^2 \cdot \alpha^{\frac{1}{x}} \cdot \ln \alpha \cdot \left(\frac{1}{x} \right)' + \alpha^x \cdot \ln \alpha - 2\alpha = 2x \cdot \alpha^{\frac{1}{x}} - \alpha^{\frac{1}{x}} \cdot \ln \alpha + \alpha^x \cdot \ln \alpha - 2\alpha$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη με $f''(x) = 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \alpha^{\frac{1}{x}} - 2 \cdot \frac{\alpha^{\frac{1}{x}} \cdot \ln \alpha}{x} + \frac{\alpha^{\frac{1}{x}} \cdot (\ln \alpha)^2}{x^2} + \alpha^x \cdot (\ln \alpha)^2 =$

$$= \alpha^{\frac{1}{x}} \cdot \left[2 - 2 \cdot \frac{\ln \alpha}{x} + \left(\frac{\ln \alpha}{x} \right)^2 \right] + \alpha^x \cdot (\ln \alpha)^2 = \alpha^{\frac{1}{x}} \cdot \left[1 + \left(1 - \frac{\ln \alpha}{x} \right)^2 \right] + \alpha^x \cdot (\ln \alpha)^2$$

Είναι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in A$, οπότε η f' γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$.

Παρατηρούμε ότι $f'(1) = 0$. Άρα για $x > 1$, επειδή f' γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, είναι $f'(x) > f'(1)$, άρα $f'(x) > 0$.

Για $0 < x < 1$ έχουμε $f'(x) < f'(1)$ άρα $f'(x) < 0$.

Έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \ln \alpha - 2\alpha < 0$, γιατί για κάθε $\alpha > 1$ είναι

$$\begin{cases} \ln \alpha < \alpha - 1 \\ -\alpha < -1 \end{cases} \text{ άρα } \ln \alpha - \alpha < \alpha - 2 \Leftrightarrow \ln \alpha - 2\alpha < -2 \text{ άρα } \ln \alpha - 2\alpha < 0.$$

Η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$, οπότε

$$f'((-\infty, 0)) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x), \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) \right) = (-\infty, \ln a - 2a). \text{ Άρα } f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 0),$$

αφού $\ln a - 2a < 0$.

Ο πίνακας μεταβολών της f είναι:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		+	+
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$

ελάχιστο

Η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$. Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ με ελάχιστη τιμή $f(1) = 0$.

γ) Το σύνολο τιμών της είναι $f(A) = (1, +\infty) \cup [0, +\infty) = [0, +\infty)$.

δ) Από τον πίνακα μεταβολών έχουμε ότι $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

ΘΕΜΑ 9^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
- Η f έχει όριο στο $+\infty$
- $f(x) + e^{f(x)} = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

β) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ) Η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}

δ) Η f έχει δεύτερη παράγωγο και είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

ε) Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με

$$\text{εξισώσεις } x = 1 \text{ και } x = e + 1 \text{ είναι } E = \frac{3}{2} \text{ τ.μ.}$$

Λύση

α) Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + e^{f(x)}) = -\infty$, ενώ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, άρα καταλήγουμε σε άτοπο.

Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + e^{f(x)}) = \ell + e^\ell$, ενώ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, άρα καταλήγουμε σε άτοπο.

Επειδή από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι υπάρχει το όριο της f στο $+\infty$ υποχρεωτικά $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι $(f(x) + e^{f(x)})' = (x)'$, άρα $f'(x) \cdot (1 + e^{f(x)}) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{1 + e^{f(x)}} > 0$, άρα

η f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα είναι και "1-1", οπότε αντιστρέφεται και ισχύει:

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y), \text{ άρα έχουμε } y + e^y = f^{-1}(y), \text{ οπότε } f^{-1}(x) = e^x + x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

δ) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η $\frac{1}{1+e^{f(x)}}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και η $f'(x)$

$$\text{είναι παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R}, \text{ δηλαδή η } f \text{ έχει δεύτερη παράγωγο στο } \mathbb{R} \text{ με } f''(x) = \frac{-f'(x)e^{f(x)}}{(1+e^{f(x)})^2} < 0$$

(αφού $f'(x) > 0$), οπότε η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

ε) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα για $x \geq 1$ είναι $f(x) \geq f(1) = 0$, άρα $E = \int_1^{e+1} |f(x)| dx = \int_1^{e+1} f(x) dx$

$$\text{Θέτουμε } u = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(u), \text{ οπότε } dx = (f^{-1}(u))' du = (e^u + u)' du = (e^u + 1) du$$

Για $x = 1$ είναι $u = f(1) = 0$, γιατί $f^{-1}(0) = 1 \Leftrightarrow f(1) = 0$ και

για $x = e+1$ είναι $u = f(e+1) = 1$, γιατί $f^{-1}(1) = e+1 \Leftrightarrow f(e+1) = 1$, άρα

$$E = \int_0^1 u(e^u + 1) du = \int_0^1 u e^u du + \int_0^1 u du = \int_0^1 u (e^u)' du + \int_0^1 u du = [u e^u]_0^1 - \int_0^1 e^u du + \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1 = \frac{3}{2} \text{ τ.μ}$$

ΘΕΜΑ 10^ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\frac{x \cdot f(x) + 5}{1 + f^2(x)} = \frac{1}{2} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 3$$

A. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}$, $x \in \mathbb{R}$.

B. Αν $g(x) = \ln f(x)$ τότε:

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .

β) Να βρείτε την g' και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9}} dx$

γ) Να αποδείξετε ότι $J + 9I = K$, όπου:

$$J = \int_0^4 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 9}} dx \text{ και } K = \int_0^4 \sqrt{x^2 + 9} dx$$

δ) Να αποδείξετε ότι $J + K = 20$

ε) Να υπολογίσετε τα J, K .

στ) Να αποδείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να ορίσετε την g^{-1} .

Λύση

A. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\frac{x \cdot f(x) + 5}{1 + f^2(x)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 + f^2(x) = 2x \cdot f(x) + 10 \Leftrightarrow f^2(x) - 2x \cdot f(x) = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) - 2x \cdot f(x) + x^2 = x^2 + 9 \Leftrightarrow (f(x) - x)^2 = x^2 + 9 \Leftrightarrow h^2(x) = x^2 + 9 \quad (1),$$

όπου $h(x) = f(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x^2 + 9 > 0 \Leftrightarrow h^2(x) > 0 \Leftrightarrow h(x) \neq 0$ και επειδή η h είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Για $x=0$ έχουμε $h(0)=f(0)-0=3>0$, οπότε $h(x)>0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως από

$$(1) \Leftrightarrow h(x) = \sqrt{x^2 + 9} \Leftrightarrow f(x) - x = \sqrt{x^2 + 9} \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}, x \in \mathbb{R}$$

Β. α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x + \sqrt{x^2 + 9} > x + \sqrt{x^2} = x + |x| \geq 0$. Άρα $A = \mathbb{R}$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$g'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 9}} \cdot (x + \sqrt{x^2 + 9})' \Leftrightarrow g'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 9}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 9}}\right) \Leftrightarrow$$

$$g'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 9}} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 + 9}}{\sqrt{x^2 + 9}} \Leftrightarrow g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9}}$$

$$\text{Είναι } I = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9}} dx = \int_0^4 g'(x) dx = [g(x)]_0^4 = g(4) - g(0) = \ln 9 - \ln 3 = \ln \frac{9}{3} = \ln 3$$

$$\gamma) J + 9I = \int_0^4 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 9}} dx + 9 \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9}} dx = \int_0^4 \frac{x^2 + 9}{\sqrt{x^2 + 9}} dx = \int_0^4 \sqrt{x^2 + 9} dx = K$$

$$\delta) K = \int_0^4 (x)' \cdot \sqrt{x^2 + 9} dx = \left[x \cdot \sqrt{x^2 + 9} \right]_0^4 - \int_0^4 x \cdot (\sqrt{x^2 + 9})' dx =$$

$$= 20 - \int_0^4 x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 9}} \cdot (x^2 + 9)' dx = 20 - \int_0^4 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 9}} dx = 20 - J. \text{ Άρα } J + K = 20$$

$$\epsilon) \text{ Λύνουμε το σύστημα: } \begin{cases} J - K = -9I \\ J + K = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} J - K = -9\ln 3 \\ J + K = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} J = 10 - \frac{9}{2}\ln 3 \\ K = 10 + \frac{9}{2}\ln 3 \end{cases}$$

στ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9}} > 0$. Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι και "1-1", άρα αντιστρέφεται.

Για να βρούμε τον τύπο της αντίστροφης λύνουμε την εξίσωση $y = g(x)$ ως προς x . Είναι

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 9}) \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 9} = e^y \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 9} = e^y - x \Leftrightarrow x^2 + 9 = (e^y - x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 9 = e^{2y} - 2xe^y + x^2 \Leftrightarrow 2xe^y = e^{2y} - 9 \Leftrightarrow x = \frac{e^{2y} - 9}{2e^y} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{e^{2y} - 9}{2e^y}$$

$$\text{Όμως } e^y > x \Leftrightarrow e^y > \frac{e^{2y} - 9}{2e^y} \Leftrightarrow 2e^{2y} > e^{2y} - 9 \Leftrightarrow e^{2y} > -9, \text{ αληθής για κάθε } y \in \mathbb{R}$$

$$\text{Άρα } f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f^{-1}(x) = \frac{e^{2x} - 9}{2e^x}.$$

ΘΕΜΑ 11^ο

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z = x + i$ με $x \in \mathbb{R}$, $w = z^2 - \frac{1}{z}$ και συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός x_0 τέτοιος, ώστε ο $z^2 - \frac{1}{z}$ να είναι πραγματικός αριθμός.

β) Αν $\alpha < \beta < \gamma$, $f(\beta) = x_0$, $f(\gamma) = -1$ και $f'(\alpha) > 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$, τέτοιος, ώστε $f'(\xi) = 0$.

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^1 \operatorname{Re}(w) dx$

Λύση

α) Είναι $w = z^2 - \frac{1}{z} = (x+i)^2 - \frac{1}{x+i} = x^2 - 1 + 2xi - \frac{x-i}{x^2+1} = \left(x^2 - 1 - \frac{x}{x^2+1}\right) + \left(2x + \frac{1}{x^2+1}\right)i$, $x \in \mathbb{R}$.

Για να είναι ο $z^2 - \frac{1}{z}$ πραγματικός αριθμός πρέπει και αρκεί $2x + \frac{1}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 2x + 1 = 0$.

Θεωρούμε συνάρτηση $g(x) = 2x^3 + 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ και παρατηρούμε ότι:

- Η g είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ ως πολωνυμική και
- $g(-1) \cdot g(0) = (-3) \cdot 1 = -3 < 0$.

Ισχύει λοιπόν Θεώρημα Bolzano, οπότε η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (-1, 0)$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g'(x) = 6x^2 + 2 > 0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η ρίζα x_0 είναι μοναδική. Επομένως υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός x_0 τέτοιος, ώστε ο $z^2 - \frac{1}{z}$ να είναι πραγματικός αριθμός.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $[\beta, \gamma]$. Ισχύει λοιπόν Θ.Μ.Τ, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\delta \in (\beta, \gamma)$ τέτοιο, ώστε $f'(\delta) = \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta} = \frac{-1 - x_0}{\gamma - \beta} = -\frac{x_0 + 1}{\gamma - \beta}$.

Είναι $\beta < \gamma \Leftrightarrow \gamma - \beta > 0$, $x_0 \in (-1, 0) \Leftrightarrow -1 < x_0 < 0 \Leftrightarrow x_0 + 1 > 0$, άρα $f'(\delta) < 0$.

Έχουμε:

- Η f' είναι συνεχής στο $[\alpha, \delta]$ και
- $f'(\alpha) \cdot f'(\delta) < 0$

Ισχύει λοιπόν Θεώρημα Bolzano, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.

$$\begin{aligned} \gamma) \int_0^1 \operatorname{Re}(w) dx &= \int_0^1 \left(x^2 - 1 - \frac{x}{x^2+1}\right) dx = \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - [x]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} (x^2+1)' dx = \\ &= -\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \left[\ln(x^2+1)\right]_0^1 = -\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \ln 2 = -\frac{4+3\ln 2}{6} = -\frac{4+\ln 8}{6}. \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \int_0^1 \operatorname{Re}(w) dx = -\frac{4+\ln 8}{6}.$$

ΘΕΜΑ 12^ο

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2x+1)-7}{x-1} = 10$.

1) Να αποδείξετε ότι: α) $f(3) = 7$

β) $f'(3) = 5$

2) Έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(3, f(3))$.

α) Να αποδείξετε ότι η (ε) έχει εξίσωση $y = 5x - 8$.

β) Ένα σημείο Σ , που έχει τετμημένη μεγαλύτερη του 3, κινείται στην ευθεία (ε) . Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι 2 m/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $OM\Sigma$.

Λύση

1. α) Θέτουμε $h(x) = \frac{f(2x+1)-7}{x-1} \Leftrightarrow f(2x+1) = (x-1)h(x) + 7$

Έχουμε $\lim_{x \rightarrow 1} f(2x+1) = \lim_{x \rightarrow 1} [(x-1)h(x) + 7] = 7$ (1)

Θέτουμε $2x+1 = \omega$, (όταν $x \rightarrow 1$ το $\omega \rightarrow 3$), άρα η (1) $\Leftrightarrow \lim_{\omega \rightarrow 3} f(\omega) = 7 \stackrel{f \text{ συνεχής}}{\Leftrightarrow} f(3) = 7$.

β) Για $x \neq 1$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2x+1)-7}{x-1} = 10 \stackrel{f(3)=7}{\Leftrightarrow} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2x+1)-f(3)}{x-1} = 10$ (2)

Θέτουμε $2x+1 = \omega$, (όταν $x \rightarrow 1$ το $\omega \rightarrow 3$), άρα η (2) για $\omega \neq 3$ γίνεται

$$\lim_{\omega \rightarrow 3} \frac{f(\omega)-f(3)}{\frac{\omega-1}{2}-1} = 10 \Leftrightarrow \lim_{\omega \rightarrow 3} \frac{f(\omega)-f(3)}{\frac{\omega-3}{2}} = 10 \Leftrightarrow \lim_{\omega \rightarrow 3} \left[2 \cdot \frac{f(\omega)-f(3)}{\omega-3} \right] = 10,$$

από το οποίο προκύπτει ότι $\lim_{\omega \rightarrow 3} \frac{f(\omega)-f(3)}{\omega-3} = 5$, άρα $f'(3) = 5$.

2. α) Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(3, f(3))$

$$(\varepsilon): y - f(3) = f'(3)(x - 3) \Leftrightarrow y - 7 = 5(x - 3) \Leftrightarrow y = 5x - 8$$

β) Έστω $\Sigma(x, y)$ σημείο της (ε) . Το εμβαδόν του τριγώνου $OM\Sigma$ είναι:

$$\begin{aligned} (OM\Sigma) &= \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{OM} & \overrightarrow{O\Sigma} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ x & y \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |3y - 7x| = \frac{1}{2} |3(5x - 8) - 7x| = \\ &= \frac{1}{2} |8(x - 3)| = 4|x - 3| = 4x - 12, \quad (x > 3) \end{aligned}$$

Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $OM\Sigma$ είναι:

$$(E(x(t)))' = (4x(t) - 12)' = 4x'(t) = 4 \cdot 2 = 8 \text{ m}^2/\text{sec}$$

ΘΕΜΑ 13^ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x + e^x - 1$

- 1) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- 2) Να λύσετε την εξίσωση $e^x = 1 - x$
- 3) Θεωρούμε τη γνησίως μονότονη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $g(x) + e^{g(x)} = 2x + 1$.
 - α) Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.
 - β) Να αποδείξετε ότι $g(0) = 0$
- 4) Να λύσετε την ανίσωση $(g \circ f)(x) > 0$
- 5) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι η $C_{f^{-1}}$ διέρχεται από το σημείο $M(e, 1)$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$ στο M .

Λύση

- 1) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = 1 + e^x > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- 2) Είναι $e^x = 1 - x \Leftrightarrow e^x + x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$. Προφανής λύση η $x = 0$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και "1-1" η λύση αυτή είναι μοναδική.
- 3) α) Έστω ότι η g δεν είναι γνησίως αύξουσα, τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in A_g$ με $x_1 < x_2$, ώστε

$$\begin{cases} g(x_1) \geq g(x_2) \\ e^{g(x_1)} \geq e^{g(x_2)} \end{cases} \xRightarrow{(+)} g(x_1) + e^{g(x_1)} \geq g(x_2) + e^{g(x_2)} \Leftrightarrow 2x_1 + 1 \geq 2x_2 + 1 \Leftrightarrow x_1 \geq x_2$$
 άτοπο, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα.

β) Ισχύει $g(0) + e^{g(0)} = 1$ προφανής λύση η $g(0) = 0$ και επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα άρα και "1-1" η λύση αυτή είναι μοναδική.
- 4) Είναι $g(f(x)) > 0 \Leftrightarrow g(f(x)) > g(0) \xRightarrow{g \uparrow} f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \xRightarrow{f \uparrow} x > 0$
- 5) Η f είναι γνησίως αύξουσα άρα είναι και "1-1".

Το σημείο $M \in C_{f^{-1}}$, αν και μόνο αν, το συμμετρικό του M ως προς την $y = x$, δηλαδή το σημείο $N(1, e) \in C_f$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο N είναι:

$$(\varepsilon): y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = (1 + e)x - 1$$

Η συμμετρική της (ε) ως προς την $y = x$ θα είναι η εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο M και βρίσκουμε

$$\text{ότι έχει εξίσωση } y = \frac{1}{1+e}x + \frac{1}{1+e}$$

ΘΕΜΑ 14^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_2^{x^2-3} \frac{\ln(t-1)}{t^2+1} dt$

- 1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- 2) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- 3) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow \sqrt{5}} \frac{f(x)}{x - \sqrt{5}} = 0$
- 4) Να αποδείξετε ότι η C_f εφάπτεται στον άξονα $x'x$, σε δύο σημεία.
- 5) Θεωρούμε το μιγαδικό αριθμό $z = f(3) - 2i$. Να αποδείξετε ότι η εικόνα του z στο επίπεδο βρίσκεται στο τέταρτο τεταρτημόριο.

Λύση

- 1) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g(t) = \frac{\ln(t-1)}{t^2+1}$ και $F(x) = \int_2^x g(t) dt$.

Η συνάρτηση g είναι ορισμένη και συνεχής στο $A_g = (1, +\infty)$, το $2 \in (1, +\infty)$, άρα η συνάρτηση F έχει πεδίο ορισμού το $A_F = (1, +\infty)$.

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $h(x) = x^2 - 3$, $x \in \mathbb{R}$, οπότε

$$f(x) = (F \circ h)(x) = F(h(x)) = \int_2^{x^2-3} \frac{\ln(t-1)}{t^2+1} dt$$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } A_f &= \{x \in A_h / h(x) \in A_F\} = \{x \in \mathbb{R} / (x^2 - 3) \in (1, +\infty)\} = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 3 > 1\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x^2 > 4\} = \{x \in \mathbb{R} / |x| > 2\} = \{x \in \mathbb{R} / x > 2 \text{ ή } x < -2\} \neq \emptyset \end{aligned}$$

Επομένως $A_f = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

- 2) Η f είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $h(x) = x^2 - 3$ και

$F(x) = \int_2^x g(t) dt$ η οποία είναι παραγωγίσιμη ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης g .

Για κάθε $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ έχουμε

$$f'(x) = \left(\int_2^{x^2-3} \frac{\ln(t-1)}{t^2+1} dt \right)' = \frac{\ln(x^2-4)}{(x^2-3)^2+1} \cdot (x^2-3)' = \frac{2x \cdot \ln(x^2-4)}{(x^2-3)^2+1}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ή} \\ x^2 - 4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ή} \\ x^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin A_f \text{ απορρίπτεται} \\ \text{ή} \\ x = \pm\sqrt{5} \in A_f \text{ δεκτές} \end{cases}$$

Λύση

1) α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, γιατί η $\int_1^x \left(1 + \frac{f(t)}{t}\right) dt$ είναι παράγουσα

της συνεχούς συνάρτησης $1 + \frac{f(t)}{t}$ στο $(0, +\infty)$.

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(1 + \int_1^x \left(1 + \frac{f(t)}{t}\right) dt\right)' \Leftrightarrow f'(x) = 1 + \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow xf'(x) = x + f(x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \left(\ln x\right)' \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \ln x + c \Leftrightarrow f(x) = x \ln x + cx \end{aligned}$$

Από την (1) για $x=1$ έχουμε $f(1)=1$, οπότε $f(1)=\ln 1 + c \Leftrightarrow c=1$. Άρα $f(x) = x \ln x + x$, $x > 0$

β) Επειδή η f είναι συνεχής στο 0 έχουμε

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x + x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x + 1}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0. \text{ Άρα } f(0) = 0$$

2) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι $f'(x) = \ln x + 2$.

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 2 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -2 \Leftrightarrow x = e^{-2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e^2}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x + 2 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -2 \Leftrightarrow x > e^{-2} \Leftrightarrow x > \frac{1}{e^2}$$

Ο πίνακας μεταβολών της f είναι

x	0	$\frac{1}{e^2}$	$+\infty$
f'	-	0	+
f	↑	ελάχιστο	↑

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[0, \frac{1}{e^2}\right]$, γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e^2}, +\infty\right)$, παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1=0$ (άκρο διαστήματος) το $f(0)=0$ και ελάχιστο στο $x_2 = \frac{1}{e^2}$ το $f\left(\frac{1}{e^2}\right) = -e^{-2}$

3) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι $f''(x) = \frac{1}{x}$ και επειδή η f είναι συνεχής στο 0 συμπεραίνουμε ότι η f είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$.

Έστω ότι υπάρχουν τρία σημεία συνευθειακά τα $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, $\Gamma(x_3, f(x_3))$, τότε

$$\lambda_{AB} = \lambda_{B\Gamma} \Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \quad (I)$$

Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[x_1, x_2]$ και $[x_2, x_3]$,

οπότε θα υπάρξει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ και ένα

τουλάχιστον $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$.

Η (I) ισοδύναμα γράφεται $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$ που είναι άτοπο, γιατί η $f''(x) > 0$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι και "1-1".

4) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, e]$, άρα για $1 \leq x \leq e$ έχουμε $f(1) \leq f(x) \leq f(e)$, οπότε

$$\begin{aligned} \int_1^e f(1) dx &\leq \int_1^e f(x) dx \leq \int_1^e f(e) dx \Leftrightarrow \int_1^e 1 dx \leq \int_1^e f(x) dx \leq \int_1^e 2e dx \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow e - 1 \leq \int_1^e f(x) dx \leq 2e(e - 1) \Leftrightarrow 1 \leq \frac{\int_1^e f(x) dx}{e - 1} \leq 2e \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 16^ο

Έστω συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) = \int_{-x}^x \frac{t^2}{1 + e^{f(t)}} dt$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1) Να αποδείξετε ότι:

- Η f είναι περιττή και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{4016} f(x - 2008) dx$
- Η f είναι παραγωγίσιμη.
- $f(x) = \frac{x^3}{3}$, $x \in \mathbb{R}$.

2) Θεωρούμε το μιγαδικό αριθμό $w = \frac{z+i}{z+1}$, $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq -1$

Αν ο w είναι πραγματικός αριθμός, να αποδείξετε ότι:

- Η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο κινείται στην ευθεία $y = -x - 1$.
- Υπάρχει σημείο $M(a, f(a))$ της C_f με $-1 < a < 0$ το οποίο είναι εικόνα του z .

Λύση

1) α) Είναι $A_f = \mathbb{R}$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f(-x) = \int_x^{-x} \frac{t^2}{1 + e^{f(t)}} dt = - \int_{-x}^x \frac{t^2}{1 + e^{f(t)}} dt = -f(x) \text{ άρα η } f \text{ είναι περιττή.}$$

Είναι $I = \int_0^{4016} f(x - 2008) dx$. Θέτουμε $u = x - 2008$, οπότε $du = dx$.

Για $x = 0$ είναι $u_1 = -2008$ και για $x = 4016$ είναι $u_2 = 2008$, άρα

$$I = \int_{-2008}^{2008} f(u) du = \int_{-2008}^{2008} f(u) du = - \int_{-2008}^{2008} f(-u) du = - \int_{2008}^{-2008} f(u) du = -I$$

Για $x = -2008$ είναι $u_1 = 2008$ και για $x = 2008$ είναι $u_2 = -2008$, άρα

$$I = - \int_{2008}^{-2008} f(u) (-du) = - \int_{2008}^{-2008} f(u) du = - \int_{2008}^{-2008} f(u) du = -I$$

άρα $2I = 0 \Leftrightarrow I = 0$

β) Είναι $f(x) = \int_{-x}^c \frac{t^2}{1+e^{f(t)}} dt + \int_c^x \frac{t^2}{1+e^{f(t)}} dt = -\int_c^{-x} \frac{t^2}{1+e^{f(t)}} dt + \int_c^x \frac{t^2}{1+e^{f(t)}} dt$, $c \in \mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, γιατί η $\varphi(x) = \int_c^x \frac{t^2}{1+e^{f(t)}} dt$ παραγωγίσιμη ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης $g(t) = \frac{t^2}{1+e^{f(t)}}$ στο $\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής ως σύνθεση και πράξη συνεχών συναρτήσεων.

Η $K(x) = \int_c^{-x} \frac{t^2}{1+e^{f(t)}} dt$ είναι επίσης παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $h(x) = -x$ και $\varphi(x)$.

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{(-x)^2}{1+e^{f(-x)}} \cdot (-x)' + \frac{x^2}{1+e^{f(x)}} \stackrel{f \text{ περιττή}}{=} \frac{x^2}{1+e^{-f(x)}} + \frac{x^2}{1+e^{f(x)}} = \\ &= \frac{x^2}{1+\frac{1}{e^{f(x)}}} + \frac{x^2}{1+e^{f(x)}} = \frac{x^2 e^{f(x)}}{1+e^{f(x)}} + \frac{x^2}{1+e^{f(x)}} = \frac{x^2(1+e^{f(x)})}{1+e^{f(x)}} = x^2. \end{aligned}$$

Είναι $f(x) = \frac{x^3}{3} + c$, $x \in \mathbb{R}$. Για $x=0$ από την αρχική σχέση έχουμε $f(0)=0$, οπότε $c=0$.

Άρα $f(x) = \frac{x^3}{3}$, $x \in \mathbb{R}$.

2) α) Είναι $w \in \mathbb{R} \Leftrightarrow w = \bar{w} \Leftrightarrow \frac{z+i}{z+1} = \frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+1} \Leftrightarrow (z+i)(\bar{z}+1) = (z+1)(\bar{z}-i) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow z\bar{z} + z + i\bar{z} + i = z\bar{z} - iz + \bar{z} - i \Leftrightarrow (z-\bar{z}) + i(z+\bar{z}) + 2i = 0,$

θέτουμε $z = x + yi$ και ισοδύναμα έχουμε $2yi + 2xi + 2i = 0 \Leftrightarrow y = -x - 1$.

Άρα η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο κινείται στην ευθεία $y = -x - 1$.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = -x - 1 \Leftrightarrow f(x) + x + 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) + x + 1$, $x \in [-1, 0]$.

- Η h είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- $h(-1) = f(-1) = -\frac{1}{3} < 0$, $h(0) = f(0) + 1 = 1 > 0$ άρα $h(-1) \cdot h(0) < 0$

Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Bolzano, οπότε θα υπάρχει $\alpha \in (-1, 0)$ τέτοιο, ώστε $h(\alpha) = 0$.

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} E(\lambda) = e^2 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda + 2}{e^{\lambda-1}} = e^2$$

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 2008

ΘΕΜΑ 17^ο

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f'(x)f(-x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A) Να αποδείξετε ότι:

- α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- β) Η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
- γ) Η $g(x) = f(-x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

B) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{f(-x)}{f(x)} dx = \frac{f^2(0) - f^2(-1)}{2}$

Γ) Αν $f(0) = 1$ να βρείτε τη συνάρτηση f .

Λύση

A) α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x)f(-x) = 1$ (1)

Η f έχει σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$, επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(-x) > 0$, άρα από (1) έχουμε $f'(x) > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \xrightarrow{f: \uparrow} f(-x_1) > f(-x_2) \xrightarrow[\text{ΜΕΛΗ}]{\text{ΘΕΤΙΚΑ}} \frac{1}{f(-x_1)} < \frac{1}{f(-x_2)} \Leftrightarrow f'(x_1) < f'(x_2)$$

Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

γ) Στο (β) ερώτημα δείξαμε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι:

$$f(-x_1) > f(-x_2) \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

οπότε η $g(x) = f(-x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

B) Θέτουμε $-x = u \Leftrightarrow x = -u$, οπότε $dx = -du$. Όταν $x = 0$ το $u = 0$ και όταν $x = 1$ το $u = -1$.

$$\text{Έχουμε } \int_0^1 \frac{f(-x)}{f(x)} dx = - \int_0^{-1} \frac{f(u)}{f(-u)} du = - \int_0^{-1} f(u) \cdot f'(u) du = - \left[\frac{f^2(u)}{2} \right]_0^{-1} = \frac{f^2(0) - f^2(-1)}{2}$$

Γ) Η (1) ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα θα ισχύει και για $-x \in \mathbb{R}$, οπότε έχουμε:

$$f'(-x) \cdot f(x) = 1 \Leftrightarrow -f'(-x) \cdot f(x) = -1 \Leftrightarrow [f(-x)]' \cdot f(x) = -1 \quad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε:

$$f'(x) \cdot f(-x) + [f(-x)]' \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow [f(x) \cdot f(-x)]' = 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot f(-x) = c_1, \quad x \in \mathbb{R}$$

Για $x=0$ είναι $f(0) \cdot f(0) = c_1 \Leftrightarrow c_1 = 1$. Άρα $f(x) \cdot f(-x) = 1, x \in \mathbb{R}$ (3)

Από (1) και (3) για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f'(x) \cdot f(-x) = f(x) \cdot f'(-x) \Leftrightarrow f'(x) = f(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x)e^{-x} - e^{-x}f(x) = 0 \Leftrightarrow (f(x) \cdot e^{-x})' = 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot e^{-x} = c_2$$

Για $x=0$ είναι $f(0) \cdot e^0 = c_2 \Leftrightarrow c_2 = 1$. Επομένως $f(x) \cdot e^{-x} = 1 \Leftrightarrow f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 18^ο

A) Να αποδείξετε ότι $e^x - x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B) Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 2$, η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $(f'(x) - f(x))e^x = (x-1)f'(x) - f(x)$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x - x + 1, x \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι $e^{e^k - e^l} < e^{k-l}$ για κάθε $k, l \in \mathbb{N}$ με $k < l$.

γ) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς A, B έτσι, ώστε

$$x - 2 = A \cdot f'(x) + B \cdot f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{x-2}{e^x - x + 1}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=1$.

Λύση

A) Θεωρούμε συνάρτηση $h(x) = e^x - x + 1, x \in \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $h'(x) = e^x - 1$

$$\text{Είναι } h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$$

Ο πίνακας μεταβολών της συνάρτησης h είναι

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$		2	

$$h(0) = 2$$

ελάχιστο

Η h παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$ με ελάχιστη τιμή $h(0) = 2$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$h(x) \geq h(0) \Leftrightarrow h(x) \geq 2, \text{ άρα } h(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - x + 1 > 0$$

B) α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $(f'(x) - f(x))e^x = (x-1)f'(x) - f(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f'(x)e^x - f(x)e^x - x \cdot f'(x) + f'(x) + f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) \cdot (e^x - x + 1) - f(x) \cdot (e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x) \cdot (e^x - x + 1) - f(x) \cdot (e^x - x + 1)' = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x) \cdot (e^x - x + 1) - f(x) \cdot (e^x - x + 1)'}{(e^x - x + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{e^x - x + 1} \right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^x - x + 1} = c \Leftrightarrow f(x) = c \cdot (e^x - x + 1).$$

Για $x=0$ είναι $f(0) = c \cdot (e^0 - 0 + 1) \Leftrightarrow c = 1$. Άρα $f(x) = e^x - x + 1, x \in \mathbb{R}$.

β) Η $f(x) = e^x - x + 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ (βλέπε (Α) ερώτημα), άρα για κάθε $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$ με $\kappa < \lambda$ ισχύει

$$f(\kappa) < f(\lambda) \Leftrightarrow e^\kappa - \kappa + 1 < e^\lambda - \lambda + 1 \Leftrightarrow e^\kappa - \kappa < e^\lambda - \lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{e^\kappa - \kappa} < e^{e^\lambda - \lambda} \Leftrightarrow \frac{e^{e^\kappa}}{e^\kappa} < \frac{e^{e^\lambda}}{e^\lambda} \Leftrightarrow \frac{e^{e^\kappa}}{e^{e^\lambda}} < \frac{e^\kappa}{e^\lambda} \Leftrightarrow e^{e^\kappa - e^\lambda} < e^{\kappa - \lambda}$$

γ) Αναζητούμε $A, B \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $x - 2 = A \cdot f'(x) + B \cdot f(x) \Leftrightarrow$

$$x - 2 = A \cdot (e^x - 1) + B \cdot (e^x - x + 1) \Leftrightarrow x - 2 = (A + B)e^x - Bx + B - A$$

Η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε θα ισχύει και για συγκεκριμένες τιμές του x .

$$\text{Για } x = 0 \text{ έχουμε } 0 - 2 = (A + B)e^0 - B \cdot 0 + B - A \Leftrightarrow -2 = A + B + B - A \Leftrightarrow 2B = -2 \Leftrightarrow B = -1$$

$$\text{Για } x = 1 \text{ έχουμε } 1 - 2 = (A + B)e^1 - B \cdot 1 + B - A \Leftrightarrow -1 = (A + B)e - B + B - A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 = (A - 1)e - A \Leftrightarrow (A - 1)(e - 1) = 0 \Leftrightarrow A = 1$$

δ) Η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και $g(x) < 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$, άρα το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = 1$ είναι:

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= -\int_0^1 g(x) dx = -\int_0^1 \frac{x-2}{e^x - x + 1} dx = -\int_0^1 \frac{(e^x - 1) - (e^x - x + 1)}{e^x - x + 1} dx = \\ &= -\int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x - x + 1} dx + \int_0^1 \frac{e^x - x + 1}{e^x - x + 1} dx = -\int_0^1 \frac{(e^x - x + 1)'}{e^x - x + 1} dx + \int_0^1 1 dx = \\ &= -\left[\ln(e^x - x + 1) \right]_0^1 + 1(1 - 0) = -(\ln e - \ln 2) + 1 = \ln 2 \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 19^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$, $x > 0$.

i) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$

ii) Έστω η συνάρτηση g με $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$, $x > 0$ και $g(0) = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η g είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0, 1]$.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 g(x) dx$.

Λύση

i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \left(e^{-\frac{1}{x}}\right)' = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}}$

Έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}} \right) \stackrel{u = \frac{1}{x}}{=} \lim_{\substack{u \rightarrow +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty}} (u^2 e^{-u}) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^2}{e^u} \stackrel{\text{D.L.H}}{=} \\ = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{(u^2)'}{(e^u)'} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{2u}{e^u} \stackrel{\text{D.L.H}}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{(2u)'}{(e^u)'} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^u} = 0$

ii) α) Για να είναι η g συνεχής στο $[0,1]$ πρέπει και αρκεί να είναι συνεχής στο $(0,1)$ και επιπλέον

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = g(1)$$

Η g είναι συνεχής στο $(0,1)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(1 + \frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x}} = \left(1 + \frac{1}{1} \right) e^{-\frac{1}{1}} = g(1)$, άρα η g είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x}} \stackrel{1 + \frac{1}{x} \xrightarrow{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} \stackrel{\text{D.L.H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(1 + \frac{1}{x} \right)'}{\left(e^{\frac{1}{x}} \right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = 0 = g(0)$,

γιατί $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} \stackrel{u = \frac{1}{x}}{=} \lim_{\substack{u \rightarrow +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty}} e^u = +\infty$ άρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = 0$, άρα η g είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Επομένως η f είναι συνεχής στο $[0,1]$.

β) 1ος τρόπος

Η συνάρτηση $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x}}$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ άρα και η αρχική της στο $[0,1]$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη:

$$G(x) = \begin{cases} x e^{-\frac{1}{x}}, & 0 < x \leq 1 \\ c, & x = 0 \end{cases} \quad \text{με} \quad c = \lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x e^{-\frac{1}{x}} \right) = 0, \quad \text{άρα} \quad c = 0$$

$$\text{Επομένως} \quad I = \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 G'(x) dx = [G(x)]_0^1 = G(1) - G(0) = \frac{1}{e} - 0 = \frac{1}{e}$$

2ος τρόπος

$$I = \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x}} dx = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^1 \left(1 + \frac{1}{t} \right) e^{-\frac{1}{t}} dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\int_x^1 e^{-\frac{1}{t}} dt + \int_x^1 \frac{1}{t} \cdot e^{-\frac{1}{t}} dt \right] = \\ = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\int_x^1 (t)' \cdot e^{-\frac{1}{t}} dt + \int_x^1 \frac{1}{t} \cdot e^{-\frac{1}{t}} dt \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\left[t \cdot e^{-\frac{1}{t}} \right]_x^1 - \int_x^1 t \cdot \left(e^{-\frac{1}{t}} \right)' dt + \int_x^1 \frac{1}{t} \cdot e^{-\frac{1}{t}} dt \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[e^{-1} - x e^{-\frac{1}{x}} - \int_x^1 \frac{1}{t^2} \cdot e^{-\frac{1}{t}} dt + \int_x^1 \frac{1}{t} \cdot e^{-\frac{1}{t}} dt \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{e} - x e^{-\frac{1}{x}} \right) = \frac{1}{e}$$

$$\text{Γιατί } \lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \cdot \frac{1}{e^x} \right) = 0, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x} = 0.$$

ΘΕΜΑ 20^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{t^2 + 1}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

β) Να αποδείξετε ότι $x < f(x) < \frac{x}{x^2 + 1}$ για κάθε $x < 0$.

γ) Να αποδείξετε ότι $f(\arcsin x) = x$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και να υπολογίσετε το $f(1)$.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του επιπέδου χωρίου που ορίζεται από την C_f και τις ευθείες με εξισώσεις $y = 0$, $x = 0$ και $x = 1$.

Λύση

α) Η συνάρτηση $g(t) = \frac{1}{t^2 + 1}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, το $0 \in \mathbb{R}$, πρέπει και αρκεί λοιπόν $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως $A_f = \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = \left(\int_0^x \frac{dt}{t^2 + 1} \right)' = \frac{1}{x^2 + 1} > 0$, άρα f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Για $x < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(0) \Leftrightarrow f(x) < 0$, ενώ για $x > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f''(x) = \left(\frac{1}{x^2 + 1} \right)' = -\frac{2x}{x^2 + 1}$

Είναι $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2x}{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{2x}{x^2 + 1} > 0 \Leftrightarrow x < 0$

Το πρόσημο της f'' καθώς και η κυρτότητα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↖	0	↗

Σ.Κ.

Η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$, κοίλη στο $[0, +\infty)$ και παρουσιάζει καμπή στο σημείο $O(0, f(0))$, δηλαδή στο $O(0, 0)$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και σε κάθε διάστημα $[x, 0]$ με $x < 0$. Ισχύει λοιπόν Θ.Μ.Τ.

οπότε θα υπάρξει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x, 0)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(0) - f(x)}{0 - x} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(x)}{x}$

Η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$, οπότε για

$$x < \xi < 0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(\xi) < f'(0) \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1} < \frac{f(x)}{x} < 1 \Leftrightarrow x < \frac{f(x)}{x} < \frac{x}{x^2+1}$$

γ) Αρκεί να δείξουμε ότι $f(\varepsilon\phi x) = x \Leftrightarrow f(\varepsilon\phi x) - x = 0 \Leftrightarrow \int_0^{\varepsilon\phi x} \frac{dt}{t^2+1} - x = 0, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Θεωρούμε συνάρτηση $g(x) = \int_0^{\varepsilon\phi x} \frac{dt}{t^2+1} - x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{Για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ είναι } g'(x) &= \left(\int_0^{\varepsilon\phi x} \frac{dt}{t^2+1}\right)' - (x)' \Leftrightarrow g'(x) = \frac{1}{\varepsilon\phi^2 x + 1} (\varepsilon\phi x)' - 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow g'(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \Leftrightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Είναι $g(0) = f(0) = 0$, άρα $c = 0$, οπότε $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(\varepsilon\phi x) - x = 0 \Leftrightarrow f(\varepsilon\phi x) = x$.

Είναι $f(\varepsilon\phi x) = x$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, οπότε $f(1) = f\left(\varepsilon\phi \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$

δ) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = \int_0^1 |f(x)| dx$. Από (α) ερώτημα έχουμε $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$,

$$\begin{aligned} \text{άρα } E &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 1 \cdot f(x) dx = \int_0^1 (x)' \cdot f(x) dx = [x \cdot f(x)]_0^1 - \int_0^1 x \cdot f'(x) dx = \\ &= f(1) - \int_0^1 x \cdot \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} (x^2+1)' dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_0^1 (\ln(x^2+1))' dx = \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} [\ln(x^2+1)]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{\pi - 2 \ln 2}{4} = \frac{\pi - \ln 4}{4} \text{ τ.μ} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 21^ο

Δίνεται η συνάρτηση $F(x) = \int_0^{2x-1} \frac{1}{\sqrt{4-(t+1)^2}} dt$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της F .

β) i) Να αποδείξετε ότι $F(\eta\mu x) = x - \frac{\pi}{6}$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_f : f(t) = \frac{1}{\sqrt{4-(t+1)^2}}$,

τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=\sqrt{3}-1$.

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

Λύση

α) Η συνάρτηση $f(t) = \frac{1}{\sqrt{4-(t+1)^2}}$ είναι συνεχής στο $(-3, 1)$, το $0 \in (-3, 1)$, άρα η F ορίζεται για εκείνα τα x για τα οποία ισχύει $-3 < 2x-1 < 1 \Leftrightarrow -2 < 2x < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 1$, οπότε $A_F = (-1, 1)$.

$$\text{Για κάθε } x \in (-1, 1) \text{ είναι } F'(x) = \frac{1}{\sqrt{4-(2x-1+1)^2}} (2x-1)' = \frac{2}{\sqrt{4-4x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

β) i) Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι:

$$[F(\eta\mu x)]' = \frac{1}{\sqrt{1-\eta\mu^2 x}} (\eta\mu x)' = \frac{1}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 x}} \sigma\upsilon\nu x = 1, \text{ οπότε έχουμε}$$

$$[F(\eta\mu x)]' = (x)' \Leftrightarrow F(\eta\mu x) = x + c \quad (1)$$

$$\text{δηλαδή } \int_0^{2\eta\mu x-1} f(t) dt = x + c, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{Από την τελευταία σχέση για } x = \frac{\pi}{6}, \text{ βρίσκουμε } \int_0^0 f(t) dt = \frac{\pi}{6} + c \Leftrightarrow c = -\frac{\pi}{6}, \text{ οπότε}$$

$$\text{η (1) γίνεται } F(\eta\mu x) = x - \frac{\pi}{6}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (2)$$

ii) Επειδή $f(t) > 0$, για κάθε $t \in [0, \sqrt{3}-1]$ έχουμε $E = \int_0^{\sqrt{3}-1} f(t) dt = \int_0^{2\eta\mu \frac{\pi}{3}-1} f(t) dt =$

$$E = \int_0^{\sqrt{3}-1} f(t) dt = \int_0^{2\eta\mu \frac{\pi}{3}-1} f(t) dt = F\left(\eta\mu \frac{\pi}{3}\right) \stackrel{(2)}{=} \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \text{ τ.μ.}$$

$$\gamma) \text{ Από (ii) έχουμε } \int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{1}{\sqrt{4-(t+1)^2}} dt = \frac{\pi}{6} \quad (3)$$

Θέτουμε $x = t+1$, οπότε $dx = dt$. Για $t=0$ είναι $x=1$ και για $t=\sqrt{3}-1$ είναι $x=\sqrt{3}$.

$$\text{Επομένως η (3) γράφεται } \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \frac{\pi}{6}$$

ΘΕΜΑ 22^ο

Έστω μια συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε:

$$(f(x))^2 - x \cdot f(x) + x^2 - 3 = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Αν το $x=a$ είναι κρίσιμο σημείο της f , να αποδείξετε ότι $f(a) = 2a$ και στη συνέχεια να προσδιορίσετε το a .

β) Να εξετάσετε αν η f παρουσιάζει καμπή.

