

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 2014

ΘΕΜΑ 1ο :

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς της μορφής $z = x + xi$, $x \in \mathbb{R}^*$

a) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{z^4 + z^8 + z^{12} + \dots + z^{4v}}{iz^2 + i^5 z^6 + i^9 z^{10} + \dots + i^{4v-3} z^{4v-2}} = \operatorname{Im}(z^2), v \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}^* - \left\{ \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

β) Να βρείτε τους μιγαδικούς που έχουν την παραπάνω μορφή και επαληθεύουν την εξίσωση:

$$z^3 - z^2 + \bar{z} + i = 0$$

γ) Αν z_1, z_2 οι λύσεις της προηγούμενης εξίσωσης, να αποδείξετε ότι:

i) $z_1^4 = z_2^4 = -1$

ii) $\frac{z_1^2 + z_1}{z_2} + \frac{z_2^2 + z_2}{z_1} = -2$

iii) $z_1^{2014} + z_2^{2014} = -2i$

ΛΥΣΗ

a) Είναι:

$$i^5 = i^{4+1+1} = i, i^9 = i^{4+2+1} = i, \dots, i^{4v-3} = i^{4(v-1)+1} = i \text{ και}$$

$$z^2 = (x + xi)^2 = x^2 + 2x^2i - x^2 = 2x^2i$$

οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} & \frac{z^4 + z^8 + z^{12} + \dots + z^{4v}}{iz^2 + i^5 z^6 + i^9 z^{10} + \dots + i^{4v-3} z^{4v-2}} = \\ & = \frac{z^2 \cdot (z^2 + z^6 + z^{10} + \dots + z^{4v-2})}{i \cdot (z^2 + z^6 + z^{10} + \dots + z^{4v-2})} = \\ & = \frac{z^2}{i} = \frac{2x^2i}{i} = 2x^2 = \operatorname{Im}(z^2) \end{aligned}$$

β) Είναι:

$$z^3 = z \cdot z^2 = (x + xi) \cdot 2x^2i = -2x^3 + 2x^3i$$

οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} z^3 - z^2 + \bar{z} + i &= 0 \Leftrightarrow (-2x^3 + 2x^3i) - 2x^2i + (x - xi) + i = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (-2x^3 + x) + (2x^3 - 2x^2 - x + 1)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x^3 + x = 0 \\ 2x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - x = 0 \\ (2x^3 - x) - 2x^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - x = 0 \\ -2x^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \cdot (2x^2 - 1) = 0 \\ 2x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Άρα οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \quad \text{και} \quad z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

γ) i) Είναι:

$$\begin{aligned} \bullet \quad z_1^4 &= (z_1^2)^2 = \left(\frac{1}{2}(1+i)^2\right)^2 = \frac{1}{4}(1+2i-1)^2 = \frac{1}{4} \cdot 4i^2 = -1 \quad (1) \quad \text{και} \\ \bullet \quad z_2 &= -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = -z_1 \quad (2) \end{aligned}$$

οπότε έχουμε:

$$z_2^4 = (-z_1)^4 = z_1^4 \stackrel{(1)}{=} -1$$

ii) Είναι:

$$\begin{aligned} \frac{z_1^2 + z_1}{z_2} + \frac{z_2^2 + z_2}{z_1} &= \frac{z_1^3 + z_1^2 + z_2^3 + z_2^2}{z_1 z_2} \stackrel{(2)}{=} \\ &= \frac{z_1^3 + z_1^2 + (-z_1)^3 + (-z_1)^2}{z_1(-z_1)} = \\ &= \frac{z_1^3 + z_1^2 - z_1^3 + z_1^2}{-z_1^2} = \frac{2z_1^2}{-z_1^2} = -2 \end{aligned}$$

iii) Είναι:

$$\begin{aligned} \bullet \quad z_1^{2014} &= z_1^{4 \cdot 503 + 2} = (z_1^4)^{503} \cdot z_1^2 \stackrel{(1)}{=} (-1)^{503} \cdot z_1^2 = -z_1^2 = \\ &= -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)^2 = -\frac{1}{2}(1+2i-1) = -\frac{1}{2} \cdot 2i = -i \quad (3) \\ \bullet \quad z_2^{2014} &\stackrel{(2)}{=} (-z_1)^{2014} = z_1^{2014} \stackrel{(3)}{=} -i \end{aligned}$$

οπότε έχουμε:

$$z_1^{2014} + z_2^{2014} = (-i) + (-i) = -2i$$

ΘΕΜΑ 2ο :

α) Να λύσετε την εξίσωση $4w^2 - 2w + 1 = 0$, $w \in \mathbb{C}$

Θεωρούμε επιπλέον τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z_1| = 1 \quad (1) \quad \text{και} \quad 4 \cdot \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = 2 \quad (2)$$

β) Να αποδείξετε ότι $|z_2| = 2$

γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο που έχει κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών αριθμών $0, z_1$ και z_2 είναι ορθογώνιο.

δ) Να υπολογίσετε τις οξείες γωνίες του παραπάνω τριγώνου.

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση $4w^2 - 2w + 1 = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = -12 < 0$ και οι λύσεις της

$$\text{είναι: } w = \frac{1}{4} \pm i \frac{\sqrt{3}}{4}$$

β) Θέτουμε $\frac{z_1}{z_2} = w$. Επειδή $|z_1| = 1$ θα είναι $z_1 \neq 0$, άρα $w \neq 0$, οπότε η σχέση (2) ισοδύναμα

γράφεται:

$$4w + \frac{1}{w} = 2 \Leftrightarrow 4w^2 - 2w + 1 = 0 \Leftrightarrow w = \frac{1}{4} \pm i \frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{4} \pm i \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Άρα } \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| \frac{1}{4} \pm i \frac{\sqrt{3}}{4} \right| = \frac{1}{2}, \text{ επομένως } \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{1}{2} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} |z_2| = 2$$

γ) Αν O, A και B είναι οι εικόνες των $0, z_1$ και z_2 , τότε έχουμε:

$$(OA)^2 = |z_1|^2 = 1^2 = 1, \quad (OB)^2 = |z_2|^2 = 2^2 = 4$$

Επίσης είναι:

$$4z_1^2 + z_2^2 = 2z_1 z_2 \Rightarrow (z_1 - z_2)^2 = -3z_1^2 \Rightarrow |z_1 - z_2|^2 = 3|z_1|^2 \Rightarrow |z_1 - z_2| = \sqrt{3}$$

Οπότε:

$$(AB) = \sqrt{3} \Rightarrow (AB)^2 = 3$$

Παρατηρούμε ότι:

$$(OB)^2 = (OA)^2 + (AB)^2,$$

οπότε το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο.

δ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο OAB ($\hat{OAB} = 90^\circ$) είναι $(OA) = \frac{(OB)}{2}$, οπότε θα έχουμε

$$\hat{OBA} = 30^\circ \text{ και } \hat{AOB} = 60^\circ$$

ΘΕΜΑ 3ο :

α) Για δύο οποιουσδήποτε μιγαδικούς αριθμούς w_1 και w_2 , να αποδείξετε ότι ισχύει

$$|w_1 + w_2|^2 + |w_1 - w_2|^2 = 2|w_1|^2 + 2|w_2|^2$$

β) Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z , οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση $|z - 2i| = 1$

i) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z

ii) Αν z_1, z_2 είναι δύο μιγαδικοί του προηγούμενου γεωμετρικού τόπου για τους οποίους

ισχύει $|z_1 - z_2| = 1$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $|z_1 + z_2 - 4i|$

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\begin{aligned} |w_1 + w_2|^2 + |w_1 - w_2|^2 &= (w_1 + w_2)(\overline{w_1 + w_2}) + (w_1 - w_2)(\overline{w_1 - w_2}) = \\ &= (w_1 + w_2)(\overline{w_1} + \overline{w_2}) + (w_1 - w_2)(\overline{w_1} - \overline{w_2}) = \\ &= w_1 \overline{w_1} + w_1 \overline{w_2} + \overline{w_1} w_2 + w_2 \overline{w_2} + w_1 \overline{w_1} - w_1 \overline{w_2} - \overline{w_1} w_2 + w_2 \overline{w_1} = \\ &= 2w_1 \overline{w_1} + 2w_2 \overline{w_2} = 2|w_1|^2 + 2|w_2|^2 \end{aligned}$$

β) i) Έστω $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ με εικόνα στο επίπεδο το σημείο $M(x, y)$

Είναι $|z - 2i| = 1 \Leftrightarrow |z - (0 + 2i)| = 1 \Leftrightarrow (MK) = 1$, όπου $M(z)$ η εικόνα του z και $K(0, 2)$

Παρατηρούμε ότι η εικόνα M του μιγαδικού αριθμού z απέχει από το σταθερό σημείο $K(0, 2)$ σταθερή απόσταση 1

Οπότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(0, 2)$ και ακτίνα $\rho = 1$, που έχει εξίσωση $|z - 2i| = 1$

ii) Επειδή οι μιγαδικοί z_1, z_2 ικανοποιούν τη σχέση $|z - 2i| = 1$, θα ισχύει:

$$|z_1 - 2i| = 1 \quad \text{και} \quad |z_2 - 2i| = 1$$

Θέτοντας $w_1 = z_1 - 2i$ και $w_2 = z_2 - 2i$ στην ισότητα του (α) ερωτήματος διαδοχικά έχουμε:

$$|(z_1 - 2i) + (z_2 - 2i)|^2 + |(z_1 - 2i) - (z_2 - 2i)|^2 = 2|z_1 - 2i|^2 + 2|z_2 - 2i|^2 \Leftrightarrow$$

$$|z_1 + z_2 - 4i|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2 \Leftrightarrow$$

$$|z_1 + z_2 - 4i|^2 + 1 = 4 \Leftrightarrow$$

$$|z_1 + z_2 - 4i| = \sqrt{3}$$

ΘΕΜΑ 4ο :

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, w , οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

- $(3z - 2i)^{2013} = (i\bar{z} - 6)^{2013}$ (1) και
- $w = 1 + 2\bar{z}i$ (2)

a) Να αποδείξετε ότι $|z| = 2$

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $u = \left(z - \frac{4}{z}\right)^{2014}$ είναι πραγματικός.

γ) Να αποδείξετε ότι $|u| \leq 2^{4028}$

δ) Αν w_1, w_2 είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί, οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση (2), τότε να αποδείξετε ότι $|w_1 - w_2| \leq 8$

ΛΥΣΗ

a) Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\begin{aligned} |(3z - 2i)^{2013}| &= |(i\bar{z} - 6)^{2013}| \Leftrightarrow |(3z - 2i)|^{2013} = |(i\bar{z} - 6)|^{2013} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |(3z - 2i)| = |(i\bar{z} - 6)| \Leftrightarrow |(3z - 2i)|^2 = |(i\bar{z} - 6)|^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (3z - 2i)(3\bar{z} + 2i) = (i\bar{z} - 6)(-iz - 6) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 9|z|^2 + 6iz - 6i\bar{z} + 4 = |z|^2 + 6iz - 6i\bar{z} + 36 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 8|z|^2 = 32 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow |z| = 2 \end{aligned}$$

β) Είναι:

$$|z| = 2 \Rightarrow |z|^2 = 4 \Rightarrow z \cdot \bar{z} = 4 \Rightarrow \frac{4}{z} = \bar{z} \quad (3)$$

Οπότε αν $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$, τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} u &= \left(z - \frac{4}{z}\right)^{2014} \stackrel{(3)}{=} (z - \bar{z})^{2014} = (2yi)^{2014} = \\ &= (2y)^{2014} \cdot i^{2014} = (2y)^{2014} \cdot i^2 = -(2y)^{2014} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Επομένως $u \in \mathbb{R}$

γ) Είναι:

$$|u| = \left| \left(z - \frac{4}{z} \right)^{2014} \right| \stackrel{(3)}{=} |(z - \bar{z})^{2014}| = |z - \bar{z}|^{2014} \leq (|z| + |\bar{z}|)^{2014} = 2^{4028}$$

Άρα:

$$|u| \leq 2^{4028}$$

- δ)** Είναι $w_1 = 1 + 2\bar{z}_1 i$ και $w_2 = 1 + 2\bar{z}_2 i$, όπου οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 ικανοποιούν τη σχέση (1), οπότε θα ισχύει ότι $|z_1| = |z_2| = 2$. Άρα οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 ανήκουν στον κύκλο με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 2$, οπότε ισχύει $|z_1 - z_2| \leq 4$. Είναι:

$$\begin{aligned} |w_1 - w_2| &= |1 + 2\bar{z}_1 i - 1 - 2\bar{z}_2 i| = |2i(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)| = \\ &= 2|i| \cdot |\bar{z}_1 - \bar{z}_2| = 2\sqrt{|z_1 - z_2|} = 2|z_1 - z_2| \leq 2 \cdot 4 = 8 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 5ο :

- α)** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z που ικανοποιούν τη σχέση $|z^2 - 2zi| + 2|z| = 2 + |\bar{z} + 2i|$ είναι ο κύκλος $C: x^2 + y^2 = 1$.
- β)** Έστω z ένας μιγαδικός αριθμός του οποίου η εικόνα ανήκει στον κύκλο C . Να αποδείξετε ότι:
- i) $|w + 3z| + |2w + 5z| \geq \frac{1}{2}$ για οποιοδήποτε μιγαδικό αριθμό w
 - ii) $\sqrt{2} \leq |z - 1| + |z^2 + 1| \leq 4$
- γ)** Έστω u, v δύο μιγαδικοί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μιγαδικός αριθμός z_0 με εικόνα στον κύκλο C , ώστε να ισχύει $|z_0^2 + uz_0 + v| \geq 1$.

ΛΥΣΗ

- α)** Είναι:

$$\begin{aligned} |z^2 - 2zi| + 2|z| &= 2 + |\bar{z} + 2i| \Leftrightarrow \\ |z| \cdot |z - 2i| + 2|z| &= 2 + |\bar{z} - 2i| \Leftrightarrow \\ |z| \cdot |z - 2i| - |z - 2i| + 2|z| - 2 &= 0 \Leftrightarrow \\ |z - 2i|(|z| - 1) + 2(|z| - 1) &= 0 \Leftrightarrow \\ (|z| - 1)(|z - 2i| + 2) &= 0 \Leftrightarrow |z| = 1 \quad (1), \end{aligned}$$

αφού $|z - 2i| + 2 \neq 0$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος $C: x^2 + y^2 = 1$ που έχει κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

- β) i)** Για οποιοδήποτε μιγαδικό αριθμό w έχουμε:

$$\begin{aligned} |w + 3z| + |2w + 5z| &= |w + 3z| + 2\left|w + \frac{5}{2}z\right| \geq \\ &\geq |w + 3z| + \left|w + \frac{5}{2}z\right| \geq \left|(w + 3z) - \left(w + \frac{5}{2}z\right)\right| = \frac{1}{2}|z| = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Επομένως

$$|w + 3z| + |2w + 5z| \geq \frac{1}{2}$$

ii) Είναι:

$$|z-1| + |z^2+1| \leq |z| + 1 + |z|^2 + 1 = 4 \quad (1)$$

οπότε απομένει να αποδείξουμε το αριστερό μέλος της ζητούμενης ανισοτικής σχέσης.

Ισχύει:

$$|z-1| + |z^2+1| \geq |z-1+z^2+1| = |z(z+1)| = |z| \cdot |z+1| \quad (2)$$

$$\text{Επειδή } |z|=1 \text{ από τη σχέση (2) προκύπτει ότι } |z-1| + |z^2+1| \geq |z+1| \quad (3)$$

$$\text{Είναι προφανές ότι } |z-1| + |z^2+1| \geq |z-1| \quad (4)$$

Αν $z = x + yi$ με $x, y \in [-1, 1]$ τότε έχουμε:

- $|z| = 1 \Rightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \quad (5)$

- $|z+1| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 1} \stackrel{(5)}{=} \sqrt{1 + 2x + 1} = \sqrt{2(1+x)} = \sqrt{2}\sqrt{1+x} \quad (6)$

- $|z-1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1} \stackrel{(5)}{=} \sqrt{1 - 2x + 1} = \sqrt{2(1-x)} = \sqrt{2}\sqrt{1-x} \quad (7)$

Από τις σχέσεις (3) και (6) προκύπτει ότι:

$$|z-1| + |z^2+1| \geq \sqrt{2}\sqrt{1+x} \quad (8)$$

Από τις σχέσεις (4) και (7) προκύπτει ότι:

$$|z-1| + |z^2+1| \geq \sqrt{2}\sqrt{1-x} \quad (9)$$

Αν $x \in [0, 1]$ από τη σχέση (8) έχουμε:

$$|z-1| + |z^2+1| \geq \sqrt{2}$$

Αν $x \in [-1, 0]$ από τη σχέση (9) έχουμε:

$$|z-1| + |z^2+1| \geq \sqrt{2}$$

Επομένως είναι:

$$\sqrt{2} \leq |z-1| + |z^2+1| \leq 4$$

γ) Έστω ότι για κάθε $z \in C$ με $|z|=1$ ισχύει:

$$|z^2 + uz + v| < 1 \quad (10)$$

Αν στη σχέση (10) θέσουμε διαδοχικά $z=1$ και $z=-1$ έχουμε:

$$|1+u+v| < 1 \quad \text{και} \quad |1-u+v| < 1$$

οπότε

$$\begin{aligned} 2 &> |1+u+v| + |1-u+v| \geq |(1+u+v) + (1-u+v)| \Rightarrow \\ 2 &> |2+2v| \Rightarrow 2 > 2|1+v| \Rightarrow |v+1| < 1 \end{aligned} \quad (11)$$

Αν στη σχέση (10) θέσουμε διαδοχικά $z=i$ και $z=-i$ έχουμε:

$$|-1+ui+v| < 1 \quad \text{και} \quad |-1-ui+v| < 1$$

οπότε

$$\begin{aligned} 2 &> |-1+ui+v| + |-1-ui+v| \geq |(-1+ui+v) + (-1-ui+v)| \Rightarrow \\ 2 &> |-2+2v| \Rightarrow 2 > 2|-1+v| \Rightarrow |v-1| < 1 \end{aligned} \quad (12)$$

Από τις σχέσεις (11) και (12) συμπεραίνουμε ότι:

$$2 > |v+1| + |v-1| \geq |(v+1)-(v-1)| \Rightarrow 2 > 2$$

που είναι άτοπο.

Άρα υπάρχει $z_0 \in C$ με $|z_0|=1$, ώστε να ισχύει $|z_0^2 + uz_0 + v| \geq 1$

ΘΕΜΑ 6ο :

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύει:

- $|z - 3 - 3i| = 2 \left| \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right)^{25} \right|$ και
- $2|\bar{w} - 3 + 3i| = |iz + 3 - 3i|$

- a) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z . Στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $\operatorname{Re}(z)$
 β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w
 γ) Για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w των ερωτημάτων (a) και (β) να αποδείξετε ότι:

$$1 \leq |z - w| \leq 3 \quad \text{και} \quad 6\sqrt{2} - 3 \leq |z + w| \leq 6\sqrt{2} + 3$$

- δ) Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς z , τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$k = (z_1 - z_2) \cdot \left(\frac{1}{z_1 - 3 - 3i} - \frac{1}{z_2 - 3 - 3i} \right)$$

είναι πραγματικός και ισχύει $0 \leq k \leq 4$

ΛΥΣΗ

- a) Είναι:

$$\left| \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right)^{25} \right| = \left| \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right|^{25} = \left| \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right|^{25} = \left(\sqrt{\left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} \right)^{25} = 1^{25} = 1$$

οπότε

$$|z - 3 - 3i| = 2 \left| \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right)^{25} \right| \Leftrightarrow |z - (3+3i)| = 2$$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος με κέντρο $K(3, 3)$ και ακτίνα $\rho = 2$

Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z ισχύει $|\operatorname{Re}(z) - x_k| \leq \rho$, όπου $x_k = 3$ η τετμημένη του κέντρου του κύκλου (K, ρ) και $\rho = 2$

Είναι:

$$|\operatorname{Re}(z) - x_k| \leq \rho \Leftrightarrow x_k - \rho \leq \operatorname{Re}(z) \leq x_k + \rho \Leftrightarrow$$

$$3 - 2 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 3 + 2 \Leftrightarrow 1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 5$$

Άρα η ελάχιστη τιμή του $\operatorname{Re}(z)$ είναι το 1 και προκύπτει αν $z = 1 + 3i$, ενώ η μέγιστη τιμή του είναι το 5 και προκύπτει αν $z = 5 + 3i$

Σημείωση:

Είναι:

$$|z - (3+3i)| = 2 \stackrel{z=x+yi}{\Leftrightarrow} (x-3)^2 + (y-3)^2 = 4$$

οπότε

$$(x-3)^2 \leq 4 \Leftrightarrow |x-3| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x-3 \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 5$$

Άρα η ελάχιστη τιμή του $\operatorname{Re}(z)$ είναι το 1 και προκύπτει αν $z = 1 + 3i$, ενώ η μέγιστη τιμή του είναι το 5 και προκύπτει αν $z = 5 + 3i$

β) Είναι:

$$2|\bar{w} - 3 + 3i| = |iz + 3 - 3i| \Leftrightarrow 2\left|\overline{(w - 3 - 3i)}\right| = |i(z - 3 - 3i)| \Leftrightarrow$$

$$2|w - 3 - 3i| = |i| \cdot |z - 3 - 3i| \stackrel{\text{a)}}{\Leftrightarrow} 2|w - 3 - 3i| = 2 \Leftrightarrow |w - 3 - 3i| = 1 \Leftrightarrow |w - (3 + 3i)| = 1$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(3, 3)$ και ακτίνα $\rho_1 = 1$

γ) 1^{ος} τρόπος:

Για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w των ερωτημάτων (α) και (β) έχουμε:

$$|z - w| = |(z - (3 + 3i)) - (w - (3 + 3i))| = |u - v|$$

όπου

$$u = z - (3 + 3i) \text{ και } v = w - (3 + 3i) \text{ με } |u| = 2 \text{ και } |v| = 1$$

Ισχύει:

$$|z - w| = |u - v| \leq |u| + |v| = 2 + 1 = 3$$

και

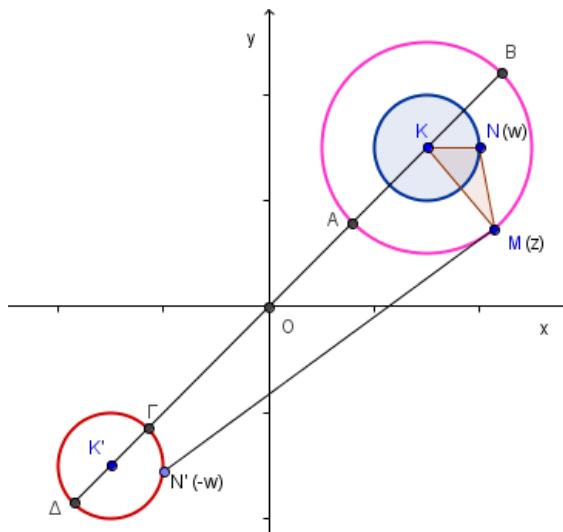
$$|z - w| = |u - v| \geq ||u| - |v|| = |2 - 1| = 1$$

Άρα

$$1 \leq |z - w| \leq 3$$

2^{ος} τρόπος: Γεωμετρικά (Υπόδειξη)

Μπορούμε να αποδείξουμε την παραπάνω ανισότητα και γεωμετρικά μέσω της τριγωνικής ανισότητας στο τρίγωνο KMN του παρακάτω σχήματος.



1^{ος} τρόπος:

Είναι:

$$|z + w| = |(z - (3 + 3i)) + (w - (3 + 3i)) + 6(1 + i)| = |u + v + 6(1 + i)|$$

Ισχύει:

$$|z + w| = |u + v + 6(1 + i)| \leq |u| + |v| + |6(1 + i)| = 2 + 1 + 6\sqrt{2} = 6\sqrt{2} + 3$$

και

$$|z + w| = |(u + v) + 6(1 + i)| \geq ||6(1 + i)| - |u + v|| \geq ||6(1 + i)| - (|u| + |v|)|| = |6\sqrt{2} - 3| = 6\sqrt{2} - 3$$

Άρα

$$6\sqrt{2} - 3 \leq |z + w| \leq 6\sqrt{2} + 3$$

2^{ος} τρόπος : Γεωμετρικά (Υπόδειξη)

Είναι:

$$|z+w|=|z-(-w)|=(MN')\leq(B\Delta)=6\sqrt{2}+3$$

και

$$|z+w|=|z-(-w)|=(MN')\geq(A\Gamma)=6\sqrt{2}-3, \text{ διότι } \dots$$

Άρα ...

δ) Θέτουμε $u = z - (3 + 3i)$, τότε έχουμε:

$$|u|=|z-(3+3i)|=2 \quad (1)$$

και

$$|u|=2\Leftrightarrow|u|^2=4\Leftrightarrow u\cdot\bar{u}=4\Leftrightarrow\bar{u}=\frac{4}{u} \quad (2)$$

Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς z , τότε:

$$\begin{aligned} k &= (z_1 - z_2) \left(\frac{1}{z_1 - 3 - 3i} - \frac{1}{z_2 - 3 - 3i} \right) = \\ &= ((z_1 - 3 - 3i) - (z_2 - 3 - 3i)) \cdot \left(\frac{1}{z_1 - 3 - 3i} - \frac{1}{z_2 - 3 - 3i} \right) = \\ &= (u_1 - u_2) \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right) = \frac{1}{4} (u_1 - u_2) \left(\frac{4}{u_1} - \frac{4}{u_2} \right)^{(2)} = \\ &= \frac{1}{4} (u_1 - u_2)(\bar{u}_1 - \bar{u}_2) = \frac{1}{4} (u_1 - u_2)(\overline{u_1 - u_2}) = \frac{1}{4} |u_1 - u_2|^2 \end{aligned}$$

Άρα ο αριθμός k είναι πραγματικός και ισχύει:

- $k = \frac{1}{4} |u_1 - u_2|^2 \geq 0$ και
- $k = \frac{1}{4} |u_1 - u_2|^2 \leq \frac{1}{4} (|u_1| + |u_2|)^2 \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{4} (2+2)^2 = 4$

 Δ ηλαδή $0 \leq k \leq 4$ **ΘΕΜΑ 7ο :**Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z , οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση:

$$|iz+8|=2|2iz+1|$$

- Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=2$
- Αν οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 είναι σημεία του προηγούμενου γεωμετρικού τόπου και ισχύει $|z_1 + xz_2| > \sqrt{3}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $|\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)| < 2$
- Έστω πραγματικός αριθμός a με $a \in (-1, 1)$. Αν z μιγαδικός αριθμός, για τον οποίο ισχύει:

$$z^4 + 2az^3 + 8az + 16 = 0 \quad (1)$$

να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού z :

- Ανήκει στο γεωμετρικό τόπο του (a) ερωτήματος
- Δεν ανήκει στους άξονες x' και y'

ΛΥΣΗ**a)** Είναι:

$$\begin{aligned} |iz + 8| = 2|2iz + 1| &\Leftrightarrow |iz + 8|^2 = 4|2iz + 1|^2 \Leftrightarrow \\ (iz + 8)(\overline{iz + 8}) &= 4(2iz + 1)(\overline{2iz + 1}) \Leftrightarrow \\ (iz + 8)(-i\bar{z} + 8) &= 4(2iz + 1)(-2i\bar{z} + 1) \Leftrightarrow \\ |z|^2 + 8iz - 8i\bar{z} + 64 &= 16|z|^2 + 8iz - 8i\bar{z} + 4 \Leftrightarrow \\ 15|z|^2 &= 60 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow |z| = 2 \end{aligned}$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 2$

b) Είναι:

$$|z_1| = 2 \quad \text{και} \quad |z_2| = 2$$

οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} |z_1 + xz_2| > \sqrt{3} &\Leftrightarrow |z_1 + xz_2|^2 > 3 \Leftrightarrow (z_1 + xz_2) \cdot (\overline{z_1 + xz_2}) > 3 \Leftrightarrow \\ (z_1 + xz_2) \cdot (\overline{z_1} + x\overline{z_2}) > 3 &\Leftrightarrow |z_1|^2 + xz_1\overline{z_2} + x\overline{z_1}z_2 + x^2|z_2|^2 > 3 \Leftrightarrow \\ 4x^2 + (z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1z_2) \cdot x + 1 > 0 &\Leftrightarrow 4x^2 + (z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1\overline{z}_2) \cdot x + 1 > 0 \Leftrightarrow \\ 4x^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2) \cdot x + 1 > 0, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Επομένως για τη διακρίνουσα του τριωνύμου $4x^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2) \cdot x + 1$ ισχύει:

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow 4(\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2))^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow (\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2))^2 < 4 \Leftrightarrow |\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2)| < 2$$

γ) i) 1^{ος} τρόπος:

Αν z μιγαδικός αριθμός, για τον οποίο ισχύει η σχέση (1), τότε έχουμε:

$$z^4 + 2az^3 + 8az + 16 = 0 \Leftrightarrow z^3(z + 2a) = -8(az + 2)$$

Άρα

$$|z|^3 \cdot |z + 2a| = 8|az + 2| \quad (2)$$

Αν υποθέσουμε ότι $|z| > 2$, τότε $|z|^3 > 8$ και από τη σχέση (2) έχουμε:

$$\begin{aligned} |z + 2a| < |az + 2| &\Leftrightarrow |z + 2a|^2 < |az + 2|^2 \Leftrightarrow \\ (z + 2a)(\overline{z + 2a}) &< (az + 2)(\overline{az + 2}) \Leftrightarrow \\ (z + 2a)(\overline{z} + 2a) &< (az + 2)(a\overline{z} + 2) \Leftrightarrow \\ |z|^2 + 2az + 2a\overline{z} + 4a^2 &< a^2|z|^2 + 2az + 2a\overline{z} + 4 \Leftrightarrow \\ (a^2 - 1)|z|^2 - 4(a^2 - 1) &> 0 \Leftrightarrow (a^2 - 1)(|z|^2 - 4) > 0 \quad (3) \end{aligned}$$

Επειδή $a \in (-1, 1)$ το $a^2 - 1 < 0$ και από τη σχέση (3) προκύπτει ότι:

$$|z|^2 - 4 < 0 \Rightarrow |z|^2 < 4 \Rightarrow |z| < 2, \quad \text{που είναι άτοπο, αφού } |z| > 2$$

Αν υποθέσουμε ότι $|z| < 2$, τότε ομοίως προκύπτει $|z| > 2$, που είναι επίσης άτοπο.

Επομένως υποχρεωτικά ισχύει ότι $|z|=2$, άρα οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z , για τους οποίους ισχύει η σχέση (1) ανήκουν στο κύκλο $C: x^2+y^2=4$, δηλαδή στο γεωμετρικό τόπο του (α) ερωτήματος.

2^{ος} τρόπος:

Αν υποθέσουμε ότι $z = 0$, τότε από την (1) έχουμε $16 = 0$, που είναι άτοπο.

Για $z \neq 0$ έχουμε:

$$z^4 + 2az^3 + 8az + 16 = 0 \Leftrightarrow z^2 + 2az + \frac{8a}{z} + \frac{16}{z^2} = 0 \Leftrightarrow \left(z^2 + \frac{16}{z^2}\right) + 2a\left(z + \frac{4}{z}\right) = 0 \quad (4)$$

Αν θέσουμε $z + \frac{4}{z} = u$ (5), τότε έχουμε:

$$\left(z + \frac{4}{z}\right)^2 = u^2 \Rightarrow z^2 + 2z \cdot \frac{4}{z} + \frac{16}{z^2} = u^2 \Rightarrow z^2 + \frac{16}{z^2} = u^2 - 8,$$

οπότε η (4) ισοδύναμα γράφεται:

$$(u^2 - 8) + 2au = 0 \Leftrightarrow u^2 + 2au - 8 = 0 \quad (6)$$

Είναι:

$$\Delta = 4a^2 + 32 = 4(a^2 + 8) > 0$$

Οπότε οι ρίζες της εξίσωσης (6) είναι:

$$u = \frac{-2a \pm 2\sqrt{a^2 + 8}}{2} = -a \pm \sqrt{a^2 + 8} \quad (7)$$

Επομένως η εξίσωση (5) ισοδύναμα γράφεται:

$$z^2 - uz + 4 = 0 \Leftrightarrow z^2 + \left(\alpha \pm \sqrt{a^2 + 8}\right)z + 4 = 0 \quad (8)$$

Είναι:

$$\Delta = \left(\alpha \pm \sqrt{a^2 + 8}\right)^2 - 16 = a^2 + a^2 + 8 \pm 2a\sqrt{a^2 + 8} - 16 = 2\left(a^2 - 4 \pm a\sqrt{a^2 + 8}\right)$$

Από τη σχέση $-1 < a < 1$ έχουμε:

- $0 \leq a^2 < 1 \Rightarrow -4 \leq a^2 - 4 < -3$
- $-\sqrt{a^2 + 8} < a\sqrt{a^2 + 8} < \sqrt{a^2 + 8} \Leftrightarrow -\sqrt{a^2 + 8} < -a\sqrt{a^2 + 8} < \sqrt{a^2 + 8}$

οπότε

$$a^2 - 4 + a\sqrt{a^2 + 8} < -3 + \sqrt{a^2 + 8} < -3 + 3 = 0$$

και

$$a^2 - 4 - a\sqrt{a^2 + 8} < -3 + \sqrt{a^2 + 8} < -3 + 3 = 0$$

Άρα σε κάθε περίπτωση είναι $\Delta < 0$

Οπότε οι ρίζες z_1, z_2 της εξίσωσης (8) είναι μιγαδικοί συζυγείς με $z_1 \cdot z_2 = 4$

Επομένως έχουμε:

$$z_1 \cdot z_2 = 4 \Leftrightarrow z_1 \cdot \bar{z}_1 = 4 \Leftrightarrow |z_1|^2 = 4 \Leftrightarrow |z_1| = 2$$

Άρα για κάθε ρίζα z της εξίσωσης ισχύει ότι $|z|=2$, οπότε οι εικόνες όλων των μιγαδικών z , για τους οποίους ισχύει η σχέση (1) ανήκουν στο κύκλο $C: x^2+y^2=4$, δηλαδή στο γεωμετρικό τόπο του (α) ερωτήματος.

- ii) • Av $y = 0$, τότε $z = x + 0i = x \in \mathbb{R}$ (πραγματικός αριθμός) και επειδή $|z| = 2 \Rightarrow z = \pm 2$

Για $z = 2$ έχω:

$$2^4 + 2\alpha \cdot 2^3 + 8\alpha \cdot 2 + 16 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1, \text{ που είναι άτοπο, αφού } \alpha \in (-1, 1)$$

Για $z = -2$ έχω:

$$(-2)^4 + 2\alpha \cdot (-2)^3 + 8\alpha \cdot (-2) + 16 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1, \text{ που είναι άτοπο, αφού } \alpha \in (-1, 1)$$

Άρα $y \neq 0$

- Av $x = 0$, τότε $z = 0 + yi = yi \in \mathbb{I}$ (φανταστικός αριθμός) και επειδή $|z| = 2 \Rightarrow z = \pm 2i$

Για $z = 2i$ έχω:

$$(2i)^4 + 2\alpha \cdot (2i)^3 + 8\alpha \cdot 2i + 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2^4 i^4 + 2\alpha \cdot 2^3 i^3 + 8\alpha \cdot 2i + 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$16 - 16\alpha i + 16\alpha i + 16 = 0 \Leftrightarrow 32 = 0, \text{ που είναι άτοπο.}$$

Για $z = -2i$ έχω:

$$(-2i)^4 + 2\alpha \cdot (-2i)^3 + 8\alpha \cdot (-2i) + 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2^4 i^4 + 2\alpha \cdot (-2)^3 i^3 - 8\alpha \cdot 2i + 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$16 + 16\alpha i - 16\alpha i + 16 = 0 \Leftrightarrow 32 = 0, \text{ που είναι άτοπο.}$$

Άρα $x \neq 0$

Επομένως οι μιγαδικοί που ικανοποιούν τη σχέση (1) είναι της μορφής $x + yi$ με $xy \neq 0$

ΘΕΜΑ 8ο :

Έστω συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο διάστημα $[1, 2]$ με $f(1) = -1$ και $f(2) = 1$. Θεωρούμε επίσης τους μιγαδικούς αριθμούς z , οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση $|z - 2i| = |z|$. Να αποδείξετε ότι:

a) Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι η ενθεία $y = 1$

β) Υπάρχει ακριβώς μια τιμή του $\operatorname{Re}(z)$ τέτοια, ώστε ο αριθμός $w = z^2 - \frac{1}{z}$ να είναι πραγματικός.

γ) $-1 \leq f(|z|^2) \leq 1$, av $\operatorname{Re}(z) \in [0, 1]$

ΛΥΣΗ

a) Έστω $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ με εικόνα στο επίπεδο το σημείο $M(x, y)$.

Είναι:

$$|z - 2i| = |z| \Leftrightarrow |x + yi - 2i| = |x + yi| \Leftrightarrow |x + (y - 2)i| = |x + yi| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y - 2)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow x^2 + (y - 2)^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow -4y + 4 = 0 \Leftrightarrow 4y = 4 \Leftrightarrow y = 1$$

β) Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z είναι σημεία της ευθείας $y=1$, áρα είναι $z=x+i$, $x \in \mathbb{R}$.
Είναι:

$$\begin{aligned} w = z^2 - \frac{1}{z} &= (x+i)^2 - \frac{1}{x+i} = (x+i)^2 - \frac{x-i}{(x+i)(x-i)} = \\ &= x^2 + 2xi - 1 - \frac{x-i}{x^2+1} = \left(x^2 - 1 - \frac{x}{x^2+1} \right) + \left(2x + \frac{1}{x^2+1} \right)i \end{aligned}$$

Είναι:

$$w \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2x + \frac{1}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 2x + 1 = 0 \quad (1)$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση (1) έχει μια ακριβώς ρίζα ως προς x στο \mathbb{R} , αφού $x = \operatorname{Re}(z)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 2x^3 + 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) = 6x^2 + 2$, $x \in \mathbb{R}$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g'(x) > 0$, οπότε η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R}

Έχουμε:

- g συνεχής και γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R}
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 + 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 + 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης g είναι $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, οπότε υπάρχει ένα $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $g(\xi) = 0$ και μάλιστα είναι μοναδικό, αφού η g είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Έχουμε $|z|^2 = x^2 + 1$, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $-1 \leq f(x^2 + 1) \leq 1$

Η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $[1, 2]$ με $f(1) < f(2)$, επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, 2]$

Από υπόθεση γνωρίζουμε ότι $\operatorname{Re}(z) \in [0, 1]$, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \Rightarrow 1 \leq x^2 + 1 \leq 2 \Rightarrow \\ f(1) \leq f(x^2 + 1) \leq f(2) \Rightarrow -1 \leq f(x^2 + 1) \leq 1 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 9ο :

I) Να αποδείξετε ότι για όλους των μιγαδικούς αριθμούς z, w ισχύει η σχέση:

$$|z-w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\operatorname{Re}(zw)$$

II) Δίνονται:

- η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και
- οι μιγαδικοί αριθμοί $z = 3 + f(2)i$ και $w = f^{-1}(2) + 3i$

Αν ισχύει $|z|^2 + |w|^2 = 2\operatorname{Re}(z\bar{w})$, τότε να αποδείξετε ότι:

a) $z = w$

β) Οι συναρτήσεις f και g με $g(x) = f(2x - f(x)) - x$, $x \in \mathbb{R}$, είναι γνησίως φθίνουσες.

γ) Ισχύει η ισοδυναμία:

$$f^{-1}(x) = 2x - f(x) \Leftrightarrow g(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

δ) Αν επιπλέον η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (1, 4)$ και $\xi_2 \in (2, 3)$ τέτοια, ώστε $3f'(\xi_1) = g'(\xi_2) + 1$

ΛΥΣΗ

I) Είναι:

$$\begin{aligned} |z-w|^2 &= (z-w)(\overline{z-w}) = (z-w)(\bar{z}-\bar{w}) = z\bar{z} - z\bar{w} - \bar{z}w + w\bar{w} = \\ &= |z|^2 + |w|^2 - (z\bar{w} + \bar{z}w) = |z|^2 + |w|^2 - (z\bar{w} + \overline{z\bar{w}}) = |z|^2 + |w|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) \end{aligned} \quad (1)$$

II) a) Είναι:

$$\begin{aligned} |z|^2 + |w|^2 = 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) \Leftrightarrow |z|^2 + |w|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) = 0 &\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \\ \Leftrightarrow |z-w|^2 = 0 &\Leftrightarrow |z-w| = 0 \Leftrightarrow z-w = 0 \Leftrightarrow z = w \end{aligned}$$

β) Είναι:

$$z = w \Leftrightarrow 3 + f(2)i = f^{-1}(2) + 3i \Leftrightarrow \begin{cases} f(2) = 3 \\ f^{-1}(2) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(2) = 3 \\ f(3) = 2 \end{cases}$$

- Η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, επομένως ή θα είναι γνησίως αύξουσα ή θα είναι γνησίως φθίνουσα.

Έστω ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, τότε:

$$2 < 3 \stackrel{f \uparrow}{\Rightarrow} f(2) < f(3) \Rightarrow 3 < 2$$

που είναι άτοπο. Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

- Για τυχαία $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \stackrel{f \downarrow}{\Rightarrow} f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow -f(x_1) < -f(x_2)$

Είναι:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 < x_2 \\ -f(x_1) < -f(x_2) \end{cases} &\stackrel{f \uparrow}{\Rightarrow} \begin{cases} 2x_1 < 2x_2 \\ -f(x_1) < -f(x_2) \end{cases} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} 2x_1 - f(x_1) < 2x_2 - f(x_2) \stackrel{f \downarrow}{\Rightarrow} \\ &\Rightarrow f(2x_1 - f(x_1)) > f(2x_2 - f(x_2)) \end{aligned}$$

Είναι:

$$\begin{cases} f(2x_1 - f(x_1)) > f(2x_2 - f(x_2)) \\ -x_1 > -x_2 \end{cases} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} f(2x_1 - f(x_1)) - x_1 > f(2x_2 - f(x_2)) - x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

Επομένως η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα.

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f^{-1}(x) = 2x - f(x) \Leftrightarrow f(2x - f(x)) = x \Leftrightarrow f(2x - f(x)) - x = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$$

- δ) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , επομένως ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[1, 4]$, οπότε θα υπάρχει $\xi_1 \in (1, 4)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} \Rightarrow f'(\xi_1) = \frac{f(4) - f(1)}{3} \Rightarrow 3f'(\xi_1) = f(4) - f(1) \quad (2)$$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$g(x) = f(2x - f(x)) - x$$

Η συνάρτηση $2x - f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο R , ως διαφορά παραγωγισίμων συναρτήσεων, οπότε η συνάρτηση $f(2x - f(x))$ είναι παραγωγίσιμη στο R , ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων και η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R , ως διαφορά παραγωγισίμων συναρτήσεων.

Επομένως η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[2, 3]$, οπότε θα υπάρχει $\xi_2 \in (2, 3)$ τέτοιο, ώστε

$$g'(\xi_2) = \frac{g(3) - g(2)}{3 - 2} \Rightarrow g'(\xi_2) = g(3) - g(2) \quad (3)$$

Για $x=2$ είναι $g(2) = f(2 \cdot 2 - f(2)) - 2 = f(4 - 3) - 2 = f(1) - 2$, οπότε $f(1) - g(2) = 2$ (4)

Για $x=3$ είναι $g(3) = f(2 \cdot 3 - f(3)) - 3 = f(6 - 2) - 3 = f(4) - 3$, οπότε $f(4) - g(3) = 3$ (5)

Αν αφαιρέσουμε κατά μέλη τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε:

$$3f'(\xi_1) - g'(\xi_2) = (f(4) - f(1)) - (g(3) - g(2)) \Rightarrow$$

$$3f'(\xi_1) - g'(\xi_2) = (f(4) - g(3)) - (f(1) - g(2)) \stackrel{(4),(5)}{\Rightarrow}$$

$$3f'(\xi_1) - g'(\xi_2) = 3 - 2 \Rightarrow 3f'(\xi_1) = g'(\xi_2) + 1$$

ΘΕΜΑ 10ο :

a) Να λύσετε την εξίσωση $z^2 - 6\sin\theta \cdot z + 5\sin^2\theta + 4 = 0$, όπου $\theta \in R$

β) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των ριζών z_1, z_2 της εξίσωσης κινούνται πάνω στην έλλειψη

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ για τις διάφορες τιμές του } \theta \in R$$

γ) Για $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z_1 - z_2|$

δ) Αν $\theta = \frac{\pi}{2}$ και z_1 η ρίζα της εξίσωσης με $\operatorname{Im}(z_1) > 0$, να βρείτε τιμές του $v \in N^*$, ώστε $z_1^v \in R$

ε) Αν $A(2, 3)$ και C το τμήμα της έλλειψης που ορίζεται από τα σημεία (x, y) με $x \in [-1, 2]$ και $y > 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της C , που απέχει από το A ελάχιστη απόσταση και ένα τουλάχιστον σημείο της C που απέχει από το A μέγιστη απόσταση

ΛΥΣΗ**α)** Έχουμε:

$$\Delta = (-6\sigma v \nu \theta)^2 - 4(5\sigma v \nu^2 \theta + 4) = 36\sigma v \nu^2 \theta - 20\sigma v \nu^2 \theta - 16 = -16(1 - \sigma v \nu^2 \theta) = -16\eta \mu^2 \theta$$

Άρα οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$z_{1,2} = \frac{6\sigma v \nu \theta \pm i4\eta \mu \theta}{2} = 3\sigma v \nu \theta \pm 2\eta \mu \theta i$$

β) Αν $z_{1,2} = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, τότε:

$$\begin{cases} x = 3\sigma v \nu \theta \\ y = \pm 2\eta \mu \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} = \sigma v \nu \theta \\ \frac{y}{\pm 2} = \eta \mu \theta \end{cases} \quad (1)$$

Είναι:

$$\sigma v \nu^2 \theta + \eta \mu^2 \theta = 1 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Επομένως οι εικόνες των ριζών z_1, z_2 της εξίσωσης κινούνται πάνω στην έλλειψη $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, για τις διάφορες τιμές του $\theta \in \mathbb{R}$ **γ)** Έχουμε:

$$|z_1 - z_2| = |4i\eta \mu \theta| = 4\eta \mu \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

Είναι:

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 \leq \eta \mu \theta \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 0 \leq 4\eta \mu \theta \leq 2\sqrt{2}$$

Άρα

$$|z_1 - z_2| \leq 2\sqrt{2}, \text{ οπότε η μέγιστη τιμή του } |z_1 - z_2| \text{ είναι } 2\sqrt{2}$$

δ) Για $\theta = \frac{\pi}{2}$ έχουμε $z_1 = 2i$, άρα $z_1^\nu = 2^\nu i^\nu$ Για $\nu = 4\kappa$, $\kappa \in \mathbb{N}^*$ έχουμε $z_1^\nu = 2^\nu \in \mathbb{R}$ Για $\nu = 4\kappa + 1$, $\kappa \in \mathbb{N}^*$ έχουμε $z_1^\nu = 2^\nu i \notin \mathbb{R}$ Για $\nu = 4\kappa + 2$, $\kappa \in \mathbb{N}^*$ έχουμε $z_1^\nu = -2^\nu \in \mathbb{R}$ Για $\nu = 4\kappa + 3$, $\kappa \in \mathbb{N}^*$ έχουμε $z_1^\nu = -2^\nu i \notin \mathbb{R}$ Άρα $\nu = 2\mu$, $\mu \in \mathbb{N}^*$ **ε)** Έχουμε:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow 4x^2 + 9y^2 = 36 \Leftrightarrow y^2 = \frac{36 - 4x^2}{9} \Leftrightarrow y^2 = \frac{4(9 - x^2)}{9} \stackrel{y > 0}{\Leftrightarrow} y = \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$$

Αν $M(x, y)$ σημείο του C , τότε:

$$d(M, A) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + \left(\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2} - 3\right)^2}$$

Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{(x-2)^2 + \left(\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2} - 3\right)^2}$ είναι συνεχής στο $[-1, 2]$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων, άρα από το Θεώρημα Μέγιστης – Ελάχιστης Τιμής θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in [-1, 2]$ τέτοια, ώστε:

$$m = f(x_1) \text{ και } M = f(x_2), \text{ με } m \leq f(x) \leq M$$

Άρα υπάρχουν σημεία του C , που απέχουν ελάχιστη και μέγιστη απόσταση από το σημείο A .

ΘΕΜΑ 11ο :

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w και u , οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

- $|z-1| = \operatorname{Re}(z) + 1$ (1)
- $|w-2|^2 - |w-2i|^2 = 8$ (2)
- $w \cdot u = 2$ (3)

- a) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4x$
- b) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w είναι η ευθεία (ε) με εξίσωση $x - y + 2 = 0$
- γ) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών u είναι ο κύκλος με κέντρο $K\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$, με εξαίρεση το σημείο του $O(0,0)$
- δ) Να βρείτε σημείο της παραβολής, το οποίο απέχει ελάχιστη απόσταση από την ευθεία (ε)
- ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός μιγαδικός z με $z = u$ και $\operatorname{Im}(z) < 0$

ΛΥΣΗ

- a) Θέτουμε $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$ και από τη σχέση (1) ισοδύναμα έχουμε:

$$|x + yi - 1| = x + 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = x + 1 \stackrel{x > -1}{\Leftrightarrow} (x-1)^2 + y^2 = (x+1)^2 \Leftrightarrow \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow y^2 = 4x, \quad x \geq 0$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4x$

- β) Θέτουμε $w = \alpha + \beta i$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και από τη σχέση (2) ισοδύναμα έχουμε:

$$|\alpha + \beta i - 2|^2 - |\alpha + \beta i - 2i|^2 = 8 \Leftrightarrow (\alpha - 2)^2 + \beta^2 - (\alpha^2 + (\beta - 2)^2) = 8 \Leftrightarrow \\ \alpha^2 - 4\alpha + 4 + \beta^2 - \alpha^2 - \beta^2 + 4\beta - 4 = 8 \Leftrightarrow -4\alpha + 4\beta - 8 = 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta + 2 = 0$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w είναι η ευθεία με εξίσωση $x - y + 2 = 0$

γ) Θέτουμε $u = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$ και από τη σχέση (3) ισοδύναμα έχουμε:

$$w = \frac{2}{u} \stackrel{u \neq 0}{\Leftrightarrow} \alpha + \beta i = \frac{2}{x+yi} \Leftrightarrow \alpha + \beta i = \frac{2(x-yi)}{x^2+y^2} \Leftrightarrow \left(\alpha = \frac{2x}{x^2+y^2} \text{ και } \beta = -\frac{2y}{x^2+y^2} \right)$$

Όμως $\alpha - \beta + 2 = 0$, άρα έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{2y}{x^2+y^2} + 2 = 0 &\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2x + 2y = 0 \Leftrightarrow \\ x^2 + y^2 + x + y = 0 &\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y + \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Για $x = y = 0$ επαληθεύεται η εξίσωση, όμως τότε $u = 0$, άτοπο. Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών u είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$, με εξαίρεση το σημείο του $O(0,0)$.

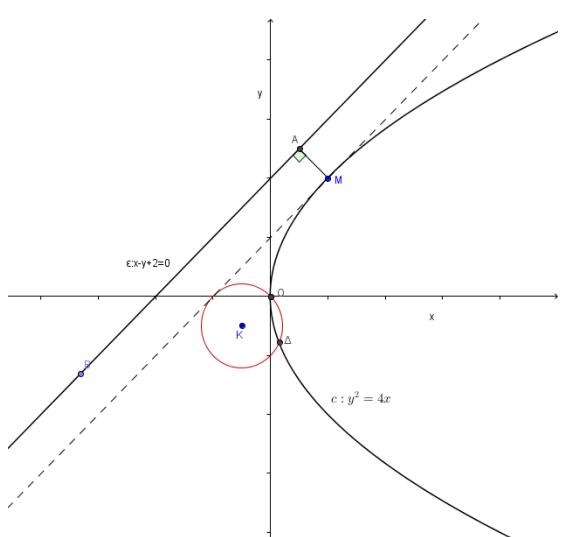
δ) 1ος τρόπος: Αν $M(x_1, y_1)$ σημείο της παραβολής, τότε η εξίσωση εφαπτομένης της στο M είναι:

$$yy_1 = 2(x+x_1) \Leftrightarrow 2x - y_1 y + 2x_1 = 0 \text{ με } \lambda_{\text{εφ}} = \frac{2}{y_1}$$

Αν η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία (ε) τότε:

$$\lambda_{\text{εφ}} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{y_1} = 1 \Leftrightarrow y_1 = 2 \text{ και } x_1 = 1$$

Άρα το σημείο $M(1, 2)$, απέχει ελάχιστη απόσταση από την ευθεία (ε) , (απόσταση παραλλήλων ευθειών).



2ος τρόπος:

Αν $M(x, y)$ είναι σημείο της παραβολής, τότε:

$$d(M, \varepsilon) = \frac{|x - y + 2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\left| \frac{y^2}{4} - y + 2 \right|}{\sqrt{2}} = \frac{|y^2 - 4y + 8|}{4\sqrt{2}} = \frac{y^2 - 4y + 8}{4\sqrt{2}}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(y) = y^2 - 4y + 8$, $y \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και για κάθε $y \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(y) = 2y - 4$$

Είναι:

- $f'(y) = 0 \Leftrightarrow 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = 2$
- $f'(y) > 0 \Leftrightarrow 2y - 4 > 0 \Leftrightarrow y > 2$

Το πρόσημο της $f'(y)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(y)$	-	0	+
$f(y)$			

ελαχ.

Η συνάρτηση f παίρνει ελάχιστη τιμή για $y=2$. Για $y=2$ είναι $x=1$, οπότε το σημείο $M(1, 2)$ απέχει ελάχιστη απόσταση από την ευθεία (ε) .

ε) Λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4x & y < 0 \\ x^2 + y^2 + x + y = 0 & \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = -2\sqrt{x} & (4) \\ x^2 + 5x - 2\sqrt{x} = 0 & (5) \end{cases}$$

Επειδή $y < 0$ από τη σχέση (4) συμπεραίνουμε ότι $x > 0$

Για $x > 0$ η σχέση (5) ισοδύναμα γράφεται:

$$\frac{x^2}{\sqrt{x}} + 5 \frac{x}{\sqrt{x}} - 2 = 0 \Leftrightarrow x\sqrt{x} + 5\sqrt{x} - 2 = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x\sqrt{x} + 5\sqrt{x} - 2$, $x > 0$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $g'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{5}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$

Είναι:

$$g'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $A = (0, +\infty)$

Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x\sqrt{x} + 5\sqrt{x} - 2) = -2$$

και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x\sqrt{x} + 5\sqrt{x} - 2) = +\infty$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης g είναι $g(A) = (-2, +\infty)$

Το $0 \in g(A)$ και η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο A , οπότε η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $A = (0, +\infty)$

Συνεπώς υπάρχει μοναδικός μιγαδικός z με $z = w$ και $\operatorname{Im}(z) < 0$

ΘΕΜΑ 12ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + c$ όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύει $b^2 < 3ac$

α) Να αποδείξετε ότι η $f(x) = 0$ έχει δύο μιγαδικές ρίζες z_1, z_2

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $w = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός και μικρότερος της μονάδας.

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = xe^x$, $x > 0$. Να αποδείξετε ότι:

i) Υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, +\infty)$ τέτοιος, ώστε να ισχύει $f(x_0) \cdot g(x_0) = a$

ii) Η συνάρτηση $h(x) = \frac{g(x)f(x_0) - a}{f(x_0)(x - x_0)}$ είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε διάστημα του πεδίου ορισμού της.