γ) Να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $x=a$ είναι κρίσιμο σημείο της f , οπότε $f'(a)=0$ (1)

$$\text{Για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ έχουμε } (f(x))^2 - xf(x) + x^2 - 3 = 0 \quad (2)$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της (2) έχουμε $[2f(x) - x]f'(x) + 2x - f(x) = 0$ (3)

Για $x = a$ η (3) γίνεται $[2f(a) - a] \cdot f'(a) + 2a - f(a) = 0 \Leftrightarrow f'(a) = 0 \Leftrightarrow f(a) = 2a$. (4)

Για $x = a$ η (2) γίνεται

$$(f(a))^2 - a \cdot f(a) + a^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 4a^2 - 2a^2 + a^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 3a^2 = 3 \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1.$$

β) Έστω ότι η C_f έχει σημείο καμπής το $M(x_0, f(x_0))$, τότε $f''(x_0) = 0$ (5)

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της (3) έχουμε $2(f'(x))^2 - 2f'(x) + 2 + [2f(x) - x]f''(x) = 0$ (6)

Για $x = x_0$ η (6) γίνεται $2(f'(x_0))^2 - 2f'(x_0) + 2 + [2f(x_0) - x_0]f''(x_0) = 0$ και λόγω της (5)

έχουμε $(f'(x_0))^2 - f'(x_0) + 1 = 0$ άτοπο, γιατί αν το θεωρήσουμε ως τριώνυμο του $f'(x_0)$, τότε έχει $\Delta = -3 < 0$, άρα η f δεν παρουσιάζει καμπή.

γ) Αν η C_f έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}$, όμως

για κάθε $x \neq 0$ έχουμε $(f(x))^2 - x \cdot f(x) + x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 - \frac{f(x)}{x} + 1 - \frac{3}{x^2} = 0$, οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 - \frac{f(x)}{x} + 1 - \frac{3}{x^2} \right] = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \text{ άτοπο, άρα η } C_f \text{ δεν έχει ασύμπτωτη στο } +\infty.$$

ΘΕΜΑ 23^ο

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = g(0) = 1$, οι οποίες για κάθε $x \in (-1, +\infty)$ ικανοποιούν τις σχέσεις $2f'(x) + f^2(x) \cdot g(x) = 2g'(x) + g^2(x) \cdot f(x) = 0$ (1), $f(x) \neq 0$ και $g(x) \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = g(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1, +\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(a)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = a$, $x = a + 1$ όπου $a > 0$, καθώς και το όριο $\lim_{a \rightarrow +\infty} E(a)$.

Λύση

α) Από (1) έχουμε $2f'(x) + f^2(x) \cdot g(x) = 0 \Leftrightarrow 2f'(x) \cdot g(x) + f^2(x) \cdot g^2(x) = 0$ (2) και

$$2g'(x) + g^2(x) \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow 2g'(x) \cdot f(x) + f^2(x) \cdot g^2(x) = 0 \quad (3)$$

Από (2), (3) έχουμε $2f'(x) \cdot g(x) + f^2(x) \cdot g^2(x) = 2g'(x) \cdot f(x) + f^2(x) \cdot g^2(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f'(x) \cdot g(x) = g'(x) \cdot f(x) \Leftrightarrow f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = c, x \in (-1, +\infty).$$

Για $x=0$ είναι $\frac{f(0)}{g(0)} = c \Leftrightarrow c = \frac{1}{1} = 1$, άρα $\frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) = g(x), x \in (-1, +\infty)$.

Οι f, g είναι συνεχείς στο $(-1, +\infty)$, $f(x) \neq 0$ και $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (-1, +\infty)$. Άρα οι f, g διατηρούν σταθερό πρόσημο και επειδή $f(0) = g(0) = 1 > 0$ έχουμε $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$.

β) Είναι $2f'(x) + f^2(x) \cdot g(x) = 0 \Leftrightarrow 2f'(x) + f^3(x) = 0 \Leftrightarrow 2f'(x) = -f^3(x) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -\frac{2f'(x)}{f^3(x)} = 1 \Leftrightarrow -2f^{-3}(x)f'(x) = 1 \Leftrightarrow (f^{-2}(x))' = (x)' \Leftrightarrow \frac{1}{f^2(x)} = x + c$

Για $x=0$ έχουμε $\frac{1}{f^2(0)} = 0 + c \Leftrightarrow c = 1$

Άρα για κάθε $x \in (-1, +\infty)$ είναι $f^2(x) = \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

γ) Για κάθε $x \in (-1, +\infty)$ είναι

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} \right)' = \frac{-(\sqrt{x+1})'}{(\sqrt{x+1})^2} = -\frac{(x+1)'}{2(\sqrt{x+1})(x+1)} = -\frac{1}{2(\sqrt{x+1})(x+1)} < 0$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1, +\infty)$.

Για $x \in (-1, +\infty)$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = +\infty$, γιατί για $x > -1$ είναι $\sqrt{x+1} > 0$ και $\lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt{x+1} = 0$. Άρα η $x = -1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Για $x \in (0, +\infty)$ είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+1}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{x} \right) = 0 = \lambda \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = 0 = \beta \in \mathbb{R}$$

Άρα η ευθεία $y = 0x + 0 = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

δ) $E(\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha+1} |f(x)| dx = \int_{\alpha}^{\alpha+1} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\alpha+1} \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = \left[2\sqrt{x+1} \right]_{\alpha}^{\alpha+1} = 2\sqrt{\alpha+2} - 2\sqrt{\alpha+1}$

Άρα $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} E(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} 2[\sqrt{\alpha+2} - \sqrt{\alpha+1}] = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{2(\sqrt{\alpha+2} - \sqrt{\alpha+1})(\sqrt{\alpha+2} + \sqrt{\alpha+1})}{\sqrt{\alpha+2} + \sqrt{\alpha+1}} =$
 $= \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{2[(\sqrt{\alpha+2})^2 - (\sqrt{\alpha+1})^2]}{\sqrt{\alpha+2} + \sqrt{\alpha+1}} = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{2(\alpha+2 - \alpha-1)}{\sqrt{\alpha+2} + \sqrt{\alpha+1}} = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{\alpha+2} + \sqrt{\alpha+1}} = 0.$

ΘΕΜΑ 24^ο

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για $x \in \mathbb{R}^*$ η οποία είναι «1-1» και έχει την ιδιότητα:

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)} \quad \text{για κάθε } x \neq 0$$

Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta = (0, +\infty)$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $f(f(x)) = \frac{1}{x}$ και $f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ για κάθε $x \neq 0$

β) Να αποδείξετε ότι $f(1) = -1$ και $f(-1) = 1$

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = x$ είναι αδύνατη.

δ) Αν η f είναι συνεχής, τότε να αποδείξετε ότι:

i) $f(x) < 0$ για κάθε $x > 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x < 0$

ii) Η f δεν μπορεί να είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0)$.

Λύση

α) Είναι $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$ για κάθε $x \neq 0$ (1)

Στη σχέση (1) θέτουμε όπου x το $f(x) \neq 0$ και έχουμε:

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{1}{f(f(x))} \Leftrightarrow x = \frac{1}{f(f(x))} \Leftrightarrow f(f(x)) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0 \quad (2)$$

Στη σχέση (2) θέτουμε όπου x το $\frac{1}{x} \neq 0$ και έχουμε:

$$f\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x, \text{ άρα και } f^{-1}\left(f\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow$$

$$f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = f^{-1}(x)f(x) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \text{ για κάθε } x \neq 0 \quad (3)$$

β) Από τη σχέση (3) για $x=1$ έχουμε $f(1)f(1)=1 \Leftrightarrow f^2(1)=1 \Leftrightarrow f(1)=1$ ή $f(1)=-1$

Έστω ότι $f(1)=1$, τότε $f^{-1}(1) = \frac{1}{f(1)} = 1 \Leftrightarrow f^{-1}(1)=1$, όμως η f είναι γνησίως αύξουσα

στο $(0, +\infty)$, άρα για $x > 1 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} < 1 \Leftrightarrow f^{-1}(x) < 1$ άτοπο, αφού

$$f^{-1}(1)=1. \text{ Άρα } f(1)=-1$$

Από τη σχέση (3) για $x=-1$ έχουμε $f(f(-1))=-1 \stackrel{(\beta)}{\Leftrightarrow} f(f(-1))=f(1) \stackrel{f:1 \rightarrow -1}{\Leftrightarrow} f(-1)=1$

γ) Για $x \neq 0$ έχουμε:

$$f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{x}, \text{ άρα } x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 1$$

Όμως για $x=1$ έχουμε $f(1)=1$ άτοπο, αφού $f(1)=-1$ και για $x=-1$ έχουμε $f(-1)=-1$ άτοπο, αφού $f(-1)=1$. Άρα η εξίσωση $f^{-1}(x) = x$ είναι αδύνατη.

δ) i) Η f είναι συνεχής και δε μηδενίζεται στο $(0, +\infty)$, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Είναι $f(1)=-1 < 0$, οπότε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Η f είναι συνεχής και δε μηδενίζεται στο $(-\infty, 0)$, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Είναι

$f(-1)=1>0$, οπότε $f(x)>0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$.

- ii) Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$, τότε για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ με $x_1 < x_2$ θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{f^{-1}(x_1)} < \frac{1}{f^{-1}(x_2)} \Leftrightarrow f^{-1}(x_1) > f^{-1}(x_2)$ άτοπο αφού $f^{-1}(x_1), f^{-1}(x_2)$ είναι ομόσημοι και f^{-1} διατηρεί τη μονοτονία της f .

ΘΕΜΑ 25^ο

Δίνονται:

- Η ευθεία (ε): $y = x - e$
- Η συνάρτηση $g(x) = x \ln x - x$ και
- Μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $f'(\ln x) = x \ln x$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Να αποδείξετε ότι:

- α) Η ευθεία (ε) εφάπτεται της C_g .
- β) i) Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0, -1)$ τότε ισχύει $f(x) = g(e^x)$, $x \in \mathbb{R}$
- ii) Για κάθε $x \in (0, 1)$, ισχύει $-1 < f(x) < xe - 1$

Λύση

- α) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι $g'(x) = \ln x$.

Η ευθεία (ε): $y = x - e$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης g , αν και μόνο αν,

υπάρχει σημείο $M(x_0, g(x_0))$ τέτοιο, ώστε
$$\begin{cases} g(x_0) = x_0 - e \\ g'(x_0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \ln x_0 - x_0 = x_0 - e \\ \ln x_0 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = e$$

Έχουμε λοιπόν $\begin{cases} g(e) = 0 \\ g'(e) = 1 \end{cases}$, συνεπώς η ευθεία (ε): $y = x - e$ εφάπτεται της C_g στο σημείο $M(e, 0)$.

- β) i) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε: $f'(\ln x) = x \ln x \Leftrightarrow f'(\ln x) \cdot \frac{1}{x} = \ln x \Leftrightarrow$

$[f(\ln x)]' = (x \ln x - x)'$, άρα: $f(\ln x) = x \ln x - x + c$. Για $x = 1$ έχουμε $f(0) = 0 - 1 + c \Leftrightarrow c = 0$

Άρα $f(\ln x) = x \ln x - x \Leftrightarrow f(\ln x) = g(x)$.

Αν θέσουμε όπου x το e^x έχουμε $g(e^x) = f(\ln e^x) \Leftrightarrow f(x) = g(e^x)$.

- ii) Η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε διάστημα $[0, x]$, $0 < x < 1$ με $f'(x) = xe^x$. Ισχύει λοιπόν

το Θ.Μ.Τ. άρα θα υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow \xi e^\xi = \frac{f(x) + 1}{x}$ (1)

Είναι $0 < \xi < x < 1 \Leftrightarrow e^0 < e^\xi < e^x < e^1 \Leftrightarrow 1 < e^\xi < e^x < e$ άρα $1 < e^\xi < e$. Έχουμε λοιπόν

$\begin{cases} 0 < \xi < 1 \\ 1 < e^\xi < e \end{cases}$ άρα $0 < \xi e^\xi < e \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 0 < \frac{f(x) + 1}{x} < e \Leftrightarrow -1 < f(x) < xe - 1$

ΘΕΜΑ 26^ο

Έστω συνεχής συνάρτηση f η οποία για κάθε $x \in (-1,1)$ ικανοποιεί τις σχέσεις $f(x) \neq 0$ και

$$\eta\mu\left(\int_0^x f(t)dt\right) = x. \text{ Να αποδείξετε ότι:}$$

α) $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1,1)$

β) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1,1)$

Λύση

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(-1,1)$, το $0 \in (-1,1)$, άρα η $\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$.

Η συνάρτηση $\eta\mu\left(\int_0^x f(t)dt\right)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$\text{Για κάθε } x \in (-1,1) \text{ έχουμε } \left[\eta\mu\left(\int_0^x f(t)dt\right)\right]' = (x)' \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\int_0^x f(t)dt\right) \cdot \left(\int_0^x f(t)dt\right)' = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\int_0^x f(t)dt\right) \cdot f(x) = 1 \stackrel{f(x) \neq 0}{\Leftrightarrow}_{x \in (-1,1)} \sigma\upsilon\nu\left(\int_0^x f(t)dt\right) = \frac{1}{f(x)} \quad (1)$$

Η f είναι συνεχής στο $(-1,1)$ και δε μηδενίζεται στο διάστημα αυτό, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Από (1) για $x=0$ έχουμε $\sigma\upsilon\nu 0 = \frac{1}{f(0)} \Leftrightarrow f(0) = 1 > 0$. Άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1,1)$.

β) Έχουμε $\eta\mu^2\left(\int_0^x f(t)dt\right) + \sigma\upsilon\nu^2\left(\int_0^x f(t)dt\right) = 1 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{f^2(x)} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{f^2(x)} = 1 - x^2$

$$\Leftrightarrow f^2(x) = \frac{1}{1-x^2} \stackrel{f(x) > 0, x \in (-1,1)}{\Leftrightarrow} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1,1).$$

ΘΕΜΑ 27^ο

Έστω συνάρτηση $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με πρώτη παράγωγο γνησίως φθίνουσα και συνεχή. Αν $f(0) = 0$,

$f'(0) > 0$ και για κάθε $x \in [0,1]$ είναι $f(x) \geq 0$ και $f'(x) \neq 0$ να αποδείξετε ότι:

α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$.

β) Η εξίσωση $f'(x) = f(1)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

γ) $\int_0^1 \frac{dx}{f^2(x)+1} < \frac{f(1)}{f'(1)}$

Λύση

α) Η f' είναι συνεχής και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$, άρα η $f'(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $f'(0) > 0$ συμπεραίνουμε ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$, άρα f γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$, άρα ισχύει Θ.Μ.Τ. οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1)$ (1).

Άρα η εξίσωση $f'(x) = f(1)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

γ) Για $\xi < 1 \Leftrightarrow f'(\xi) > f'(1) \Leftrightarrow f(1) > f'(1) \Leftrightarrow \frac{f(1)}{f'(1)} > 1$

$$\begin{aligned} \text{Αρκεί να αποδείξουμε ότι } \int_0^1 \frac{dx}{f^2(x)+1} \leq 1 &\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{dx}{f^2(x)+1} \leq \int_0^1 dx \Leftrightarrow \int_0^1 \left(\frac{1}{f^2(x)+1} - 1 \right) dx \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\int_0^1 \frac{f^2(x)}{f^2(x)+1} dx \leq 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{f^2(x)}{f^2(x)+1} dx \geq 0, \text{ το οποίο ισχύει.} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 28^ο

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, οι οποίες για κάθε $x \in [0, +\infty)$ ικανοποιούν τις σχέσεις:

- $f(x) \neq 0$ και $g(x) \neq 0$
- $1 + \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{g(x)}$ και $1 + \int_0^x g(t) dt = \frac{1}{f(x)}$

Να αποδείξετε ότι:

- α) $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$
- β) $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$
- γ) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$

Λύση

α) Οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[0, +\infty)$ και δε μηδενίζονται στο διάστημα αυτό, άρα διατηρούν σταθερό πρόσημο. Για $x = 0$ έχουμε $f(0) = g(0) = 1 > 0$, άρα $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

β) Οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[0, +\infty)$, άρα οι συναρτήσεις $\int_0^x f(t) dt$ και $\int_0^x g(t) dt$

ορίζονται και είναι παραγωγίσιμες στο $[0, +\infty)$. Η συνάρτηση $1 + \int_0^x f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη

στο $[0, +\infty)$, άρα και η συνάρτηση $\frac{1}{g(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$, αφού από υπόθεση είναι

$g(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$, άρα και η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{\frac{1}{g(x)}}$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$.

Ομοίως και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$.

Για κάθε $x \in [0, +\infty)$ έχουμε:

$$\left(1 + \int_0^x f(t) dt\right)' = \left(\frac{1}{g(x)}\right)' \Leftrightarrow f(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)} \Leftrightarrow \frac{g'(x)}{g(x)} = -f(x)g(x) \quad (1)$$

$$\left(1 + \int_0^x g(t) dt\right)' = \left(\frac{1}{f(x)}\right)' \Leftrightarrow g(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -f(x)g(x) \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{g'(x)}{g(x)} \Leftrightarrow (\ln f(x))' = (\ln g(x))' \Leftrightarrow \ln f(x) = \ln g(x) + c, \quad x \in [0, +\infty) \quad (3).$$

Για $x = 0$ από τις αρχικές σχέσεις έχουμε ότι $f(0) = g(0) = 1$ και από τη σχέση (3) έχουμε ότι $c = 0$.

Άρα $\ln f(x) = \ln g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x), \quad x \in [0, +\infty) \quad (4).$

γ) Είναι $1 + \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{g(x)} \stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} 1 + \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{f(x)}$, οπότε παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη έχουμε

$$f(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)} \Leftrightarrow f^{-3}(x) f'(x) = -1 \Leftrightarrow \left(\frac{f^{-2}(x)}{-2}\right)' = (-x)' \Leftrightarrow \frac{f^{-2}(x)}{-2} = -x + c \Leftrightarrow f^{-2}(x) = 2x - 2c \quad (5)$$

Για $x = 0$ έχουμε $1 = -2c \Leftrightarrow c = -\frac{1}{2}$, οπότε

$$f^{-2}(x) = 2x + 1 \stackrel{f(x) > 0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{f^2(x)} = 2x + 1 \Leftrightarrow f^2(x) = \frac{1}{2x + 1} \stackrel{f(x) > 0}{\Leftrightarrow} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x + 1}}, \quad x \geq 0.$$

ΘΕΜΑ 29^ο

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) = \int_0^x f(x+t) dt$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν F είναι μια αρχική συνάρτηση της f στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

α) $F'(x) = F(2x) - F(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Για κάθε $\kappa < 0$, υπάρχει $\xi_\kappa \in (2\kappa, \kappa)$ έτσι, ώστε $F'(\kappa)F'(\xi_\kappa) \leq 0$.

γ) Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει άπειρες λύσεις στο $(-\infty, 0)$.

Λύση

α) Θέτουμε $u = x + t$, άρα $du = dt$.

Για $t = 0$ είναι $u_1 = x$ και για $t = x$ είναι $u_2 = 2x$. Επομένως έχουμε

$$f(x) = \int_0^x f(x+t)dt = \int_x^{2x} f(u)du = \int_x^{2x} F'(u)du = [F(u)]_x^{2x} = F(2x) - F(x)$$

Επειδή η F είναι μια αρχική της f στο $\mathbb{R}$, έχουμε

$$F'(x) = F(2x) - F(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

β) Για κάθε $\kappa < 0$ θεωρούμε το διάστημα $[2\kappa, \kappa]$

- Η F είναι συνεχής στο $[2\kappa, \kappa]$, ως παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$
- Η F είναι παραγωγίσιμη στο $(2\kappa, \kappa)$ με $F'(x) = f(x)$.

Επομένως σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_\kappa \in (2\kappa, \kappa)$ τέτοιο, ώστε

$$F'(\xi_\kappa) = \frac{F(\kappa) - F(2\kappa)}{\kappa - 2\kappa} = \frac{F(2\kappa) - F(\kappa)}{\kappa} \stackrel{(1)}{=} \frac{F'(\kappa)}{\kappa}$$

$$\text{Όμως } \kappa < 0, \text{ άρα } F'(\xi_\kappa)F'(\kappa) = \frac{F'(\kappa)}{\kappa}F'(\kappa) = \frac{1}{\kappa}(F'(\kappa))^2 \leq 0$$

(Η ισότητα ισχύει όταν $F'(\kappa) = 0$, δηλαδή $F(\kappa) = F(2\kappa)$, οπότε $F'(\xi_\kappa) = 0$).

γ) Από το (β) ερώτημα προκύπτει ότι για κάθε $\kappa < 0$ έχουμε $f(\xi_\kappa)f(\kappa) \leq 0$ γιατί $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως:

- Η f είναι συνεχής σε κάθε διάστημα της μορφής $[\xi_\kappa, \kappa]$
- $f(\xi_\kappa)f(\kappa) \leq 0$

Άρα i) αν $f(\xi_\kappa) \cdot f(\kappa) < 0$ τότε, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον

$$x_1 \in (\xi_\kappa, \kappa) \text{ τέτοιο, ώστε } f(x_1) = 0$$

ii) αν $f(\xi_\kappa) \cdot f(\kappa) = 0 \Leftrightarrow f(\xi_\kappa) = 0$ ή $f(\kappa) = 0$, δηλαδή $x_1 = \xi_\kappa$ ή $x_1 = \kappa$. Επομένως

η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα σε κάθε διάστημα της μορφής $[\xi_\kappa, \kappa]$. Άρα υπάρχουν άπειρες ρίζες της $f(x) = 0$ στο $(-\infty, 0)$.

Θέμα 30^ο

Δίνεται η συνάρτηση $F(x) = \int_2^x \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}} dt$

A. 1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της F και να αποδείξετε ότι η F είναι κοίλη.

$$2) \text{ Αν } 1 < \alpha \leq \beta \text{ να αποδείξετε ότι: } \int_2^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \frac{2}{\sqrt{t^2 + 1}} dt \geq \int_2^\alpha \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} + \int_2^\beta \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}}$$

B. 1) Να αποδείξετε ότι: (i) $F\left(\frac{x^2 + 1}{2x}\right) = \ln x + c$, για κάθε $x > 1$, όπου $c \in \mathbb{R}$ σταθερά

$$(ii) F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + c, \text{ για κάθε } x > 1.$$

2) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της

$$\text{συνάρτησης } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \text{ και τις ευθείες } x = \sqrt{3} \text{ και } x = \sqrt{5}.$$

Λύση

A. 1) Η συνάρτηση $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$ είναι συνεχής στο $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ και επειδή $2 \in (1, +\infty)$ η F έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(1, +\infty)$.

Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ έχουμε $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ και $F''(x) = -\frac{x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} < 0$, για κάθε $x \in (1, +\infty)$

Άρα η F είναι κοίλη στο $(1, +\infty)$.

2) Για $\alpha = \beta$ η ανισοταυτότητα ισχύει ως ισότητα.

Αν $\alpha < \beta$ από Θ.Μ.Τ. για την F σε καθένα από τα διαστήματα: $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$, $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$

Επομένως θα υπάρξει: $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $F'(\xi_1) = \frac{F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - F(\alpha)}{\frac{1}{2}(\beta - \alpha)}$ (1) και

$\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ τέτοιο, ώστε $F'(\xi_2) = \frac{F(\beta) - F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{1}{2}(\beta - \alpha)}$ (2)

Όμως η $F' \downarrow (1, +\infty)$, οπότε για $\xi_1 < \xi_2 \Leftrightarrow F'(\xi_1) > F'(\xi_2)$ και από (1), (2) προκύπτει:

$$F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - F(\alpha) > F(\beta) - F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Leftrightarrow 2F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > F(\alpha) + F(\beta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \frac{2}{\sqrt{t^2-1}} dt > \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$$

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν ισχύει $\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \frac{2}{\sqrt{t^2-1}} dt \geq \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$

B. 1) Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ έχουμε: $\left[F\left(\frac{x^2+1}{2x}\right)\right]' = F'\left(\frac{x^2+1}{2x}\right) \cdot \left(\frac{x^2+1}{2x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x^2+1}{2x}\right)^2 - 1}} \cdot \frac{x^2-1}{2x^2} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^2}} \cdot \frac{x^2-1}{2x^2} = \frac{2x}{x^2-1} \cdot \frac{x^2-1}{2x^2} = \frac{1}{x} = (\ln x)'. \text{ Έχουμε } \left[F\left(\frac{x^2+1}{2x}\right)\right]' = (\ln x)', x \in (1, +\infty)$$

Άρα $F\left(\frac{x^2+1}{2x}\right) = \ln x + c$ (3)

2) Θέτουμε $\frac{x^2+1}{2x} = y \Leftrightarrow x^2 - 2yx + 1 = 0 \Leftrightarrow^{x>1} x = y + \sqrt{y^2-1}, y > 1$ (4)

$$\text{Είναι } y > 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{2x} > 1 \stackrel{(x>1)}{\Leftrightarrow} x^2 + 1 > 2x \Leftrightarrow (x-1)^2 > 0 \text{ που ισχύει.}$$

$$\text{Η } (3) \stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} F(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) + c, y > 1. \text{ Άρα } F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + c, x > 1.$$

$$\begin{aligned} 3) \text{ Είναι } E &= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}} dt = \int_2^{\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}} dt - \int_2^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}} dt = F(\sqrt{5}) - F(\sqrt{3}) = \\ &= \ln(2 + \sqrt{5}) - \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \ln \frac{2 + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \text{ τ.μ} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 31^ο

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f^3(x) + 3f(x) = x^5 + x + 1$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- β) Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα $\rho \in (-1, 0)$.
- γ) Η f αντιστρέφεται.
- δ) Το σημείο $N(0, \rho) \in C_{f^{-1}}$.
- ε) Η εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

Υπόδειξη

Θεωρείται γνωστό ότι:

$$\text{αν } f \checkmark \text{ στο } A, \text{ τότε } f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = x, x \in B = A \cap f(A)$$

Λύση

- α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και η f^3 είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Επίσης η συνάρτηση $x^5 + x + 1$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της (1) και έχουμε:

$$3f^2(x)f'(x) + 3f'(x) = 5x^4 + 1 \Leftrightarrow$$

$$3(f^2(x) + 1)f'(x) = 5x^4 + 1 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{5x^4 + 1}{3(f^2(x) + 1)} > 0, x \in \mathbb{R}$$

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

- β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(x)(f^2(x) + 3) = x^5 + x + 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x^5 + x + 1}{f^2(x) + 3} \quad (2)$$

$$\text{Είναι } f(0) = \frac{1}{f^2(0) + 3} > 0 \text{ και } f(-1) = \frac{-1}{f^2(-1) + 3} < 0. \text{ Παρατηρούμε λοιπόν ότι}$$

η f είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ και $f(-1)f(0) < 0$. Ισχύει λοιπόν το Θ. Bolzano,

οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια ρίζα στο $(-1, 0)$ και μάλιστα μοναδική, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι και " $1-1$ ", άρα αντιστρέφεται.

δ) Αφού ρ ρίζα της $f(x)=0$ ισχύει $f(\rho)=0 \Leftrightarrow M(\rho, 0) \in C_f \Leftrightarrow N(0, \rho) \in C_{f^{-1}}$.

ε) Η f είναι $\swarrow$ στο $\mathbb{R}$, άρα ισχύει η ισοδυναμία $f(x)=f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x)=x$.

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\begin{aligned} f^3(x) + 3f(x) &= x^5 + x + 1 \Leftrightarrow \\ f^3(x) - x^3 + 3f(x) - 3x &= x^5 + x + 1 - x^3 - 3x \Leftrightarrow \\ [f(x) - x] \cdot [f^2(x) + xf(x) + x^2 + 3] &= x^5 - x^3 - 2x + 1 \quad (2) \end{aligned}$$

Είναι γνωστό ότι $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f^2(x) + xf(x) + x^2 \geq 0 \Leftrightarrow f^2(x) + xf(x) + x^2 + 3 \geq 3$.

Αρκεί λοιπόν η συνάρτηση $g(x) = x^5 - x^3 - 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, να έχει ρίζα στο $(0, 1)$.

Παρατηρούμε ότι

- Η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$.
- $g(0)g(1) = 1 \cdot (-1) < 0$.

Ισχύει λοιπόν το Θ. Bolzano, οπότε η $g(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

Θέμα 32^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{a}(x+a)e^{a-x}$, $x \in \mathbb{R}$ και $a > 0$

α) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και τα σημεία καμπής.

γ) Να δείξετε ότι για κάθε $a > 0$ οι γραφικές παραστάσεις των f και f' έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

δ) Η ευθεία $x=1$ ορίζει με τις γραφικές παραστάσεις των f και f' ένα ευθύγραμμο τμήμα. Να βρείτε την τιμή του a , ώστε το τμήμα αυτό να έχει το μικρότερο δυνατό μήκος.

ε) Η γραφική παράσταση της f για $a=1$, ο άξονας $x'x$ και η ευθεία $x=\lambda$ με $\lambda > -1$ ορίζουν ένα χωρίο με εμβαδόν $E(\lambda)$. Να βρείτε το $E(\lambda)$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$.

Λύση

α)

- Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.
- Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$, η f δεν έχει ασύμπτωτες στο $-\infty$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{a} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+a}{e^{x-a}} = \frac{1}{a} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x-a}} = 0$, οπότε η ευθεία $y=0$, δηλαδή ο άξονας $x'x$,

είναι οριζόντια ασύμπτωτης της γραφικής παράστασης της f .

$$\text{Είναι } f'(x) = \frac{1}{\alpha} e^{a-x} - \frac{1}{\alpha} (x + \alpha) e^{a-x} = \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{x}{\alpha} - 1 \right) e^{a-x} \text{ και } f''(x) = \left(\frac{x}{\alpha} + 1 - \frac{2}{\alpha} \right) e^{a-x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 - \alpha, \quad f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1 - \alpha \text{ και } f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 - \alpha, \quad f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2 - \alpha$$

x	$-\infty$	$1-\alpha$	$2-\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-
$f''(x)$	-	-	0	+
$f(x)$				

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη στο $(-\infty, 1-\alpha]$, γνησίως φθίνουσα και κοίλη στο $[1-\alpha, 2-\alpha]$, γνησίως φθίνουσα και κυρτή στο $[2-\alpha, +\infty)$. Η f έχει μοναδικό μέγιστο για $x = 1 - \alpha$ το $f(1-\alpha) = \frac{1}{\alpha} \cdot e^{2\alpha-1}$ και μοναδικό σημείο καμπής το $K\left(2-\alpha, \frac{2}{\alpha} e^{2\alpha-2}\right)$

γ) Έχουμε $f'(x) = f(x) \Leftrightarrow \frac{x}{\alpha} + 1 = \frac{1}{\alpha} - \frac{x}{\alpha} - 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} - \alpha$, που σημαίνει ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και f' έχουν μοναδικό κοινό σημείο.

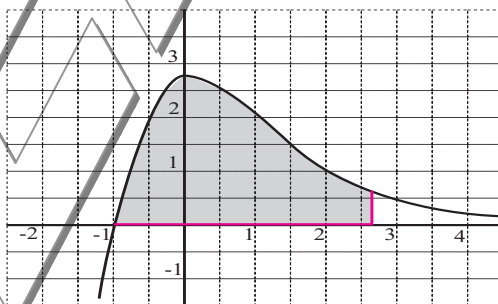
δ) Έστω $d(\alpha)$ το μήκος του τμήματος, τότε $d(\alpha) = |f(1) - f'(1)| = \left(\frac{1}{\alpha} + 2\right) e^{\alpha-1}$ και

$$d'(\alpha) = d'(\alpha) = \left(-\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} + 2\right) e^{\alpha-1}. \text{ Επομένως } d'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2} \text{ και } d'(\alpha) > 0 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}.$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Άρα για $\alpha = \frac{1}{2}$ το d έχει ελάχιστο μήκος.

$$\epsilon) E(\lambda) = \int_{-1}^{\lambda} f(x) dx = \int_{-1}^{\lambda} (x+1)e^{x-1} dx = \left[(x+1)(-e^{1-x}) \right]_{-1}^{\lambda} - \int_{-1}^{\lambda} (-e^{1-x}) dx = e^2 - (\lambda+2)e^{1-\lambda}$$



$$\text{και } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda) = e^2 - \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda+2}{e^{\lambda-1}} = e^2$$

ΘΕΜΑ 1

Έστω $f(z) = |z| - i\bar{z}$, $z \in \mathbb{C}$.

- α)** Να λύσετε την εξίσωση : $f(z) = 2 - i$.
β) Αν $|f(|z|)| = \sqrt{2}$ να βρείτε το $|z|$.
γ) Αν $|z| = 1$ να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του $w = f(z)$ είναι κύκλος που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ΛΥΣΗ

α) $f(z) = 2 - i \Leftrightarrow |z| - i\bar{z} = 2 - i$.

Αν $z = x + yi$ τότε $\sqrt{x^2 + y^2} - i(x - yi) = 2 - i \Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + y^2} - y) - xi = 2 - i \Leftrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x^2 + y^2} - y = 2 \\ x = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1 + y^2} = y + 2 \\ x = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 + y^2 = y^2 + 4y + 4, y \geq -2 \\ x = 1 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -\frac{3}{4} \\ x = 1 \end{array} \right\}. \text{ Άρα } z = 1 - \frac{3}{4}i.$$

β) $f(|z|) = |z| - i\bar{|z|} = |z| - i|z| = (1 - i)|z|$

οπότε $|f(|z|)| = |1 - i||z| = \sqrt{2}|z|$.

Άρα $\sqrt{2}|z| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z| = 1$.

γ) Αν $|z| = 1$ τότε:

$w = 1 - i\bar{z} \Leftrightarrow -i\bar{z} = w - 1$ οπότε $|w - 1| = |-i\bar{z}| \Leftrightarrow |w - 1| = |\bar{z}| = |z| = 1$ άρα $|w - 1| = 1$

Η τελευταία σχέση εκφράζει μια εξίσωση κύκλου που επαληθεύεται για $w = 0$.

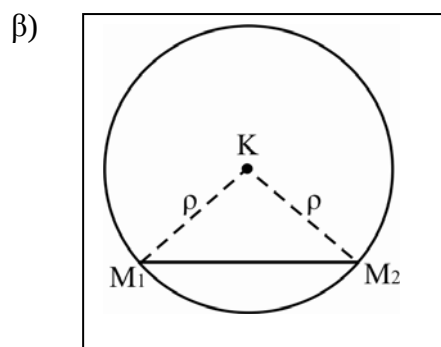
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση : $\bar{z}z + 4\operatorname{Re}[(1 - 2i)z] + 4 = 0$ **(I).**

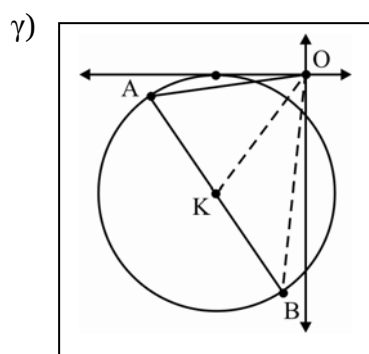
- α)** Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει άπειρες λύσεις στο σύνολο των μιγαδικών.
β) Αν z_1, z_2 είναι δύο λύσεις της παραπάνω εξίσωσης, να δείξετε ότι:
 $|z_1 - z_2| \leq 8$.
γ) Αν t_1, t_2 είναι αντίστοιχα οι τιμές των μιγαδικών z_1 και z_2 (του ερωτ. β) για τις οποίες η παράσταση $|z_1 - z_2|$ γίνεται μέγιστη, να δείξετε ότι:
 $|t_1 + t_2|^{2v} + |10(t_1 - t_2)|^v = 2^{4v+1} \cdot 5^v$ για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$.

ΛΥΣΗ

- α) Θέτουμε $z=x+yi$, $(x,y \in \mathbb{R})$ και η (I) παίρνει την μορφή:
 $x^2 + y^2 + 4x + 8y + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y+4)^2 = 16$.
 Επομένως η εξίσωση (I) έχει λύση κάθε μιγαδικό, του οποίου η εικόνα είναι σημείο του κύκλου $C: (x+2)^2 + (y+4)^2 = 16$.



Αν z_1, z_2 δύο λύσεις της (I) τότε οι εικόνες τους $M_1(z_1)$ και $M_2(z_2)$ είναι σημεία του κύκλου C . Οπότε έχουμε:
 $|z_1 - z_2| = (M_1 M_2) \leq 2\rho = 2 \cdot 4 = 8$.



Η παράσταση $|z_1 - z_2|$ γίνεται μέγιστη όταν η χορδή $M_1 M_2$ του κύκλου C , γίνεται διάμετρος. Έτσι οι εικόνες A, B των μιγαδικών t_1 και t_2 αντίστοιχα είναι αντιδιαμετρικά σημεία. Οπότε
 $|t_1 - t_2| = \max |z_1 - z_2| = 8 = 2^3$.

$$|t_1 + t_2| = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = 2|\overrightarrow{OK}| = 2\sqrt{20} = 2^2\sqrt{5}.$$

Έτσι έχουμε:

$$|t_1 + t_2|^{2v} + |10(t_1 - t_2)|^v = 2^{4v} \cdot 5^v + 2^{4v} \cdot 5^v = 2 \cdot 2^{4v} \cdot 5^v = 2^{4v+1} \cdot 5^v.$$

ΘΕΜΑ 3

Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε: (I) $f^3(x) + 2x^2 f(x) = 3\eta\mu^3 x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \alpha$ τότε:

- α) Να δείξετε ότι $\alpha=1$.

- β) Να βρείτε τα όρια: i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{x}$, ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(f(x))}{x}$ και iii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2 - x)}{x^2 - 3x + 2}$.

ΛΥΣΗ

- α) Για $x \neq 0$ διαιρούμε με x^3 την (I) οπότε έχουμε: $\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3 + 2\frac{f(x)}{x} = 3\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^3$ και υπολογίζοντας τα όρια των δύο μελών παίρνουμε: $\alpha^3 + 2\alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha = 1$.

- β) Παρατηρούμε ότι σε περιοχή του 0 έχουμε

i) $\frac{f(\eta\mu x)}{x} = \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} \cdot \frac{\eta\mu x}{x}$ όπου $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}$ για $y=\eta\mu x$ γίνεται $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y)}{y} = 1$.

$$\text{ii)} \quad \frac{f(f(x))}{x} = \frac{f(f(x))}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{x} \quad \text{όπου} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \frac{f(x)}{x}\right) = 0 \cdot 1 = 0 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(f(x))}{x} \quad \text{για } y=f(x) \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y)}{y} = 1.$$

$$\text{iii)} \quad \frac{f(x^2 - x)}{x^2 - 3x + 2} = \frac{f(x^2 - x)}{x^2 - x} \cdot \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{f(x^2 - x)}{x^2 - x} \cdot \frac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{f(x^2 - x)}{x^2 - x} \cdot \frac{x}{x-2}$$

$$\text{Εύκολα βρίσκουμε ότι σε περιοχή του 1 είναι: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2 - x)}{x^2 - 3x + 2} = 1 \cdot (-1) = -1.$$

ΘΕΜΑ 4

Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, που είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής. Αν

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$$

α) Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu x}$

β) Να δείξετε ότι: $f(1)=0$

γ) Να βρείτε την τιμή του k , ώστε η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x-1}, & x \neq 1 \\ k, & x=1 \end{cases}$ να είναι

συνεχής στο $\mathbb{R}$.

δ) Για την τιμή του $k=1$ να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της g τέμνει την ευθεία $(\varepsilon): y=2x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.

ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι σε περιοχή του $\frac{\pi}{2}$ έχουμε

$$\frac{f(\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{f(\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \cdot \sigma\upsilon\nu x = \frac{f(\eta\mu x)}{1 - \eta\mu^2 x} \cdot \sigma\upsilon\nu x = -\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x - 1} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu x}$$

$$\text{όπου για } y=\eta\mu x \text{ έχουμε } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{f(y)}{y-1} = 1. \text{ Άρα } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu x} = -1 \cdot 0 = 0.$$

β) Επειδή f συνεχής στο 1 έχουμε: $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \cdot \frac{f(x)}{x-1} = 0 \cdot 1 = 0.$

γ) $g(1) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$ άρα $k=1.$

δ) Εφαρμόζουμε θεώρημα Bolzano για την $h(x)=g(x)-2x$ στο $[0,1]$. Παρατηρήστε ότι: $h(0)=g(0)=-f(0)$ όμως f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε: $f(0) < f(1) = 0$. Επομένως $h(0) > 0$. Ακόμα είναι: $h(1)=g(1)-2=-1 < 0$.

ΘΕΜΑ 5

Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε: (I) $|f(x) - x| \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

β) Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^v}$, $v \in \mathbb{N}^*$, ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x \cdot f(\frac{1}{x})]$, iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\frac{x^2 - x - 2}{x^2} \cdot f(\frac{x^2}{x+1})]$.

ΛΥΣΗ

α) Για $x > 0$ έχουμε: $|f(x) - x| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{f(x)}{x} - 1 \right| \leq \frac{1}{x} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq 1 + \frac{1}{x}$ και εφαρμόζοντας το κριτήριο παρεμβολής βρίσκουμε: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

β) i) Έχουμε: Για $v > 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^v} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} \cdot \frac{1}{x^{v-1}} \right] = 1 \cdot 0 = 0$

Για $v = 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^v} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x \cdot f(\frac{1}{x})] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$ και για $u = \frac{1}{x}$ έχουμε $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{u} = 1$.

iii) Είναι $\frac{x^2 - x - 2}{x^2} \cdot f(\frac{x^2}{x+1}) = \frac{(x-2)(x+1)}{x^2} \cdot f(\frac{x^2}{x+1}) = (x-2) \cdot \frac{f(\frac{x^2}{x+1})}{\frac{x^2}{x+1}}$ (1)

και θέτοντας $u = \frac{x^2}{x+1}$ βρίσκουμε: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(\frac{x^2}{x+1})}{\frac{x^2}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{u} = 1$ οπότε από την

(1) παίρνουμε: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\frac{x^2 - x - 2}{x^2} \cdot f(\frac{x^2}{x+1})] = +\infty$.

ΘΕΜΑ 6

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε: (I) $f(\frac{x}{x-1}) = \frac{\eta\mu x}{x-1}$ για κάθε $x \neq 1$.

α) Να δείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x-1} = 0$.

β) Να βρείτε το $f(1)$.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\frac{\pi}{\pi-6}, \frac{\pi}{\pi-2})$ τέτοιο ώστε: $f(x_0) = 0$.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x > 1$ έχουμε: $\left| \frac{\eta\mu x}{x-1} \right| = \frac{|\eta\mu x|}{x-1} \leq \frac{1}{x-1} \Rightarrow -\frac{1}{x-1} \leq \frac{\eta\mu x}{x-1} \leq \frac{1}{x-1}$ με κριτήριο παρεμβολής βρίσκουμε: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x-1} = 0$.

β) Από την (I) παίρνουμε: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{x}{x-1}\right) = 0$. Θέτουμε $y = \frac{x}{x-1}$ τότε $0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \lim_{y \rightarrow 1} f(y)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο 1 έχουμε: $f(1) = \lim_{y \rightarrow 1} f(y) = 0$.

γ) Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Bolzano για την f στο $\left[\frac{\pi}{\pi-6}, \frac{\pi}{\pi-2}\right]$.

- Για $x = \frac{\pi}{6}$ η (I) δίνει: $f\left(\frac{\pi}{\pi-6}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{6}-1} = \frac{3}{\pi-6} < 0$

- Για $x = \frac{\pi}{2}$ η (I) δίνει: $f\left(\frac{\pi}{\pi-2}\right) = \frac{1}{\frac{\pi}{2}-1} = \frac{2}{\pi-2} > 0$.

Σημείωση: Παρατηρείστε ότι από την σχέση (I) μπορεί να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης για κάθε $x \neq 1$, οπότε τα ερωτήματα β) και γ) επιλύονται διαφορετικά.

ΘΕΜΑ 7

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$. Αν το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τους άξονες $x'x, y'y$ και την ευθεία $x=u$ είναι $E(u) = e^u - f(u)$ για κάθε $u \geq 0$ τότε:

i) να αποδείξετε ότι $f'(x) + f(x) = e^x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = 0$.

iii) να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

iv) να λύσετε την εξίσωση $f'(x) = \frac{1}{2} \eta\mu x$.

ΛΥΣΗ

i) Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$, το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τους άξονες $x'x, y'y$ και την ευθεία $x=u$,

είναι $E(u) = \int_0^u f(x) dx$ οπότε για κάθε $u \geq 0$ είναι $\int_0^u f(x) dx = e^u - f(u)$ (1).