ΛΥΣΗ

- a)** Είναι $\alpha \neq 0$, διότι αν $\alpha = 0$, τότε από τη σχέση $\beta^2 < 3\alpha\gamma$ προκύπτει $\beta^2 < 0$ που είναι άτοπο, αφού $\beta \in \mathbb{R}$. Άρα το $f(x)$ είναι τριώνυμο 2^ο βαθμού, για τη διακρίνουσα Δ του οποίου έχουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \quad \text{και} \quad \beta^2 < 3\alpha\gamma$$

οπότε

$$\Delta < 3\alpha\gamma - 4\alpha\gamma \Rightarrow \Delta < -\alpha\gamma \Rightarrow \Delta < 0$$

αφού

$$0 \leq \beta^2 < 3\alpha\gamma \Rightarrow \alpha\gamma > 0 \Rightarrow -\alpha\gamma < 0$$

Επομένως η εξίσωση έχει δύο μιγαδικές (συζυγείς) ρίζες z_1, z_2

- β)** Ισχύουν:

$$z_1 + z_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad z_1 \cdot z_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Επίσης

$$z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1 \cdot z_2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} - 2 \frac{\gamma}{\alpha}$$

οπότε

$$w = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_1^2 + z_2^2}{z_1 z_2} = \frac{\frac{\beta^2}{\alpha^2} - 2 \frac{\gamma}{\alpha}}{\frac{\gamma}{\alpha}} = \frac{\beta^2 - 2\alpha\gamma}{\alpha\gamma} \in \mathbb{R}$$

Επιπλέον

$$w = \frac{\beta^2 - 2\alpha\gamma}{\alpha\gamma} < \frac{3\alpha\gamma - 2\alpha\gamma}{\alpha\gamma} = \frac{\alpha\gamma}{\alpha\gamma} = 1$$

οπότε

$$w < 1$$

- γ) i)** Είναι:

$$f(x) \cdot g(x) = \alpha \Leftrightarrow (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x) e^x = \alpha \Leftrightarrow \\ \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x = \alpha e^{-x} \Leftrightarrow x^3 + \frac{\beta}{\alpha} x^2 + \frac{\gamma}{\alpha} x - e^{-x} = 0$$

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $x^3 + \frac{\beta}{\alpha} x^2 + \frac{\gamma}{\alpha} x - e^{-x} = 0$ έχει μοναδική θετική λύση x_0 .

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = x^3 + \frac{\beta}{\alpha} x^2 + \frac{\gamma}{\alpha} x - e^{-x}$, $x \geq 0$

Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$\varphi'(x) = 3x^2 + 2\frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} + e^{-x}$$

Η διακρίνουσα Δ του τριώνυμου $3x^2 + 2\frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha}$ είναι: $\Delta = 4\frac{\beta^2}{\alpha^2} - 12\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{4}{\alpha^2}(\beta^2 - 3\alpha\gamma) < 0$

και επειδή ο συντελεστής του x^2 , στο τριώνυμο, είναι θετικός έχουμε:

$$3x^2 + 2\frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} > 0 \quad \text{για κάθε } x > 0$$

Επιπλέον $e^{-x} > 0$ για κάθε $x > 0$, οπότε $\varphi'(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$. Άρα η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της και

- $\varphi(0) = -1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^3 + \frac{\beta}{\alpha} x^2 + \frac{\gamma}{\alpha} x - e^{-x} \right) = +\infty$

αφού

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^3 + \frac{\beta}{\alpha} x^2 + \frac{\gamma}{\alpha} x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

Επομένως για το σύνολο τιμών της φ έχουμε $\varphi([0, +\infty)) = [-1, +\infty)$.

Το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της φ και $\varphi(0) \neq 0$, οπότε θα υπάρχει $x_0 \in (0, +\infty)$ και μάλιστα μοναδικό, αφού η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα, ώστε $\varphi(x_0) = 0$

Δηλαδή θα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, +\infty)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) \cdot g(x_0) = \alpha$ (1)

ii) Το πεδίο ορισμού της h είναι $A_h = (0, x_0) \cup (x_0, +\infty)$. Η συνάρτηση h της οποίας ο τύπος γράφεται

$$h(x) = \frac{g(x)f(x_0) - \alpha}{f(x_0)(x - x_0)} \stackrel{(1)}{=} \frac{g(x)f(x_0) - g(x_0)f(x_0)}{f(x_0)(x - x_0)} = \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

είναι παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της με

$$h'(x) = \frac{g'(x)(x - x_0) - g(x) + g(x_0)}{(x - x_0)^2} = \frac{1}{x - x_0} \left[g'(x) - \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] \quad (2)$$

Έστω $x > x_0$, τότε στο διάστημα $[x_0, x]$ η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (x_0, x)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi_1) = \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$ (3)

Από τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε:

$$h'(x) = \frac{1}{x - x_0} \left(g'(x) - g'(\xi_1) \right)$$

Η g είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με

- $g'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$ και
- $g''(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x > 0$ για κάθε $x > x_0 > 0$

Επομένως η συνάρτηση g' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε για κάθε $x > \xi_1$ έχουμε $g'(x) > g'(\xi_1)$ και κατά συνέπεια

$$h'(x) = \frac{1}{x - x_0} (g'(x) - g'(\xi_1)) > 0 \quad \text{για κάθε } x > x_0 > 0$$

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(x_0, +\infty)$

Έστω $0 < x < x_0$, τότε στο διάστημα $[x, x_0]$ η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (x, x_0)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi_2) = \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$ (4)

Από τις σχέσεις (2) και (4) έχουμε:

$$h'(x) = \frac{1}{x - x_0} (g'(x) - g'(\xi_2))$$

H g είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με

- $g'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$ και
- $g''(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x > 0$ για κάθε $x \in (0, x_0)$

Επομένως η συνάρτηση g' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε για κάθε $x < \xi_2$ έχουμε $g'(x) < g'(\xi_2)$ και κατά συνέπεια

$$h'(x) = \frac{1}{x - x_0} (g'(x) - g'(\xi_2)) > 0 \text{ για κάθε } x \in (0, x_0)$$

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, x_0)$

ΘΕΜΑ 13ο :

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, w οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση:

$$|z\bar{w} + 2i| = |z| \cdot |w|$$

a) Να αποδείξετε ότι $\operatorname{Im}(\bar{z}w) = 1$

β) Να αποδείξετε ότι $|z|^2 + |w|^2 + \operatorname{Re}(\bar{z}w) \geq \sqrt{3}$

γ) Αν $|z|^2 + |w|^2 + \operatorname{Re}(\bar{z}w) = \sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι $|z|^2 = |w|^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

δ) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $\frac{|z|^2 |w|^2}{|z|^2 |w|^2 + \operatorname{Re}(\bar{z}w)}$

ΛΥΣΗ

a) 1^{ος} τρόπος:

Είναι:

$$|z\bar{w} + 2i| = |z| \cdot |w| \Leftrightarrow$$

$$|z\bar{w} + 2i|^2 = |z|^2 \cdot |w|^2 \Leftrightarrow$$

$$(z\bar{w} + 2i) \cdot (\overline{z\bar{w} + 2i}) = |z|^2 \cdot |w|^2 \Leftrightarrow$$

$$(z\bar{w} + 2i) \cdot (\overline{z\bar{w}} + \overline{2i}) = |z|^2 \cdot |w|^2 \Leftrightarrow$$

$$(z\bar{w} + 2i) \cdot (\bar{z}w - 2i) = |z|^2 \cdot |w|^2 \Leftrightarrow$$

$$|z|^2 \cdot |w|^2 + 2i \cdot \bar{z}w - 2i \cdot z\bar{w} + 4 = |z|^2 \cdot |w|^2 \Leftrightarrow$$

$$2i \cdot (\bar{z}w - z\bar{w}) = -4 \Leftrightarrow 2i \cdot (\bar{z}w - \overline{z\bar{w}}) = -4 \Leftrightarrow$$

$$2i \cdot 2i \cdot \operatorname{Im}(\bar{z}w) = -4 \Leftrightarrow -4 \cdot \operatorname{Im}(\bar{z}w) = -4 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(\bar{z}w) = 1$$

2ος τρόπος:

Είναι:

$$\begin{aligned} |z\bar{w} + 2i| &= |z| \cdot |w| \Leftrightarrow |\overline{z\bar{w} + 2i}| = |\bar{z}| \cdot |w| \Leftrightarrow \\ |\bar{z}w - 2i| &= |\bar{z}w| \stackrel{\bar{z}w=u}{\Leftrightarrow} |u - 2i| = |u| \Leftrightarrow |u - (0+2i)| = |u - (0+0i)| \end{aligned}$$

Άρα η εικόνα του μιγαδικού u κινείται στη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος OA με $O(0,0)$ και $A(0,2)$, δηλαδή στην ευθεία με εξίσωση $y=1$, οπότε $\text{Im}(u)=1 \Rightarrow \text{Im}(\bar{z}w)=1$

β) Είναι:

$$\text{Im}(\bar{z}w) = 1$$

Άρα:

$$\bar{z}w = x + i \quad \text{με } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Από τη σχέση (1) και επειδή $\bar{z} \neq 0$ έχουμε $w = \frac{x+i}{\bar{z}}$ με $x \in \mathbb{R}$, οπότε είναι:

$$|w| = \left| \frac{x+i}{\bar{z}} \right| \Rightarrow |w| = \frac{|x+i|}{|\bar{z}|} \Rightarrow |w| = \frac{\sqrt{x^2+1}}{|z|} \quad (2)$$

Άρα έχουμε:

$$|z|^2 + |w|^2 + \text{Re}(\bar{z}w) \geq \sqrt{3} \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$|z|^2 + \frac{x^2+1}{|z|^2} + x \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$|z|^4 + x^2 + 1 + x|z|^2 \geq \sqrt{3} \cdot |z|^2 \Leftrightarrow$$

$$|z|^4 + (x - \sqrt{3})|z|^2 + x^2 + 1 \geq 0 \stackrel{y=|z|^2}{\Leftrightarrow}$$

$$y^2 + (x - \sqrt{3})y + x^2 + 1 \geq 0 \quad (3)$$

Η παράσταση $y^2 + (x - \sqrt{3})y + x^2 + 1$ είναι τριώνυμο ως προς y με διακρίνουσα:

$$\Delta = (x - \sqrt{3})^2 - 4(x^2 + 1) = x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 - 4x^2 - 4 =$$

$$= -3x^2 - 2\sqrt{3}x - 1 = -(3x^2 + 2\sqrt{3}x + 1) = -(\sqrt{3}x + 1)^2 \leq 0$$

Άρα η ανισότητα (3) αληθεύει για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, οπότε ισχύει $|z|^2 + |w|^2 + \text{Re}(\bar{z}w) \geq \sqrt{3}$

γ) Αν υποθέσουμε ότι $\Delta < 0$, τότε από το (β) ερώτημα προκύπτει ότι $|z|^2 + |w|^2 + \text{Re}(\bar{z}w) > \sqrt{3}$, που είναι άτοπο, άρα υποχρεωτικά είναι $\Delta = 0$

Έχουμε:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow -(\sqrt{3}x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (4)$$

Είναι:

$$|z|^2 + |w|^2 + \operatorname{Re}(\bar{z}w) = \sqrt{3} \Leftrightarrow y^2 + (x - \sqrt{3})y + x^2 + 1 = 0$$

και δεδομένου ότι $\Delta = 0$, προκύπτει ότι:

$$y = \frac{-x + \sqrt{3}}{2} \stackrel{(4)}{\Rightarrow} y = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = \frac{2\sqrt{3}}{3} \stackrel{y=|z|^2}{\Rightarrow} |z|^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (5)$$

Από τη σχέση (2) έχουμε:

$$|w|^2 = \frac{x^2 + 1}{|z|^2} \stackrel{(2),(5)}{\Rightarrow} |w|^2 = \frac{\frac{1}{3} + 1}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow |w|^2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow |w|^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (6)$$

Από τις σχέσεις (5) και (6) έχουμε: $|z|^2 = |w|^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

δ) Είναι:

$$\begin{aligned} \frac{|z|^2 |w|^2}{|z|^2 |w|^2 + \operatorname{Re}(\bar{z}w)} &= \frac{|\bar{z}|^2 |w|^2}{|\bar{z}|^2 |w|^2 + \operatorname{Re}(\bar{z}w)} = \\ &= \frac{|\bar{z}w|^2}{|\bar{z}w|^2 + \operatorname{Re}(\bar{z}w)} \stackrel{(1)}{=} \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1 + x} = \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1} \end{aligned}$$

Θεωρούμε συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + x + 1) - (x^2 + 1)(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + x + 1)^2}$$

Είναι:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ή } x > 1$

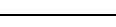
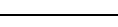
Επίσης έχουμε:

$$\circ \quad f(-1) = \frac{(-1)^2 + 1}{(-1)^2 + (-1) + 1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\circ \quad f(1) = \frac{1^2 + 1}{1^2 + 1 + 1} = \frac{2}{3}$$

$$\circ \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Το πρόσημο της $f'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	1	 2  $\frac{2}{3}$  1		

Η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_1 = -1$ με τιμή $f(-1) = 2$ και ελάχιστο στο $x_2 = 1$ με ελάχιστη τιμή $f(1) = \frac{2}{3}$, άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\frac{2}{3} \leq f(x) \leq 2$

Άρα η ελάχιστη τιμή της παράστασης $\frac{|z|^2|w|^2}{|z|^2|w|^2 + \operatorname{Re}(\bar{z}w)}$ είναι $\frac{2}{3}$ και η μέγιστη τιμή της είναι 2

ΘΕΜΑ 14ο :

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z , οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση:

$$|z + 2 - 4i|^2 + |z - 2 + 4i|^2 = 58$$

- a) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μηγαδικών z είναι ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = 9$ και να βρείτε τα κοινά σημεία του με τον άξονα y'

- β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $w = z + \frac{9}{z}$ είναι πραγματικός και για κάθε w ισχύει $-6 \leq w \leq 6$

είναι τρεις από τους παραπάνω μ

- $$|Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1| = 3|Z_1 + Z_2 + Z_3|$$

οι αριθμοί v , οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση:

όποιο $\theta \in \mathbb{R}$ και $\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

- 2

i) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών ν ανήκουν στην υπερβολή $C: \frac{x^2}{9} - y^2 = 1$

ii) Να βρείτε τα σημεία της υπερβολής $C: \frac{x^2}{9} - y^2 = 1$, που απέχουν ελάχιστη απόσταση από το σημείο A(0,3)

ΛΥΣΗ

$\exists \sigma \forall z \exists x \forall y \exists v$ $x, y, v \in R$

- a) Έχουμε:

$$|z+2-4i|^2 + |z-2+4i|^2 = 58 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} |x + yi + 2 - 4i|^2 + |x + yi - 2 + 4i|^2 &= 58 \Leftrightarrow \\ |x + 2 + (y - 4)i|^2 + |x - 2 + (y + 4)i|^2 &= 58 \Leftrightarrow \\ (x+2)^2 + (y-4)^2 + (x-2)^2 + (y+4)^2 &= 58 \Leftrightarrow \\ x^2 + 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 + x^2 - 4x + 4 + y^2 + 8y + 16 &= 58 \Leftrightarrow \\ 2x^2 + 2y^2 = 18 &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9 \Leftrightarrow C : x^2 + y^2 = 3^2 \end{aligned}$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 3$

Για $x = 0$ έχουμε:

$$0^2 + y^2 = 3^2 \Leftrightarrow y^2 = 3^2 \Leftrightarrow y = 3 \quad \text{ή} \quad y = -3$$

Οπότε τα κοινά σημεία του γεωμετρικού τόπου με τον άξονα y είναι τα $A(0,3)$ και $B(0,-3)$

- β)** Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 3$, άρα ισχύει:

$$|z| = 3 \Leftrightarrow |z|^2 = 9 \Leftrightarrow z\bar{z} = 9 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{9}{z} \quad \text{ή} \quad z = \frac{9}{\bar{z}} \quad (1)$$

Ισχύει:

$$\bar{w} = \bar{z} + \frac{9}{\bar{z}} \stackrel{(1)}{=} \frac{9}{z} + z = w$$

Άρα ο w είναι πραγματικός αριθμός.

Επίσης έχουμε:

$$w = z + \frac{9}{z} \stackrel{(1)}{=} z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) \quad (2)$$

Ισχύει $|z| = 3$, οπότε $-3 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 3 \Leftrightarrow -6 \leq 2\operatorname{Re}(z) \leq 6 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} -6 \leq w \leq 6$

- γ)** Για τους μιγαδικούς z_1, z_2 και z_3 ισχύουν οι σχέσεις:

$$z_1\bar{z}_1 = 9 \Leftrightarrow \bar{z}_1 = \frac{9}{z_1}, \quad z_2\bar{z}_2 = 9 \Leftrightarrow \bar{z}_2 = \frac{9}{z_2} \quad \text{και} \quad z_3\bar{z}_3 = 9 \Leftrightarrow \bar{z}_3 = \frac{9}{z_3}$$

Είναι:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2 + z_3| &= \left| \overline{z_1 + z_2 + z_3} \right| = \left| \overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} \right| = \left| \frac{9}{z_1} + \frac{9}{z_2} + \frac{9}{z_3} \right| = \\ &= 9 \cdot \left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right| = 9 \cdot \frac{|z_2z_3 + z_1z_3 + z_1z_2|}{|z_1z_2z_3|} = 9 \cdot \frac{|z_2z_3 + z_1z_3 + z_1z_2|}{|z_1| \cdot |z_2| \cdot |z_3|} = \\ &= \frac{9 \cdot |z_2z_3 + z_1z_3 + z_1z_2|}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{|z_2z_3 + z_1z_3 + z_1z_2|}{3} \end{aligned}$$

Δείξαμε ότι:

$$|z_1 + z_2 + z_3| = \frac{|z_2z_3 + z_1z_3 + z_1z_2|}{3}$$

Άρα έχουμε:

$$|z_2z_3 + z_1z_3 + z_1z_2| = 3|z_1 + z_2 + z_3|$$

δ) i) Έχουμε:

$$\begin{aligned} v \operatorname{su}n\theta - i \eta \mu \theta &= z(w - \bar{z}) + \bar{z}(w - z) + 2|z|^2 - |w|^2 + 3 \Leftrightarrow \\ v \operatorname{su}n\theta - i \eta \mu \theta &= z \cdot w - z \cdot \bar{z} + \bar{z} \cdot w - z \cdot \bar{z} + 2z \cdot \bar{z} - |w|^2 + 3 \Leftrightarrow \\ v \operatorname{su}n\theta - i \eta \mu \theta &= z \cdot w + \bar{z} \cdot w - |w|^2 + 3 \Leftrightarrow \\ v \operatorname{su}n\theta - i \eta \mu \theta &= z \cdot w + \bar{z} \cdot w - w \cdot \bar{w} + 3 \Leftrightarrow \\ v \operatorname{su}n\theta - i \eta \mu \theta &= w \cdot (z + \bar{z} - \bar{w}) + 3 \Leftrightarrow \\ v \operatorname{su}n\theta - i \eta \mu \theta &= 2x \cdot (2x - 2x) + 3 \Leftrightarrow \\ v \operatorname{su}n\theta - i \eta \mu \theta &= 3 \Leftrightarrow v \operatorname{su}n\theta = 3 + i \eta \mu \theta \quad (3) \end{aligned}$$

Επειδή $\theta \in \mathbb{R}$ και $\theta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ συμπεραίνουμε ότι $\operatorname{su}n\theta \neq 0$, οπότε διαιρώντας και τα δύο μέλη της σχέσης (3) με $\operatorname{su}n\theta$ ισοδύναμα έχουμε:

$$v = \frac{3}{\operatorname{su}n\theta} + i \frac{\eta \mu \theta}{\operatorname{su}n\theta} \Leftrightarrow v = \frac{3}{\operatorname{su}n\theta} + i \varepsilon \varphi \theta$$

Αν θέσουμε $v = \alpha + \beta i$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τότε έχουμε:

$$\frac{3}{\operatorname{su}n\theta} = \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{\operatorname{su}n\theta} = \frac{\alpha}{3} \quad \text{και} \quad \varepsilon \varphi \theta = \beta$$

Ισχύει:

$$\frac{1}{\operatorname{su}n^2\theta} = 1 + \varepsilon \varphi^2 \theta, \quad \theta \in \mathbb{R} \quad \text{με} \quad \theta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

Οπότε έχουμε:

$$\frac{\alpha^2}{9} = 1 + \beta^2 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{9} - \beta^2 = 1$$

Άρα οι εικόνες των μιγαδικών v ανήκουν στην υπερβολή $C: \frac{x^2}{9} - y^2 = 1$

ii) Εστω $M(\alpha, \beta)$ σημείο της υπερβολής $C: \frac{x^2}{9} - y^2 = 1$

Η απόσταση του σημείου $A(0, 3)$ από το σημείο $M(\alpha, \beta)$ είναι:

$$d(A, M) = d = \sqrt{(\alpha - 0)^2 + (\beta - 3)^2} = \sqrt{\alpha^2 + (\beta - 3)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 6\beta + 9} \quad (4)$$

Επειδή το σημείο $M(\alpha, \beta) \in C$ έχουμε:

$$\frac{\alpha^2}{9} - \beta^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{9} = 1 + \beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = 9 + 9\beta^2$$

Με αντικατάσταση του α^2 στη σχέση (4) έχουμε:

$$d = \sqrt{9 + 9\beta^2 + \beta^2 - 6\beta + 9} = \sqrt{10\beta^2 - 6\beta + 18}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $d(\beta) = \sqrt{10\beta^2 - 6\beta + 18}$, $\beta \in \mathbb{R}$

Για κάθε $\beta \in \mathbb{R}$ είναι:

$$d'(\beta) = \frac{(10\beta^2 - 6\beta + 18)'}{2\sqrt{10\beta^2 - 6\beta + 18}} = \frac{20\beta - 6}{2\sqrt{10\beta^2 - 6\beta + 18}} = \frac{10\beta - 3}{\sqrt{10\beta^2 - 6\beta + 18}}$$

Είναι:

- $d'(\beta) = 0 \Leftrightarrow 10\beta - 3 = 0 \Leftrightarrow 10\beta = 3 \Leftrightarrow \beta = \frac{3}{10}$
- $d'(\beta) > 0 \Leftrightarrow 10\beta - 3 > 0 \Leftrightarrow 10\beta > 3 \Leftrightarrow \beta > \frac{3}{10}$

Το πρόσημο της $d'(\beta)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης d φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

β	$-\infty$	$\frac{3}{10}$	$+\infty$
$d'(\beta)$	-	0	+
$d(\beta)$			

Ελάχιστο

Η συνάρτηση d παρουσιάζει ελάχιστο για $\beta = \frac{3}{10}$

Βρίσκουμε τις τετμημένες των σημείων της υπερβολής με τεταγμένη $\beta = \frac{3}{10}$

Έχουμε:

$$\frac{\alpha^2}{9} - \left(\frac{3}{10}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{9} = 1 + \frac{9}{100} \Leftrightarrow \alpha^2 = 9 \cdot \frac{109}{100} \Leftrightarrow \alpha = \pm \frac{3\sqrt{109}}{10}$$

Οπότε τα σημεία της υπερβολής που έχουν την ελάχιστη απόσταση από το σημείο $A(0,3)$ είναι:

$$M_1\left(\frac{3\sqrt{109}}{10}, \frac{3}{10}\right) \text{ και } M_2\left(-\frac{3\sqrt{109}}{10}, \frac{3}{10}\right)$$

ΘΕΜΑ 15ο :

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w και τη συνάρτηση $f(z) = z + 1 - i$ που ικανοποιούν τις σχέσεις:

- $| (1+2i)w - 5 | = 3\sqrt{5}$

- $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$

a) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών w

b) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z

γ) Αν οι εικόνες των μιγαδικών w και z ανήκουν στον κύκλο με κέντρο $K(1, -2)$ και ακτίνα

$R = 3$ και στην ευθεία $y = 1$ αντιστοίχως, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί αριθμοί w και z για τους οποίους ισχύει $z = w$

ii) Να βρείτε τους w , που είναι πραγματικοί αριθμοί.

iii) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του μέτρου $|w - 5 + 6i|$

- δ) Έστω $M(x, y)$ η εικόνα ενός μιγαδικού αριθμού z με $\operatorname{Re}(z) > 0$, η οποία κινείται στην ευθεία $y = 1$. Αν το σημείο M απομακρύνεται από τον άξονα y' και ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι ίσος με 1 cm/s , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας, την οποία σχηματίζει η διανυσματική ακτίνα του μιγαδικού z με τον άξονα x' , τη χρονική στιγμή κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο $(3, 1)$

ΛΥΣΗ

- a) Είναι:

$$\begin{aligned} |(1+2i)w - 5| = 3\sqrt{5} &\Leftrightarrow \left| (1+2i) \left(w - \frac{5}{1+2i} \right) \right| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow \\ |1+2i| \left| w - \frac{5(1-2i)}{5} \right| &= 3\sqrt{5} \Leftrightarrow |w - (1-2i)| = 3 \end{aligned}$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος με κέντρο $K(1, -2)$ και ακτίνα $R = 3$

- β) Είναι:

$$\overline{f(z)} = f(\bar{z}) \Leftrightarrow \bar{z} + 1 + i = z + 1 - i \Leftrightarrow z - \bar{z} = 2i \Leftrightarrow 2yi = 2i \Leftrightarrow y = 1$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών Z στο μιγαδικό επίπεδο είναι η ευθεία με εξίσωση $y = 1$

- γ) i) Ο παραπάνω κύκλος και η ευθεία $y = 1$ εφάπτονται, αφού $d(K, \varepsilon) = \frac{|-2-1|}{\sqrt{1}} = 3 = R$. Άρα υπάρχουν μοναδικοί αριθμοί w και z για τους οποίους ισχύει $z = w$

- ii) Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του $w = x + yi$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος με κέντρο $K(1, -2)$ και ακτίνα $R = 3$, που έχει εξίσωση $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$
Για $y = 0$ από την εξίσωση του κύκλου προκύπτει:

$$(x-1)^2 = 5 \Leftrightarrow x = \sqrt{5} + 1 \quad \text{ή} \quad x = -\sqrt{5} + 1$$

Επομένως οι αριθμοί w , που είναι πραγματικοί αριθμοί είναι:

$$w = \sqrt{5} + 1 + 0i = \sqrt{5} + 1 \quad \text{και} \quad w = -\sqrt{5} + 1 + 0i = -\sqrt{5} + 1$$

- iii) Το μέτρο $|w - (5 - 6i)|$ ισούται με την απόσταση της εικόνας του w από το σημείο $A(5, -6)$, που είναι η εικόνα του μιγαδικού $5 - 6i$
Άρα η μέγιστη τιμή του μέτρου $|w - (5 - 6i)|$ είναι:

$$\begin{aligned} |w - 5 + 6i|_{\max} &= (KA) + R = \sqrt{(5-1)^2 + (-6+2)^2} + 3 = \\ &= \sqrt{16+16} + 3 = \sqrt{32} + 3 = 4\sqrt{2} + 3 \end{aligned}$$

- δ) Έστω θ η γωνία που σχηματίζει η διανυσματική ακτίνα του μιγαδικού αριθμού z με τον άξονα x' , τότε:

$$\varepsilon \phi \theta = \frac{y}{x} \stackrel{y=1}{\Rightarrow} \varepsilon \phi \theta = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

Επειδή η τετμημένη x μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου t είναι:

$$\varepsilon \phi \theta(t) = \frac{1}{x(t)}$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη ως προς t έχουμε:

$$\frac{1}{\sigma v^2 \theta(t)} \cdot \theta'(t) = -\frac{x'(t)}{x^2(t)} \quad (1)$$

Όμως:

$$\frac{1}{\sigma v^2 \theta(t)} = 1 + \varepsilon \phi^2 \theta(t) \quad (2)$$

Η σχέση (1) με βάση τη σχέση (2) γράφεται:

$$(1 + \varepsilon \phi^2 \theta(t)) \cdot \theta'(t) = -\frac{x'(t)}{x^2(t)} \quad (3)$$

Έστω t_0 η χρονική στιγμή κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο (3,1), τότε για

$t = t_0$ από τη σχέση (3) έχουμε:

$$(1 + \varepsilon \phi^2 \theta(t_0)) \cdot \theta'(t_0) = -\frac{x'(t_0)}{x^2(t_0)} \quad (4)$$

Επίσης έχουμε:

$$x(t_0) = 3, \quad x'(t_0) = 1$$

και

$$1 + \varepsilon \phi^2 \theta(t_0) = 1 + \frac{1}{x^2(t_0)} = 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (4) έχουμε:

$$\frac{10}{9} \cdot \theta'(t_0) = -\frac{1}{9} \Leftrightarrow \theta'(t_0) = -\frac{1}{10} \text{ rad / s}$$

Δηλαδή καθώς το σημείο M απομακρύνεται από τον άξονα y' η γωνία της διανυσματικής ακτίνας του z με τον άξονα x' μειώνεται.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 2014

ΘΕΜΑ 16ο :

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: R \rightarrow R$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$x^2 f(x) - 2x^5 + 1 - \sigma v^2 x = 0, \text{ για κάθε } x \in R$$

- a) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f
- β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.
- γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in R^*$ είναι $f(x) > 2x^3 - 1$
- δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x) = f(x) + \frac{\eta \mu^2 x}{x^2}$ αντιστρέφεται και να ορίσετε την F^{-1}

ΛΥΣΗ

- a) Για $x \neq 0$ είναι:

$$f(x) = 2x^3 - \frac{1-\sigma v^2 x}{x^2} = 2x^3 - \frac{\eta \mu^2 x}{x^2}$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x = 0$ έχουμε:

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x^3 - \frac{\eta \mu^2 x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x^3) - \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta \mu x}{x} \right)^2 = 0 - 1 = -1$$

Επομένως:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - \frac{\eta \mu^2 x}{x^2}, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$$

- β) • Από υπόθεση η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R , άρα και στο διάστημα $[0, \pi]$
• $f(0) \cdot f(\pi) = (-1) \cdot (2\pi^3) = -2\pi^3 < 0$

Επομένως ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[0, \pi]$, άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, \pi)$, δηλαδή μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

γ) Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - 2x^3 + 1$, $x \in R^*$, τότε:

$$h(x) = 2x^3 - \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} - 2x^3 + 1 = 1 - \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} = \frac{x^2 - \eta\mu^2 x}{x^2}$$

Είναι γνωστό ότι για κάθε $x \in R$ ισχύει:

$$|\eta\mu x| \leq |x| \Leftrightarrow \eta\mu^2 x \leq x^2 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 - \eta\mu^2 x$$

και η ισότητα ισχύει μόνον για $x = 0$

Η συνάρτηση h όμως έχει πεδίο ορισμού το R^* , επομένως $x^2 - \eta\mu^2 x > 0$, άρα $h(x) > 0$ για κάθε $x \in R^*$, δηλαδή $f(x) - 2x^3 + 1 > 0 \Leftrightarrow f(x) > 2x^3 - 1$ για κάθε $x \in R^*$

δ) Η συνάρτηση f ορίζεται στο R και η συνάρτηση $\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}$ ορίζεται στο R^* , επομένως η συνάρτηση F ορίζεται στο R^*

Για κάθε $x \in R^*$ είναι:

$$F(x) = f(x) + \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} = 2x^3 - \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} + \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} = 2x^3$$

Έστω $x_1, x_2 \in R^*$ με $F(x_1) = F(x_2)$, τότε έχουμε:

$$2x_1^3 = 2x_2^3 \Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η F είναι «1-1», οπότε αντιστρέφεται.

Για να βρούμε τον τύπο της F^{-1} λύνουμε την $y = F(x)$ ως προς x στο R^*

Είναι:

$$\begin{cases} y = F(x) \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x^3 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = \frac{y}{2} \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{y}{2}} & , y > 0 \\ -\sqrt[3]{-\frac{y}{2}} & , y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow F^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{y}{2}} & , y > 0 \\ -\sqrt[3]{-\frac{y}{2}} & , y < 0 \end{cases}$$

$$\text{Άρα } F^{-1}: R^* \rightarrow R \text{ με } F^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{x}{2}} & , x > 0 \\ -\sqrt[3]{-\frac{x}{2}} & , x < 0 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 17ο :

Έστω συνάρτηση $f: R \rightarrow R$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x) + f(x) = (x^2 - \eta\mu^2 x)^3$ (1)
για κάθε $x \in R$. Να αποδείξετε ότι:

α) $0 \leq f(x) \leq x^2 - \eta\mu^2 x$ για κάθε $x \in R$

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0

γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$

ΛΥΣΗ

a) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$|\eta\mu x| \leq |x| \Leftrightarrow \eta\mu^2 x \leq x^2 \Leftrightarrow x^2 - \eta\mu^2 x \geq 0$$

Από τη σχέση (1) έχουμε ότι:

$$f^3(x) + f(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x)(f^2(x) + 1) \geq 0$$

που σημαίνει ότι:

$$f(x) \geq 0 \quad (2)$$

οπότε από (1) προκύπτει ότι:

$$f^3(x) \leq f^3(x) + f(x) = (x^2 - \eta\mu^2 x)^3 \Rightarrow$$

$$f^3(x) \leq (x^2 - \eta\mu^2 x)^3$$

Άρα

$$f(x) \leq x^2 - \eta\mu^2 x \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε ότι:

$$0 \leq f(x) \leq x^2 - \eta\mu^2 x \quad (4)$$

b) Για $x = 0$ από τη σχέση (4) έχουμε:

$$0 \leq f(0) \leq 0 \Rightarrow f(0) = 0 \quad (5)$$

Επίσης είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$ και
- $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - \eta\mu^2 x) = 0$

Άρα από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad (6)$

Από τις σχέσεις (5) και (6) έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, οπότε η f είναι συνεχής στο 0

γ) Από τη σχέση (4) για $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε:

$$0 \leq \frac{f(x)}{x^2} \leq 1 - \frac{\eta\mu^2 x}{x^2}$$

Επίσης είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$ και
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 - \left(\frac{\eta\mu x}{x} \right)^2 \right] = 1 - 1^2 = 0$

Άρα από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$

ΘΕΜΑ 18ο :

Έστω συνεχής συνάρτηση $f: [0, 8] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x) + f(x) = x + 2$ (1)
για κάθε $x \in [0, 8]$. Να αποδείξετε ότι:

- Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- $f\left(\frac{23}{8}\right) = \frac{3}{2}$
- Η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}
- Οι γραφικές παραστάσεις C_f και $C_{f^{-1}}$ των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα, έχουν
ένα ακριβώς κοινό σημείο και να βρείτε τις συντεταγμένες του .

ΛΥΣΗ**a) 1^{ος} τρόπος:**

Έστω $x_1, x_2 \in [0, 8]$ με $x_1 < x_2$, τότε $x_1 - x_2 < 0$

Είναι:

$$f^3(x_1) + f(x_1) = x_1 + 2$$

$$f^3(x_2) + f(x_2) = x_2 + 2$$

Αφαιρούμε κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις, οπότε έχουμε:

$$f^3(x_1) - f^3(x_2) + f(x_1) - f(x_2) = x_1 + 2 - x_2 - 2 \Rightarrow$$

$$(f(x_1) - f(x_2)) \cdot (f^2(x_1) + f(x_1)f(x_2) + f^2(x_2)) + f(x_1) - f(x_2) = x_1 - x_2 \Rightarrow$$

$$(f(x_1) - f(x_2)) \cdot \underbrace{\left(f^2(x_1) + f(x_1)f(x_2) + f^2(x_2) + 1 \right)}_{>0} = \underbrace{x_1 - x_2}_{<0} \Rightarrow$$

$$f(x_1) - f(x_2) < 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

2^{ος} τρόπος:

Έστω ότι η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα, τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in [0, 8]$ με

$x_1 < x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1) \geq f(x_2)$, άρα και $f^3(x_1) \geq f^3(x_2)$, οπότε

$$f^3(x_1) + f(x_1) \geq f^3(x_2) + f(x_2) \stackrel{(2), (3)}{\Rightarrow} x_1 + 2 \geq x_2 + 2 \Rightarrow x_1 \geq x_2,$$

που είναι άτοπο.

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta = [0, 8]$, οπότε το σύνολο τιμών της είναι $f(\Delta) = [f(0), f(8)]$. Αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε τις τιμές $f(0)$ και $f(8)$

$$\text{Για } x = 0 \text{ από τη σχέση (1) έχουμε } f^3(0) + f(0) = 2 \Leftrightarrow f^3(0) + f(0) - 2 = 0 \quad (2)$$

Χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner

1	0	1	-2	1
///	1	1	2	
1	1	2	0	

η εξίσωση (2) ισοδύναμα γράφεται

$$(f(0)-1)\underbrace{(f^2(0)+f(0)+2)}_{\neq 0}=0 \Leftrightarrow f(0)=1$$

Για $x=8$ από τη σχέση (1) έχουμε $f^3(8)+f(8)=10 \Leftrightarrow f^3(8)+f(8)-10=0 \quad (3)$

Χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner

1	0	1	-10	2
///	2	4	10	
1	2	5	0	

η εξίσωση (3) ισοδύναμα γράφεται

$$(f(8)-2)\underbrace{(f^2(8)+2f(8)+5)}_{\neq 0}=0 \Leftrightarrow f(8)=2$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι:

$$f(\Delta) = [1, 2]$$

- β)** Η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $[0, 8]$ και $1=f(0) \neq f(8)=2$, οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών η f θα παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(0)=1$ και $f(8)=2$, δηλαδή θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 8)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=\frac{3}{2}$

Για $x=x_0$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\begin{aligned} f^3(x_0) + f(x_0) &= x_0 + 2 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \frac{3}{2} = x_0 + 2 \Rightarrow \\ \frac{27}{8} + \frac{3}{2} &= x_0 + 2 \Rightarrow x_0 = \frac{27}{8} + \frac{12}{8} - \frac{16}{8} \Rightarrow x_0 = \frac{23}{8} \end{aligned}$$

- γ)** Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, 8]$, άρα είναι και «1-1» στο διάστημα αυτό, οπότε αντιστρέφεται. Επομένως ορίζεται η συνάρτηση f^{-1} , η οποία έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της συνάρτησης f , δηλαδή $A_{f^{-1}} = [1, 2]$

Επίσης για κάθε $x \in [0, 8]$ έχουμε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

οπότε η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$y^3 + y = f^{-1}(y) + 2 \Leftrightarrow f^{-1}(y) = y^3 + y - 2, \quad y \in [1, 2]$$

Επομένως:

$$f^{-1} : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{με} \quad f^{-1}(x) = x^3 + x - 2$$

- δ)** Για να βρούμε το κοινό σημείο των C_f και $C_{f^{-1}}$ λύνουμε το σύστημα:

$$(\Sigma) : \begin{cases} y = f(x) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ y = f^{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3 + y - 2 = x \\ y = f^{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3 + y - 2 = x \\ x^3 + x - 2 = y \end{cases}$$

Αφαιρούμε κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις, οπότε έχουμε:

$$y^3 - x^3 + y - x = x - y \Leftrightarrow y^3 - x^3 + 2(y - x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(y-x)(y^2 + xy + x^2) + 2(y-x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(y-x)\underbrace{(y^2 + xy + x^2 + 2)}_{>0} = 0 \Leftrightarrow$$

$$y-x=0 \Leftrightarrow y=x$$

Το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$(\Sigma) : \begin{cases} y = x \\ x^3 + x - 2 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x^3 + x - 2 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x^3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt[3]{2} \\ x = \sqrt[3]{2} \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$$

Άρα οι C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$

ΘΕΜΑ 19ο :

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: R \rightarrow R$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1, -e - 1)$. Δίνονται επίσης οι μιγαδικοί $z = f(x) + \sqrt{2}f'(x)i$ και $w = f(x) + 2f''(x)i$ με $|z| = \sqrt{3}(1 + e^x)$ (1)

- a) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -(1 + e^x)$
- β) Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $(-\infty, -1)$
- γ) Να βρείτε το είδος της γραμμής που διαγράφουν οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο.
- δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g με $g(x) = \operatorname{Re}(z \cdot \bar{w})$ δεν έχει τοπικά ακρότατα.

ΛΥΣΗ

- a) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$|z| = \sqrt{f^2(x) + 2f'^2(x)} = \sqrt{3f^2(x)} = \sqrt{3}|f(x)|$$

και λόγω της (1) έχουμε ότι $|f(x)| = 1 + e^x > 0$, που σημαίνει ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και δε μηδενίζεται στο R , οπότε ότι διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R . Είναι $f(1) = -1 - e < 0$ άρα $f(x) < 0$, για κάθε $x \in R$. Επομένως $f(x) = -1 - e^x$, $x \in R$

- β) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f'(x) = -e^x < 0$$

οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο R

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-1 - e^x) = -1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = -1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (-1 - e^x) = -\infty$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $(-\infty, -1)$

- γ) Αν $z = \kappa + \lambda i$, με $\kappa, \lambda \in R$ θα είναι: $\begin{cases} \kappa = f(x) \\ \lambda = \sqrt{2}f'(x) \end{cases}$, οπότε $\lambda = \sqrt{2} \cdot \kappa$, με $\kappa, \lambda \in R$

Όμως από το (β) ερώτημα έχουμε ότι $f(x) < -1 \Leftrightarrow \kappa < -1$, που σημαίνει ότι η εικόνα του z ανήκει στην ημιευθεία $y = \sqrt{2} \cdot x$ με $x < -1$, (εξαιρείται η αρχή της)

δ) Έχουμε:

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{w} &= \left(f(x) + \sqrt{2}f(x) \cdot i \right) \cdot \left(f(x) - 2f^2(x) \cdot i \right) = \\ &= f^2(x) + 2\sqrt{2}f^3(x) + \left(\sqrt{2}f^2(x) - 2f^3(x) \right) \cdot i \end{aligned}$$

Είναι:

$$\operatorname{Re}(z \cdot \bar{w}) = f^2(x) + 2\sqrt{2}f^3(x), \text{ οπότε } g(x) = f^2(x) + 2\sqrt{2}f^3(x), x \in \mathbb{R}$$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγισμών συναρτήσεων με

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2f(x)f'(x)\left(1 + 3\sqrt{2}f(x)\right) = 2(-1 - e^x)(-e^x)\left[1 + 3\sqrt{2}(-1 - e^x)\right] = \\ &= 2e^x(1 + e^x)\left(1 - 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}e^x\right) < 0, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Οπότε η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} , άρα δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

ΘΕΜΑ 20ο :

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x+2)-5}{x-1} = 6$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $f(3) = 5$ και ii) $f'(3) = 6$

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2-f(x)}{\eta \mu(x-3)}$

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = xf(x) - 3x - 7$ συντονίζεται στο $x = 3$, τέμνει τον άξονα x' του λάχιστον σε ένα σημείο.

δ) Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $g'(x) \leq f'(3)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = x^6$, έχει το πολύ μία ρίζα μεγαλύτερη του 1.

ΛΥΣΗ

α) i) Για $x \neq 1$, θέτουμε $w(x) = \frac{f(x+2)-5}{x-1}$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 1} w(x) = 6 \quad \text{και} \quad f(x+2) = (x-1)w(x) + 5$$

Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x+2) = \lim_{x \rightarrow 1} [(x-1)w(x)+5] = 5$$

Η συνάρτηση $f(x+2)$ είναι συνεχής, ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, οπότε έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x+2) = f(1+2) = f(3)$$

οπότε:

$$f(3) = 5$$

ii) Αρκεί να δείξουμε ότι για x κοντά στο $x_0 = 3$ είναι $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = 6$

Αν θέσουμε $x = u + 2$ τότε όταν $x \rightarrow 3$ το $u \rightarrow 1$, οπότε έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{f(u+2)-f(3)}{u-1} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{f(u+2)-5}{u-1} = 6$$

Επομένως:

$$f'(3) = 6$$

β) Για x κοντά στο $x_0 = 3$ είναι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2-f(x)}{\eta\mu(x-3)} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{x+2-f(x)}{x-3}}{\frac{\eta\mu(x-3)}{x-3}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2-f(x)-5+5}{\eta\mu(x-3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{x-3-(f(x)-5)}{x-3}}{\frac{\eta\mu(x-3)}{x-3}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3-(f(x)-f(3))}{\eta\mu(x-3)} = \frac{1-f'(3)}{1} = 1-6=-5, \text{ γιατί} \\ &\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\eta\mu(x-3)}{x-3} \stackrel{x-3=u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = f'(3) \end{aligned}$$

Σχόλιο: Δεν μπορούμε να εργαστούμε με τον κανόνα De L'Hospital γιατί δεν γνωρίζουμε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα της μορφής $(\alpha, 3) \cup (3, \beta)$

γ) Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο \mathbb{R} , áρα και στο διάστημα $[0, 3]$, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

Επίσης ισχύουν:

- $h(0) = -7 < 0$ και
- $h(3) = 3f(3) - 9 - 7\sin 3 = 15 - 9 - 7\sin 3 = 6 - 7\sin 3 > 0$,

αφού $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$ και στο 2° τεταρτημόριο το συνημίτονο είναι αρνητικός αριθμός.

Επομένως $h(0) \cdot h(3) < 0$

Άρα η συνάρτηση h ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[0, 3]$, οπότε η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(0, 3)$, δηλαδή η γραφική παράσταση της h τέμνει τον άξονα x' σε ένα τουλάχιστον σημείο.

δ) Έστω ότι η εξίσωση $g(x) = x^6$ έχει δύο τουλάχιστον λύσεις x_1 και x_2 με $1 < x_1 < x_2$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = g(x) - x^6$, $x \in [x_1, x_2]$. Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$,

παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με παράγωγο $\varphi'(x) = g'(x) - 6x^5$ και ισχύει $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$

Άρα η συνάρτηση φ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $\varphi'(\xi) = 0$

Είναι:

$$\varphi'(\xi) = 0 \Leftrightarrow g'(\xi) - 6\xi^5 = 0 \Leftrightarrow g'(\xi) = 6\xi^5$$

Όμως:

$$g'(\xi) \leq f'(3) \Leftrightarrow g'(\xi) \leq 6$$

Άρα:

$$6\xi^5 \leq 6 \Leftrightarrow \xi^5 \leq 1 \Leftrightarrow \xi \leq 1 \text{ που είναι άτοπο, αφού } 1 < x_1 < \xi < x_2$$

Επομένως η εξίσωση $g(x) = x^6$, έχει το πολύ μία ρίζα μεγαλύτερη του 1

ΘΕΜΑ 21ο :

Έστω συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο R , η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$ και η συνάρτηση $g: R \rightarrow R$ με $g(x) = \ln f(x)$

Αν οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με $\alpha < \beta < \gamma$ και οι $f(\alpha), f(\beta), f(\gamma)$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε να αποδείξετε ότι:

I) Υπάρχουν $x_1, x_2 \in R$, ώστε να ισχύει:

$$f(x_2) \cdot f'(x_1) = f(x_1) \cdot f'(x_2)$$

II) Υπάρχει $\xi \in R$, ώστε να ισχύει:

$$f(\xi) \cdot f''(\xi) = (f'(\xi))^2$$

ΛΥΣΗ

I) Οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ με $\alpha < \beta < \gamma$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Αν ονομάσουμε ω τη διαφορά της προόδου, τότε έχουμε:

$$2\beta = \alpha + \gamma \Rightarrow \beta - \alpha = \gamma - \beta = \omega \quad (1) \quad \text{με } \omega > 0$$

Οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί $f(\alpha), f(\beta), f(\gamma)$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. Αν ονομάσουμε λ το λόγο της προόδου, τότε έχουμε:

$$f^2(\beta) = f(\alpha) \cdot f(\gamma) \Rightarrow \frac{f(\beta)}{f(\alpha)} = \frac{f(\gamma)}{f(\beta)} = \lambda \quad (2) \quad \text{με } \lambda > 0$$

$$\text{Από τη σχέση (2) έχουμε } \ln \frac{f(\beta)}{f(\alpha)} = \ln \frac{f(\gamma)}{f(\beta)} \quad (3)$$

Η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha, \beta]$ και $[\beta, \gamma]$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο R , με $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$, οπότε υπάρχουν:

$$\bullet \quad x_1 \in (\alpha, \beta) \text{ τέτοιο, ώστε } g'(x_1) = \frac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha} \stackrel{(1)}{=} \frac{\ln f(\beta) - \ln f(\alpha)}{\omega} = \frac{1}{\omega} \cdot \ln \frac{f(\beta)}{f(\alpha)} \quad (4)$$

$$\bullet \quad x_2 \in (\beta, \gamma) \text{ τέτοιο, ώστε } g'(x_2) = \frac{g(\gamma) - g(\beta)}{\gamma - \beta} \stackrel{(1)}{=} \frac{\ln f(\gamma) - \ln f(\beta)}{\omega} = \frac{1}{\omega} \cdot \ln \frac{f(\gamma)}{f(\beta)} \quad (5)$$

Από τις σχέσεις (3), (4), (5) έχουμε:

$$g'(x_1) = g'(x_2) \Rightarrow \frac{f'(x_1)}{f(x_1)} = \frac{f'(x_2)}{f(x_2)} \Rightarrow f(x_2) \cdot f'(x_1) = f(x_1) \cdot f'(x_2)$$

II) Η συνάρτηση g' είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[x_1, x_2]$ με :

$$g''(x) = \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)' = \frac{f''(x) \cdot f(x) - (f'(x))^2}{(f(x))^2} \quad (6)$$

και $g'(x_1) = g'(x_2)$, επομένως η συνάρτηση g' ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $g''(\xi) = 0$

Οπότε από τη σχέση (6) έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{f''(\xi) \cdot f(\xi) - (f'(\xi))^2}{(f(\xi))^2} &= 0 \Rightarrow \\ f''(\xi) \cdot f(\xi) - (f'(\xi))^2 &= 0 \Rightarrow \\ f''(\xi) \cdot f(\xi) &= (f'(\xi))^2 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 22ο :

Έστω οι συναρτήσεις $f, g : R \rightarrow R$ με $g(0) = 2e$, οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση:

$$2f(x) + f(1-y) + g(x) - g(y) = 2e^x + e^y + 3 \quad \text{για κάθε } x, y \in R \quad (1)$$

a) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = 2e^x - e^{1-x} + 1 \quad \text{και} \quad g(x) = -2e^x + 2e^{1-x} + 2$$

β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις f, g και $f-g$

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g των συναρτήσεων f, g αντίστοιχα, έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο.

δ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$4e^{x^2-2x} < 4e^{x-2} + 3e^{-x^2+2x+1} - 3e^{-x+3}$$

ΛΥΣΗ

a) Για $y = x$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$2f(x) + f(1-x) = 3e^x + 3 \quad (2)$$

Αν στη σχέση (2) θέσουμε όπου x το $1-x$ έχουμε:

$$2f(1-x) + f(x) = 3e^{1-x} + 3 \quad (3)$$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (2) και (3)

$$\begin{cases} 2f(x) + f(1-x) = 3e^x + 3 \\ f(x) + 2f(1-x) = 3e^{1-x} + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4f(x) - 2f(1-x) = -6e^x - 6 \\ f(x) + 2f(1-x) = 3e^{1-x} + 3 \end{cases}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες σχέσεις έχουμε:

$$-3f(x) = -6e^x + 3e^{1-x} - 3 \Rightarrow f(x) = 2e^x - e^{1-x} + 1 \quad (4)$$

Για $y = 0$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\begin{aligned} 2f(x) + f(1) + g(x) - g(0) &= 2e^x + 4 \stackrel{(4)}{\Rightarrow} \\ 4e^x - 2e^{1-x} + 2 + f(1) + g(x) - g(0) &= 2e^x + 4 \end{aligned}$$

Είναι:

$$f(1) = 2e = g(0)$$

οπότε έχουμε:

$$g(x) = -2e^x + 2e^{1-x} + 2$$

β) Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

- $f'(x) = 2e^x - e^{1-x}(1-x)' = 2e^x + e^{1-x} > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο R
- $g'(x) = -2e^x + 2e^{1-x}(1-x)' = -2e^x - 2e^{1-x} < 0$, οπότε η g είναι γνησίως φθίνουσα στο R

Επίσης για κάθε $x \in R$ είναι:

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (2e^x - e^{1-x} + 1) - (-2e^x + 2e^{1-x} + 2) = 4e^x - 3e^{1-x} - 1 \text{ και}$$

$$(f-g)'(x) = 4e^x - 3e^{1-x}(1-x)' = 4e^x + 3e^{1-x} > 0, \text{ οπότε } f-g \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } R$$

Επομένως οι συναρτήσεις f, g και $f-g$ δεν παρουσιάζουν ακρότατα.

γ) Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow 4e^x - 3e^{1-x} - 1 = 0$$

έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = f(x) - g(x) = 4e^x - 3e^{1-x} - 1, \quad x \in R$$

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο R , άρα και στο διάστημα $[0, 1]$,
- $h(0) \cdot h(1) = (3 - 3e)(4e - 4) = -12(e - 1)^2 < 0$

Επομένως ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[0, 1]$, οπότε η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ έχει μια πραγματική ρίζα $x_0 \in (0, 1) \subseteq R$ και μάλιστα μοναδική, αφού η συνάρτηση $h = f - g$ είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g των συναρτήσεων f, g αντίστοιχα, έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο.

δ) Είναι:

$$4e^{x^2-2x} < 4e^{x-2} + 3e^{-x^2+2x+1} - 3e^{-x+3} \Leftrightarrow$$

$$4e^{x^2-2x} - 3e^{-x^2+2x+1} < 4e^{x-2} - 3e^{-x+3} \Leftrightarrow$$

$$4e^{x^2-2x} - 3e^{-x^2+2x+1} - 1 < 4e^{x-2} - 3e^{-x+3} - 1 \Leftrightarrow$$

$$h(x^2 - 2x) < h(x - 2) \Leftrightarrow x^2 - 2x < x - 2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow x \in (1, 2)$$

ΘΕΜΑ 23ο :

Έστω η συνάρτηση $f : R \rightarrow R$ με $f(x) = (\alpha+1)^x - \alpha^x$, $\alpha > 1$

- a) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f , για τις διάφορες τιμές του $x \in R$
- β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα στο διάστημα $[0, +\infty)$
- γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f
- δ) Να λύσετε το σύστημα $3^x - 2^y = 3^y - 2^x = 19$

ΛΥΣΗ

- a) Είναι:

$$\alpha+1 > \alpha > 1$$

Οπότε:

- Για $x > 0$ είναι $(\alpha+1)^x > \alpha^x \Rightarrow (\alpha+1)^x - \alpha^x > 0 \Rightarrow f(x) > 0$
Άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$
- Για $x < 0$ είναι $(\alpha+1)^x < \alpha^x \Rightarrow (\alpha+1)^x - \alpha^x < 0 \Rightarrow f(x) < 0$
Άρα $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$
- Για $x = 0$ είναι $f(0) = (\alpha+1)^0 - \alpha^0 = 1 - 1 = 0$
Άρα $f(x) = 0$ για $x = 0$

- β) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f'(x) = (\alpha+1)^x \ln(\alpha+1) - \alpha^x \ln \alpha$$

και

$$f''(x) = (\alpha+1)^x \ln^2(\alpha+1) - \alpha^x \ln^2 \alpha$$

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow (\alpha+1)^x > \alpha^x \quad (1)$$

Επειδή $\alpha > 1$ είναι:

$$\ln(\alpha+1) > \ln \alpha > 0 \quad (2)$$

και

$$\ln^2(\alpha+1) > \ln^2 \alpha > 0 \quad (3)$$

οπότε:

- με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των ανισοτήτων (1) και (2) βρίσκουμε ότι:
 $(\alpha+1)^x \ln(\alpha+1) > \alpha^x \ln \alpha \Rightarrow (\alpha+1)^x \ln(\alpha+1) - \alpha^x \ln \alpha > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$
- με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των ανισοτήτων (1) και (3) βρίσκουμε ότι:
 $(\alpha+1)^x \ln^2(\alpha+1) > \alpha^x \ln^2 \alpha \Rightarrow (\alpha+1)^x \ln^2(\alpha+1) - \alpha^x \ln^2 \alpha > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$

Δεδομένου ότι συνάρτηση f είναι και συνεχής στο $x_0 = 0$, συμπεραίνουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή στο $[0, +\infty)$

γ) Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R , η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Για $x \in (-\infty, 0)$ είναι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(a+1)^x - a^x] = 0 - 0 = 0$$

οπότε η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

Για $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(a+1)^x - a^x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(a^x \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{a}\right)^x - 1 \right] \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \stackrel{+\infty}{=} \underset{\text{D.L.H}}{\lim_{x \rightarrow +\infty}} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(\alpha+1)^x \ln(\alpha+1) - \alpha^x \ln \alpha] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\alpha^x \left[\left(1 + \frac{1}{a}\right)^x \ln(\alpha+1) - \ln \alpha \right] \right) = +\infty$$

διότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{a}\right)^x \ln(\alpha+1) \right) = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln \alpha) = \ln \alpha$$

Άρα η C_f δεν έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$

δ) 1^{ος} τρόπος:

Αν ένας τουλάχιστον από τους x, y είναι αρνητικός, τότε ο αριθμός $3^x - 2^y$ δεν είναι ακέραιος.
Επομένως, αναζητούμε μη αρνητικές λύσεις του συστήματος.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 3^x - 2^x$, που προκύπτει από την παραπάνω συνάρτηση για $\alpha = 2$.
Είναι:

$$x > y \Rightarrow \begin{cases} 3^x > 3^y \\ 2^x > 2^y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^x > 3^y \\ -2^y > -2^x \end{cases} \Rightarrow 3^x - 2^y > 3^y - 2^x$$

Ομοίως

$$x < y \Rightarrow 3^x - 2^y < 3^y - 2^x$$

Επομένως, το σύστημα δεν έχει λύσεις (x, y) με $x \neq y$

Για $x = y$ είναι:

$$3^x - 2^x = 19 \Leftrightarrow f(x) = f(3) \stackrel{f:1-1}{\Leftrightarrow} x = 3$$

οπότε το σύστημα έχει τη μοναδική λύση $(x, y) = (3, 3)$

2^{ος} τρόπος:

Από τις δοσμένες σχέσεις παίρνουμε:

$$3^x - 2^y = 3^y - 2^x \Leftrightarrow 3^x + 2^x = 3^y + 2^y \Leftrightarrow g(x) = g(y) \quad (4)$$

όπου $g(x) = 3^x + 2^x$, $x \in R$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$g'(x) = 3^x \ln 3 + 2^x \ln 2 > 0$$

Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο R , οπότε είναι και $1-1$

Επομένως από τη σχέση (4) έχουμε $x = y$

Για $x = y$ το σύστημα γίνεται $3^x - 2^x = 19 \Leftrightarrow f(x) = f(3)$ (5), όπου $f(x) = 3^x - 2^x$

Στο διάστημα $(-\infty, 0]$ όμως η συνάρτηση είναι αρνητική, οπότε δεν έχουμε αρνητική ρίζα.