Η f ως παραγωγίσιμη είναι και συνεχής στο $[0, +\infty)$, το $0 \in [0, +\infty)$ άρα

$\left(\int_0^u f(x) dx\right)' = f(u)$

Για κάθε $u \geq 0$ είναι $(\int_0^u f(x)dx)' = (e^u - f(u))' \Leftrightarrow f(u) = e^u - f'(u) \Leftrightarrow f'(u) + f(u) = e^u$.

Άρα για κάθε $x \in [0, +\infty)$ είναι $f'(x) + f(x) = e^x$ (2).

Από τη σχέση (1) για $u=0$ έχουμε $f(0)=1$ και από τη σχέση (2) για $x=0$ έχουμε $f'(0)=0$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 0$ (η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ από υπόθεση).

ii) Για κάθε $x \in [0, +\infty)$ είναι

$$f'(x) + f(x) = e^x \Leftrightarrow f'(x)e^x + f(x)e^x = e^{2x} \Leftrightarrow (f(x)e^x)' = (\frac{1}{2}e^{2x})' \text{ οπότε}$$

$$f(x)e^x = \frac{1}{2}e^{2x} + c, \quad x \geq 0 \quad (3).$$

Για $x=0$ από την (3) έχουμε $1 = \frac{1}{2} + c \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$ επομένως για κάθε $x \geq 0$ είναι

$$f(x)e^x = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad x \geq 0.$$

iii) Για κάθε $x \in [0, +\infty)$ είναι $f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, οπότε η εξίσωση $f'(x) = \frac{1}{2}\eta\mu x$

$$\text{ισοδύναμα γράφεται } \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2}\eta\mu x \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = \eta\mu x \quad (4).$$

Παρατηρούμε ότι $e^0 - e^{-0} = \eta\mu 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ αληθές, άρα το 0 είναι ρίζα της εξίσωσης.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^x + e^{-x} - \eta\mu x$, $x \geq 0$. Για κάθε $x \in [0, +\infty)$ είναι

$$g'(x) = e^x + e^{-x} - \sigma\upsilon\eta x = \underbrace{(e^x + \frac{1}{e^x} - 2)}_{\geq 0} + \underbrace{(2 - \sigma\upsilon\eta x)}_{> 0} > 0 \text{ άρα η } g \text{ είναι γνησίως αύξουσα}$$

στο $[0, +\infty)$, οπότε η ρίζα 0 της εξίσωσης είναι μοναδική. Επομένως

$$f'(x) = \frac{1}{2}\eta\mu x \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = \eta\mu x \Leftrightarrow x=0.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Είναι γνωστό ότι $a + \frac{1}{a} \geq 2$ για κάθε $a > 0$ και αφού $e^x > 0$ είναι

$$e^x + \frac{1}{e^x} - 2 \geq 0. \text{ Επίσης } 2 - \sigma\upsilon\eta x > 0 \text{ αφού } |\sigma\upsilon\eta x| \leq 1 \text{ για κάθε } x.$$

ΘΕΜΑ 8

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) > 2007$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει την ευθεία με εξίσωση $y=2006x+1$ σε ένα ακριβώς σημείο.

ΛΥΣΗ

Αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $f(x) = 2006x+1$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $\mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-(2006x+1)$, $x \in \mathbb{R}$.

- Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά παραγωγισίμων με $g'(x)=f'(x)-2006 > 2007-2006=1 > 0$ (1), για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα η εξίσωση $g(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.
- Η g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ του διαφορικού λογισμού σε κάθε διάστημα της μορφής $[0, x]$ με $x > 0$ άρα θα υπάρχει $\xi_1 \in (0, x)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi_1) = \frac{g(x)-g(0)}{x-0} \Leftrightarrow g(x) = g'(\xi_1) \cdot x + g(0) > x + g(0) \quad (\text{αφού } g'(\xi_1) > 1 \Leftrightarrow g'(\xi_1)x > x).$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + g(0)) = +\infty$ άρα και $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, οπότε θα υπάρχει διάστημα της μορφής $(\beta, +\infty)$ με $\beta > 0$ τέτοιο ώστε $g(x) > 0$ για κάθε $x \in (\beta, +\infty)$. Επομένως $g(\lambda) > 0$ για $\lambda \in (\beta, +\infty)$.

Η g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ του διαφορικού λογισμού σε κάθε διάστημα της μορφής $[x, 0]$ με $x < 0$ άρα θα υπάρχει $\xi_2 \in (x, 0)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi_2) = \frac{g(x)-g(0)}{x-0} \Leftrightarrow g(x) = g'(\xi_2) \cdot x + g(0) < x + g(0) \quad (\text{αφού } g'(\xi_2) > 1 \Leftrightarrow g'(\xi_2)x < x).$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + g(0)) = -\infty$ άρα και $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$, οπότε θα υπάρχει διάστημα της μορφής $(-\infty, \alpha)$ με $\alpha < 0$ τέτοιο ώστε $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, \alpha)$. Επομένως $g(\kappa) < 0$ για $\kappa \in (-\infty, \alpha)$.

Η g ικανοποιεί λοιπόν τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο $[\kappa, \lambda]$. Επομένως θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\kappa, \lambda)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=0$.

Δείξαμε λοιπόν ότι η $g(x)=0$ έχει:

- μια τουλάχιστον ρίζα και
- μια το πολύ ρίζα στο $\mathbb{R}$

Άρα η $g(x)=0$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $\mathbb{R}$, που σημαίνει ότι η C_f τέμνει την ευθεία με εξίσωση $y=2006x+1$ σ' ένα ακριβώς σημείο.

ΘΕΜΑ 9

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $(-e, +\infty)$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$f(x) = 1 + \int_0^x e^{-f(t)} dt \quad \text{για κάθε } x \in (-e, +\infty).$$

- Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln(x+e)$
- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφή της.
- Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τους ημιάξονες Ox' και Oy .

δ) Να βρείτε τη γραμμή που διαγράφουν οι εικόνες του μιγαδικού αριθμού z με $\operatorname{Re} z \geq 0$ στο μιγαδικό επίπεδο, αν ισχύει $e^{f(x)} + 2e^x - x|z| \geq e + 2$ για κάθε $x \in (-e, +\infty)$.

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση $e^{-f(t)}$ είναι συνεχής στο $(-e, +\infty)$ ως σύνθεση συνεχών, το $0 \in (-e, +\infty)$ άρα η συνάρτηση $\int_0^x e^{-f(t)} dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-e, +\infty)$, οπότε και η

f είναι παραγωγίσιμη στο $(-e, +\infty)$ με $f'(x) = (1 + \int_0^x e^{-f(t)} dt)' \Leftrightarrow f'(x) = e^{-f(x)} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)}} \quad (1) \Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)} f'(x) = 1 \Leftrightarrow [e^{f(x)}]' = (x)' \Leftrightarrow e^{f(x)} = x + c, \quad c \in \mathbb{R} \quad (2).$$

Για $x=0$ από την αρχική σχέση έχουμε $f(0)=1$, ενώ από τη σχέση (2) είναι $e^{f(0)} = c \Leftrightarrow c = e$.

Έχουμε λοιπόν $e^{f(x)} = x + e \Leftrightarrow f(x) = \ln(x + e), \quad x > -e$.

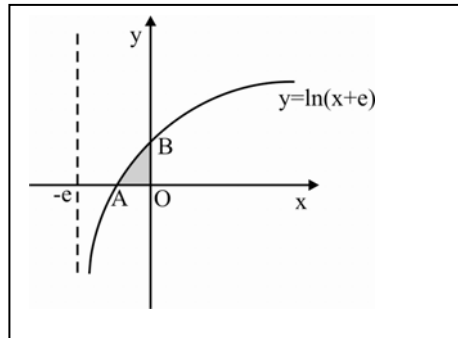
β) Από τη σχέση (1) έχουμε $f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)}} > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-e, +\infty)$, οπότε είναι και “1-1”. Επομένως η f αντιστρέφεται. Για να βρούμε την αντίστροφη της f θέτουμε $y=f(x)$ και λύνουμε ως προς x . Έχουμε λοιπόν $y=f(x) \Leftrightarrow y=\ln(x+e) \Leftrightarrow x+e=e^y \Leftrightarrow x=e^y-e \Leftrightarrow f^{-1}(y)=e^y-e, \quad y \in \mathbb{R}$. Άρα η αντίστροφη της f είναι η $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^{-1}(x)=e^x-e$.

γ) Συντεταγμένες Α

Για $y=0$ είναι

$$\ln(x+e)=0 \Leftrightarrow \ln(x+e)=\ln 1 \Leftrightarrow x+e=1 \Leftrightarrow x=1-e$$

οπότε $A(1-e, 0)$.

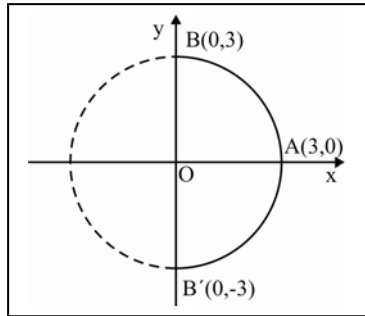


Είναι

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_{1-e}^0 \ln(x+e) dx = \int_{1-e}^0 x' \ln(x+e) dx = [x \ln(x+e)]_{1-e}^0 - \int_{1-e}^0 x (\ln(x+e))' dx = - \int_{1-e}^0 \frac{x}{x+e} dx = \\ &= - \int_{1-e}^0 \left(\frac{x+e}{x+e} - \frac{e}{x+e} \right) dx = - \int_{1-e}^0 \left(1 - \frac{e}{x+e} \right) dx = - \int_{1-e}^0 1 dx + e \int_{1-e}^0 \frac{1}{x+e} dx = - \int_{1-e}^0 1 dx + e \int_{1-e}^0 \frac{1}{x+e} (x+e)' dx = - \int_{1-e}^0 1 dx = \\ &= e [\ln|x+e|]_{1-e}^0 - [0 - (1-e)] = e + 1 - e = 1 \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

δ) Θεωρούμε συνάρτηση $g(x) = e^{f(x)} + 2e^x - x|z| - e - 2, \quad x \in (-e, +\infty)$. Για κάθε $x \in (-e, +\infty)$ είναι $e^{f(x)} + 2e^x - x|z| \geq e + 2 \Leftrightarrow e^{f(x)} + 2e^x - x|z| - e - 2 \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(0)$. Δείξαμε ότι $g(x) \geq g(0)$ για κάθε $x \in (-e, +\infty)$, άρα η g παρουσιάζει ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο $x_0=0$ του πεδίου ορισμού της. Η g είναι παραγωγίσιμη στο

$(-e, +\infty)$ με $g'(x) = e^{f(x)} f'(x) + 2e^x - |z|$ άρα είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 0$ με $g'(0) = e^{f(0)} f'(0) + 2e^0 - |z| \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} g'(0) = e^{f(0)} \frac{1}{e^{f(0)}} + 2 - |z| \Leftrightarrow g'(0) = 3 - |z|$. Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Fermat, οπότε $g'(0) = 0 \Leftrightarrow 3 - |z| = 0 \Leftrightarrow |z| = 3$. Άρα οι εικόνες του μιγαδικού αριθμού z ανήκουν στον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=3$ που έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = 9$.



Όμως το $\operatorname{Re} z \geq 0$ επομένως οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z πάνω στο μιγαδικό επίπεδο διαγράφουν το ημικύκλιο $\widehat{B'AB}$ του κύκλου $x^2 + y^2 = 9$ όπου $B'(0,-3)$, $A(3,0)$, και $B(0,3)$.

ΘΕΜΑ 10

Έστω συνάρτηση f που ικανοποιεί τη σχέση $f^2(x) = 2xf(x) - x^2 f(2-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f(2)=0$.

- α) Να αποδείξετε ότι $[f(x)-x]^2 = x^2[1-f(2-x)]$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- β) Να αποδείξετε ότι $f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- γ) Αν η C_f έχει με τον άξονα $x'x$ δύο μόνο κοινά σημεία, τότε να αποδείξετε ότι για $x=1$ η f παίρνει μέγιστη τιμή $f(1)=1$.

ΛΥΣΗ

- α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f^2(x) = 2xf(x) - x^2 f(2-x) \Leftrightarrow f^2(x) - 2xf(x) = -x^2 f(2-x) \Leftrightarrow f^2(x) - 2xf(x) + x^2 = x^2 - x^2 f(2-x) \Leftrightarrow [f(x) - x]^2 = x^2[1 - f(2-x)]$.
- β) Για $x \neq 0$ είναι $1 - f(2-x) = \frac{[f(x) - x]^2}{x^2} \geq 0$ οπότε $f(2-x) \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.
Επίσης είναι $f(2-0) = f(2) = 0 \leq 1$. Άρα $f(2-x) \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν όπου x θέσουμε το $2-x$ έχουμε $f(2-(2-x)) \leq 1 \Leftrightarrow f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- γ) Για $x=1$ από την αρχική σχέση έχουμε $f^2(1) = 2f(1) - f(1) \Leftrightarrow f^2(1) = f(1) \Leftrightarrow f(1)[f(1)-1] = 0 \Leftrightarrow f(1) = 0$ ή $f(1) = 1$.
Για $x=0$ επίσης έχουμε $f^2(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$.
Επειδή $f(0)=0$ και $f(2)=0$ δεν είναι δυνατόν να είναι και $f(1)=0$ αφού η C_f έχει με τον άξονα $x'x$ δύο μόνο κοινά σημεία. Υποχρεωτικά λοιπόν είναι $f(1)=1$. Άρα $f(x) \leq f(1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως η f παίρνει μέγιστη τιμή το 1 για $x=1$.

ΘΕΜΑ 11

Έστω f, g δύο συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση $f \circ g$ είναι "1-1", $(f \circ g)(0) = 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση

$$\int_0^{g(x)} f(t)dt + \int_0^x (f \circ g)(t)dt = 1, \text{ τότε να αποδείξετε ότι:}$$

α) $g'(x) = -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ και

β) $\int_0^{g(x)+x} f(t)dt = 1, x \in \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

α) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, το $0 \in \mathbb{R}$ και η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, επομένως η $\int_0^{g(x)} f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Η $f \circ g$ είναι συνεχής στο

$\mathbb{R}$ ως σύνθεση συνεχών, το $0 \in \mathbb{R}$ άρα η συνάρτηση $\int_0^x (f \circ g)(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $\left(\int_0^{g(x)} f(t)dt + \int_0^x (f \circ g)(t)dt \right)' = 0 \Leftrightarrow$

$$f(g(x))g'(x) + (f \circ g)(x) = 0 \Leftrightarrow (f \circ g)(x)[g'(x) + 1] = 0 \quad (1).$$

Επειδή η συνάρτηση $f \circ g$ είναι "1-1" και $(f \circ g)(0) = 0$ ισχύει $(f \circ g)(x) = 0 \Leftrightarrow (f \circ g)(x) = (f \circ g)(0) \Leftrightarrow x = 0$. Δηλαδή η εξίσωση $(f \circ g)(x) = 0$ έχει μοναδική λύση την $x=0$. Επομένως η (1) ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{cases} x=0 \text{ ή} \\ g'(x) + 1 = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*. \end{cases}$$

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \int_0^{g(x)+x} f(t)dt, x \in \mathbb{R}$. (2)

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, το $0 \in \mathbb{R}$, η $g(x)+x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα η h παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = f(g(x)+x) \cdot (g(x)+x)' \Leftrightarrow h'(x) = f(g(x)+x) \cdot (g'(x)+1), x \in \mathbb{R}$.

Για $x=0$ έχουμε $h'(0) = f(g(0)) \cdot (g'(0)+1) = 0 \cdot (g'(0)+1) = 0$.

Για $x \neq 0$ έχουμε $h'(x) = f(g(x)+x) \cdot 0 = 0$.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι $h'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η h είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$,

δηλαδή $h(x) = c, x \in \mathbb{R}$. Για $x=0$ από την αρχική σχέση έχουμε $\int_0^{g(0)} f(t)dt = 1$ και από

την (2) έχουμε $h(0) = \int_0^{g(0)} f(t)dt \Leftrightarrow c = 1$. Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$h(x) = 1 \Leftrightarrow \int_0^{g(x)+x} f(t)dt = 1.$$

ΘΕΜΑ 12

A) Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{\ln x}$, $x \in [1, e]$ αντιστρέφεται και να ορίσετε την f^{-1} .

β) $\int_1^e \sqrt{\ln x} dx + \int_0^1 e^{x^2} dx = e$.

B) Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = \int_1^x e^{t^2} dt$. Να αποδείξετε ότι:

α) $h(x) \geq e^x - e$, για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

β) $\int_0^1 h(x) dx = \frac{1-e}{2}$.

ΛΥΣΗ

A) α) Για κάθε $x \in (1, e)$ είναι $f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο

$[1, e]$ συμπεραίνουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, e]$, άρα είναι και "1-1", οπότε αντιστρέφεται. Το σύνολο τιμών της f είναι $f([1, e]) = [f(1), f(e)] = [0, 1]$. Είναι $y = f(x)$ και με $1 \leq x \leq e$, $0 \leq y \leq 1$ έχουμε

$$y = \sqrt{\ln x} \Leftrightarrow \ln x = y^2 \Leftrightarrow x = e^{y^2} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = e^{y^2}.$$

Άρα $f^{-1}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^{-1}(x) = e^{x^2}$ με $f^{-1}([0, 1]) = [1, e]$.

β) Αν $I = \int_1^e \sqrt{\ln x} dx$ και θέσουμε $\sqrt{\ln x} = u$ τότε έχουμε $x = e^{u^2}$, οπότε $dx = (e^{u^2})' du \Leftrightarrow dx = 2ue^{u^2} du$.

Για $x=1$ είναι $u = \sqrt{\ln 1} = 0$ και για $x=e$ είναι $u = \sqrt{\ln e} = 1$.

$$\text{Έχουμε } I = \int_0^1 u 2ue^{u^2} du = \int_0^1 u(e^{u^2})' du = [ue^{u^2}]_0^1 - \int_0^1 u'e^{u^2} du = e - \int_0^1 e^{u^2} du = e - \int_0^1 e^{x^2} dx,$$

$$\text{οπότε } \int_1^e \sqrt{\ln x} dx + \int_0^1 e^{x^2} dx = e - \int_0^1 e^{x^2} dx + \int_0^1 e^{x^2} dx = e.$$

B) α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = h(x) - e^x + e = \int_1^x e^{t^2} dt - e^x + e$, $x \in \mathbb{R}$. Η e^{t^2} είναι

συνεχής στο $\mathbb{R}$, το $0 \in \mathbb{R}$, άρα η $\int_1^x e^{t^2} dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$(\int_1^x e^{t^2} dt)' = e^{x^2}$. Άρα η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγισίμων.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\varphi'(x) = e^{x^2} - e^x$. Είναι

$$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x^2} - e^x = 0 \Leftrightarrow e^{x^2} = e^x \Leftrightarrow x^2 = x \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1.$$

$$\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{x^2} - e^x > 0 \Leftrightarrow e^{x^2} > e^x \Leftrightarrow x^2 > x \Leftrightarrow x(x-1) > 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ ή } x > 1.$$

Ο πίνακας μεταβολών της φ είναι

X	$-\infty$	0	1	$+\infty$		
$\varphi'(x)$	+	0	-	0	+	$-\infty$
$\varphi(x)$	$\nearrow$	$\varphi(0)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

αφού $\varphi(1) = \int_1^1 e^{t^2} dt - e + e = 0$.

Στο διάστημα $[0, +\infty)$ η φ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ με ελάχιστη τιμή $\varphi(1) = 0$. Άρα για κάθε $x \in [0, +\infty)$ είναι $\varphi(x) \geq \varphi(1) \Leftrightarrow h(x) - e^x + e \geq 0 \Leftrightarrow h(x) \geq e^x - e$.

β) Είναι

$$\begin{aligned} \int_0^1 h(x) dx &= \int_0^1 (x)' h(x) dx = [xh(x)]_0^1 - \int_0^1 xh'(x) dx = h(1) - \int_0^1 xe^{x^2} dx = 0 - \frac{1}{2} \int_0^1 (e^{x^2})' dx = \\ &= -\frac{1}{2} [e^{x^2}]_0^1 = -\frac{1}{2} (e - 1) = \frac{1 - e}{2}. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 13

Έστω συνεχής συνάρτηση f στο $(0, +\infty)$, με $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 3$

και $\int_1^2 f(xt) dt \geq \int_1^2 f(x) dx$.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{x} \int_x^{2x} f(u) du \geq \int_1^2 f(x) dx$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=2$.

ΛΥΣΗ

α) Έστω $I = \int_1^2 f(xt) dt$.

Θέτουμε $xt = u$ άρα $x dt = du \Leftrightarrow dt = \frac{1}{x} du$.

- Για $t=1$ είναι $u=x$.
- Για $t=2$ είναι $u=2x$.

Είναι $I = \int_x^{2x} f(u) \frac{1}{x} du = \frac{1}{x} \int_x^{2x} f(u) du$ άρα η δοθείσα σχέση γίνεται:

$$\frac{1}{x} \int_x^{2x} f(u) du \geq \int_1^2 f(x) dx.$$

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \frac{1}{x} \int_x^{2x} f(u) du - \int_1^2 f(x) dx$, $x > 0$.

- Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει $\frac{1}{x} \int_x^{2x} f(u) du \geq \int_1^2 f(x) dx \Leftrightarrow \frac{1}{x} \int_x^{2x} f(u) du - \int_1^2 f(t) dt \geq 0 \Leftrightarrow$

$h(x) \geq 0 \Leftrightarrow h(x) \geq h(1)$ άρα η h παρουσιάζει ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο $x_0 = 1$ του πεδίου ορισμού της.