Επίσης είναι $f(0) = 0 \neq 19$, οπότε ούτε το 0 είναι ρίζα.

Στο διάστημα $(0, +\infty)$, με βάση το ερώτημα (β) για $\alpha = 2$ η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η σχέση (5) δίνει τη μοναδική λύση $x = 3$

Επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x, y) = (3, 3)$

ΘΕΜΑ 24ο :

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $(0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, 1)$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(1) = 0$ και
- $2\sqrt{1-x} \cdot f'(x) = 1 + \frac{2\sqrt{1-x}}{x}$, για κάθε $x \in (0, 1)$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x - \sqrt{1-x}$, $x \in (0, 1]$

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε:

i) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1}

ii) το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cdot f^{-1}(x))$

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f έχει ένα ακριβώς σημείο καμπής $M(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \in (0, 1)$

δ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις C_f και $C_{f^{-1}}$ των συναρτήσεων f και f^{-1} αντιστοίχως στο ίδιο σύστημα αξόνων.

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $(0, 1]$ και για κάθε $x \in (0, 1)$, έχουμε:

$$2\sqrt{1-x} \cdot f'(x) = 1 + \frac{2\sqrt{1-x}}{x} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = (\ln x - \sqrt{1-x})'$$

Άρα για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι:

$$f(x) = \ln x - \sqrt{1-x} + c$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

Επειδή $f(1) = 0$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\ln x - \sqrt{1-x} + c) = 0 \Rightarrow c=0$$

Επομένως:

$$f(x) = \begin{cases} \ln x - \sqrt{1-x}, & 0 < x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(x) = \ln x - \sqrt{1-x}, \quad x \in (0, 1]$$

β) Για τη συνάρτηση f έχουμε:

- ♦ είναι συνεχής στο διάστημα $(0, 1]$ και
- ♦ $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} > 0$, για κάθε $x \in (0, 1)$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, 1]$, οπότε είναι και «1-1».

Άρα η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

i) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1} είναι $A_{f^{-1}} = f((0, 1])$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, 1]$ θα είναι:

$$f((0, 1]) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(1) \right] = (-\infty, 0], \text{ γιατί:}$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - \sqrt{1-x}) = -\infty$, αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-\sqrt{1-x}) = -1$
- $f(1) = 0$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1} είναι: $A_{f^{-1}} = (-\infty, 0]$

ii) Είναι:

$$A_{f^{-1}} = (-\infty, 0] \text{ και } f^{-1}((-∞, 0]) = A_f = (0, 1]$$

Επομένως για κάθε $x \in (-\infty, 0]$ ισχύει:

$$0 < f^{-1}(x) \leq 1 \Leftrightarrow 0 < x^2 f^{-1}(x) \leq x^2$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0} 0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

Άρα από το κριτήριο παρεμβολής, συμπεραίνουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} [x^2 f^{-1}(x)] = 0$

γ) Για κάθε $x \in (0, 1)$ έχουμε:

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \text{ και}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4(1-x)\sqrt{1-x}}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{3}{8(1-x)^2\sqrt{1-x}} > 0$$

Άρα η συνάρτηση f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1)$ και επειδή είναι και συνεχής στο $(0, 1)$, το σύνολο τιμών της συνάρτησης f'' είναι:

$$f''((0, 1)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f''(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f''(x) \right) = (-\infty, +\infty), \text{ γιατί:}$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f''(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4(1-x)\sqrt{1-x}} \right) = -\infty$, αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{4(1-x)\sqrt{1-x}} = \frac{1}{4}$

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f''(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4(1-x)\sqrt{1-x}} \right) = +\infty$, αφού $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = +\infty$ και

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{4(1-x)\sqrt{1-x}} \right) = -1$$

Η συνάρτηση f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1)$ επομένως είναι και «1-1» και επειδή το $0 \in f''((0, 1))$ θα υπάρχει ένα ακριβώς $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f''(x_0) = 0$

Επειδή η συνάρτηση f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1)$ θα ισχύει:

- για $0 < x < x_0 \Rightarrow f''(x) < f''(x_0) \Rightarrow f''(x) < 0$ και
- για $x_0 < x < 1 \Rightarrow f''(x_0) < f''(x) \Rightarrow f''(x) > 0$

Άρα το σημείο $M(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \in (0, 1)$ είναι το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f

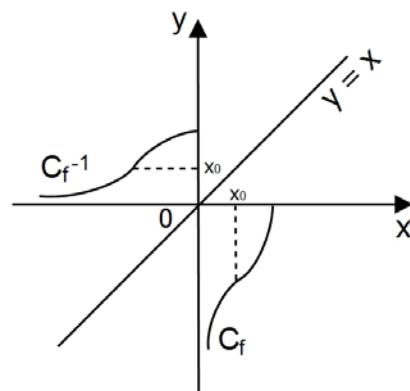
δ) Έχουμε:

$$A_f = (0, 1] \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

άρα η ευθεία (ε_1): $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f

Συμπληρώνουμε τον πίνακα μεταβολών της συνάρτησης f και σχεδιάζουμε την C_f

x	0	x_0	1
$f'(x)$	+	+	
$f''(x)$	-	○	+
f	$\Sigma.K.$		



ΘΕΜΑ 25ο :

Έστω η συνάρτηση $f:[2,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(2)=0$, η οποία είναι συνεχής στο $[2,+\infty)$ και κυρτή στο $(2,+\infty)$, τότε:

- a) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x-2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(2,+\infty)$
 β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(2x-9)f(x+6)=(7x-32)f(x)$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(4,5)$

Αν επιπλέον ισχύει $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) + \sqrt{x+6}}{x-3} = \frac{1}{6}$

γ) i) Να βρείτε τις τιμές των $f(3)$ και $f'(3)$

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

ΛΥΣΗ

- a) Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(2,+\infty)$, οπότε είναι παραγωγίσιμη με f' γνησίως αύξουσα στο $(2,+\infty)$, άρα η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(2,+\infty)$ και $g'(x) = \frac{f'(x)(x-2)-f(x)}{(x-2)^2}$ (1)

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[2, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(2, x)$, οπότε ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, επομένως θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (2, x)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{f(x)}{x - 2}$$

Είναι:

$$2 < \xi < x \stackrel{f' \nearrow}{\Rightarrow} f'(\xi) < f'(x) \Rightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x-2} < f'(x) \stackrel{x>2}{\Rightarrow} f'(x)(x-2) - f(x) > 0 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in (2, +\infty)$, οπότε η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = (2x-9)f(x+6) - (7x-32)f(x), \quad x \in [4, 5]$$

Η h συνεχής στο $[4, 5]$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Είναι:

- $h(4) = -f(10) + 4f(4) = -8g(10) + 8g(4) = 8(g(4) - g(10))$

Για $4 < 10 \stackrel{g \nearrow}{\Rightarrow} g(4) < g(10) \Rightarrow g(4) - g(10) < 0$, άρα $h(4) < 0$

- $h(5) = f(11) - 3f(5) = 9g(11) - g(5) = 9(g(11) - g(5))$

Για $5 < 11 \stackrel{g \nearrow}{\Rightarrow} g(5) < g(11) \Rightarrow g(11) - g(5) > 0$, άρα $h(5) > 0$

Συνεπώς $h(4) \cdot h(5) < 0$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano, άρα η εξίσωση:

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow (2x - 9)f(x + 6) = (7x - 32)f(x)$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(4, 5)$

γ) i) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + \sqrt{x+6}}{x-3}, \text{ για } x \text{ κοντά στο } x_0 = 3$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \varphi(x) = \frac{1}{6}$$

Για x κοντά στο $x_0 = 3$ έχουμε:

$$f(x) = \varphi(x)(x-3) - \sqrt{x+6}$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (\varphi(x)(x-3) - \sqrt{x+6}) = \frac{1}{6} \cdot 0 - \sqrt{9} = -3$$

Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -3$$

Όμως η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 3 , οπότε $f(3) = -3$

Για x κοντά στο $x_0 = 3$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)\varphi(x) - \sqrt{x+6} + 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\varphi(x) - \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x - 3} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\varphi(x) - \frac{x+6-9}{(x-3)(\sqrt{x+6} + 3)} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\varphi(x) - \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+6} + 3)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\varphi(x) - \frac{1}{\sqrt{x+6} + 3} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\varphi(x) - \frac{1}{\sqrt{x+6} + 3} \right) = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0 \end{aligned}$$

Άρα $f'(3) = 0$

ii) Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(2, +\infty)$, άρα η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(2, +\infty)$, οπότε έχουμε:

- Για $2 < x < 3 \Rightarrow f'(x) < f'(3) \Rightarrow f'(x) < 0$
- Για $x > 3 \Rightarrow f'(x) > f'(3) \Rightarrow f'(x) > 0$

Το πρόσημο της $f'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	\searrow τοπ. μεγ. $\rightarrow -3$	\nearrow ελάχ. $\rightarrow +\infty$

Επομένως:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[2, 3]$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (2, 3)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[2, 3]$
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[3, +\infty)$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (3, +\infty)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3, +\infty)$
- Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 3$ με ελάχιστη τιμή $f(3) = -3$
- Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = 2$ με τιμή $f(2) = 0$

iii) Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(4, f(4))$ είναι:

$$y - f(4) = f'(4)(x - 4) \Leftrightarrow y = f'(4)(x - 4) + f(4)$$

Η f κυρτή στο $[2, +\infty)$ άρα

$$f(x) \geq y \Leftrightarrow f(x) \geq f'(4)(x - 4) + f(4)$$

Έχουμε $f'(4) > 0$, άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f'(4)(x - 4) + f(4)) = +\infty$

οπότε και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = [2, 3]$, οπότε $f(\Delta_1) = [-3, 0]$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = [3, +\infty)$, οπότε $f(\Delta_2) = [-3, +\infty]$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι:

$$f(\Delta) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = [-3, +\infty)$$

Av $f(x) \geq g(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$,
τότε θα είναι $f(x) \geq g(x) > 0$, οπότε
 $0 < \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{g(x)}$

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{g(x)} = 0$

Από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0 \text{ και επειδή } \frac{1}{f(x)} > 0$$

συμπεραίνουμε ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ΘΕΜΑ 26ο :

Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \rightarrow R$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$
- $(3x^2 f^2(x) - 1)f'(x) + xf''(x) = 0$, για κάθε $x \neq 0$

$$\bullet \quad f(1) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{και} \quad f'(1) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

a) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $x \in R$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(3x) = f(2x) + f(5x)$

δ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $h(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι

$$f^2 \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) < f(\alpha)f(\beta) \quad \text{για } 1 < \alpha < \beta$$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$, άρα η f διατηρεί πρόσημο στο R και επειδή $f(1) = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$, συμπεραίνουμε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$

Για $x \neq 0$ έχουμε:

$$(3x^2f^2(x)-1)f'(x)+xf''(x)=0 \Leftrightarrow$$

$$3x^2f^2(x)f'(x)-f'(x)+xf''(x)=0 \Leftrightarrow$$

$$3x^2f^2(x)f'(x)=f'(x)-xf''(x) \Leftrightarrow$$

$$3f^2(x)f'(x)=\frac{f'(x)-xf''(x)}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$(f^3(x))'=\left(-\frac{f'(x)}{x}\right)'$$

Για $x < 0$ έχουμε:

$$f^3(x)=-\frac{f'(x)}{x}+c_1 \Leftrightarrow f'(x)=-xf^3(x)+c_1x$$

Για $x > 0$ έχουμε:

$$f^3(x)=-\frac{f'(x)}{x}+c_2 \Leftrightarrow f'(x)=-xf^3(x)+c_2x$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-xf^3(x)+c_1x) = 0 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-xf^3(x)+c_2x) = 0$$

Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$$

Επειδή η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ ισχύει $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$

Άρα:

$$f'(x) = \begin{cases} -xf^3(x)+c_1x & , \quad x < 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -xf^3(x)+c_2x & , \quad x > 0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και ισχύει:

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} \quad (1)$$

Για $x < 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-xf^3(x)+c_1x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (-f^3(x)+c_1) = -f^3(0)+c_1 \end{aligned}$$

Για $x > 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-xf^3(x) + c_2 x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (-f^3(x) + c_2) = -f^3(0) + c_2 \end{aligned}$$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} \Leftrightarrow \\ -f^3(0) + c_1 &= -f^3(0) + c_2 \Leftrightarrow c_1 = c_2 \end{aligned}$$

Για $x = 1$ έχουμε:

$$f'(1) = -f^3(1) + c_2 \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{4} = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 + c_2 \Rightarrow c_2 = 0, \text{ οπότε και } c_1 = 0$$

Άρα:

$$f'(x) = \begin{cases} -xf^3(x), & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -xf^3(x), & x > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = -xf^3(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\begin{aligned} f'(x) = -xf^3(x) &\Leftrightarrow f^{-3}(x)f'(x) = -x \Leftrightarrow \\ f^{-3}(x)f'(x) = -x &\Leftrightarrow -2f^{-3}(x)f'(x) = 2x \Leftrightarrow \\ (f^{-2}(x))' = (x^2)' &\Leftrightarrow \frac{1}{f^2(x)} = x^2 + c \end{aligned}$$

Για $x = 1$ έχουμε:

$$\frac{1}{f^2(1)} = 1 + c \Rightarrow 2 = 1 + c \Rightarrow c = 1$$

Άρα:

$$\frac{1}{f^2(x)} = x^2 + 1 \Leftrightarrow f^2(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \stackrel{f(x) > 0}{\Leftrightarrow} f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x) = -xf^3(x)$$

Όμως $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0$

Το πρόσημο της $f'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		1	

μέγιστο

Επομένως:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$
- Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 0$ με μέγιστη τιμή $f(0) = 1$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -f^3(x) - x \cdot 3f^2(x)f'(x) = -f^2(x)(f(x) + 3xf'(x)) = \\ &= -f^2(x)\left(f(x) + 3x(-xf^3(x))\right) = -f^3(x)\left(1 - 3x^2f^2(x)\right) = \\ &= -f^3(x)\left(1 - 3x^2 \cdot \frac{1}{x^2 + 1}\right) = -f^3(x)\left(\frac{1 - 2x^2}{x^2 + 1}\right) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1} \cdot f^3(x) \end{aligned}$$

Όμως $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$, οπότε:

$$\begin{aligned} \circ \quad f''(x) &= 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \circ \quad f''(x) &> 0 \Leftrightarrow x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ή} \quad x > \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Το πρόσημο της $f''(x)$ καθώς η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της συνάρτησης f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	\cup	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	\cap	$\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\Sigma.K.$ $\Sigma.K.$

Επομένως:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, οπότε η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ και $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, οπότε η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$, οπότε η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$
- Η f'' μηδενίζεται στο $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ και εκατέρωθεν αυτού αλλάζει πρόσημο, άρα το σημείο $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f
- Η f'' μηδενίζεται στο $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και εκατέρωθεν αυτού αλλάζει πρόσημο, άρα το σημείο $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f

γ) Προφανής λύση η $x=0$

Για $x < 0$ έχουμε:

$$\begin{cases} x > 2x \stackrel{f \uparrow}{\Rightarrow} f(x) > f(2x) \stackrel{(+)}{\Rightarrow} f(x) + f(3x) > f(2x) + f(5x) \\ 3x > 5x \end{cases}$$

Για $x > 0$ έχουμε:

$$\begin{cases} x < 2x \stackrel{f \downarrow}{\Rightarrow} f(x) > f(2x) \stackrel{(+)}{\Rightarrow} f(x) + f(3x) > f(2x) + f(5x) \\ 3x < 5x \end{cases}$$

Άρα η $x=0$ είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης.

δ) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$h(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{-xf^3(x)}{f(x)} = -xf^2(x) = -\frac{x}{x^2+1}$$

Οπότε:

$$\begin{aligned} h'(x) &= -\frac{(x^2+1)-x \cdot (2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{x^2-1}{x^2+1} \cdot \frac{1}{x^2+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1} \cdot f^2(x), \quad x \in R \end{aligned}$$

Όμως $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$, οπότε:

- $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$
- $h'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ή } x > 1$

Το πρόσημο της $h'(x)$ καθώς η μονοτονία της συνάρτησης h φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$					

Επομένως:

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $(-\infty, -1]$ και $h'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1)$, οπότε η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, -1]$
- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ και $h'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1, 1)$, οπότε η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1, 1]$
- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$ και $h'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$, οπότε η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $K(x) = \ellnf(x)$, $x > 1$,

Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ είναι:

$$K'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = h(x)$$

Η συνάρτηση K είναι:

- συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right], \left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$
- παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right), \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, οπότε θα υπάρχουν:

$$\diamond \quad \xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right) \text{ τέτοιο, ώστε } K'(\xi_1) = \frac{K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - K(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} = \frac{K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - K(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

$$\diamond \quad \xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right) \text{ τέτοιο, ώστε } K'(\xi_2) = \frac{K(\beta) - K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{K(\beta) - K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

Είναι:

$$1 < \xi_1 < \xi_2 \stackrel{\kappa \uparrow}{\Rightarrow} K'(\xi_1) < K'(\xi_2) \Rightarrow \frac{K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - K(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} < \frac{K(\beta) - K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \Rightarrow$$

$$K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - K(\alpha) < K(\beta) - K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Rightarrow 2K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < K(\alpha) + K(\beta) \Rightarrow$$

$$2\ellnf\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < \ellnf(\alpha) + \ellnf(\beta) \Rightarrow \ellnf^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < \elln(f(\alpha)f(\beta)) \Rightarrow$$

$$f^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < f(\alpha)f(\beta)$$

ΘΕΜΑ 27ο :

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f'(1) = 1 - \alpha$, $\alpha > 0$ και
- $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) + \alpha x - \alpha y - \frac{\alpha x}{y}$ για κάθε $x, y > 0$ (1)

- a) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ell nx - \alpha x$, $x > 0$
- β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο της $A(e, f(e))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του α για την οποία ισχύει $f(x) \leq 1$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$
- δ) Αν $g(x) = -\frac{1}{\alpha} f(e^{\alpha x})$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, να βρείτε τη τιμή του α ώστε η ελάχιστη τιμή της g να γίνεται μέγιστη.

ΛΥΣΗ

- a) Αν παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη της σχέσης (1) ως προς y , θεωρώντας το x σταθερά, έχουμε:

$$\begin{aligned} \left(f\left(\frac{x}{y}\right) \right)' &= \left(f(x) - f(y) + \alpha x - \alpha y - \frac{\alpha x}{y} \right)' \Leftrightarrow \\ f'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) &= 0 - f'(y) + 0 - \alpha + \frac{\alpha x}{y^2}, \quad y > 0 \end{aligned}$$

Για $y = 1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f'(-x)(-x) &= -f'(1) - \alpha + \alpha x \Leftrightarrow \\ -x f'(-x) &= -(1 - \alpha) - \alpha + \alpha x \Leftrightarrow \\ x f'(-x) &= 1 - \alpha x \Leftrightarrow \\ f'(-x) &= \frac{1}{x} - \alpha \Leftrightarrow \\ f'(-x) &= (\ell nx - \alpha x)' \Leftrightarrow \\ f(x) &= \ell nx - \alpha x + c, \quad x > 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Για $x = y = 1$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\begin{aligned} f(1) &= f(1) - f(1) + \alpha - \alpha - \alpha \Leftrightarrow \\ f(1) &= -\alpha \quad (3) \end{aligned}$$

Για $x = 1$ από τη σχέση (2) έχουμε:

$$\begin{aligned} f(1) &= \ell n 1 - \alpha + c \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} \\ -\alpha &= -\alpha + c \Leftrightarrow c = 0 \end{aligned}$$

Επομένως:

$$f(x) = \ell nx - \alpha x, \quad x > 0$$

β) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$f'(x) = (\ln x - \alpha x)' = \frac{1}{x} - \alpha$$

Οπότε:

$$f'(e) = \frac{1}{e} - \alpha$$

Αρα η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο της $A(e, f(e))$ είναι:

$$\begin{aligned} y - f(e) &= f'(e)(x - e) \Leftrightarrow \\ y - (1 - \alpha e) &= \left(\frac{1}{e} - \alpha\right)(x - e) \Leftrightarrow \\ y &= \left(\frac{1}{e} - \alpha\right)x \end{aligned}$$

η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$, αφού επαληθεύεται για $x = 0$ και $y = 0$

γ) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \alpha = \frac{1 - \alpha x}{x}$$

Είναι:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\alpha}$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha x > 0 \Leftrightarrow \alpha x < 1 \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} x < \frac{1}{\alpha}$

Το πρόσημο της $f'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0	$\frac{1}{\alpha}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		$-\ell n \alpha - 1$	

μέγιστο

Η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = \frac{1}{\alpha}$ με μέγιστη τιμή $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \ell n \frac{1}{\alpha} - \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = -\ell n \alpha - 1$,

επομένως έχουμε:

$$f(x) \leq -\ell n \alpha - 1 \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Για να ισχύει $f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ πρέπει και αρκεί

$$-\ell n \alpha - 1 \leq 1 \Leftrightarrow \ell n \alpha \geq -2 \Leftrightarrow \ell n \alpha \geq \ell n e^{-2} \Leftrightarrow \alpha \geq \frac{1}{e^2}$$

Αρα η ελάχιστη τιμή του α ώστε να ισχύει $f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι $\alpha = \frac{1}{e^2}$

δ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$g(x) = -\frac{1}{a} f(e^{ax}) = -\frac{1}{a} \cdot (\ell n e^{ax} - a e^{ax}) = -\frac{1}{a} \cdot (ax - a e^{ax}) = e^{ax} - x$$

$$g'(x) = (e^{ax} - x)' = a e^{ax} - 1$$

Είναι:

$$\circ \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow a e^{ax} = 1 \Leftrightarrow e^{ax} = \frac{1}{a} \stackrel{a > 0}{\Leftrightarrow} \ell n e^{ax} = \ell n \frac{1}{a} \Leftrightarrow ax = -\ell n a \Leftrightarrow x = -\frac{\ell n a}{a}$$

$$\circ \quad g'(x) > 0 \Leftrightarrow a e^{ax} > 1 \stackrel{a > 0}{\Leftrightarrow} e^{ax} > \frac{1}{a} \Leftrightarrow \ell n e^{ax} > \ell n \frac{1}{a} \Leftrightarrow ax > -\ell n a \Leftrightarrow x > -\frac{\ell n a}{a}$$

Το πρόσημο της $g'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	$-\frac{\ell n a}{a}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	↗	$\frac{1 + \ell n a}{a}$	↘

ελάχιστο

Η συνάρτηση g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = -\frac{\ell n a}{a}$ με ελάχιστη τιμή

$$g\left(-\frac{\ell n a}{a}\right) = e^{a\left(-\frac{\ell n a}{a}\right)} - \left(-\frac{\ell n a}{a}\right) = e^{-\ell n a} + \frac{\ell n a}{a} = \frac{1}{e^{\ell n a}} + \frac{\ell n a}{a} = \frac{1 + \ell n a}{a}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(a) = \frac{1 + \ell n a}{a}, \quad a > 0$$

Για κάθε $a \in (0, +\infty)$ είναι:

$$\begin{aligned} h'(a) &= \frac{(1 + \ell n a)' \cdot a - 1 \cdot (1 + \ell n a)}{a^2} = \\ &= \frac{1 - 1 - \ell n a}{a^2} = -\frac{\ell n a}{a^2} \end{aligned}$$

Είναι:

$$\circ \quad h'(a) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\ell n a}{a^2} = 0 \Leftrightarrow \ell n a = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

$$\circ \quad h'(a) > 0 \Leftrightarrow -\frac{\ell n a}{a^2} > 0 \stackrel{a > 0}{\Leftrightarrow} \ell n a < 0 \Leftrightarrow 0 < a < 1$$

Το πρόσημο της $h'(\alpha)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης h φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0	1	$+\infty$
$h'(\alpha)$	+	0	-
$h(\alpha)$		↗	↘

μέγιστο

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η συνάρτηση h παίρνει μέγιστη τιμή όταν $\alpha = 1$, οπότε η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης g γίνεται μέγιστη όταν $\alpha = 1$

ΘΕΜΑ 28^ο :

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : R \rightarrow R$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R^* και ικανοποιεί τη σχέση:

$$f'(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{f(x)}{x} \quad \text{για κάθε } x \in R^*$$

Να αποδείξετε ότι:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

β) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και ότι η ευθεία (ε) με εξίσωση $y = \frac{1}{2}x + 1$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο κοινό της σημείο με τον άξονα y'

γ) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R

δ) Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο R

ΛΥΣΗ

a) Για κάθε $x \in R^*$ είναι:

$$f'(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow xf'(x) + f(x) = e^x \Leftrightarrow$$

$$(xf(x))' = (e^x)' \Leftrightarrow xf(x) = \begin{cases} e^x + c_1, & x < 0 \\ e^x + c_2, & x > 0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R , άρα είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$, οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} (xf(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x + c_1) \Leftrightarrow 0 \cdot f(0) = 1 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = -1$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (xf(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + c_2) \Leftrightarrow 0 \cdot f(0) = 1 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = -1$

Άρα για κάθε $x \in R^*$ έχουμε:

$$xf(x) = e^x - 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, άρα:

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \left. \frac{d(e^x)}{dx} \right|_{x=0} = 1 \quad (1)$$

Επομένως:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

β) Για κάθε x κοντά στο $x_0 = 0$ είναι:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1 - x}{x}}{x} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{e^x - 1}{x} \right) \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = \frac{1}{2}$

Το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f με τον άξονα y' είναι το $A(0, f(0))$, δηλαδή σημείο $A(0, 1)$

Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο A έχει εξίσωση:

$$(\varepsilon): y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 1 = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 1$$

γ) Για κάθε $x \in R^*$ είναι:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)' = \frac{e^x x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{x e^x - e^x + 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2},$$

όπου $g(x) = x e^x - e^x + 1$, $x \in R$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$g'(x) = (x e^x - e^x + 1)' = e^x + x e^x - e^x = x e^x$$

Είναι:

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x e^x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Το πρόσημο της $g'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$		0	

ελάχιστο

Η συνάρτηση g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$ με ελάχιστη τιμή $g(0) = 0 \cdot e^0 - e^0 + 1 = 0$

Έχουμε:

$$\diamond \quad \text{Για } x < 0 \stackrel{g \searrow}{\Rightarrow} g(x) > g(0) \Leftrightarrow g(x) > 0$$

$$\diamond \quad \text{Για } x > 0 \stackrel{g \nearrow}{\Rightarrow} g(x) > g(0) \Leftrightarrow g(x) > 0$$