- Η $h(x) = \frac{1}{x} \int_1^{2x} f(u) du - \frac{1}{x} \int_1^x f(u) du - \int_1^2 f(x) dx$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με:

$$h'(x) = -\frac{1}{x^2} \int_1^{2x} f(u) du + \frac{1}{x} f(2x) \cdot (2x)' + \frac{1}{x^2} \int_1^x f(u) du - \frac{1}{x} f(x) - 0 \Leftrightarrow$$

$$h'(x) = \frac{1}{x^2} \left(\int_1^x f(u) du - \int_1^{2x} f(u) du \right) + \frac{2}{x} f(2x) - \frac{1}{x} f(x).$$

Άρα είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 1$ με $h'(1) = -\int_1^2 f(u) du + 2f(2) - f(1)$. Ισχύει λοιπόν το Θ. Fermat.

$$\text{Επομένως } h'(1) = 0 \Leftrightarrow -\int_1^2 f(u) du + 2f(2) - f(1) = 0 \Leftrightarrow \int_1^2 f(u) du = 2 \cdot f(2) - f(1) \Leftrightarrow$$

$$\int_1^2 f(u) du = 2 \cdot 3 - 1 \Leftrightarrow \int_1^2 f(u) du = 5 \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 14

- α) **Να αποδείξετε ότι $e^x - \eta\mu x \geq x+1-\eta\mu x \geq x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.**
- β) **Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{e^x - \eta\mu x}$, $x \geq 0$. Να βρείτε:**
- Την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .**
 - Τους αριθμούς α, β ώστε $\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = \alpha(e^x - \eta\mu x) + \beta(e^x - \eta\mu x)'$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.**
 - Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x = \frac{\pi}{4}$.**

ΛΥΣΗ

- α) Ισχύει ότι $1 - \eta\mu x \geq 0$ άρα και $x+1-\eta\mu x \geq x$. Επίσης θέλουμε να δείξουμε ότι $e^x - \eta\mu x \geq x+1-\eta\mu x$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $e^x \geq x+1$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = e^x - x - 1$, $x \in [0, +\infty)$. Είναι $h'(x) = e^x - 1$. Η h είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, $h'(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$. Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ οπότε για $x \geq 0$ είναι $h(x) \geq h(0) \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq x + 1$.

- β) i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{e^x - \eta\mu x}$. Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι

$$|f(x)| = \left| \frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{e^x - \eta\mu x} \right| = \frac{|\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x|}{|e^x - \eta\mu x|} \text{ αλλά}$$

$$\frac{|\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x|}{|e^x - \eta\mu x|} \leq \frac{|\eta\mu x| + |\sigma\upsilon\nu x|}{|e^x - \eta\mu x|} \leq \frac{1+1}{|e^x - \eta\mu x|} = \frac{2}{|e^x - \eta\mu x|} = \frac{2}{e^x - \eta\mu x} \leq \frac{2}{x} \text{ λόγω και του α)}$$

υποερωτήματος. Οπότε, $-\frac{2}{x} \leq f(x) \leq \frac{2}{x}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{x}\right) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$ οπότε από το Κριτήριο Παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, επομένως η $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

ii) Έχουμε $\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = \alpha(e^x - \eta\mu x) + \beta(e^x - \eta\mu x)'$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$

$$\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = \alpha(e^x - \eta\mu x) + \beta(e^x - \sigma\upsilon\nu x) \Leftrightarrow (\alpha + \beta)e^x - (\alpha + 1)\eta\mu x - (\beta - 1)\sigma\upsilon\nu x = 0 \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty).$$

Για $x=0$ έχουμε $(\alpha + \beta)e^0 - (\alpha + 1)\eta\mu 0 - (\beta - 1)\sigma\upsilon\nu 0 = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta - \beta + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1$.

Για $x = \frac{\pi}{2}$ έχουμε

$$(\alpha + \beta)e^{\frac{\pi}{2}} - (\alpha + 1)\eta\mu \frac{\pi}{2} - (\beta - 1)\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} = 0 \Leftrightarrow (\alpha + \beta)e^{\frac{\pi}{2}} = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 1.$$

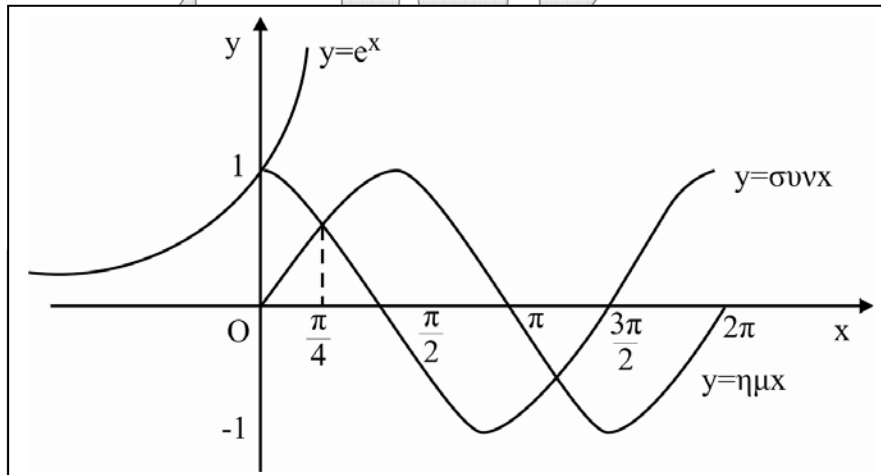
Επαληθεύουμε ότι $\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = -(e^x - \eta\mu x) + (e^x - \eta\mu x)'$, για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

iii)

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} |f(x)| dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left| \frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{e^x - \eta\mu x} \right| dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} -\frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{e^x - \eta\mu x} dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{-(e^x - \eta\mu x)}{e^x - \eta\mu x} + \frac{(e^x - \eta\mu x)'}{e^x - \eta\mu x} \right] dx = \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[-1 + \frac{(e^x - \eta\mu x)'}{e^x - \eta\mu x} \right] dx = \frac{\pi}{4} - [\ln(e^x - \eta\mu x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \ln\left(e^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right). \end{aligned}$$

Σημείωση

Για κάθε $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ είναι $\eta\mu x \leq \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x \leq 0$ επομένως $e^x - \eta\mu x > 0$.



ΘΕΜΑ 15

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις $f(x) \neq 0$ και

$$\int_1^x e^t f(t) dt \geq x-1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να αποδείξετε ότι:}$$

α) $f(1) = \frac{1}{e}.$

β) $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}.$

γ) Η εξίσωση $f(x)=x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1).$

δ) Από τους μιγαδικούς αριθμούς z που ικανοποιούν την ισότητα

$$|z - 2e \cdot f(1) + i| = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ να βρείτε εκείνον που έχει το μεγαλύτερο και εκείνον που έχει το μικρότερο μέτρο.}$$

ΛΥΣΗ

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \int_1^x e^t f(t) dt - x + 1, x \in \mathbb{R}.$ Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_1^x e^t f(t) dt \geq x-1 \Leftrightarrow \int_1^x e^t f(t) dt - x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(1).$$

Δείξαμε ότι $g(x) \geq g(1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η g παρουσιάζει στο εσωτερικό σημείο $x_0 = 1$ του πεδίου ορισμού της ελάχιστο.

Η $e^t f(t)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, το $1 \in \mathbb{R}$ άρα η $\int_1^x e^t f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Επίσης η $-x+1$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική άρα και η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγισίμων με $g'(x) = (\int_1^x e^t f(t) dt - x + 1)' \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow g'(x) = e^x f(x) - 1.$ Άρα η g είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 1$ με
 $g'(1) = e^1 f(1) - 1 \Leftrightarrow g'(1) = ef(1) - 1.$

Ισχύει λοιπόν το Θ.Fermat, οπότε $g'(1) = 0 \Leftrightarrow e^1 f(1) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(1) = \frac{1}{e}.$

β) Από υπόθεση η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ψ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $f(1) = \frac{1}{e} > 0$ συμπεραίνουμε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}.$

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - x, x \in [0,1].$

- Η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως διαφορά συνεχών
- $h(0) \cdot h(1) = [f(0) - 0] \cdot [f(1) - 1] = f(0) \cdot [f(1) - 1] = f(0) \cdot (\frac{1}{e} - 1) < 0$ αφού $f(0) > 0$
και $\frac{1}{e} - 1 < 0.$

Ισχύει λοιπόν το Θ.Bolzano άρα η $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1).$

δ) Έχουμε

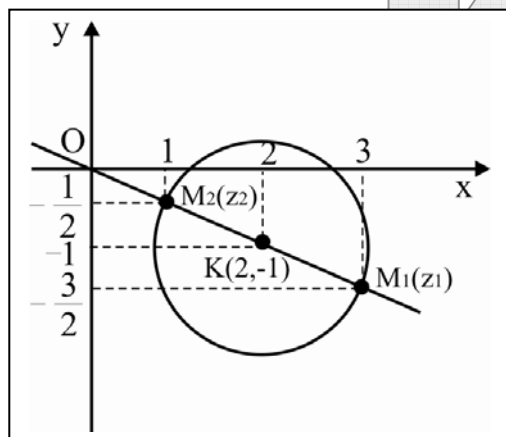
$$|z - 2e \cdot f(1) + i| = \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \left| z - 2e \cdot \frac{1}{e} + i \right| = \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow |z - 2 + i| = \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow |z - (2 - i)| = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι κύκλος με κέντρο το σημείο $K(2, -1)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{5}}{2}$ που έχει εξίσωση $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = \frac{5}{4}$.

Βρίσκουμε την ευθεία ε που διέρχεται από τα σημεία $O(0, 0)$ και $K(2, -1)$. Είναι

$$\lambda_\varepsilon = \frac{y_K - y_O}{x_K - x_O} = \frac{-1 - 0}{2 - 0} = -\frac{1}{2} \text{ άρα } \varepsilon: y = \lambda_\varepsilon \cdot x \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2} \cdot x. \text{ Λύνουμε το σύστημα}$$

$$\begin{cases} \varepsilon: y = -\frac{1}{2} \cdot x \\ c: (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = \frac{5}{4} \end{cases}$$



$$\text{Είναι } (x - 2)^2 + \left(-\frac{1}{2}x + 1\right)^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow (x - 2)^2 + \left(\frac{2 - x}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow (x - 2)^2 + \frac{(2 - x)^2}{4} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{4}(x - 2)^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 1 \Leftrightarrow x - 2 = \pm 1 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ή } x = 1.$$

Για $x = 3$ έχουμε $y = -\frac{3}{2}$ και για $x = 1$ έχουμε $y = -\frac{1}{2}$.

Επομένως ο μιγαδικός που έχει το μεγαλύτερο μέτρο είναι ο $z_1 = 3 - \frac{3}{2}i$ με

$$|z_1| = \sqrt{3^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2} \text{ και ο μιγαδικός που έχει το μικρότερο μέτρο είναι ο}$$

$$z_2 = 1 - \frac{1}{2}i \text{ με } |z_2| = \sqrt{1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

ΘΕΜΑ 16

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^{2006}}} + 2, \quad x \in \mathbb{R}.$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \alpha$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}.$

γ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} f(t) dt.$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^{2006}}} + 2 \right)' = [(1+x^{2006})^{-\frac{1}{2}} + 2]' = -\frac{1}{2}(1+x^{2006})^{-\frac{3}{2}} \cdot (1+x^{2006})' =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(1+x^{2006})^3}} \cdot 2006x^{2005} = -\frac{1003x^{2005}}{(1+x^{2006})\sqrt{1+x^{2006}}}.$$

Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ και $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0$, οπότε έχουμε

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	+	0	-
f	$\nearrow$	3	$\searrow$

ΜΕΓ

- Είναι f συνεχής στο $(-\infty, 0]$ και $f'(x) > 0$ στο $(-\infty, 0)$, οπότε η είναι f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$.
- Είναι f συνεχής στο $[0, +\infty)$ και $f'(x) < 0$ στο $(0, +\infty)$, οπότε η είναι f γνησίως φθίνουσα $[0, +\infty)$.

Η f παρουσιάζει μέγιστο στη θέση $x_0 = 0$ με μέγιστη τιμή $f(0) = 3$.

β) Θα βρούμε το σύνολο τιμών της f.

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^{2006}}} + 2 \right) = 2$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^{2006}}} + 2 \right) = 2$.

Είναι $f(\mathbb{R}) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(0)] \cup (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(0)] = (2, 3]$.

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $a \in (-\infty, 2] \cup (3, +\infty)$, η εξίσωση $f(x) = a$ είναι αδύνατη, αφού $a \notin f(\mathbb{R})$.
- Αν $a = 3$ η εξίσωση $f(x) = a$ έχει μία ακριβώς ρίζα την $x = 0$.
- Αν $a \in (2, 3)$ η εξίσωση $f(x) = a$ έχει 2 ακριβώς ρίζες, μία εκ των οποίων είναι αρνητική και μία θετική.

γ) Η f είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε διάστημα της μορφής $[x, x+1]$ με $x > 0$, οπότε για $x \leq t \leq x+1$ ισχύει $f(x) \geq f(t) \geq f(x+1)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_x^{x+1} f(x) dt \geq \int_x^{x+1} f(t) dt \geq \int_x^{x+1} f(x+1) dt \Leftrightarrow f(x) \int_x^{x+1} dt \geq \int_x^{x+1} f(t) dt \geq f(x+1) \int_x^{x+1} dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)(x+1-x) \geq \int_x^{x+1} f(t) dt \geq f(x+1)(x+1-x) \Leftrightarrow f(x) \geq \int_x^{x+1} f(t) dt \geq f(x+1), x > 0$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x+1) = 2$ (θέτοντας $x+1=u$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x+1) = \lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = 2$) οπότε από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε ότι και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} f(t) dt = 2.$$

ΘΕΜΑ 17

Αν f συνεχής στο $\mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f(2005) = \frac{1}{2}$, $f(2007) = 3$ και

$f(1)f(2)=f(3)f(4)$ να αποδείξετε ότι

- α) υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ ώστε $f(\xi) = 1$
- β) υπάρχει $x_0 \in [1, 2]$ ώστε $f^2(x_0) = f(1)f(2)$
- γ) η f δεν αντιστρέφεται.

ΛΥΣΗ

- α)
 - ▶ Η f είναι συνεχής στο $[2005, 2007]$
 - ▶ $\frac{1}{2} = f(2005) \neq f(2007) = 3$
 - ▶ Ο αριθμός 1 είναι μεταξύ των $f(2005)$ και $f(2007)$ άρα ισχύει το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών, οπότε θα υπάρχει $\xi \in (2005, 2007) \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $f(\xi) = 1$.
- β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f^2(x) - f(1)f(2)$, $x \in [1, 2]$.
 - ▶ Η g είναι συνεχής στο $[1, 2]$
 - ▶ $g(1)g(2) = [f^2(1) - f(1)f(2)][f^2(2) - f(1)f(2)] = - \underbrace{f(1)f(2)}_{<0} \cdot \underbrace{[f(1) - f(2)]^2}_{\geq 0} \leq 0$ γιατί η f είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο $\mathbb{R}$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο οπότε $f(1)f(2) > 0 \Leftrightarrow -f(1)f(2) < 0$. Επίσης είναι $[f(1) - f(2)]^2 \geq 0$.Διακρίνουμε περιπτώσεις
 - i) αν $g(1)g(2) = 0$ τότε $g(1) = 0$ ή $g(2) = 0$.
 - ii) αν $g(1)g(2) < 0$ τότε ισχύει θεώρημα Bolzano, οπότε θα υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ έτσι ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f^2(x_0) - f(1)f(2) = 0 \Leftrightarrow f^2(x_0) = f(1)f(2)$ (2). Επομένως υπάρχει $x_0 \in [1, 2]$ ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f^2(x_0) = f(1)f(2)$.
- γ) Επειδή $f(1)f(2) = f(3)f(4)$ η συνάρτηση g γράφεται $g(x) = f^2(x) - f(3)f(4)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - ▶ Η g είναι συνεχής στο $[3, 4]$.
 - ▶ $g(3)g(4) = [f^2(3) - f(1)f(2)][f^2(4) - f(1)f(2)] = - \underbrace{f(3)f(4)}_{<0} \cdot \underbrace{[f(3) - f(4)]^2}_{\geq 0} \leq 0$. Άρα θα υπάρχει $x_1 \in [3, 4]$ έτσι ώστε $g(x_1) = 0 \Leftrightarrow f^2(x_1) - f(3)f(4) = 0 \Leftrightarrow f^2(x_1) = f(3)f(4)$ (3).Από τις (2) και (3) έχω $f^2(x_0) = f^2(x_1)$ και επειδή η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ είναι $f(x_0) = f(x_1)$ οπότε η f δεν είναι "1-1" και επομένως δεν αντιστρέφεται.

ΘΕΜΑ 18

Αν f συνεχής στο 0 , $f(0) = 2006$ και ισχύει $xf(x) + x^4 \sin \frac{1}{x} = \eta\mu(ax)$, $a \neq 0$ για

κάθε $x \in \mathbb{R}^*$

A) ι) Να αποδείξετε ότι f συνεχής στο $\mathbb{R}$

υ) Να βρείτε το a .

B) ι) Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

υ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

A) ι) Για $x \neq 0$ είναι $f(x) = \frac{\eta\mu(ax)}{x} - x^3 \sin \frac{1}{x}$, η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$ ως πράξεις

συνεχών και επειδή η f είναι συνεχής στο 0 τότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

υ) Κοντά στο $x_0 = 0$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\eta\mu(ax)}{x} - x^3 \sin \frac{1}{x} \right] = a.$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 \sin \frac{1}{x}) = 0$, γιατί για κάθε $x \neq 0$ έχουμε $\left| x^3 \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x^3|$ ή

$$\left. \begin{aligned} -|x^3| &\leq x^3 \sin \frac{1}{x} \leq |x^3| \\ \lim_{x \rightarrow 0} |x^3| &= \lim_{x \rightarrow 0} [-|x^3|] = 0 \end{aligned} \right\} \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 0} (x^3 \sin \frac{1}{x}) = 0.$$

$$\text{Επίσης έχουμε } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(ax)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[a \frac{\eta\mu(ax)}{ax} \right] = a \cdot 1 = a.$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a \Leftrightarrow f(0) = a \Leftrightarrow a = 2006$, γιατί f συνεχής στο 0 .

ι) Κοντά στο $-\infty$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu(ax)}{x} = 0 \text{ (κριτήριο παρεμβολής)}$$

$$\text{Πράγματι } \left| \frac{\eta\mu(ax)}{x} \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right|$$

$$\left. \begin{aligned} -\left| \frac{1}{x} \right| &\leq \frac{\eta\mu(ax)}{x} \leq \left| \frac{1}{x} \right| \Leftrightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{\eta\mu(ax)}{x} \leq -\frac{1}{x} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu(ax)}{x} = 0$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^3 \sin \frac{1}{x} \right) = -\infty \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \left(\frac{1}{x} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} (\sin t) = 1.$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, οπότε κοντά στο $-\infty$, υπάρχει $\gamma < 0$, ώστε $f(\gamma) > 0$.

υ) Κοντά στο $+\infty$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu(ax)}{x} = 0 \text{ (κριτήριο παρεμβολής) και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}) = +\infty \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} = 1.$$

Συνεπώς $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, οπότε κοντά στο $+\infty$, υπάρχει $\delta > 0$, ώστε $f(\delta) < 0$.

Έχουμε f συνεχής στο $[\gamma, \delta]$ και $f(\gamma)f(\delta) < 0$ οπότε από Θεώρημα Bolzano η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(\gamma, \delta) \subseteq \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 19

A) Αν f συνεχής στο $[0, a]$ να αποδείξετε ότι $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$

B) Αν $f(x) = \ln(1 + \varepsilon \varphi x)$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

ι) Να αποδείξετε ότι $f(x) + f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \ln 2$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

ιι) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του επιπέδου χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τις ευθείες $y = 0$, $x = 0$ και

$$x = \frac{\pi}{4}.$$

ΛΥΣΗ

A) Θέτουμε $a - x = u$, οπότε $du = -dx$.

Για $x = a$ είναι $u = 0$ και για $x = 0$ είναι $u = a$ άρα

$$\int_0^a f(a-x) dx = - \int_a^0 f(u) du = \int_0^a f(u) du = \int_0^a f(x) dx$$

B) Είναι $f(x) = \ln(1 + \varepsilon \varphi x)$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Για $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ είναι $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 0 \geq -x \geq -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \geq \frac{\pi}{4} - x \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\pi}{4} - x \leq \frac{\pi}{4}$. ι) ι)

ι) Επειδή f συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ έχουμε

$$f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \ln\left(1 + \varepsilon \varphi\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) = \ln\left(1 + \frac{\varepsilon \varphi \frac{\pi}{4} - \varepsilon \varphi x}{1 + \varepsilon \varphi \frac{\pi}{4} \varepsilon \varphi x}\right) = \ln\left(1 + \frac{1 - \varepsilon \varphi x}{1 + \varepsilon \varphi x}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1 + \varepsilon \varphi x + 1 - \varepsilon \varphi x}{1 + \varepsilon \varphi x}\right) = \ln\left(\frac{2}{1 + \varepsilon \varphi x}\right) = \ln 2 - \ln(1 + \varepsilon \varphi x)$$

Άρα $f(x) + f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \ln(1 + \varepsilon \varphi x) + \ln 2 - \ln(1 + \varepsilon \varphi x)$ ή

$$f(x) + f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \ln 2$$

B ii) Αν E το ζητούμενο εμβαδόν, τότε έχουμε

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{4}} |f(x)| dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\ln(1 + \varepsilon \varphi x)| dx$$

$$\text{Αλλά } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \stackrel{\text{γν.αύξουσα}}{\Leftrightarrow} \varepsilon \varphi 0 \leq \varepsilon \varphi x \leq \varepsilon \varphi \frac{\pi}{4} \stackrel{\text{γν.αύξουσα}}{\Leftrightarrow} 0 \leq \varepsilon \varphi x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 1 + \varepsilon \varphi x \leq 2 \Leftrightarrow \ln 1 \leq \ln(1 + \varepsilon \varphi x) \leq \ln 2 \Leftrightarrow 0 \leq \ln(1 + \varepsilon \varphi x) \leq \ln 2$$

$$\text{Άρα } E = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \varepsilon \varphi x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$$

Από B i) ερώτημα έχω:

$$f(x) + f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \ln 2. \text{ Άρα}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2 dx$$

$$\text{Από A) Ερώτημα για } \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ έχουμε } \int_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$$

$$\text{Άρα } 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \ln 2 \left[x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} \ln 2. \text{ Επομένως } E = \frac{\pi}{8} \ln 2 \text{ τ. μ.}$$

ΘΕΜΑ 20

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)x^3 - x^2 + (\alpha - 1)^2 x + 2006, \alpha \in \mathbb{R}.$

- i) **Να βρεθεί ο** $\alpha \in \mathbb{R}$ **αν γνωρίζουμε ότι η** f **παρουσιάζει ακρότατο στο** $x_0 = 1$
- ii) **Για** $\alpha \neq 1$
 - α) **Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης** $f(x) = 0$.
 - β) **Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη** C_f , **τον άξονα** x **και τις ευθείες** $x = 0$ **και** $x = 1$.

ΛΥΣΗ

- ii) **Αναγκαία συνθήκη είναι:** $f'(1) = 0$.

Έχουμε ότι: $f'(x) = (3 - \alpha)x^2 - 2x + (\alpha - 1)^2$ οπότε

$$f'(1) = (3 - \alpha) - 2 + (\alpha - 1)^2 = \alpha^2 - 3\alpha + 2 = (\alpha - 1)(\alpha - 2) \text{ δηλαδή } f'(1) = 0 \text{ αν } \alpha = 1 \text{ ή } \alpha = 2.$$

Για $\alpha=1$ είναι $f'(x) = 2x^2 - 2x$ και έχουμε

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$		
f'		+	0	-	0	+
f		$\nearrow$	$\tau.\mu$	$\searrow$	$\tau.\varepsilon$	$\nearrow$

Για $\alpha=2$ είναι $f'(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ οπότε

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	+	0	+
f			

Δεκτή είναι η τιμή $\alpha=1$.

iii) Για $\alpha=1$ έχουμε $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 + 2006$.

α) Από το θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών βρίσκουμε:

$$f((-\infty, 0]) = (-\infty, 2006]$$

$$f([0, 1]) = [\frac{6017}{3}, 2006]$$

$$f([1, +\infty)) = [\frac{6017}{3}, +\infty)$$

επομένως η f έχει μοναδική πραγματική ρίζα $\xi < 0$.

$$\beta) E = \int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 (\frac{2}{3}x^3 - x^2 + 2006) dx =$$

$$[\frac{x^4}{6} - \frac{x^3}{3} + 2006x]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{3} + 2006 = \frac{12035}{6}$$

ΘΕΜΑ 21

Θεωρούμε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων και στο σημείο $A(1, f(1))$ δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

- Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \neq 0$ ισχύει

$$f''(x) - \frac{f'(x)}{x} = xe^x.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = xe^x - e^x - e\frac{x^2}{2} + 1$.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(e^{2004})$ και $f(2004)$.

γ) Αν η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι

$$g(0) \leq \int_0^1 g(f(x)) dx \leq g(1 - \frac{e}{2}).$$

ΛΥΣΗ

α) Από υπόθεση έχουμε $f(0)=0$ και $f'(1)=0$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ είναι

$$\frac{xf''(x)-f'(x)}{x^2} = e^x \Leftrightarrow \left(\frac{f'(x)}{x}\right)' = (e^x)' \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{x} = e^x + c, \quad x \in (-\infty, 0) \text{ ή } x \in (0, +\infty)$$

$$\text{Άρα } f'(x) = \begin{cases} xe^x + c_1x, & x < 0 \\ \alpha, & x = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R} > 0. \\ xe^x + c_2x, & x > 0 \end{cases}$$

Έχουμε

- f' συνεχής στο $x_0 = 0$ άρα $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = f'(0) \Leftrightarrow \alpha = 0$
- $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot e^1 + c_2 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow c_2 = -e$
- f' παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ άρα

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{xe^x + c_1x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{xe^x + c_2x - 0}{x - 0} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x + c_1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + c_2) \Leftrightarrow 1 + c_1 = 1 + c_2 \Leftrightarrow c_1 = c_2.$$

Άρα $c_1 = c_2 = -e$ και $\alpha = 0$, οπότε $f'(x) = xe^x - ex, \quad x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Είναι } f(x) &= \int (xe^x - ex) dx = \int xe^x dx - \int ex dx = \int x(e^x)' dx - e \int x dx = \\ &= xe^x - \int (x)' e^x dx - e \int x dx = xe^x - \int e^x dx - e \int x dx = xe^x - e^x - e \frac{x^2}{2} + k \end{aligned}$$

Όμως $f(0)=0 \Leftrightarrow 0 - 1 - 0 + k = 0 \Leftrightarrow k = 1$.

$$\text{Άρα } f(x) = xe^x - e^x - e \frac{x^2}{2} + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

β) Είναι $e^{2004} > 2004$. Πράγματι $e^{2004} = (1 + (e-1))^{2004} > 1 + 2004(e-1) > 2004$
 χρησιμοποιώντας την ανισότητα Bernoulli.

1^{ος} τρόπος:

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = ex(e^{x-1} - 1)$. Ο πίνακας μεταβολών της f είναι:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$			$\nearrow$	0	$\searrow$	$1-\frac{e}{2}$	$\nearrow$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$, οπότε έχουμε $1 < 2004 < e^{2004}$ άρα
 $f(2004) < f(e^{2004})$.

2^{ος} τρόπος:

Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[2004, e^{2004}]$, οπότε θα υπάρχει ένα
 τουλάχιστον $\xi \in (2004, e^{2004})$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(e^{2004}) - f(2004)}{e^{2004} - 2004} \Leftrightarrow f(e^{2004}) - f(2004) = (e^{2004} - 2004)f'(\xi) \Leftrightarrow$$

$$f(e^{2004}) - f(2004) = \underbrace{(e^{2004} - 2004)}_{>0} \underbrace{e^\xi}_{>0} \underbrace{(e^{\xi-1} - 1)}_{>0} > 0 \text{ για κάθε } \xi \in (2004, e^{2004}).$$

Άρα $f(e^{2004}) > f(2004)$.

γ) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$ και η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$,
οπότε για κάθε $x \in [0,1]$ έχουμε

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 1 &\overset{f \text{ γν. φθίνουσα}}{\Leftrightarrow} f(0) \geq f(x) \geq f(1) \overset{g \text{ γν. φθίνουσα}}{\Leftrightarrow} g(f(0)) \leq g(f(x)) \leq g(f(1)) \Leftrightarrow \\ g(0) &\leq g(f(x)) \leq g\left(1 - \frac{e}{2}\right) \text{ για κάθε } x \in [0,1]. \text{ Επειδή η } g \circ f \text{ είναι συνεχής, ως} \\ \text{σύνθεση συνεχών έχουμε } \int_0^1 g(0) dx &\leq \int_0^1 g(f(x)) dx \leq \int_0^1 g\left(1 - \frac{e}{2}\right) dx \Leftrightarrow \\ g(0)(1-0) &\leq \int_0^1 g(f(x)) dx \leq g\left(1 - \frac{e}{2}\right)(1-0) \Leftrightarrow g(0) \leq \int_0^1 g(f(x)) dx \leq g\left(1 - \frac{e}{2}\right). \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 22

A) Δίνεται συνάρτηση h παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $h'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι

i) Η συνάρτηση h είναι '1-1'

ii) Η εξίσωση $h(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα.

β) Αν για τη συνάρτηση h ισχύει και $h(x) + h(\lambda - x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι

i) Η εξίσωση $h(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα.

ii) $\int_0^\lambda h(x) dx = 0$.

B) Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) \neq xe^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της συνάρτησης

$$g(x) = \int_0^x f(x-t) dt.$$

β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x) = \int_0^x f(x-t) dt$

και $\kappa(x) = xe^x - e^x + 1$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

ΛΥΣΗ

A) α) i) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$ και έστω $x_1 < x_2$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[x_1, x_2]$, άρα ισχύει το Θ.Μ.Τ. του διαφορικού λογισμού, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $h'(\xi) = \frac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Επειδή $h'(\xi) \neq 0$ θα είναι και $\frac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1} \neq 0 \Leftrightarrow h(x_2) \neq h(x_1)$.

Άρα για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$ είναι $h(x_1) \neq h(x_2)$, οπότε η h είναι '1-1'.

ii) Έστω ότι η εξίσωση $h(x)=0$ έχει δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 \neq \rho_2$. Άρα $h(\rho_1) = h(\rho_2) = 0$. Επειδή η h είναι '1-1' έχουμε $\rho_1 = \rho_2$ άτοπο. Άρα η εξίσωση $h(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα.

β) i) Για $x = \frac{\lambda}{2}$ έχουμε $h\left(\frac{\lambda}{2}\right) + h\left(\lambda - \frac{\lambda}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2h\left(\frac{\lambda}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow h\left(\frac{\lambda}{2}\right) = 0$. Άρα

$x = \frac{\lambda}{2}$ ρίζα της εξίσωσης $h(x)=0$ και μάλιστα μοναδική αφού η h είναι '1-1'.

ii) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $h(x) = -h(\lambda - x)$. Οπότε έχουμε:

$$I_1 = \int_0^{\lambda} h(x) dx = - \int_0^{\lambda} h(\lambda - x) dx = -I_2 \quad (1), \text{ όπου } I_2 = \int_0^{\lambda} h(\lambda - x) dx.$$

Θέτουμε $u = \lambda - x$, οπότε $du = -dx$.

Για $x=0$ είναι $u=\lambda$ και για $x=\lambda$ είναι $u=0$. Άρα

$$I_2 = - \int_{\lambda}^0 h(u) du = \int_0^{\lambda} h(x) dx = I_1 \quad (2).$$

Από (1) και (2) έχουμε $I_1 = -I_1 \Leftrightarrow 2I_1 = 0 \Leftrightarrow I_1 = 0 \Leftrightarrow \int_0^{\lambda} h(x) dx = 0$.

B) α) Η συνάρτηση $f(x-t)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση συνεχών, οπότε η συνάρτηση $g(x) = \int_0^x f(x-t) dt$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Θέτουμε $u = x-t$ οπότε $du = -dt$.

Για $t=0$ είναι $u=x$ και για $t=x$ είναι $u=0$.

$$\text{Άρα } g(x) = - \int_x^0 f(u) du = \int_0^x f(t) dt.$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Τα κοινά σημεία των C_g , C_κ έχουν συντεταγμένες τις λύσεις του συστήματος

$$(\Sigma): \begin{cases} y = g(x) \\ y = \kappa(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) - \kappa(x) = 0 \\ y = g(x) \end{cases}.$$

Το σύστημα (Σ) έχει μία μόνο λύση, αν και μόνο αν η εξίσωση $g(x) - \kappa(x) = 0$ έχει

μία μόνο ρίζα. Όμως $g(x) - \kappa(x) = \int_0^x f(t) dt - xe^x + e^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = g(x) - \kappa(x)$, $x \in \mathbb{R}$, οπότε

$$h(x) = \int_0^x f(t) dt - xe^x + e^x - 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $h'(x) = f(x) - e^x - xe^x + e^x \Leftrightarrow h'(x) = f(x) - xe^x \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αφού από υπόθεση $f(x) \neq xe^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αφού $h'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ από Α)α)ii) έχουμε ότι η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα. Παρατηρούμε όμως ότι $h(0) = \int_0^0 f(t) dt - 0e^0 + e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$.

Επομένως το 0 είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $h(x) = 0$ που σημαίνει ότι οι C_g, C_κ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο το $O(0, g(0))$ δηλαδή το $O(0, 0)$.

ΘΕΜΑ 23

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο 0 και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$xf(x) - \int_1^x f(t) dt = xe^x - e^x + x^2 + e + 2$$

A) Να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $x \cdot f'(x) = xe^x + 2x$

ii) $f(x) = e^x + 2x + 1$

B) Αν $g(x) = xe^x + 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, να βρεθεί το εμβαδόν του επιπέδου χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.

ΛΥΣΗ

A) i) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Άρα ορίζεται η συνάρτηση $\int_1^x f(t) dt$ και είναι

παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\left(\int_1^x f(t) dt \right)' = f(x)$.

$$\text{Έχουμε } xf(x) - \int_1^x f(t) dt = xe^x - e^x + x^2 + e + 2 \quad (1)$$

Για $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ η $f(x) = \frac{1}{x} \left[\int_1^x f(t) dt + xe^x - e^x + x^2 + e + 2 \right]$ είναι

παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ ως πηλίκo παραγωγίσιμων συναρτήσεων και επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$.

$$\text{Από (1) έχω } (x \cdot f(x))' - \left(\int_1^x f(t) dt \right)' = (xe^x)' - (e^x)' + (x^2)' + (e+2)' \Leftrightarrow$$

$$f(x) + xf'(x) - f(x) = e^x + xe^x - e^x + 2x \Leftrightarrow xf'(x) = xe^x + 2x.$$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $x \cdot f'(x) = x \cdot e^x + 2x$.

A) ii) Έχω ότι $x \cdot f'(x) = xe^x + 2x$. Για $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ είναι $f'(x) = e^x + 2 \Leftrightarrow$

$$f'(x) = (e^x + 2x)'$$

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} e^x + 2x + c_1, & x \in (-\infty, 0) \\ e^x + 2x + c_2, & x \in (0, +\infty) \end{cases}.$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα είναι συνεχής και στο 0 $\in \mathbb{R}$, επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0).$$

$$\text{Αλλά } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x + 2x + c_1) = 1 + c_1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + 2x + c_2) = 1 + c_2.$$

$$\text{Άρα } 1 + c_1 = 1 + c_2 = f(0) \Rightarrow c_1 = c_2 = f(0) - 1.$$

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 2006

Επομένως $f(x) = e^x + 2x + f(0) - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για $x=1$, $f(1) = e + 2 + f(0) - 1$ (1).

Αλλά $x \cdot f(x) - \int_1^x f(t) dt = xe^x - e^x + x^2 + e + 2$.

Για $x=1$ έχω:

$$1 \cdot f(1) - \int_1^1 f(t) dt = 1e - e + 1^2 + e + 2 \Leftrightarrow 1 \cdot f(1) = e + 3 \quad (2).$$

Από (1), (2): $e + 3 = e + 2 + f(0) - 1 \Rightarrow f(0) = 2$

Επομένως: $f(x) = e^x + 2x + 1$. για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B) Αν E το ζητούμενο εμβαδόν

$$E = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx = \int_0^1 |e^x + 2x + 1 - xe^x - 2x - 1| dx$$

$$E = \int_0^1 |(1-x)e^x| dx = \int_0^1 e^x |1-x| dx$$

$$x \in [0,1] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1-x \geq 0$$

$$\text{Άρα } E = \int_0^1 e^x (1-x) dx = \int_0^1 (e^x)' (1-x) dx =$$

$$= [e^x (1-x)]_0^1 - \int_0^1 e^x (1-x)' dx = -e^0 (1-0) + \int_0^1 e^x dx$$

$$= -1 + [e^x]_0^1 = -1 + e - e^0 = e - 2$$

Άρα $E = e - 2$ τ. μ.

ΘΕΜΑ 24

Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $g: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in (0, \beta - \alpha)$ να ισχύει: $g(\alpha + x) = g(\beta - x)$.

Να αποδείξετε ότι:

i. $g(\alpha) = g(\beta)$

ii. Η γραφική παράσταση της g έχει μία τουλάχιστον εφαπτομένη που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

iii. $\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} g(x) dx = \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} g(x) dx$

ΛΥΣΗ

Είναι

i. $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(\alpha + x) = \lim_{w \rightarrow \alpha^+} g(w) = g(\alpha)$ αφού η g είναι συνεχής στο $x_0 = \alpha$, όπου $w = \alpha + x$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(\beta - x) = \lim_{u \rightarrow \beta^-} g(u) = g(\beta)$ αφού η g είναι συνεχής στο $x_0 = \beta$, όπου $u = \beta - x$.

Επομένως $g(\alpha) = g(\beta)$.

ii. Ισχύουν οι προϋποθέσεις του θ. Rolle για τη συνάρτηση g στο $[\alpha, \beta]$. Επομένως υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta) : g'(\xi) = 0$.

iii. Θέτουμε $u = \beta - x$ στην αρχική σχέση η οποία γίνεται:

$$g(\alpha + \beta - u) = g(u), \text{ για κάθε } u \in (\alpha, \beta)$$

Επιπλέον από το (i) αποδείξαμε ότι $g(\alpha) = g(\beta)$.

Επομένως:

$$g(\alpha + \beta - x) = g(x), \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta].$$

Άρα:

$$I = \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} g(x) dx = \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} g(\alpha + \beta - x) dx$$

και θέτοντας $y = \alpha + \beta - x$, έχουμε ότι $dy = -dx$ και για $x = \alpha$ είναι $y = \beta$ ενώ για

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2} \text{ είναι } y = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Τότε:

$$I = - \int_{\beta}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} g(y) dy = \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} g(x) dx.$$

ΘΕΜΑ 25

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \lambda x + 1, x > 0, \lambda > 0$.

i. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Έστω M το σημείο που αντιστοιχεί στο μέγιστο της C_f . Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του λ , τη καμπύλη στην οποία κινείται το M .

iii. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του λ , ώστε να ισχύει $\ln x \leq \lambda x - 1$.

ΛΥΣΗ

i. Έχουμε ότι:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \lambda, x > 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\lambda}$$

Επομένως:

x	0	$\frac{1}{\lambda}$	$+\infty$
f'		+	0 -
f		↗	↘

- ii. Η C_f παρουσιάζει θέση μεγίστου στο σημείο $M\left(\frac{1}{\lambda}, f\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) = M\left(\frac{1}{\lambda}, -\ln\lambda\right)$. Για να βρούμε την καμπύλη στην οποία κινείται το M, κάνουμε απαλοιφή της παραμέτρου λ :

$$\left. \begin{array}{l} y = -\ln\lambda \\ x = \frac{1}{\lambda} \end{array} \right\} \text{ Άρα } \boxed{y = \ln x}$$

- iii. Θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$\ln x \leq \lambda x - 1, x > 0$$

$$\text{ή } \frac{\ln x + 1}{x} \leq \lambda, x > 0$$

Αν η συνάρτηση $h(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$ έχει ολικό μέγιστο τότε αυτό θα ισούται με την ελάχιστη τιμή του λ για την οποία ισχύει η προηγούμενη ανισότητα. Έχουμε:

$$h'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (\ln x + 1)}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}$$

x	0	1	$+\infty$
h'		+	0 -
h		↗	↘

Επομένως $\lambda = h(1) = 1$

ΘΕΜΑ 26

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) = 2 \cdot \int_0^x t \cdot e^{-f(t)} dt, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i. Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.
- ii. Αποδείξτε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.
- iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- iv. Αποδείξτε ότι: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^{2006}} = +\infty$.

ΛΥΣΗ

- i. Αφού η f είναι συνεχής τότε και η συνάρτηση $h(t) = te^{-f(t)}$ είναι συνεχής για κάθε $t \in \mathbb{R}$, επομένως η $F(x) = \int_0^x te^{-f(t)} dt$ είναι παραγωγίσιμη. Επομένως και η $f(x) = 2 \int_0^x te^{-f(t)} dt$ είναι παραγωγίσιμη.

- ii. Παραγωγίζοντας, προκύπτει ότι:

$$f'(x) = 2xe^{-f(x)} \quad \text{ή} \quad e^{f(x)} f'(x) = 2x \quad \text{ή} \quad (e^{f(x)})' = (x^2)' \quad \text{από όπου}$$

$$e^{f(x)} = x^2 + c \quad \text{ή} \quad f(x) = \ln(x^2 + c) \quad (1)$$

Για $x = 0$ έχουμε από την αρχική σχέση:

$$f(0) = 2 \int_0^0 te^{-f(t)} dt = 0$$

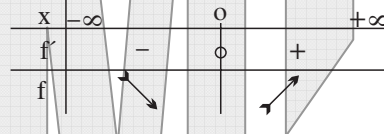
Θέτοντας στην προηγούμενη σχέση (1) $x = 0$ έχουμε:

$$f(0) = \ln c \quad \text{ή} \quad c = 1$$

Άρα: $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$

- iii. Έχουμε ότι

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}, \quad \text{οπότε}$$



Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $(0, f(0)) = (0, 0)$.

Από το θ. Ενδιαμέσων Τιμών βρίσκουμε:

$$f((-\infty, 0]) = [f(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)] = [0, +\infty)$$

$$f([0, +\infty)) = [f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [0, +\infty)$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το $[0, +\infty)$.

- iv. Εφαρμόζοντας τον Κανόνα του L' Hospital έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^{2006}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^{2006}} =$$

$$\frac{2x}{2006x^{2005}} = \frac{1}{1003} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 1}{x^{2004}} = +\infty$$

ΘΕΜΑ 27

Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x) = 1 + \int_{x+1}^{2x} \frac{f(t-x)}{x} dt, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Να αποδείξετε ότι:

- i. Η f είναι παραγωγίσιμη.
- ii. Ο τύπος της f είναι : $f(x) = \ln x + 1$
- iii. Η γραφική παράσταση της f στρέφει τα κοίλα κάτω.
- iv. Για κάθε τριάδα αριθμών α, β, γ με $0 < \alpha < \beta < \gamma$ ισχύει:

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} > \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta}$$

ΛΥΣΗ

- i. Θέτουμε $t - x = u$ άρα $dt = du$ για $t = x + 1$ έχουμε $u = 1$ και για $t = 2x$ έχουμε $u = x$, επομένως $f(x) = 1 + \int_1^x \frac{f(u)}{x} du$ ή $f(x) = 1 + \frac{1}{x} \int_1^x f(u) du$

Η συνάρτηση $\int_1^x f(u) du$ είναι μία παράγουσα της συνεχούς συνάρτησης f άρα παραγωγίσιμη. Επομένως η συνάρτηση $f(x) = 1 + \frac{1}{x} \int_1^x f(u) du$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

- ii. Ισχύει: $(xf(x))' = \left(x + \int_1^x f(u) du\right)'$ άρα

$f(x) + xf'(x) = 1 + f(x)$ ή $f'(x) = \frac{1}{x}$ επομένως $f(x) = \ln x + c$ και επειδή $f(1) = 1$ προκύπτει $c = 1$. Άρα ο τύπος της f είναι $f(x) = \ln x + 1, x > 0$.

- iii. $f'(x) = \frac{1}{x}, f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ άρα η γραφική παράσταση της f στρέφει τα κοίλα κάτω.

- iv. Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[\alpha, \beta], [\beta, \gamma]$ άρα θα υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha, \beta), \xi_2 \in (\beta, \gamma)$ ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ και $f'(\xi_2) = \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta}$.

Επειδή $\xi_1 < \xi_2$ και $f' \searrow$ ισχύει $f'(\xi_1) > f'(\xi_2)$ επομένως $\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} > \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta}$.

ΘΕΜΑ 28

Έστω συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

- Για κάθε $x > 0, y > 0$ ισχύει $f(xy) = x^2 f(y) + y^2 f(x)$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και $f'(1) = 1$.

i. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$\lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(xh) - f(x)}{xh - x} = \frac{2f(x)}{x} + x$$

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$x^2 f'(x) = 2xf(x) + x^3$$

iii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$f(x) = x^2 \ln x$$

iv. Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

v. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα x και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$.