Οπότε είναι:

$$g(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in R^*$$

Επειδή $f'(0) = \frac{1}{2}$ συμπεραίνουμε ότι:

$$f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in R$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R

δ) Για κάθε $x \in R^*$ είναι:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} \right)' = \frac{(xe^x - e^x + 1)' \cdot x^2 - (xe^x - e^x + 1) \cdot (x^2)'}{x^4} = \\ &= \frac{(e^x + xe^x - e^x) \cdot x^2 - (xe^x - e^x + 1) \cdot 2x}{x^4} = \\ &= \frac{x^3 e^x - 2x^2 e^x + 2x e^x - 2x}{x^4} = \frac{x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x - 2}{x^3} = \frac{h(x)}{x^3}, \end{aligned}$$

όπου $h(x) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x - 2$, $x \in R$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$\begin{aligned} h'(x) &= (x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x - 2)' = \\ &= 2x e^x + x^2 e^x - 2e^x - 2x e^x + 2e^x = x^2 e^x \end{aligned}$$

Άρα $h'(x) > 0$ για κάθε $x \in R^*$ και η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο R

Όμως $h(0) = 0 \cdot e^0 - 2 \cdot 0 \cdot e^0 + 2e^0 - 2 = 0$ και η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο R , οπότε έχουμε:

$$\diamond \quad \text{Για } x < 0 \stackrel{h \nearrow}{\Rightarrow} h(x) < h(0) \Leftrightarrow h(x) < 0$$

$$\diamond \quad \text{Για } x > 0 \stackrel{h \nearrow}{\Rightarrow} h(x) > h(0) \Leftrightarrow h(x) > 0$$

Επομένως

- Av $x < 0$ τότε $f''(x) > 0$, αφού $h(x) < 0$ και $x^3 < 0$
- Av $x > 0$ τότε $f''(x) > 0$, αφού $h(x) > 0$ και $x^3 > 0$

Άρα

$$f''(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in R^*$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - e^x + e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2} = f'(0)$$

Οπότε η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

Αφού $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in R^*$ και η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο R , άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή στο R

ΘΕΜΑ 29ο :

Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha \ln x + x + \alpha$ και $g(x) = \frac{x \ln x}{x + \alpha}$, όπου $\alpha > 0$

- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική πραγματική ρίζα ρ
- Να αποδείξετε ότι $g(x) \geq -\frac{\rho}{\alpha}$ για κάθε $x > 0$
- Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης g έχει ένα μόνο σημείο καμπής.
- Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\alpha(\ln x - \lambda) = \lambda x$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in R$

ΛΥΣΗ

- Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$f'(x) = \frac{\alpha}{x} + 1 > 0$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και επειδή είναι και συνεχής, το σύνολο τιμών της είναι:

$$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$$

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\alpha \ln x + x + \alpha) = -\infty$, αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\alpha \ln x)^{\alpha > 0} = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \alpha) = \alpha$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha \ln x + x + \alpha) = +\infty$, αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha \ln x)^{\alpha > 0} = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \alpha) = +\infty$

Επομένως το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι $f(A) = (-\infty, +\infty) = R$

To $0 \in f(A) = R$ επομένως θα υπάρχει $\rho \in A = (0, +\infty)$ και μάλιστα μοναδικό, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho) = 0$

β) Είναι:

$$A_g = (0, +\infty), \text{ αφού } x + \alpha > 0 \text{ για κάθε } x > 0$$

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$g'(x) = \left(\frac{x \ln x}{x + \alpha} \right)' = \frac{(\ell n x + 1)(x + \alpha) - x \ell n x}{(x + \alpha)^2} = \frac{\alpha \ell n x + x + \alpha}{(x + \alpha)^2} = \frac{f(x)}{(x + \alpha)^2} \quad (1)$$

Από το (α) ερώτημα γνωρίζουμε ότι υπάρχει μοναδικό $\rho \in (0, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho) = 0$ και η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, οπότε:

- ♦ $\Gamma \alpha 0 < x < \rho \stackrel{f \nearrow}{\Rightarrow} f(x) < f(\rho) \Rightarrow f(x) < 0$
- ♦ $\Gamma \alpha x > \rho \stackrel{f \nearrow}{\Rightarrow} f(x) > f(\rho) \Rightarrow f(x) > 0$

Από τη σχέση (1) και επειδή $(x + \alpha)^2 > 0$ για κάθε $x \in A_g$, έχουμε:

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \rho$
- $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} 0 < x < \rho$
- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow x > \rho$

Το πρόσημο της $g'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0	ρ	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	\searrow	$\frac{\rho \ell n \rho}{\rho + \alpha}$	\nearrow

ελάχιστο

Η συνάρτηση g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = \rho$ με ελάχιστη τιμή $g(\rho) = \frac{\rho \ell n \rho}{\rho + \alpha}$

Άρα για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$g(x) \geq g(\rho) \Rightarrow g(x) \geq \frac{\rho \ell n \rho}{\rho + \alpha} \quad (2)$$

Όμως ρ βίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$, οπότε ισχύει $\alpha \ell n \rho + \rho + \alpha = 0 \Leftrightarrow \ell n \rho = -\frac{\rho + \alpha}{\alpha}$ (3)

Η σχέση (2) με βάση τη σχέση (3) γράφεται:

$$g(x) \geq \frac{\rho \cdot \left(-\frac{\rho + \alpha}{\alpha} \right)}{\rho + \alpha} \Rightarrow g(x) \geq -\frac{\rho}{\alpha}, \quad x \in (0, +\infty)$$

γ) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$\begin{aligned} g''(x) &= \left(\frac{\alpha \ell n x + x + \alpha}{(x + \alpha)^2} \right)' = \frac{\left(\frac{\alpha}{x} + 1 \right)(x + \alpha)^2 - 2(x + \alpha)(\alpha \ell n x + x + \alpha)}{(x + \alpha)^4} = \\ &= \frac{(x + \alpha)^2 - 2x(\alpha \ell n x + x + \alpha)}{x(x + \alpha)^3} = \frac{\alpha^2 - x^2 - 2x\alpha \ell n x}{x(x + \alpha)^3} = \frac{h(x)}{x(x + \alpha)^3} \quad (4) \end{aligned}$$

όπου $h(x) = \alpha^2 - x^2 - 2x\alpha \ell n x$, $x > 0$

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$h'(x) = -2x - 2\alpha \ell n x - 2\alpha = -2(\alpha \ell n x + x + \alpha) = -2f(x)$$

Είναι:

- $h'(x) = 0 \Leftrightarrow -2f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \rho$
- $h'(x) > 0 \Leftrightarrow -2f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \rho$

Το πρόσημο της $h'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης h φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0	ρ	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$	α^2	\nearrow	\searrow

μέγιστο

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\alpha^2 - x^2 - 2\alpha x \ell n x) = \alpha^2$$

Αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ell n x) \stackrel{0 \cdot (-\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ell n x}{\frac{1}{x}} \stackrel{+\infty}{=} \stackrel{\text{D.L.H}}{\lim_{x \rightarrow 0^+}} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 \quad (5)$$

Η συνάρτηση h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 = (0, \rho]$, επομένως:

$$h(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x), h(\rho) \right] = (\alpha^2, h(\rho)]$$

Άρα για κάθε $x \in \Delta_1 = (0, \rho]$ είναι:

$$h(\rho) \geq h(x) > \alpha^2 > 0 \quad (6)$$

Επίσης είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha^2 - x^2 - 2\alpha x \ell n x) = -\infty$$

Η συνάρτηση h είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = [\rho, +\infty)$, επομένως:

$$h(\Delta_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x), h(\rho) \right] = (-\infty, h(\rho)]$$

Το $0 \in h(\Delta_2)$ επομένως θα υπάρχει $x_0 \in \Delta_2 = [\rho, +\infty)$ και μάλιστα μοναδικό, αφού η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = [\rho, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0) = 0$

Έχουμε:

$$\diamond \quad \text{Για } \rho < x < x_0 \Rightarrow h(x) > h(x_0) \Rightarrow h(x) > 0 \quad (7)$$

$$\diamond \quad \text{Για } x > x_0 \Rightarrow h(x) < h(x_0) \Rightarrow h(x) < 0 \quad (8)$$

Από τις σχέσεις (6) και (7) για κάθε $x \in (0, x_0)$ έχουμε:

$$h(x) > 0 \stackrel{(4)}{\Rightarrow} g''(x) > 0, \text{ αφού } x(x+\alpha)^3 > 0 \text{ για κάθε } x \in A_g = (0, +\infty)$$

Από τη σχέση (8) για κάθε $x \in (x_0, +\infty)$ έχουμε:

$$h(x) < 0 \stackrel{(4)}{\Rightarrow} g''(x) < 0, \text{ αφού } x(x+\alpha)^3 > 0 \text{ για κάθε } x \in A_g = (0, +\infty)$$

Αφού $x(x+\alpha)^3 > 0$ για κάθε $x \in A_g = (0, +\infty)$

Το πρόσημο της $g''(x)$ καθώς η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της συνάρτησης g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0	x_0	$+\infty$
$g''(x)$	+	0	-
$g(x)$	\cup	$g(x_0)$	\cap

Σ.Κ.

Επομένως η συνάρτηση g έχει ένα μόνο σημείο καμπής το $M(x_0, g(x_0))$

δ) Έχουμε:

$$\alpha(x\ln x - \lambda) = \lambda x \Leftrightarrow \alpha x \ln x = \lambda(x + x) \Leftrightarrow \frac{x \ln x}{x + x} = \frac{\lambda}{\alpha} \Leftrightarrow g(x) = \frac{\lambda}{\alpha} \quad (9)$$

Οι ρίζες της εξίσωσης (9) είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης C_g της συνάρτησης g και της ευθείας $y = \frac{\lambda}{\alpha}$, η οποία είναι παράλληλη στον άξονα x'

Από (β) ερώτημα έχουμε:

x	0	ρ	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	0	$-\frac{\rho}{\alpha}$	$+\infty$

ελάχιστο

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{x + \alpha} \stackrel{(5)}{=} \frac{0}{0 + \alpha} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x + \alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{1 + \frac{\alpha}{x}} = +\infty$
- $g(x) = 0 \Leftrightarrow x \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- ♦ Av $\frac{\lambda}{\alpha} < -\frac{\rho}{\alpha} \stackrel{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \lambda < -\rho$, τότε η εξίσωση (9) είναι αδύνατη.
- ♦ Av $\frac{\lambda}{\alpha} = -\frac{\rho}{\alpha} \Leftrightarrow \lambda = -\rho$, τότε η εξίσωση (9) έχει μια μόνο ρίζα $\rho_1 = \rho$
- ♦ Av $-\frac{\rho}{\alpha} < \frac{\lambda}{\alpha} < 0 \Leftrightarrow -\rho < \lambda < 0$, τότε η εξίσωση (9) έχει δύο ρίζες $\rho_1 \in (0, \rho)$ και $\rho_2 \in (\rho, 1)$
- ♦ Av $\frac{\lambda}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$, τότε η εξίσωση (9) έχει μια μόνο ρίζα $\rho_1 = 1$
- ♦ Av $\frac{\lambda}{\alpha} > 0 \stackrel{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \lambda > 0$, τότε η εξίσωση (9) έχει μια μόνο ρίζα $\rho_1 > 1$

ΘΕΜΑ 30ο :

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \rightarrow R$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(0) = 1$
- $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$
- $f'(x) = \frac{(1 + e^x)f(x)}{1 + f(x)}$ για κάθε $x \in R$

a) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x$, $x \in R$

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \in R^*$

γ) Να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha+2\beta}{3} < \ln\left(\frac{e^\alpha+2e^\beta}{3}\right)$ για κάθε $\alpha, \beta \in R$ με $\alpha < \beta$

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , την παραβολή $y = x^2 + 1$ και την ενθεία $x = 1$

ΛΥΣΗ

a) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f'(x) = \frac{(1 + e^x) \cdot f(x)}{1 + f(x)} \Leftrightarrow f'(x)(1 + f(x)) = (1 + e^x)f(x) \stackrel{f(x) > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{f'(x)f(x)}{f(x)} = 1 + e^x \Leftrightarrow (\ln f(x) + f(x))' = (x + e^x)' \Leftrightarrow$$

$$\ln f(x) + f(x) = x + e^x + c, \quad c \in R$$

Για $x = 0$ έχουμε :

$$\ln f(0) + f(0) = 0 + e^0 + c \Leftrightarrow \ln 1 + 1 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0$$

Άρα

$$\begin{aligned} \ln f(x) + f(x) = x + e^x &\Leftrightarrow \ln f(x) + f(x) = x \cdot 1 + e^x \Leftrightarrow \\ \ln f(x) + f(x) = x \ln e + e^x &\Leftrightarrow \ln f(x) + f(x) = \ln e^x + e^x \Leftrightarrow \\ f(x) + \ln f(x) = e^x + \ln e^x, \quad x \in \mathbb{R} & \quad (1) \end{aligned}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση h με $h(t) = t + \ln t$, $t > 0$, που είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$h'(t) = 1 + \frac{1}{t} > 0, \text{ ára } h \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } (0, +\infty) \text{ οπότε είναι και «1-1»}$$

Η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$h(f(x)) = h(e^x) \stackrel{h:1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

β) Είναι:

$$g(x) = x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = x e^{\frac{1}{x}}, \quad x \in \mathbb{R}^*$$

Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x e^{\frac{1}{x}} \right)^{0(+\infty)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{u} \stackrel{\text{D.L.H}}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{1} = +\infty$$

Άρα η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_g

$$\text{Επίσης} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{u \rightarrow 0} e^u = 1 = \lambda \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [g(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x e^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{1}{x} = u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - e^0}{u - 0} = \frac{de^u}{du} \Big|_{u=0} = e^0 = 1 = \beta$$

Άρα η ευθεία $y = x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $-\infty$ και στο $+\infty$

γ) Είναι:

$$\alpha < \frac{\alpha + 2\beta}{3} < \beta \Leftrightarrow 3\alpha < \alpha + 2\beta < 3\beta \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha < \alpha + 2\beta \\ \alpha + 2\beta < 3\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha < 2\beta \\ \alpha < \beta \end{cases} \Leftrightarrow \alpha < \beta \text{ που ισχύει.}$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , ára και στο $[\alpha, \beta]$ με $f'(x) = e^x$, οπότε ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $\left[\alpha, \frac{\alpha + 2\beta}{3} \right]$ και $\left[\frac{\alpha + 2\beta}{3}, \beta \right]$, επομένως θα υπάρχει ένα τουλάχιστον:

$$\bullet \xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+2\beta}{3} \right) \text{ τέτοιο, ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+2\beta}{3} - \alpha} = \frac{f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) - f(\alpha)}{\frac{2(\beta-\alpha)}{3}}$$

$$\bullet \xi_2 \in \left(\frac{\alpha+2\beta}{3}, \beta \right) \text{ τέτοιο, ώστε } f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)}{\beta - \frac{\alpha+2\beta}{3}} = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{3}}$$

Για κάθε $x \in R$ έχουμε $f''(x) = e^x > 0$, άρα η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε για

$$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Rightarrow \frac{f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) - f(\alpha)}{\frac{2(\beta-\alpha)}{3}} < \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{3}} \Rightarrow$$

$$f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) - f(\alpha) < 2 \left[f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) \right] \Rightarrow 3f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) < f(\alpha) + 2f(\beta) \Rightarrow$$

$$f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) < \frac{f(\alpha) + 2f(\beta)}{3} \Rightarrow e^{\frac{\alpha+2\beta}{3}} < \frac{e^\alpha + 2e^\beta}{3} \Rightarrow \frac{\alpha+2\beta}{3} < \ln\left(\frac{e^\alpha + 2e^\beta}{3}\right)$$

δ) Σχηματίζουμε τη διαφορά $\Delta(x) = e^x - x^2 - 1$, $x \in R$

Η συνάρτηση Δ είναι παραγωγίσιμη στο R με $\Delta'(x) = e^x - 2x$, $x \in R$

Επίσης $\Delta''(x) = e^x - 2$, $x \in R$

Παρατηρούμε ότι $\Delta''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$

επομένως ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων είναι ο παρακάτω:

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$\Delta''(x)$	-	0	+
$\Delta'(x)$			

Ελάχιστο

$$\Delta'(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2\ln 2 = 2 - 2\ln 2 = 2(1 - \ln 2) > 0 \quad (\text{εφόσον } e > 2 \Rightarrow \ln e > \ln 2 \Rightarrow 1 > \ln 2)$$

Άρα $\Delta'(x) \geq \Delta'(\ln 2) > 0 \Rightarrow \Delta'(x) > 0$, $x \in R$, οπότε η συνάρτηση Δ είναι γνησίως αύξουσα στο R . Είναι $\Delta(0) = e^0 - 0^2 - 1 = 0$. Άρα η $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $\Delta(x) = 0$ και ισχύει:

$$\Delta([0,1]) = [\Delta(0), \Delta(1)] = [0, e-2], \text{ άρα } \Delta(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in [0,1]$$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από τον τύπο:

$$\begin{aligned} E &= \int_0^1 |\Delta(x)| dx \stackrel{\Delta(x) \geq 0}{=} \int_0^1 (e^x - x^2 - 1) dx = \left[e^x - \frac{x^3}{3} - x \right]_0^1 = \\ &= e - \frac{1}{3} - 1 - (e^0 - 0) = e - \frac{1}{3} - 2 = e - \frac{7}{3} \quad \tau.\mu. \end{aligned}$$

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 2014

ΘΕΜΑ 31ο :

Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση δυο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν:

- $f'(0) = f'(1) = 0$
- $f(0) = 0$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x^2 + x$

a) Αν οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης C_g της συνάρτησης g στα σημεία της με τετμημένες $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$ τέμνονται στο σημείο με τετμημένη $x_3 = \frac{1}{2}$, τότε να αποδείξετε ότι:

- $g(1) = 0$
- Υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ ώστε $g'(\xi) + 2\xi = 1$

b) Να αποδείξετε ότι:

- $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (1-x)f'(x)dx$
- Υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$, ώστε $f'(x_0) = 2 \int_0^1 f(x)dx$

ΛΥΣΗ

a) i) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ με $g'(x) = f'(x) - 2x + 1$, οπότε
 $g'(0) = f'(0) + 1 = 1$ και $g'(1) = f'(1) - 1 = -1$

Επίσης:

$$g(0) = f(0) = 0 \quad \text{και} \quad g(1) = f(1) \quad (1)$$

οπότε οι εφαπτόμενες της C_g στα σημεία $A(0, g(0))$ και $B(1, g(1))$ έχουν αντίστοιχα εξισώσεις:

$$\varepsilon_A: y - g(0) = g'(0)(x - 0) \Rightarrow y = x \quad \text{και}$$

$$\varepsilon_B: y - g(1) = g'(1)(x - 1) \Rightarrow y - f(1) = -1(x - 1) \Rightarrow y = -x + 1 + f(1)$$

Το σημείο $M\left(\frac{1}{2}, y_0\right)$ είναι το σημείο τομής των εφαπτόμενων ε_A και ε_B , οπότε έχουμε:

$$y_0 = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad y_0 = -\frac{1}{2} + 1 + f(1)$$

Επομένως έχουμε:

$$\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + 1 + f(1) \Rightarrow f(1) = 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} g(1) = 0$$

- ii) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ με $f'(x) = g'(x) + 2x - 1$

Είναι $f(0) = 0$ και $f(1) = 0$, οπότε $f(0) = f(1)$, δηλαδή ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle.

Επομένως θα υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$

Επιπλέον

$$f'(\xi) = 0 \Rightarrow g'(\xi) + 2\xi - 1 = 0 \Rightarrow g'(\xi) + 2\xi = 1 \quad (2)$$

- β) i) Είναι:

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x-1)' f(x) dx = \left[(x-1) f(x) \right]_0^1 - \int_0^1 (x-1) f'(x) dx \stackrel{f(0)=0}{=} \int_0^1 (1-x) f'(x) dx \quad (6)$$

- ii) Η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ ως παραγωγίσιμη, άρα παίρνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή. Αν m, M είναι αντίστοιχα η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της στο $[0, 1]$, τότε έχουμε:

$$m \leq f'(x) \leq M$$

Επειδή $1-x \geq 0$ έχουμε:

$$(1-x)m \leq (1-x)f'(x) \leq (1-x)M \Rightarrow$$

$$m \int_0^1 (1-x) dx \leq \int_0^1 (1-x) f'(x) dx \leq M \int_0^1 (1-x) dx$$

Είναι:

$$\int_0^1 (1-x) dx = \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

οπότε έχουμε:

$$\frac{1}{2}m \leq \int_0^1 (1-x) f'(x) dx \leq \frac{1}{2}M \stackrel{(6)}{\Rightarrow} m \leq 2 \int_0^1 f(x) dx \leq M$$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός $2 \int_0^1 f(x) dx$ ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης f' , άρα

υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 2 \int_0^1 f(x) dx$

ΘΕΜΑ 32ο :

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f(x) = \int_0^x e^{f(x-t)} dt$ για

κάθε $x \in (-\infty, 1)$

- Να αποδείξετε ότι $f(x) = -\ln(1-x)$, $x < 1$
- Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f
- Να υπολογίσετε το εμβαδό $E(t)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , την εφαπτομένη της C_f στην αρχή των αξόνων και την ευθεία με εξίσωση $x = t$, όπου $0 < t < 1$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1^-} E(t)$

- Να αποδείξετε ότι: $2 \int_a^{a-2} f(t)dt < \int_a^{a-4} f(t)dt$, όπου $a < 1$

ΛΥΣΗ

- Θέτουμε $x - t = u$, οπότε $du = -dt$. Όταν $t = 0$ το $u = x$ και όταν $t = x$ το $u = 0$

Άρα έχουμε:

$$f(x) = \int_0^x e^{f(x-t)} dt = \int_x^0 e^{f(u)} (-du) = \int_0^x e^{f(t)} dt$$

Η συνάρτηση $e^{f(t)}$ είναι συνεχής στο $(-\infty, 1)$, ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων το $0 \in (-\infty, 1)$,

οπότε η συνάρτηση $\int_0^x e^{f(t)} dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 1)$ οπότε και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 1)$

Για κάθε $x \in (-\infty, 1)$ είναι:

$$f'(x) = e^{f(x)} \Leftrightarrow f'(x)e^{-f(x)} = 1 \Leftrightarrow -f'(x)e^{-f(x)} = -1 \Leftrightarrow (e^{-f(x)})' = (-x)'$$

Άρα έχουμε:

$$e^{-f(x)} = -x + c, \quad x \in (-\infty, 1)$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ έχουμε } f(0) = \int_0^0 e^{f(t)} dt = 0, \text{ οπότε } e^{-f(0)} = 0 + c \Rightarrow c = 1$$

Επομένως για κάθε $x \in (-\infty, 1)$ είναι:

$$e^{-f(x)} = -x + 1 \Leftrightarrow -f(x) = \ln(1-x) \Leftrightarrow f(x) = -\ln(1-x), \quad x \in (-\infty, 1)$$

- Έχουμε:

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-\ln(1-x)) \stackrel{u=1-x}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} (-\ln u) = +\infty,$

άρα η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\ln(1-x)}{x} \stackrel{\substack{(-\infty) \\ (\infty)}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{1}{1-x}(1-x)'}{1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1-x} = 0 = \lambda$ και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [-\ln(1-x)] = -\infty$$

Επομένως η C_f δεν έχει οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη.

γ) Για κάθε $x \in (-\infty, 1)$ έχουμε :

$$f'(x) = [-\ln(1-x)]' = -\frac{1}{1-x}(1-x)' = \frac{1}{1-x} \quad \text{και}$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = -\frac{1}{(1-x)^2}(1-x)' = \frac{1}{(1-x)^2} > 0$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(-\infty, 1)$, οπότε η C_f βρίσκεται «πάνω» από την εφαπτομένη ε της C_f στο σημείο της $O(0,0)$

Επειδή $f'(0) = 1$ και $f(0) = -\ln(1-0) = 0$, η εφαπτομένη ε έχει εξίσωση :

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y = x$$

Άρα $f(x) \geq y \Rightarrow f(x) \geq x$ για κάθε $x \in (-\infty, 1)$

Επομένως το εμβαδό $E(t)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , την εφαπτομένη της C_f στην αρχή των αξόνων και την ευθεία με εξίσωση $x = t$, όπου $0 < t < 1$, είναι:

$$\begin{aligned} E(t) &= \int_0^t [-\ln(1-x) - x] dx = - \int_0^t \ln(1-x) dx - \int_0^t x dx = \\ &= - \int_0^t (x)' \ln(1-x) dx - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^t = - \left[x \ln(1-x) \right]_0^t + \int_0^t x \frac{1}{1-x} (1-x)' dx - \frac{t^2}{2} = \\ &= -t \ln(1-t) + \int_0^t \frac{-x}{1-x} dx - \frac{t^2}{2} = -t \ln(1-t) + \int_0^t \frac{1-x-1}{1-x} dx - \frac{t^2}{2} = \\ &= -t \ln(1-t) + \int_0^t \left(1 - \frac{1}{1-x} \right) dx - \frac{t^2}{2} = -t \ln(1-t) + \int_0^t 1 dx + \int_0^t \frac{-1}{1-x} dx - \frac{t^2}{2} = \\ &= -t \ln(1-t) + 1 \cdot (t-0) + \int_0^t \frac{1}{1-x} (1-x)' dx - \frac{t^2}{2} = \\ &= -t \ln(1-t) + t + \left[\ln|1-x| \right]_0^t - \frac{t^2}{2} = -t \ln(1-t) + t + \ln(1-t) - \frac{t^2}{2} = \\ &= (1-t) \ln(1-t) + t - \frac{t^2}{2} = (1-t) \ln(1-t) - \frac{(1-t)^2}{2} + \frac{1}{2}, \quad t \in (0, 1) \end{aligned}$$

Έχουμε :

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} E(t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} \left[(1-t) \ln(1-t) - \frac{(1-t)^2}{2} + \frac{1}{2} \right] \stackrel{u=1-t}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \left[u \ln u - \frac{u^2}{2} + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2},$$

$$\text{γιατί } \lim_{u \rightarrow 0^+} (u \ln u) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln u}{\frac{1}{u}} \right)^{\left(\frac{-\infty}{+\infty} \right)} \stackrel{\text{D.L.H}}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \left(\frac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}} \right) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \left(-\frac{u^2}{u} \right) = \lim_{u \rightarrow 0^+} (-u) = 0$$

δ) Η δοθείσα ανίσωση ισοδύναμα γράφεται :

$$2 \int_{\alpha}^{\alpha-2} f(t)dt < \int_{\alpha}^{\alpha-2} f(t)dt + \int_{\alpha-2}^{\alpha-4} f(t)dt \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\alpha-2} f(t)dt < \int_{\alpha-2}^{\alpha-4} f(t)dt, \alpha < 1$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση :

$$\Phi(x) = \int_x^{x-2} f(t)dt = \int_x^0 f(t)dt + \int_0^{x-2} f(t)dt = - \int_0^x f(t)dt + \int_0^{x-2} f(t)dt, x < 1$$

που είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 1)$, με

$$\Phi'(x) = -f(x) + f(x-2) = f(x-2) - f(x) \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 1)$$

Για κάθε $x \in (-\infty, 1)$ είναι $f'(x) = \frac{1}{1-x} > 0$, επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα

στο $(-\infty, 1)$, οπότε ισχύει:

$$x-2 < x < 1 \Rightarrow f(x-2) < f(x) \Rightarrow f(x-2) - f(x) < 0 \Rightarrow$$

$$\Phi'(x) < 0, \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 1)$$

Άρα η συνάρτηση Φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1)$

Επομένως έχουμε:

$$\alpha-2 < \alpha < 1 \Rightarrow \Phi(\alpha-2) > \Phi(\alpha), \text{ για κάθε } \alpha \in (-\infty, 1),$$

δηλαδή

$$\int_{\alpha}^{\alpha-2} f(t)dt < \int_{\alpha-2}^{\alpha-4} f(t)dt$$

ΘΕΜΑ 33ο :

Έστω συνεχής συνάρτηση $f: R \rightarrow R$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$, για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)\eta\mu(x-1)}{\sqrt{x-1}} = 4 \text{ και οι συναρτήσεις } g(x) = \int_0^x f(t)dt \text{ και } h(x) = \int_0^1 f(x+t)dt, x, t \in R.$$

Αν $E(\Omega_1) = \frac{4}{3}$, $E(\Omega_2) = \frac{10}{3}$ είναι τα εμβαδά των χωρίων Ω_1 και Ω_2 που περικλείονται από τη

γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα x' και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$, $x=1$ και $x=1$, $x=2$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

a) $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$

β) $g(2) = \frac{14}{3}$

γ) Υπάρχει μοναδικό $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $g(\xi) = 3$

δ) Υπάρχουν $\theta_1, \theta_2 \in (1, 2)$ τέτοια, ώστε $\frac{f(\theta_1) + f(\theta_2)}{f(\theta_1) \cdot f(\theta_2)} = \frac{3}{5}$

ε) Ισχύει $h(x) = g(x+1) - g(x)$, $x \in R$

στ) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho+1) - f(\rho) = 2$

ΛΥΣΗ

a) Έστω $\varphi(x) = \frac{f(x)\eta\mu(x-1)}{\sqrt{x}-1}$ για x κοντά στο 1, οπότε $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) = 4$

Για x κοντά στο 1 έχουμε:

$$f(x) = \frac{\varphi(x)(\sqrt{x}-1)}{\eta\mu(x-1)} \Leftrightarrow f(x) = \frac{\varphi(x)(x-1)}{\eta\mu(x-1)(\sqrt{x}+1)} \Leftrightarrow f(x) = \varphi(x) \cdot \frac{1}{\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(x-1)}{x-1} \stackrel{x=1=u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\varphi(x) \cdot \frac{1}{\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right] = 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ ισχύει $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και για κάθε $x \in R$ είναι $f(x) \neq 0$, οπότε η συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο στο R . Επειδή $f(1) = 2 > 0$ συμπεραίνουμε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$.