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} \text{i. } \lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(xh) - f(x)}{xh - x} &= \lim_{h \rightarrow 1} \frac{x^2 f(h) + h^2 f(x) - f(x)}{x(h-1)} = \lim_{h \rightarrow 1} \left[\frac{f(x)(h^2 - 1)}{x(h-1)} + \frac{x^2 f(h)}{x(h-1)} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 1} \left[\frac{f(x)(h+1)}{x} + x \frac{f(h)}{h-1} \right] \stackrel{(\alpha)}{=} \frac{2f(x)}{x} + x \cdot f'(1) = \frac{2f(x)}{x} + x \\ (\alpha) \text{ (διότι } f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} = 1) \end{aligned}$$

Η ισότητα $f(1) = 0$ προκύπτει από τη δοθείσα σχέση για $x = y = 1$.

$$\text{ii. Σε κάθε } x_0 > 0 \text{ είναι } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ (και αν θέσουμε } x = x_0 h \text{)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(x_0 h) - f(x_0)}{x_0 h - x_0} = \frac{2f(x_0)}{x_0} + x_0 \text{ (από το 1}^\circ \text{ ερώτημα)}$$

άρα $f'(x_0) = \frac{2f(x_0)}{x_0} + x_0$ για κάθε $x_0 > 0$ επομένως η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \frac{2f(x)}{x} + x \Leftrightarrow xf'(x) = 2f(x) + x^2 \text{ ή } x^2 f'(x) = 2xf(x) + x^3, \text{ για κάθε } x > 0.$$

$$\text{iii. } x^2 f'(x) = 2xf(x) + x^3 \Leftrightarrow x^2 f'(x) - 2xf(x) = x^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 f'(x) - 2xf(x)}{x^4} = \frac{1}{x} \text{ άρα } \left(\frac{f(x)}{x^2} \right)' = (\ln x)', \text{ } x > 0 \text{ επομένως } \frac{f(x)}{x^2} = \ln x + c \text{ και}$$

επειδή $f(1) = 0$ βρίσκουμε $c = 0$. Άρα $f(x) = x^2 \ln x, x > 0$.

iv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$

- v. Αν Ω το χωρίο που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$ τότε το εμβαδόν του είναι:

$$E(\Omega) = \int_1^e |f(x)| dx = \int_1^e x^2 \ln x dx$$

όμως $\ln x \geq 0$ για κάθε $x \in [1, e]$ άρα και

$x^2 \ln x \geq 0$ για κάθε $x \in [1, e]$ επομένως έχουμε

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_1^e x^2 \ln x dx = \int_1^e \left(\frac{x^3}{3} \right)' \ln x dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} (\ln x)' dx \\ &= \frac{e^3}{3} \ln e - \frac{1}{3} \ln 1 - \int_1^e \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 dx = \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^e \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \right) = \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9} \text{ μονάδες εμβαδού.} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 29

Δίνεται συνάρτηση f με συνεχή παράγωγο στο $[a, b]$ για την οποία ισχύει

$$\int_a^b f^2(x) dx + \int_a^b (f'(x))^2 dx = f^2(a) - f^2(b)$$

- i. Να αποδείξετε ότι $f'(x) + f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$

- ii. Να αποδείξετε ότι $\int_a^b (f'(x))^2 dx = \int_a^b f^2(x) dx = \frac{1}{2} (f^2(a) - f^2(b))$

- iii. Αν $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = e^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$ να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} \text{i.} \quad \text{Είναι } I &= \int_a^b f^2(x) dx + \int_a^b (f'(x))^2 dx = \\ &= \int_a^b f^2(x) dx + \int_a^b (f'(x))^2 dx + \int_a^b 2f(x)f'(x) dx - \int_a^b 2f(x)f'(x) dx = \\ &= \int_a^b [f^2(x) + (f'(x))^2 + 2f(x)f'(x)] dx - \int_a^b [f^2(x)]' dx = \\ &= \int_a^b (f(x) + f'(x))^2 dx - [f^2(x)]_a^b = \int_a^b (f(x) + f'(x))^2 dx - f^2(\beta) + f^2(\alpha) \end{aligned}$$

Από υπόθεση είναι $I = f^2(\alpha) - f^2(\beta)$, οπότε $\int_a^b (f(x) + f'(x))^2 dx = 0$.

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0 \in [a, \beta]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) + f'(x_0) \neq 0$ και επειδή $(f(x) + f'(x))^2 \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε θα είναι $\int_a^b (f(x) + f'(x))^2 dx > 0$, άτοπο.

Άρα $f(x) + f'(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.

ii. Για κάθε $x \in [a, \beta]$ είναι $f'(x) = -f(x)$, οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} \int_a^b (f'(x))^2 dx &= \int_a^b f'(x)f'(x) dx = - \int_a^b f(x)f'(x) dx = \\ &= - \left[\frac{f^2(x)}{2} \right]_a^b = \frac{1}{2} (f^2(\alpha) - f^2(\beta)) \quad (1) \end{aligned}$$

Από τη δοθείσα σχέση έχουμε

$$\begin{aligned} \int_a^b f^2(x) dx + \frac{1}{2} (f^2(\alpha) - f^2(\beta)) &= f^2(\alpha) - f^2(\beta) \Leftrightarrow \\ \int_a^b f^2(x) dx &= \frac{1}{2} (f^2(\alpha) - f^2(\beta)) \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{Από (1) και (2) έχουμε ότι } \int_a^b (f'(x))^2 dx = \int_a^b f^2(x) dx = \frac{1}{2} (f^2(\alpha) - f^2(\beta))$$

iii. Για κάθε $x \in [a, \beta]$ είναι $f'(x) + f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) \cdot e^x + f(x) \cdot e^x = 0 \Leftrightarrow$

$$(e^x f(x))' = 0 \Leftrightarrow e^x f(x) = c \Leftrightarrow f(x) = ce^{-x}, \quad x \in [a, \beta]$$

$$\text{Όμως } f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = e^{\frac{\alpha+\beta}{2}}, \text{ άρα } c \cdot e^{-\frac{\alpha+\beta}{2}} = e^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \Leftrightarrow c = e^{\alpha+\beta}$$

$$\text{Άρα } f(x) = e^{\alpha+\beta} \cdot e^{-x} \Leftrightarrow f(x) = e^{-x+\alpha+\beta}, \quad x \in [a, \beta].$$

ΘΕΜΑ 30

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ με $\int_0^1 f(x) dx = 0$, για την οποία υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ με $f(x_0) \neq 0$.

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

ii. Αν επιπλέον η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ και ισχύει $f(0) = f(1) = 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0,1)$ ώστε $f'(\xi_1) \cdot f''(\xi_2) \leq 0$.

ΛΥΣΗ

- i.** Έστω ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[0,1]$.
- Αν ήταν $f(x_0) > 0$ θα είχαμε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0,1]$, οπότε $\int_0^1 f(x) dx > 0$ άτοπο.
 - Αν ήταν $f(x_0) < 0$ θα είχαμε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [0,1]$, οπότε $\int_0^1 f(x) dx < 0$ άτοπο.
- Άρα η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[0,1]$, οπότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in [0,1]$ ώστε $f(x_1)f(x_2) < 0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $x_1 < x_2$. Επειδή f συνεχής στο $[x_1, x_2]$ υπάρχει $\rho \in (x_1, x_2) \subseteq (0,1)$ ώστε $f(\rho) = 0$.
- ii.** Έστω ότι η f'' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,1)$ π.χ. $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$. Επειδή f' συνεχής στο $[0,1]$ ως παραγωγίσιμη τότε $f' \nearrow$ στο $[0,1]$ και επομένως f' 1-1 στο $[0,1]$. Επειδή $f(0) = f(\rho) = f(1) = 0$ εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στα διαστήματα $[0,\rho]$ και $[\rho,1]$, οπότε υπάρχει $\rho_1 \in (0,\rho)$ ώστε $f'(\rho_1) = 0$ και υπάρχει $\rho_2 \in (\rho,1)$ ώστε $f'(\rho_2) = 0$.
- Έχουμε $f'(\rho_1) = f'(\rho_2) \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2$, άτοπο.
- Αφού ρ_1, ρ_2 ανήκουν σε διαφορετικά διαστήματα
- Άρα η f'' δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,1)$, συνεπώς υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0,1)$ ώστε $f''(\xi_1)f''(\xi_2) \leq 0$.

ΘΕΜΑ 31

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, με συνεχή πρώτη παράγωγο, $\alpha \neq \beta \neq 0$, $f(\alpha) = \beta$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

A) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f^{-1}

B) Αν η f^{-1} είναι συνεχής και ισχύει $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(t) dt + \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = 0$

i) Να βρεθεί το $f(\beta)$

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ να είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon_1): x - y + 2006 = 0$

Γ) Να αποδείξετε ότι i) υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi$.

ii) Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2) = 1$.

ΛΥΣΗ

Α) Α) Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$ άρα και '1-1', άρα η f είναι αντιστρέψιμη. Το σύνολο τιμών της f είναι το πεδίο ορισμού της f^{-1} . Αφού η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$, το σύνολο τιμών της είναι $f([\alpha, \beta]) = [f(\beta), f(\alpha)] = [f(\beta), \beta]$. Επομένως $A_{f^{-1}} = [f(\beta), \beta]$.

Β) i) Έστω $I = \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(t) dt$. Θέτουμε $u = f^{-1}(t) \Leftrightarrow f(u) = t$ δηλαδή $f'(u) du = dt$.

Για $t = f(\alpha)$ έχουμε $u_1 = f^{-1}(f(\alpha)) = \alpha$ και για $t = f(\beta)$ έχουμε $u_2 = f^{-1}(f(\beta)) = \beta$.

Άρα $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} u f'(u) du = [u f(u)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} u' f(u) du = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} f(u) du$

Άρα $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(t) dt = \beta \cdot f(\beta) - \alpha \cdot \beta - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ (I). Αλλά $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(t) dt + \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = 0$ άρα

από (I) έχουμε $\beta f(\beta) - \alpha \beta - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$. Δηλαδή $\beta[f(\beta) - \alpha] = 0$, $\beta \neq 0$. Άρα $f(\beta) = \alpha$.

Β) ii) Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = -1$ ή ότι η εξίσωση $f'(x) = -1 \Leftrightarrow (f(x) + x)' = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) . Θεωρούμε συνάρτηση $g(x) = f(x) + x$ στο $[\alpha, \beta]$. Η g συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και η g παραγωγίσιμη στο (α, β) με $g'(x) = f'(x) + 1$. Επίσης

$$\left. \begin{aligned} g(\alpha) &= f(\alpha) + \alpha = \beta + \alpha \\ g(\beta) &= f(\beta) + \beta = \alpha + \beta \end{aligned} \right\} \text{ Άρα } g(\alpha) = g(\beta).$$

Οπότε από θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow (f(x_0) + x_0)' = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = -1$.

Γ) i) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - x$ στο $[\alpha, \beta]$. Η h συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως διαφορά συνεχών.

$$h(\alpha) = f(\alpha) - \alpha = \beta - \alpha$$

$h(\beta) = f(\beta) - \beta = \alpha - \beta = -(\beta - \alpha)$. Οπότε $h(\alpha)h(\beta) = -(\beta - \alpha)^2 < 0$. Άρα από θεώρημα Bolzano η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - x = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) , δηλαδή υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) - \xi = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = \xi$.

Όμως $h'(x) = f'(x) - 1$ και επειδή $f'(x) < 0$ τότε $h'(x) < 0$. Άρα h γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$. Συνεπώς το $\xi \in (\alpha, \beta)$ είναι μοναδικό.

υ) Για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[\alpha, \xi]$ και $[\xi, \beta]$. Άρα υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha, \xi)$ και $\xi_2 \in (\xi, \beta)$ τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\xi) - f(\alpha)}{\xi - \alpha} \stackrel{\text{Λόγος i)}}{=} \frac{\xi - \beta}{\xi - \alpha} \quad (1) \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(\xi)}{\beta - \xi} \stackrel{\text{Λόγος i)}}{=} \frac{\alpha - \xi}{\beta - \xi} \stackrel{\text{B i)}}{=} \frac{\xi - \alpha}{\xi - \beta} \quad (2)$$

Από (1), (2) έχουμε $f'(\xi_1)f'(\xi_2) = \frac{\xi - \beta}{\xi - \alpha} \cdot \frac{\xi - \alpha}{\xi - \beta} = 1$.

ΘΕΜΑ 32

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

A) Να βρεθούν τα όρια: i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{f(x)}$ και ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{f(x) - 1}$

B) α) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Αν $I_v = \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{f(x)} dx$, $v = 0, 1, 2, 3, \dots$

i) Να βρεθούν τα I_0, I_1

ii) Ν' αποδειχθεί ότι $(2v+1)I_v = \sqrt{2} - 2 \cdot v \cdot I_{v-1}$, $v = 2, 3, \dots$ και μετά να βρεθεί το I_3 .

ΛΥΣΗ

A) i) Κοντά στο $+\infty$

Έχουμε $\left| \frac{\sin x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$. Άρα $-\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \leq \frac{\sin x}{\sqrt{x^2 + 1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$. Επειδή

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = 0 \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{f(x)} = 0.$$

ii) Κοντά στο 0

$$\text{Έχουμε } g(x) = \frac{\eta \mu x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} = \frac{\eta \mu x (\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{(\sqrt{x^2 + 1} - 1)(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} = \frac{\eta \mu x (\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{x^2} \text{ άρα}$$

$$g(x) = \frac{\eta \mu x}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 1}{x}. \text{ Επειδή } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{x} = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{x} = +\infty$$

$$\text{έχουμε } \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\eta \mu x}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 1}{x} \right) = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta \mu x}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 1}{x} \right) = +\infty \text{ άρα δεν υπάρχει το } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}.$$

$$\text{B) α) Έχουμε } f'(x) = \frac{(x^2 + 1)'}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$\text{Αν } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Έχουμε f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και f γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα το ελάχιστο της f είναι $f(0) = 1$.

$$\beta) \text{ i) } I_0 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \left[\sqrt{x^2+1} \right]_0^1 = \sqrt{2} - 1. \text{ Άρα } I_0 = \sqrt{2} - 1$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_0^1 x^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \\ = \int_0^1 x^2 (\sqrt{x^2+1})' dx = \left[x^2 (\sqrt{x^2+1}) \right]_0^1 - \int_0^1 (x^2)' \sqrt{x^2+1} dx$$

$$= \sqrt{2} - \int_0^1 (x^2+1)' (x^2+1)^{1/2} dx = \sqrt{2} - \left[\frac{(x^2+1)^{3/2}}{3/2} \right]_0^1 \\ = \sqrt{2} - \frac{2}{3} \sqrt{2^3} + \frac{2}{3} = \sqrt{2} - \frac{4}{3} \sqrt{2} + \frac{2}{3} = \frac{2-\sqrt{2}}{3}. \text{ Άρα } I_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{B ii) } I_v = \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_0^1 x^{2v} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$I_v = \int_0^1 x^{2v} (\sqrt{x^2+1})' dx = \left[x^{2v} \sqrt{x^2+1} \right]_0^1 - \int_0^1 (x^{2v})' \sqrt{x^2+1} dx = \sqrt{2} - \int_0^1 2vx^{2v-1} \sqrt{x^2+1} dx =$$

$$= \sqrt{2} - 2v \int_0^1 x^{2v-1} \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \sqrt{2} - 2v \int_0^1 \frac{x^{2v+1} + x^{2v-1}}{\sqrt{x^2+1}} dx = \sqrt{2} - 2v \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{\sqrt{x^2+1}} dx - 2v \int_0^1 \frac{x^{2(v-1)+1}}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$\text{Άρα } I_v = \sqrt{2} - 2vI_v - 2vI_{v-1} \text{ ή } I_v + 2vI_v = \sqrt{2} - 2vI_{v-1} \text{ ή}$$

$$(2v+1)I_v = \sqrt{2} - 2vI_{v-1}, \quad v = 2, 3, \dots$$

$$\text{Για } v = 3 \text{ έχω } 7I_3 = \sqrt{2} - 6I_2 \quad (2)$$

$$\text{Για } v = 2 \text{ έχω } 5I_2 = \sqrt{2} - 4I_0. \text{ Αλλά } I_0 = \sqrt{2} - 1$$

$$\text{Άρα } 5I_2 = \sqrt{2} - 4(\sqrt{2} - 1) \text{ ή } 5I_2 = \sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 4 \text{ ή } 5I_2 = 4 - 3\sqrt{2}. \text{ Άρα } I_2 = \frac{4-3\sqrt{2}}{5} \quad (2)$$

$$\text{Από (1), (2) έχουμε } 7I_3 = \sqrt{2} - \frac{6(4-3\sqrt{2})}{5} \text{ ή } 35I_3 = 5\sqrt{2} - 24 + 18\sqrt{2} \text{ ή}$$

$$35I_3 = 23\sqrt{2} - 24. \text{ Άρα } I_3 = \frac{23\sqrt{2} - 24}{35}.$$

ΘΕΜΑ 33

A) i) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[a, \beta]$ και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ στο $[a, \beta]$

N' αποδειχθεί ότι: $\int_a^\beta f(x) dx \leq \int_a^\beta g(x) dx$

ii) N' αποδειχθεί ότι: $\frac{1}{2e+1} \leq \int_0^1 \frac{dt}{2e^t+1} \leq \frac{1}{3}$

B) Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με

$f(0) = f'(0) = 1$ και για κάθε $x \geq 0$ ισχύει: $(f'(x))^2 + f(x)f''(x) = f(x)f'(x)$

i) N' αποδειχθεί ότι $(f(x))^2 = 2e^x - 1, \quad x \geq 0.$

ii) N' αποδειχθεί ότι η εξίσωση: $2x - \int_0^x \frac{dt}{2+(f(t))^2} = 1$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0,1)$.

ΛΥΣΗ

A) i) Οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[a, \beta]$. Άρα η $g-f$ είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και $g(x) - f(x) \geq 0$ στο $[a, \beta]$.

Άρα $\int_a^\beta (g(x) - f(x)) dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^\beta g(x) dx - \int_a^\beta f(x) dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^\beta f(x) dx \leq \int_a^\beta g(x) dx$

ii) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(t) = \frac{1}{2e^t+1}, \quad t \in \mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής και

παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(t) = -\frac{2e^t}{(2e^t+1)^2} < 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ διότι $e^t > 0$.

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[0,1]$. Επομένως

$0 \leq t \leq 1$ τότε $f(0) \geq f(t) \geq f(1)$ ή $\frac{1}{2e^0+1} \geq f(t) \geq \frac{1}{2e^1+1}$ άρα $\frac{1}{2e+1} \leq \frac{1}{2e^t+1} \leq \frac{1}{3}$.

Από ερώτημα A) i) έχουμε $\int_0^1 \frac{1}{2e+1} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{2e^t+1} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{3} dt$ ή

$\frac{1}{2e+1} \int_0^1 dt \leq \int_0^1 \frac{dt}{2e^t+1} \leq \frac{1}{3} \int_0^1 dt$ ή $\frac{1}{2e+1} [t]_0^1 \leq \int_0^1 \frac{dt}{2e^t+1} \leq \frac{1}{3} [t]_0^1$ ή $\frac{1}{2e+1} \leq \int_0^1 \frac{dt}{2e^t+1} \leq \frac{1}{3}$.

B) i) Για κάθε $x \geq 0$ έχουμε $(f'(x))^2 + f(x)f''(x) = f(x)f'(x)$ ή

$(f(x))' f'(x) + f(x)(f'(x))' = f(x)f'(x)$ ή $(f(x) \cdot f'(x))' = f(x)f'(x)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x)f'(x), \quad x \in \mathbb{R}$. Ισχύει $h'(x) = h(x)$ για κάθε

$x \in \mathbb{R}$. Επομένως $h(x) = c \cdot e^x, \quad c \in \mathbb{R}$ ή $f(x) \cdot f'(x) = ce^x$.

Για $x = 0$ έχω $f(0) \cdot f'(0) = ce^0$ ή $1 \cdot 1 = c \cdot 1 \Leftrightarrow c = 1$.

Άρα $f(x) \cdot f'(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως $\left[\frac{(f(x))^2}{2} \right]' = (e^x)'$. Άρα

$$\frac{(f(x))^2}{2} = e^x + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Για $x = 0$, $\frac{(f(0))^2}{2} = e^0 + c_1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = 1 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = -\frac{1}{2}$. Άρα $\frac{(f(x))^2}{2} = e^x - \frac{1}{2}$ ή $(f(x))^2 = 2e^x - 1, x \geq 0$.

B) ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\kappa(x) = 2x - \int_0^x \frac{dt}{2 + (f(t))^2} - 1, x \in [0, 1]$. Αλλά

$$(f(t))^2 = 2e^t - 1. \text{ Επομένως } \kappa(x) = 2x - \int_0^x \frac{dt}{2e^t + 1} - 1.$$

Έχουμε η κ συνεχής στο $[0, 1]$ ως πράξεις συνεχών,

$$\kappa(0) = 2 \cdot 0 - \int_0^0 \frac{dt}{2e^t + 1} - 1 \text{ άρα } \kappa(0) = -1 < 0$$

$$\kappa(1) = 2 \cdot 1 - \int_0^1 \frac{dt}{2e^t + 1} - 1 \text{ άρα } \kappa(1) = 1 - \int_0^1 \frac{dt}{2e^t + 1}.$$

Αλλά ισχύει $\frac{1}{2e+1} \leq \int_0^1 \frac{dt}{2e^t + 1} \leq \frac{1}{3}$, οπότε $\kappa(1) > 0$ και συνεπώς $\kappa(0)\kappa(1) < 0$. Άρα

από Θ. Bolzano η εξίσωση

$$\kappa(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \int_0^x \frac{dt}{2e^t + 1} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x - \int_0^x \frac{dt}{2e^t + 1} = 1 \text{ έχει μία τουλάχιστον ρίζα}$$

στο $(0, 1)$.

Αλλά $\kappa'(x) = (2x)' - \left(\int_0^x \frac{dt}{2e^t + 1} \right)'$ ή $\kappa'(x) = 2 - \frac{1}{2e^x + 1}$, άρα $\kappa'(x) = \frac{4e^x + 1}{2e^x + 1} > 0$ για

κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς η κ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $[0, 1]$.

Επομένως η εξίσωση $\kappa(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0, 1)$. Δηλαδή η εξίσωση

$$2x - \int_0^x \frac{dt}{2 + (f(t))^2} = 1 \text{ έχει ακριβώς μία ρίζα στο } (0, 1).$$