β) Είναι:

$$E(\Omega_1) = \int_0^1 f(x)dx = \frac{4}{3} \quad \text{και} \quad E(\Omega_2) = \int_1^2 f(x)dx = \frac{10}{3}$$

$$\text{οπότε } g(2) = \int_0^2 f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^2 f(t)dx = \frac{4}{3} + \frac{10}{3} = \frac{14}{3}$$

γ) Είναι:

$$g(1) = \int_0^1 f(t)dt = \frac{4}{3} \quad \text{και} \quad g(2) = \int_0^2 f(t)dt = \frac{14}{3}$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R , οπότε η συνάρτηση $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη

στο R με $g'(x) = f(x) > 0$, άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο R .

Έχουμε:

- η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[1, 2]$
- $g(1) \neq g(2)$
- $3 \in (g(1), g(2)) = \left(\frac{4}{3}, \frac{14}{3} \right)$

Επομένως από Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών θα υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ και μάλιστα μοναδικό, αφού η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα τέτοιο, ώστε $g(\xi) = 3$

δ) Η g είναι παραγωγίσιμη στο R , άρα και σε καθένα από τα διαστήματα $[1, \xi]$ και $[\xi, 2]$, οπότε ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ, επομένως θα υπάρχει ένα τουλάχιστον:

- $\theta_1 \in (1, \xi)$ τέτοιο, ώστε $g'(\theta_1) = \frac{g(\xi) - g(1)}{\xi - 1} \Rightarrow f(\theta_1) = \frac{3 - \frac{4}{3}}{\xi - 1} \Rightarrow \xi - 1 = \frac{3}{f(\theta_1)}$ (1) και

- $\theta_2 \in (\xi, 2)$ τέτοιο, ώστε $g'(\theta_2) = \frac{g(2) - g(\xi)}{2 - \xi} \Rightarrow f(\theta_2) = \frac{\frac{14}{3} - 3}{2 - \xi} \Rightarrow 2 - \xi = \frac{5}{f(\theta_2)}$ (2)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$1 = \frac{\frac{5}{3}}{f(\theta_1)} + \frac{\frac{5}{3}}{f(\theta_2)} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{1}{f(\theta_1)} + \frac{1}{f(\theta_2)} \Rightarrow \frac{f(\theta_1) + f(\theta_2)}{f(\theta_1)f(\theta_2)} = \frac{3}{5}$$

ε) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_0^1 f(x+t)dt \stackrel{x+t=u}{=} \int_x^{x+1} f(u)du = \int_x^0 f(u)du + \int_0^{x+1} f(u)du = \\ &= \int_0^{x+1} f(u)du - \int_0^x f(u)du = g(x+1) - g(x) \end{aligned}$$

στ) Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ με

$$h'(x) = (g(x+1) - g(x))' = g'(x+1)(x+1)' - g'(x) = g'(x+1) - g'(x) = f(x+1) - f(x)$$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho \in (0, 1)$

$$\text{τέτοιο, ώστε } h'(\rho) = \frac{h(1) - h(0)}{1 - 0} \Rightarrow f(\rho+1) - f(\rho) = h(1) - h(0)$$

$$\text{Ομως } h(1) = g(2) - g(1) = \frac{14}{3} - \frac{4}{3} = \frac{10}{3} \quad \text{και} \quad h(0) = g(1) - g(0) = \frac{4}{3} - 0 = \frac{4}{3}$$

$$\text{Οπότε } f(\rho+1) - f(\rho) = \frac{10}{3} - \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

ΘΕΜΑ 34ο :

Έστω $f : R \rightarrow R$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f'(x) + 1 = 2x(f(x) + x)$ για κάθε $x \in R$
- $f(0) = 1$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{x^2} - x$, $x \in R$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

γ) Να αποδείξετε ότι $e^{x^2-1} \geq 2x-1$ για κάθε $x \in R$

δ) Να λύσετε στο διάστημα $(0, +\infty)$ την εξίσωση $e^{x^4-x^2} = \frac{1}{x}$

ε) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \int_{2-x}^x f(t)dt$, $x \in R$

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

ii) Να αποδείξετε ότι $4 \cdot \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(2x)dx < \int_0^2 f(x)dx$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f'(x) + 1 &= 2x(f(x) + x) \Rightarrow f'(x) - 2xf(x) = -1 + 2x^2 \Rightarrow \\ f'(x)e^{-x^2} + e^{-x^2}(-2x)f(x) &= -e^{-x^2} + 2x^2e^{-x^2} \Rightarrow \\ f'(x)e^{-x^2} + e^{-x^2}(-2x)f(x) &= (-x)'e^{-x^2} + (-x)e^{-x^2}(-2x) \Rightarrow \\ f'(x)e^{-x^2} + e^{-x^2}(-x^2)'f(x) &= (-x)'e^{-x^2} + (-x)e^{-x^2}(-x^2)' \Rightarrow \\ (f(x)e^{-x^2})' &= (-xe^{-x^2})' \Rightarrow f(x)e^{-x^2} = -xe^{-x^2} + c \end{aligned}$$

και $f(0) = 1$, οπότε $c = 1$

Επομένως $f(x)e^{-x^2} = -xe^{-x^2} + 1$, οπότε $f(x) = e^{x^2} - x$, $x \in \mathbb{R}$

β) Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με

$$f'(x) = 2xe^{x^2} - 1 \quad \text{και} \quad f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} = 2(2x^2 + 1)e^{x^2}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f''(x) = 2(2x^2 + 1)e^{x^2} > 0$$

Άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή στο \mathbb{R}

γ) Είναι:

$$f(1) = e - 1 \quad \text{και} \quad f'(1) = 2e - 1$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$ είναι:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Rightarrow y - (e - 1) = (2e - 1)(x - 1) \Rightarrow y = (2e - 1)x - e$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι κυρτή στο \mathbb{R} , η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$ βρίσκεται από την C_f και κάτω.

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq (2e - 1)x - e \Rightarrow e^{x^2} - x \geq 2ex - x - e \Rightarrow \\ e^{x^2} &\geq (2x - 1)e \Rightarrow \frac{e^{x^2}}{e} \geq 2x - 1 \Rightarrow e^{x^2-1} \geq 2x - 1 \end{aligned}$$

δ) Στο διάστημα $(0, +\infty)$ έχουμε:

$$e^{x^4-x^2} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{e^{x^4}}{e^{x^2}} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{e^{x^4}}{e^{x^2}} = \frac{x}{x^2} \Leftrightarrow x^2e^{x^4} = xe^{x^2} \Leftrightarrow$$

$$2x^2e^{x^4} = 2xe^{x^2} \Leftrightarrow 2x^2e^{x^4} - 1 = 2xe^{x^2} - 1 \Leftrightarrow f'(x^2) = f'(x) \quad (1)$$

Η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα άρα και «1 - 1», οπότε από τη σχέση (1) έχουμε:

$$x^2 = x \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x = 1$$

ε) i) Η συνάρτηση g γράφεται $g(x) = \int_0^x f(t) dt - \int_0^{2-x} f(t) dt$ και είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, ως διαφορά συναρτήσεων που είναι δυο φορές παραγωγίσιμες, με:

$$g'(x) = \left(\int_0^x f(t) dt - \int_0^{2-x} f(t) dt \right)' = f(x) - f(2-x) \cdot (-1) = f(x) + f(2-x)$$

Η συνάρτηση g' είναι παραγωγίσιμη (σύνθεση και άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$g''(x) = f'(x) - f'(2-x)$$

Δεδομένου ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} έχουμε:

- $g''(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(2-x) \Leftrightarrow x > 2-x \Leftrightarrow x > 1$
- $g''(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(2-x) \Leftrightarrow x < 2-x \Leftrightarrow x < 1$
- $g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η συνάρτηση g είναι κυρτή στο διάστημα $[1, +\infty)$, κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 1]$ και παρουσιάζει καμπή στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$. Το σημείο καμπής της γραφικής της παράστασης της συνάρτησης g είναι το $M(1, g(1))$, δηλαδή το

$$M(1, 0), \text{ αφού } g(1) = \int_1^1 f(t) dt = 0$$

ii) Στο ολοκλήρωμα του πρώτου μέλους της σχέσης που θέλουμε να αποδείξουμε, αν θέσουμε $2x = u$ τότε, έχουμε:

$$2dx = du, \quad u_1 = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad u_2 = \frac{3}{2}$$

οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$2 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(u) du < \int_0^2 f(x) dx \Leftrightarrow 2g\left(\frac{3}{2}\right) < g(2)$$

Δεδομένου ότι $g(1) = 0$ η αποδεικτέα σχέση μπορεί να λάβει τη μορφή

$$g\left(\frac{1+2}{2}\right) < \frac{1}{2}(g(1) + g(2))$$

Η συνάρτηση g σε καθένα από τα διαστήματα $\left[1, \frac{3}{2}\right], \left[\frac{3}{2}, 2\right]$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, οπότε υπάρχουν:

$$\bullet \quad \xi_1 \in \left(1, \frac{3}{2}\right) \text{ τέτοιο, ώστε } g'(\xi_1) = \frac{g\left(\frac{3}{2}\right) - g(1)}{\frac{1}{2}} \Rightarrow g'(\xi_1) = 2g\left(\frac{3}{2}\right), \quad (2)$$

$$\bullet \quad \xi_2 \in \left(\frac{3}{2}, 2\right) \text{ τέτοιο, ώστε } g'(\xi_2) = \frac{g(2) - g\left(\frac{3}{2}\right)}{\frac{1}{2}} \Rightarrow g'(\xi_2) = 2g(2) - 2g\left(\frac{3}{2}\right), \quad (3)$$

Η συνάρτηση g' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, 2]$ και $\xi_1 < \xi_2$, οπότε $g'(\xi_1) < g'(\xi_2)$
Επομένως έχουμε:

$$g'(\xi_1) < g'(\xi_2) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} 2g\left(\frac{3}{2}\right) < 2g(2) - 2g\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow 2g\left(\frac{3}{2}\right) < g(2)$$

που είναι το ζητούμενο.

ΘΕΜΑ 35ο :

Δίνονται:

- Η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \rightarrow R$ με $f(x) > 0$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in R$ και
- Η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{2x} + \frac{3x}{2} - \frac{\ln x}{x} - 3$, $x > 0$

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση g

Αν επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις:

- $\int_{e^x f(x)}^{(1+e^x)f'(x)} e^{-t} g(t) dt + (e^{-x} + 1)f'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in R$ και
- $f(0) = 2$

β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

γ) Αν $f(x) = e^x + 1$, τότε:

i) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^1 \frac{x^2 + 1}{f(x)} dx$

ii) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon \varphi x) - f(\eta \mu x)}{\varepsilon \varphi x - \eta \mu x}$

iii) Αν μια συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[0, 1]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0, 1]$, ώστε

$$\int_0^1 h(x) f(\sqrt{x}) dx = h(\xi) \int_0^1 f(\sqrt{x}) dx$$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με:

$$g'(x) = -\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{2} - \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{-1 + 3x^2 + 2\ln x - 2}{2x^2} = \frac{3x^2 + 2\ln x - 3}{2x^2}$$

Το πρόσημο της συνάρτησης g' εξαρτάται μόνο από το πρόσημο του αριθμητή.

Θεωρούμε λοιπόν τη συνάρτηση

$$G(x) = 3x^2 + 2\ln x - 3, \quad x > 0$$

Η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$G'(x) = 6x + \frac{2}{x} > 0$$

Άρα η συνάρτηση G είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Εξάλλου $G(1) = 0$, οπότε

- για $x > 1$ έχουμε $G(x) > G(1) \Rightarrow G(x) > 0$, οπότε $g'(x) > 0$ και
- για $0 < x < 1$ έχουμε $G(x) < G(1) \Rightarrow G(x) < 0$, οπότε $g'(x) < 0$

Το πρόσημο της $g'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$		-1	

Ελάχιστο

Επομένως η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$

Επίσης η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 1$ το $g(1) = -1$

β) Είναι:

$$\int_{e^x f(x)}^{(1+e^x)f'(x)} e^{-x} g(t) dt + (e^{-x} + 1)f'(x) = f(x) \Rightarrow$$

$$e^{-x} \int_{e^x f(x)}^{(1+e^x)f'(x)} g(t) dt + e^{-x}(1+e^x)f'(x) = f(x) \Rightarrow$$

$$\int_{e^x f(x)}^{(1+e^x)f'(x)} g(t) dt + (e^x + 1)f'(x) = e^x f(x) \Rightarrow$$

$$\int_{e^x f(x)}^{(1+e^x)f'(x)} g(t) dt + (e^x + 1)f'(x) - e^x f(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{e^x f(x)}^{(1+e^x)f'(x)} g(t) dt + [t]_{e^x f(x)}^{(e^x+1)f'(x)} = 0 \Rightarrow \int_{e^x f(x)}^{(1+e^x)f'(x)} [g(t) + 1] dt = 0$$

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0 \in R$ τέτοιο, ώστε

$$e^{x_0} f(x_0) \neq (1+e^{x_0})f'(x_0)$$

τότε στο διάστημα που σχηματίζουν οι αριθμοί $e^{x_0} f(x_0)$ και $(1+e^{x_0})f'(x_0)$, η συνάρτηση $g(t)+1$, όπως προκύπτει από το ερώτημα (α), λαμβάνει θετικές τιμές για κάθε $t \neq 1$, οπότε

$$\int_{e^{x_0} f(x_0)}^{(1+e^{x_0})f'(x_0)} [g(t) + 1] dt \neq 0$$

που είναι άτοπο.

Άρα για κάθε $x \in R$ ισχύει:

$$e^x f(x) = (e^x + 1)f'(x) \Rightarrow e^x f(x) - (e^x + 1)f'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{(e^x + 1)f'(x) - e^x f(x)}{(e^x + 1)^2} = 0 \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{e^x + 1} \right)' = 0 \Rightarrow f(x) = c(e^x + 1)$$

και με δεδομένο ότι $f(0) = 2$, βρίσκουμε ότι $c = 1$

Επομένως έχουμε:

$$f(x) = e^x + 1, \quad x \in R$$

γ) i) Έχουμε:

$$I = \int_{-1}^1 \frac{x^2 + 1}{f(x)} dx = \int_{-1}^1 \frac{x^2 + 1}{e^x + 1} dx$$

Αν θέσουμε $x = -u$ τότε, έχουμε $dx = -du$, $u_1 = 1$, $u_2 = -1$ και

$$I = - \int_{-1}^{-1} \frac{x^2 + 1}{e^{-x} + 1} dx = \int_{-1}^1 \frac{(x^2 + 1)e^x}{e^x + 1} dx$$

οπότε

$$2I = \int_{-1}^1 \frac{(x^2 + 1)(e^x + 1)}{e^x + 1} dx = \int_{-1}^1 (x^2 + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^1 = \frac{8}{3}$$

Άρα

$$I = \frac{4}{3}$$

ii) Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon \varphi x) - f(\eta \mu x)}{\varepsilon \varphi x - \eta \mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\varepsilon \varphi x} - e^{\eta \mu x}}{\varepsilon \varphi x - \eta \mu x} \stackrel{0}{\underset{0}{=}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\eta \mu x} (\varepsilon \varphi x - \eta \mu x)' - 1}{\varepsilon \varphi x - \eta \mu x} = 1$$

διότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\eta \mu x} = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\varepsilon \varphi x - \eta \mu x} - 1}{\varepsilon \varphi x - \eta \mu x} \stackrel{0}{\underset{0}{=}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\varepsilon \varphi x - \eta \mu x} (\varepsilon \varphi x - \eta \mu x)'}{(\varepsilon \varphi x - \eta \mu x)'} = 1$$

iii) Η συνάρτηση h , ως συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ λαμβάνει μέγιστη τιμή M και ελάχιστη τιμή m . Επίσης $f(\sqrt{x}) > 0$, οπότε έχουμε:

$$m \leq h(x) \leq M \Rightarrow m f(\sqrt{x}) \leq h(x) f(\sqrt{x}) \leq M f(\sqrt{x}) \Rightarrow$$

$$m \int_0^1 f(\sqrt{x}) dx \leq \int_0^1 h(x) f(\sqrt{x}) dx \leq M \int_0^1 f(\sqrt{x}) dx$$

Επομένως, ο αριθμός

$$\frac{\int_0^1 h(x) f(\sqrt{x}) dx}{\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx}$$

ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης h .

Άρα υπάρχει $\xi \in [0, 1]$ τέτοιο, ώστε

$$h(\xi) = \frac{\int_0^1 h(x) f(\sqrt{x}) dx}{\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx} \Rightarrow$$

$$\int_0^1 h(x) f(\sqrt{x}) dx = h(\xi) \int_0^1 f(\sqrt{x}) dx$$

που είναι το ζητούμενο.

ΘΕΜΑ 36ο :

Έστω η συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x) = |f(x)|$. Αν $E(t) = t \ln t - t + 1$, $t > 0$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x = 1$ και $x = t$, τότε:

- Να αποδείξετε ότι $f(t) = \ln t$, $t > 0$
- Αν η ευθεία $y = a$, με $a > 0$, τέμνει τη γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης g στα σημεία A και B , να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες της C_g στα σημεία A και B είναι κάθετες.
- Με τη βοήθεια της ανισότητας $\ln t \leq t - 1$ που ισχύει για κάθε $t > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\text{i)} \quad \ln t \geq \frac{t-1}{t} \text{ για κάθε } t > 0$$

$$\text{ii)} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \int_x^{x^2} \frac{1}{f(t)} dt = \ln 2 \quad \text{και}$$

$$\text{iii)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \int_x^{x^2} \frac{f(t)}{t-1} dt = 0$$

ΛΥΣΗ

$$\text{a)} \quad \text{Για } t > 1 \text{ είναι } E(t) = \int_1^t |f(x)| dx, \text{ δηλαδή } \int_1^t |f(x)| dx = t \ln t - t + 1$$

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = |f(x)|$, τότε η προηγούμενη σχέση γράφεται:

$$\int_1^t g(x) dx = t \ln t - t + 1$$

και αν παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη της, έχουμε:

$$\left(\int_1^t g(x) dx \right)' = (t \ln t - t + 1)' \Rightarrow g(t) = \ln t, \quad t > 1$$

Επειδή η συνάρτηση g είναι συνεχής ως απόλυτη τιμή συνεχούς συνάρτησης θα ισχύει:

$$g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) \Rightarrow g(1) = 0 \Rightarrow |f(1)| = 0 \Leftrightarrow f(1) = 0$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε έχουμε:

- Για $t < 1$ είναι $f(t) < f(1) \Rightarrow f(t) < 0$
- Για $t > 1$ είναι $f(t) > f(1) \Rightarrow f(t) > 0$

Επομένως για $t > 1$ είναι:

$$g(t) = |f(t)| = \ln t \Rightarrow f(t) = \ln t$$

Επειδή $f(1) = 0$ έχουμε τελικά:

$$f(t) = \ln t, \quad t \geq 1$$

Av $0 < t < 1$ είναι:

$$\int_t^1 |f(x)| dx = t \ln t - t + 1 \Leftrightarrow - \int_1^t g(x) dx = t \ln t - t + 1$$

Παραγωγίζοντας προκύπτει ότι:

$$-g(t) = \ln t \Leftrightarrow -|f(t)| = \ln t \stackrel{f(t) < 0}{\Leftrightarrow} f(t) = \ln t$$

Επομένως είναι:

$$f(t) = \ln t, \quad t > 0$$

- β)** Θα βρούμε τα κοινά σημεία της ευθείας $y = \alpha$ και της γραφικής παράστασης C_g της συνάρτησης $g(x) = |f(x)|$

Έχουμε:

$$g(x) = \alpha \Leftrightarrow |\ln x| = \alpha \Leftrightarrow (\ln x = \alpha \text{ ή } \ln x = -\alpha) \Leftrightarrow (x_1 = e^\alpha \text{ ή } x_2 = e^{-\alpha}), \quad x_2 < 1 < x_1$$

Επομένως για τους συντελεστές διεύθυνσης των εφαπτομένων της γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης $g(x) = |f(x)|$ στα σημεία A και B, έχουμε:

$$\lambda_A \cdot \lambda_B = g'(x_2) \cdot g'(x_1) = \left(-\frac{1}{x_2} \right) \cdot \left(\frac{1}{x_1} \right) = -e^\alpha \cdot e^{-\alpha} = -1$$

Επομένως οι εφαπτόμενες της C_g στα σημεία A και B είναι κάθετες.

- γ) i)** Αν στην ανισότητα $\ln t \leq t - 1, t > 0$ (1), θέσουμε όπου t το $\frac{1}{t}$ έχουμε:

$$\ln t \geq 1 - \frac{1}{t} \Leftrightarrow \ln t \geq \frac{t-1}{t}, \quad t > 0 \quad (2)$$

- ii)** Συνδυάζοντας τις ανισότητες (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{t-1}{t} \leq \ln t \leq t - 1, \quad t > 0$$

Για $t > 1$ είναι:

$$\frac{1}{t-1} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{t}{t-1}$$

και για $x > 1$ προκύπτει ότι:

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1} dt \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt \leq \int_x^{x^2} \frac{t}{t-1} dt \Leftrightarrow$$

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1} dt \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt \leq \int_x^{x^2} \frac{t-1+1}{t-1} dt \Leftrightarrow$$

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1} dt \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt \leq \int_x^{x^2} \left(1 + \frac{1}{t-1} \right) dt \Leftrightarrow$$

$$\left[\ln(t-1) \right]_x^{x^2} \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt \leq \left[t + \ln(t-1) \right]_x^{x^2} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \left[\ln(t-1) \right]_x^{x^2} &\leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt \leq \left[t + \ln(t-1) \right]_x^{x^2} \Leftrightarrow \\ \ln(x^2-1) - \ln(x-1) &\leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt \leq x^2 - x + \ln(x^2-1) - \ln(x-1) \Leftrightarrow \\ \ln \frac{x^2-1}{x-1} &\leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt \leq x^2 - x + \ln \frac{x^2-1}{x-1} \Leftrightarrow \\ \ln(x+1) &\leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt \leq x^2 - x + \ln(x+1) \end{aligned}$$

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln(x+1)) = \ln 2$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - x + \ln(x+1)) = \ln 2$

Οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim_{x \rightarrow 1^+} \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt = \ln 2$

iii) 1^{ος} τρόπος:

Ισχύει:

$$\frac{t-1}{t} \leq \ln t \leq t-1, \quad t > 0$$

- Για $t > 1$ είναι:

$$\frac{1}{t} \leq \frac{\ln t}{t-1} \leq 1$$

και για $x > 1$ προκύπτει ότι:

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t} dt \leq \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{t-1} dt \leq \int_x^{x^2} 1 dt \Leftrightarrow$$

$$\left[\ln t \right]_x^{x^2} \leq \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{t-1} dt \leq 1 \cdot (x^2 - x) \Leftrightarrow$$

$$\ln x^2 - \ln x \leq \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{t-1} dt \leq x^2 - x \Leftrightarrow$$

$$\ln x \leq \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{t-1} dt \leq x^2 - x$$

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln x) = \ln 1 = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - x) = 0$

Οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim_{x \rightarrow 1^+} \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{t-1} dt = 0 \quad (3)$

- Για $0 < t < 1$ είναι:

$$\frac{1}{t} \geq \frac{\ln t}{t-1} \geq 1$$

και για $0 < x < 1$ προκύπτει ότι:

$$\int_{x^2}^x \frac{1}{t} dt \geq \int_{x^2}^x \frac{\ln t}{t-1} dt \geq \int_{x^2}^x 1 dt \Leftrightarrow$$

$$\left[\ln t \right]_{x^2}^x \geq \int_{x^2}^x \frac{\ln t}{t-1} dt \geq 1 \cdot (x - x^2) \Leftrightarrow$$

$$\ln x - \ln x^2 \geq \int_{x^2}^x \frac{\ln t}{t-1} dt \geq x - x^2 \Leftrightarrow$$

$$-\ln x \geq \int_{x^2}^x \frac{\ln t}{t-1} dt \geq x - x^2$$

$$\ln x \leq \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{t-1} dt \leq x^2 - x$$

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} (\ln x) = \ln 1 = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - x) = 0$

Οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim_{x \rightarrow 1^-} \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{t-1} dt = 0 \quad (4)$

Από (3) και (4) έχουμε $\lim_{x \rightarrow 1} \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{t-1} dt = 0$

2ος τρόπος:

Έχουμε:

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} \int_x^{x^2} \frac{f(t)}{t-1} dt = \lim_{x \rightarrow 1} \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{t-1} dt$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(t) = \begin{cases} \frac{\ln t}{t-1}, & 0 < t \neq 1 \\ 1, & t = 1 \end{cases}$$

Η συνάρτηση h είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $(0, 1)$ και $(1, +\infty)$

Επίσης είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(t) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln t}{t-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln t - \ln 1}{t-1} = \frac{d(\ln t)}{dt} \Big|_{t=1} = 1 = h(1)$$

Άρα η συνάρτηση h είναι συνεχής και στο $t_0 = 1$

Επομένως η συνάρτηση h είναι συνεχής, οπότε έχει αρχική.

Έστω H μια αρχική συνάρτηση της h στο διάστημα $(0, +\infty)$, τότε έχουμε:

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} \int_x^{x^2} \frac{f(t)}{t-1} dt = \lim_{x \rightarrow 1} \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{t-1} dt = \lim_{x \rightarrow 1} (H(x^2) - H(x)) = H(1) - H(1) = 0,$$

διότι η συνάρτηση H είναι συνεχής, ως παραγωγίσιμη.

ΘΕΜΑ 37ο :

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : R \rightarrow R$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(x^2 + y) + f(f(x) - y) = 2f(f(x)) + 2y^2 \text{ για κάθε } x, y \in R$$

Να αποδείξετε ότι:

a) $f^2(x) = x^4$, $x \in R$ και $f(x) + f(-x) = 2x^2$, $x \in R$

β) $f(x) = x^2$, $x \in R$

γ) $\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{e^x + 1} dx = \frac{1}{3}$

ΛΥΣΗ

a) 1ος τρόπος

Για κάθε $x, y \in R$ είναι:

$$f(x^2 + y) + f(f(x) - y) = 2f(f(x)) + 2y^2 \quad (1)$$

Αν στη σχέση (1) θέσουμε $y = -x^2$ έχουμε:

$$f(0) + f(f(x) + x^2) = 2f(f(x)) + 2x^4 \quad (2)$$

Αν στη σχέση (1) θέσουμε $y = f(x)$ έχουμε:

$$f(x^2 + f(x)) + f(0) = 2f(f(x)) + 2f^2(x) \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει ότι:

$$2f(f(x)) + 2x^4 = 2f(f(x)) + 2f^2(x) \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) = x^4 \quad (4)$$

Για $x = 0$ από τη σχέση (4) έχουμε:

$$f^2(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

Αν στη σχέση (1) θέσουμε $x = 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f(0+y) + f(f(0)-y) &= 2f(f(0)) + 2y^2 \Leftrightarrow \\ f(y) + f(-y) &= 2y^2 \end{aligned}$$

Επομένως ισχύει:

$$f(x) + f(-x) = 2x^2, \quad x \in \mathbb{R} \quad (5)$$

2ος τρόπος

Για $x = y = 0$ από την αρχική σχέση έχουμε:

$$f(0) + f(f(0)) = 2f(f(0)) \Rightarrow f(f(0)) = f(0) \quad (6)$$

Για $x = 0$ και $y = f(0)$ από την αρχική σχέση έχουμε:

$$\begin{aligned} f(f(0)) + f(f(0) - f(0)) &= 2f(f(0)) + 2f^2(0) \Rightarrow \\ f(0) = f(f(0)) + 2f^2(0) &\stackrel{(6)}{\Rightarrow} 2f^2(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \end{aligned}$$

Για $x = 0$ από την αρχική σχέση έχουμε:

$$\begin{aligned} f(y) + f(f(0) - y) &= 2f(f(0)) + 2y^2 \stackrel{f(0)=0}{\Rightarrow} \\ f(y) + f(-y) &= 2y^2, \quad y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Επομένως ισχύει:

$$f(x) + f(-x) = 2x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

Για $y = -x^2$ από την αρχική σχέση έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x^2 - x^2) + f(f(x) + x^2) &= 2f(f(x)) + 2x^4 \\ f(0) + f(f(x) + x^2) &= 2f(f(x)) + 2x^4 \stackrel{f(0)=0}{\Rightarrow} \\ f(f(x) + x^2) &= 2f(f(x)) + 2x^4 \quad (7) \end{aligned}$$

Για $y = f(x)$ από την αρχική σχέση έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x^2 + f(x)) + f(f(x) - f(x)) &= 2f(f(x)) + 2f^2(x) \Rightarrow \\ f(x^2 + f(x)) + f(0) &= 2f(f(x)) + 2f^2(x) \stackrel{f(0)=0}{\Rightarrow} \\ f(f(x) + x^2) &= 2f(f(x)) + 2f^2(x) \quad (8) \end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (7) και (8) προκύπτει ότι:

$$2f^2(x) = 2x^4 \Rightarrow f^2(x) = x^4$$

β) 1ος τρόπος

Έστω $x_o \in \mathbb{R}$, τότε από τη σχέση (4) έχουμε:

$$f^2(x_o) = x_o^4 \Leftrightarrow f(x_o) = x_o^2 \quad \text{ή} \quad f(x_o) = -x_o^2 \quad (9)$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $x_o \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x_o) = -x_o^2$

Από τη σχέση (5) έχουμε:

$$f(x_0) + f(-x_0) = 2x_0^2 \Rightarrow -x_0^2 + f(-x_0) = 2x_0^2 \Rightarrow f(-x_0) = 3x_0^2$$

Αν υψώσουμε στο τετράγωνο και τα δύο μέλη της τελευταίας σχέσης έχουμε:

$$[f(-x_0)]^2 = 9x_0^4 \Rightarrow x_0^4 = 9x_0^4 \Rightarrow 1 = 9, \text{ που είναι άτοπο.}$$

Άρα από τη σχέση (9) προκύπτει ότι για κάθε $x \neq 0$ είναι $f(x) = x^2$

Όμως $f(0) = 0$, οπότε $f(x) = x^2$, για κάθε $x \in R$

Η συνάρτηση αυτή είναι δεκτή, διότι επαληθεύει τη δοσμένη συνθήκη.

2ος τρόπος

Αν στη σχέση (4) θέσουμε όπου x το $-x$ έχουμε:

$$f^2(-x) = (-x)^4 \Rightarrow f^2(-x) = x^4, \quad x \in R$$

Άρα για κάθε $x \in R$ είναι:

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f^2(-x) = x^4 \Rightarrow \\ (f(x) + f(-x)) \cdot (f(x) - f(-x)) &= 0 \stackrel{(5)}{\Rightarrow} \\ 2x^2(f(x) - f(-x)) &= 0, \quad x \in R \end{aligned}$$

Επομένως για κάθε $x \in R^*$ είναι:

$$f(x) - f(-x) = 0 \Rightarrow f(x) = f(-x) \quad (10)$$

Από τις σχέσεις (5) και (10) προκύπτει ότι:

$$2f(x) = 2x^2 \Rightarrow f(x) = x^2, \quad x \in R^* \quad (11)$$

Από τη σχέση (11) και δεδομένου ότι $f(0) = 0$ έχουμε τελικά:

$$f(x) = x^2, \quad x \in R$$

$$\gamma) \quad \text{Έστω } I = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{e^x + 1} dx = \int_{-1}^1 \frac{x^2}{e^x + 1} dx. \quad \text{Αν θέσουμε } x = -u, \text{ τότε } dx = (-u)' du = -du$$

Για $x = -1$ είναι $u = 1$ και για $x = 1$ είναι $u = -1$, οπότε έχουμε:

$$I = \int_{-1}^1 \frac{(-u)^2}{e^{-u} + 1} (-du) = - \int_{-1}^1 \frac{u^2}{e^{-u} + 1} du = \int_{-1}^1 \frac{u^2}{e^{-u} + 1} du = \int_{-1}^1 \frac{u^2 e^u}{1 + e^u} du = \int_{-1}^1 \frac{x^2 e^x}{1 + e^x} dx = J$$

Είναι:

$$\blacklozenge \quad I = J \quad \text{και}$$

$$\blacklozenge \quad I + J = \int_{-1}^1 \frac{x^2}{1 + e^x} dx + \int_{-1}^1 \frac{x^2 e^x}{1 + e^x} dx = \int_{-1}^1 \frac{x^2 + x^2 e^x}{1 + e^x} dx = \int_{-1}^1 \frac{x^2 (1 + e^x)}{1 + e^x} dx = \int_{-1}^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3}$$

Επομένως έχουμε:

$$2I = \frac{2}{3}, \quad \text{οπότε } I = \frac{1}{3}$$

ΘΕΜΑ 38ο :

Έστω συνάρτηση $f : R \rightarrow R$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x+y) = e^{-y} \cdot f(x) + e^{-x} \cdot f(y)$, για κάθε $x, y \in R$ (1)
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ (2)

Θεωρούμε επίσης και την παραγωγίσιμη συνάρτηση $g : R \rightarrow R$ για την οποία ισχύουν:

- $g'(x^3 + 1) = -x^3 e^{-x^3 - 1}$, για κάθε $x \in R$ (3) και
- $g(0) = f(0)$ (4)

Να αποδείξετε ότι:

a) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = -f(x) + e^{-x}$, για κάθε $x \in R$

β) $f(x) = x e^{-x}$, $x \in R$

γ) $f = g$

δ) $ex \cdot f(x+1) < f(x+1) \int_1^{x+1} \frac{1}{f(t)} dt < x$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

ε) Η εξίσωση

$$\int_1^x \frac{F(t+1)}{t} dt = x \int_1^a \frac{F(t+1)}{t} dt + F(x+1)(x-a), \quad x > 0,$$

όπου $F(x) = \int_1^x \frac{1}{f(t)} dt$, $x \in (0, +\infty)$ και $a > 0$, έχει μία ακριβώς πραγματική ρίζα.

ΛΥΣΗ

a) Έστω $x_0 \in R$. Για x κοντά στο x_0 θεωρούμε το λόγο μεταβολών $\lambda(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Θέτουμε $h = x - x_0$, δηλαδή $x = x_0 + h$, όπου $h \neq 0$, διότι $x \neq x_0$

Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \stackrel{(1)}{=} \frac{e^{-h} \cdot f(x_0) + e^{-x_0} \cdot f(h) - f(x_0)}{h} \\ &= \frac{f(x_0) \cdot (e^{-h} - 1) + e^{-x_0} \cdot f(h)}{h} = f(x_0) \cdot \frac{e^{-h} - 1}{h} + e^{-x_0} \cdot \frac{f(h)}{h} \end{aligned}$$

Είναι:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} \stackrel{(2)}{=} 1 \quad \text{και} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-h} - 1}{h} \stackrel{-h=t}{=} -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - e^0}{t} = -\left. \frac{d(e^t)}{dt} \right|_{t=0} = -1 \quad (5)$$

Άρα:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(f(x_0) \cdot \frac{e^{-h} - 1}{h} + e^{-x_0} \cdot \frac{f(h)}{h} \right) \stackrel{(2)}{=} \\ &= f(x_0) \cdot (-1) + e^{-x_0} \cdot 1 = -f(x_0) + e^{-x_0} \in R \end{aligned}$$

Δηλαδή, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο τυχαίο $x_0 \in R$ με $f'(x_0) = -f(x_0) + e^{-x_0}$

Επομένως η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = -f(x) + e^{-x}$, για κάθε $x \in R$

β) Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f'(x) = -f(x) + e^{-x} &\Leftrightarrow f'(x) + f(x) = e^{-x} \Leftrightarrow \\ e^x \cdot (f'(x) + f(x)) &= 1 \Leftrightarrow (e^x \cdot f(x))' = (x)' \end{aligned}$$

Άρα

$$e^x \cdot f(x) = x + c, \quad c \in R$$

Για $x = 0$ έχουμε:

$$e^0 \cdot f(0) = c \Rightarrow c = 0,$$

διότι από τη σχέση (1) για $x = y = 0$ έχουμε ότι $f(0) = 0$

Επομένως:

$$e^x \cdot f(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x \cdot e^{-x}, \quad x \in R$$

γ) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$g'(x^3 + 1) = -x^3 e^{-x^3 - 1}$$

Θέτουμε $x^3 + 1 = t, \quad t \in R$ και έχουμε:

$$g'(t) = (1-t)e^{-t}, \quad \text{για κάθε } t \in R$$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f'(x) = (1-x)e^{-x}$$

Οπότε

$$f'(x) = g'(x), \quad \text{για κάθε } x \in R$$

Άρα για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f(x) = g(x) + c, \quad c \in R$$

Από υπόθεση είναι $f(0) = g(0) = 0$, οπότε $c = 0$

Δηλαδή είναι:

$$f(x) = g(x), \quad \text{για κάθε } x \in R$$

Επομένως

$$f = g$$

δ) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$f(x+1) = (x+1) \cdot e^{-(x+1)} > 0,$$

οπότε:

$$ex \cdot f(x+1) < f(x+1) \cdot \int_1^{x+1} \frac{1}{f(t)} dt < x \Leftrightarrow ex < \int_1^{x+1} \frac{1}{f(t)} dt < \frac{x}{f(x+1)} \quad (6)$$

1ος τρόπος: (με Θ.Μ.Τ.)

Η σχέση (6) ισοδύναμα γράφεται:

$$ex < F(x+1) - F(1) < \frac{x}{f(x+1)},$$

όπου

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{f(t)} dt, \quad x \in (0, +\infty)$$

είναι μια αρχική της συνεχούς συνάρτησης $\frac{1}{f(t)}$ στο διάστημα $(0, +\infty)$

- Για κάθε $x > 0$, η συνάρτηση F ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[1, x+1]$. Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, x+1)$ τέτοιο, ώστε:

$$F'(\xi) = \frac{F(x+1) - F(1)}{x}, \quad \text{δηλαδή} \quad F'(\xi) = \frac{F(x+1)}{x} \quad (7)$$

Είναι:

$$F'(x) = \left(\int_1^x \frac{1}{f(t)} dt \right)' = \frac{1}{f(x)}, \quad x > 0$$

και

$$F''(x) = \left(\frac{1}{f(x)} \right)' = \left(\frac{e^x}{x} \right)' = \frac{e^x(x-1)}{x^2}, \quad x > 0$$

Έχουμε:

- ♦ Η συνάρτηση F' είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$
- ♦ $F''(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$

Επομένως η συνάρτηση F' είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

- Έχουμε:

$$1 < \xi < x+1 \stackrel{F' \uparrow (1, +\infty)}{\Rightarrow} F'(1) < F'(\xi) < F'(x+1) \stackrel{(7)}{\Rightarrow} e < \frac{F(x+1)}{x} < \frac{1}{f(x+1)} \stackrel{x > 0}{\Rightarrow}$$

$$ex < F(x+1) < \frac{x}{f(x+1)} \Rightarrow ex < \int_1^{x+1} \frac{1}{f(t)} dt < \frac{x}{f(x+1)}$$

και λόγω της (6) προκύπτει ότι:

$$ex \cdot f(x+1) < f(x+1) \cdot \int_1^{x+1} \frac{1}{f(t)} dt < x, \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Σημείωση: Η σχέση (6) μπορεί να αποδειχθεί επίσης:

- Με τη βοήθεια των ακροτάτων της συνεχούς συνάρτησης $\frac{1}{f(t)}$ στο διάστημα $[1, x+1]$, $x > 0$ και στη συνέχεια ολοκληρώνοντας ... (**2^{ος τρόπος}**), ή
- Με τη μέθοδο της μονοτονίας για κάθε ανισότητα χωριστά ... (**3^{ος τρόπος}**).

ε) Έστω

$$\Phi(x) = \int_1^x \frac{F(t+1)}{t} dt, \quad x \in (0, +\infty)$$

μια αρχική της συνεχούς συνάρτησης $\frac{F(t+1)}{t}$ στο διάστημα $(0, +\infty)$,

όπου

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{f(t)} dt, \quad x \in (0, +\infty)$$

Η εξίσωση

$$x \int_1^x \frac{F(t+1)}{t} dt = x \int_1^{\alpha} \frac{F(t+1)}{t} dt + F(x+1)(x-\alpha), \quad x > 0$$

γράφεται ισοδύναμα

$$\Phi(x) - \Phi(\alpha) - \Phi'(x)(x-\alpha) = 0, \quad x > 0 \quad (8)$$

Θεωρούμε συνάρτηση

$$K(x) = \Phi(x) - \Phi(\alpha) - \Phi'(x)(x-\alpha), \quad x > 0,$$

Για κάθε $x > 0$ είναι:

$$K'(x) = -\Phi''(x)(x-\alpha)$$

$$\text{Όμως } \Phi''(x) = \frac{\frac{x}{f(x+1)} - F(x+1)}{x^2} > 0, \text{ για κάθε } x > 0, \text{ λόγω του ερωτήματος (γ), οπότε:}$$

$$\diamond K'(x) = 0 \Leftrightarrow x-\alpha = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$$

$$\diamond K'(x) < 0 \Leftrightarrow x-\alpha > 0 \Leftrightarrow x > \alpha$$

Το πρόσημο της $K'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης K φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0	α	$+\infty$
$K'(x)$	+	0	-
$K(x)$		0	

μέγιστο

Έχουμε:

- Για $0 < x < \alpha \xrightarrow{K'>} K(x) < K(\alpha) \Rightarrow K(x) < 0$
- Για $x > \alpha \xrightarrow{K'<} K(x) < K(\alpha) \Rightarrow K(x) < 0$

Άρα

- $K(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, \alpha) \cup (\alpha, +\infty)$ και
- $K(x) = 0$ μόνο για $x = \alpha$

Επομένως η εξίσωση (8), οπότε και η αρχική εξίσωση έχει ακριβώς μια ρίζα το α .

(2^{ος} τρόπος) Υπόδειξη:

Προφανής ρίζα της εξίσωσης (8) είναι το α

Για $0 < x \neq \alpha$ με Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση Φ προκύπτει ότι $\Phi(x) < \Phi(\alpha) + \Phi'(x)(x-\alpha)$. Άρα ...

ΘΕΜΑ 39ο :

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \rightarrow R$ με $f'(0) = 0$, για την οποία ισχύουν:

- $f(x) + x \neq 0$, για κάθε $x \in R$ (1)
- $f(x-y) = \frac{f(x)+x}{f(y)+y} - x+y$, για κάθε $x, y \in R$ (2)

a) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in R$ ισχύουν:

- i) $f'(x) = f(x) + x - 1$
- ii) $f(x) = e^x - x$

β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του a , ώστε να ισχύει:

$$f(x) \geq ax \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ όπου } a > -1$$

γ) Αν $z = f(x) + x + i(f(\ln x) + e^2 - x)$ και $x > 0$, να αποδείξετε ότι $|z| \geq e\sqrt{1+e^2}$

δ) i) Αν $H(x) = \int_0^x (tf(t) + t^2) dt$, $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι $H(x) = xe^x - e^x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii) Να βρείτε συνάρτηση G , η οποία να είναι συνεχής στο \mathbb{R} , παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}^* και για την οποία ισχύει:

$$G'(x) + \frac{2G(x)}{x} = \frac{f(x)}{x} + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*$$

Είναι η συνάρτηση G παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$;

ΛΥΣΗ

a) i) Για $x = y = 0$ από τη σχέση (2) έχουμε:

$$f(0-0) = \frac{f(0)+0}{f(0)+0} - 0 + 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f(0) = 1 \quad (3)$$

Αν παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη της σχέσης (2) ως προς y , θεωρώντας το x σταθερά, έχουμε:

$$\begin{aligned} f'(x-y) \cdot (0-1) &= \frac{-(f(x)+x) \cdot (f'(y)+1)}{(f(y)+y)^2} - 0 + 1 \Rightarrow \\ f'(x-y) &= \frac{(f(x)+x) \cdot (f'(y)+1)}{(f(y)+y)^2} - 1 \end{aligned}$$

Για $y = 0$ από την τελευταία σχέση έχουμε:

$$f'(x) = \frac{(f(x)+x) \cdot (f'(0)+1)}{(f(0)+0)^2} - 1 \stackrel{(3)}{\Rightarrow}$$

$$f'(x) = \frac{(f(x)+x) \cdot (0+1)}{(1+0)^2} - 1 \Rightarrow$$

$$f'(x) = f(x) + x - 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

ii) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x) = f(x) + x - 1 \Leftrightarrow f'(x) + 1 = f(x) + x \Leftrightarrow$$

$$(f(x) + x)' = f(x) + x \Leftrightarrow f(x) + x = c e^x \quad (4)$$

Για $x = 0$ από τη σχέση (4) έχουμε:

$$f(0) + 0 = c e^0 \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} c = 1$$

Για $c = 1$ από τη σχέση (4) έχουμε:

$$f(x) + x = e^x \Leftrightarrow f(x) = e^x - x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

β) Για $\alpha > -1$ και για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f(x) \geq \alpha x \Leftrightarrow e^x - x \geq \alpha x \Leftrightarrow e^x - x - \alpha x \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq 0 \quad (5),$$

όπου $g(x) = e^x - x - \alpha x$, $x \in R$ και $\alpha > -1$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$g'(x) = e^x - 1 - \alpha, \text{ όπου } \alpha > -1$$

Έχουμε:

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 - \alpha = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 + \alpha \Leftrightarrow x = \ln(1 + \alpha)$
- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 - \alpha > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 + \alpha \Leftrightarrow x > \ln(1 + \alpha)$

Το πρόσημο της $g'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	$\ln(1+\alpha)$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$			

ελάχιστο

Η συνάρτηση g παίρνει ελάχιστη τιμή:

$$\begin{aligned} g(\ln(1+\alpha)) &= e^{\ln(1+\alpha)} - \ln(1+\alpha) - \alpha \ln(1+\alpha) = \\ &= (1+\alpha) - (1+\alpha) \ln(1+\alpha) = (1+\alpha)(1 - \ln(1+\alpha)) \end{aligned}$$

Άρα για κάθε $x \in R$ είναι:

$$g(x) \geq (1+\alpha)(1 - \ln(1+\alpha))$$

Για να είναι $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in R$, αρκεί να ισχύει:

$$(1+\alpha)(1 - \ln(1+\alpha)) \geq 0, \text{ όπου } \alpha > -1$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} (1+\alpha)(1 - \ln(1+\alpha)) \geq 0 &\Leftrightarrow 1 - \ln(1+\alpha) \geq 0 \Leftrightarrow \\ \ln(1+\alpha) \leq 1 &\Leftrightarrow \ln(1+\alpha) \leq \ln e \Leftrightarrow 1+\alpha \leq e \Leftrightarrow \alpha \leq e-1 \end{aligned}$$

Άρα η μέγιστη τιμή του α είναι $\alpha = e-1$

γ) Είναι:

$$\begin{aligned} z &= f(x) + x + i(f(\ln x) + e^2 - x) \Rightarrow \\ z &= e^x - x + x + i(e^{\ln x} - \ln x + e^2 - x) \Rightarrow \\ z &= e^x + i(e^2 - \ln x), \quad x > 0 \end{aligned}$$

Άρα

$$|z| = \sqrt{e^{2x} + (e^2 - \ln x)^2}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x) = \sqrt{e^{2x} + (e^2 - \ln x)^2}, \quad x > 0$$

Για $x > 0$ έχουμε:

$$\varphi'(x) = \frac{2e^{2x} + 2(e^2 - \ln x)\left(-\frac{1}{x}\right)}{2\sqrt{e^{2x} + (e^2 - \ln x)^2}} = \frac{xe^{2x} + \ln x - e^2}{x\sqrt{e^{2x} + (e^2 - \ln x)^2}}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = xe^{2x} + \ln x - e^2, \quad x > 0$$

Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$h'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x} + \frac{1}{x} > 0$$

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$

Είναι:

$$h(1) = 1 \cdot e^2 + \ln 1 - e^2 = 0$$

Οπότε έχουμε:

- για $0 < x < 1 \Rightarrow h(x) < h(1) \Rightarrow h(x) < 0$ και
- για $x > 1 \Rightarrow h(x) > h(1) \Rightarrow h(x) > 0$

Επειδή:

$$\varphi'(x) = \frac{h(x)}{x\sqrt{e^{2x} + (e^2 - \ln x)^2}}$$

έχουμε:

- $\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow h(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Το πρόσημο της $\varphi'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης φ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$	-	0	+
$\varphi(x)$		$e\sqrt{1+e^2}$	ελάχιστο

Η συνάρτηση φ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 1$ το $\varphi(1) = \sqrt{e^2 + e^4} = e\sqrt{1+e^2}$

Άρα για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$\varphi(x) \geq \varphi(1) \stackrel{\varphi(x)=|z|}{\Rightarrow} |z| \geq e\sqrt{1+e^2}$$

δ) i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$H(x) = \int_0^x (tf(t) + t^2) dt = \int_0^x (t(e^t - t) + t^2) dt = \int_0^x te^t dt =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^x t(e^t)' dt = \left[te^t \right]_0^x - \int_0^x (t)' e^t dt = xe^x - 0 \cdot e^0 - \int_0^x e^t dt = \\
 &= xe^x - \left[e^t \right]_0^x = xe^x - (e^x - e^0) = xe^x - e^x + 1
 \end{aligned}$$

ii) Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ είναι:

$$\begin{aligned}
 G'(x) + \frac{2G(x)}{x} &= \frac{f(x)}{x} + 1 \Leftrightarrow \\
 x^2 G'(x) + 2xG(x) &= xf(x) + x^2 \quad (6)
 \end{aligned}$$

Η συνάρτηση H είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , ως αρχική της συνεχούς στο \mathbb{R} συνάρτησης $tf(t) + t^2$ με:

$$H'(x) = xf(x) + x^2 \quad (7)$$

Από τις σχέσεις (6) και (7) έχουμε:

$$\begin{aligned}
 x^2 G'(x) + 2xG(x) &= H'(x) \Leftrightarrow \\
 (x^2 G(x))' &= H'(x), \quad x \in \mathbb{R}^*
 \end{aligned}$$

♦ Για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ είναι:

$$x^2 G(x) = H(x) + c_1 \Leftrightarrow x^2 G(x) = xe^x - e^x + 1 + c_1 \quad (8)$$

♦ Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$x^2 G(x) = H(x) + c_2 \Leftrightarrow x^2 G(x) = xe^x - e^x + 1 + c_2 \quad (9)$$

Επειδή η συνάρτηση G είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ θα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} G(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = G(0)$$

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} G(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (xe^x - e^x + 1 + c_1) \Rightarrow 0 \cdot G(0) = 0 - 1 + 1 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (xe^x - e^x + 1 + c_2) \Rightarrow 0 \cdot G(0) = 0 - 1 + 1 + c_2 \Rightarrow c_2 = 0$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ είναι:

$$x^2 G(x) = xe^x - e^x + 1 \Rightarrow G(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}, \quad x \neq 0$$

Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}, & x \neq 0 \\ G(0) & , x = 0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση G είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, οπότε:

$$G(0) = \lim_{x \rightarrow 0} G(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + xe^x - e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

Άρα:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{x e^x - e^x + 1}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

Για $x \neq 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{G(x) - G(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x e^x - e^x + 1}{x^2} - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x e^x - 2e^x + 2 - x^2}{2x^3} \stackrel{0}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x + 2x e^x - 2e^x - 2x}{6x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x e^x - 2x}{6x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(e^x - 1)}{6x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{e^x - 1}{x} \right) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

$$\text{γιατί } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \frac{d(e^x)}{dx} \Big|_{x=0} = 1$$

Άρα η συνάρτηση G είναι παραγωγήσιμη στο $x_0 = 0$ με $G'(0) = \frac{1}{3}$

ΘΕΜΑ 40ο :

Έστω δύο πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha < \beta$, μία συνεχής συνάρτηση $f: R \rightarrow R$ με $f(x) > 0$ για

$$\text{κάθε } x \in R \text{ και η συνάρτηση } g: R \rightarrow R \text{ με τύπο } g(x) = \int_{\alpha(x^2+1)}^{\beta(x^2+1)} f\left(\frac{t}{x^2+1}\right) dt - xe^{x^2+1}$$

Αν ισχύει:

$$\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right)^x \geq x + 1, \text{ για κάθε } x \in R,$$

τότε:

a) i) Να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = e$

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της

iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μοναδική θετική ρίζα x_0 , για την οποία ισχύει:

$$\frac{2x_0^3 + 6x_0}{3} > e^{x_0^2} - 1$$

β) Αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση

$$h(x) = \int_1^{x^2+1} f\left(\frac{t}{x^2+1}\right) dt$$

παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στη θέση $x_0 = 1$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 f^2(x) dx \geq f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}$$

ΛΥΣΗ

a) i) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \left(\int_a^{\beta} f(x) dx \right)^x - x - 1$

Παρατηρούμε ότι $\varphi(x) \geq \varphi(0)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η συνάρτηση φ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο $x_1 = 0$ του πεδίου ορισμού της.

Επίσης η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη ως πράξη μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$\varphi'(x) = \left(\int_a^{\beta} f(x) dx \right)^x \ln \left(\int_a^{\beta} f(x) dx \right) - 1$$

Ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Fermat, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= 0 \Rightarrow \left(\int_a^{\beta} f(x) dx \right)^0 \ln \left(\int_a^{\beta} f(x) dx \right) - 1 = 0 \Rightarrow \\ \ln \left(\int_a^{\beta} f(x) dx \right) &= 1 \Rightarrow \int_a^{\beta} f(x) dx = e \quad (1) \end{aligned}$$

ii) Θέτουμε $\frac{t}{x^2+1} = u \Rightarrow t = (x^2 + 1)u \Rightarrow dt = (x^2 + 1)du$

Για $t = \alpha(x^2 + 1) \Rightarrow u = \alpha$, ενώ για $t = \beta(x^2 + 1) \Rightarrow u = \beta$, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_a^{\beta} f(u)(x^2 + 1) du - xe^{x^2+1} = \\ &= (x^2 + 1) \int_a^{\beta} f(u) du - xe^{x^2+1} \stackrel{(1)}{=} \\ &= (x^2 + 1) \cdot e - xe^{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2ex - \left((x)e^{x^2+1} + xe^{x^2+1}(x^2 + 1)' \right) = \\ &= 2ex - e^{x^2+1} - 2x^2e^{x^2+1} = \\ &= -e \cdot \left((2x^2 + 1)e^{x^2} - 2x \right) \end{aligned}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

- $x^2 + 1 \geq 2x$ με το «ίσον» να ισχύει μόνο για $x = 1$
- $x^2 \geq 0$ με το «ίσον» να ισχύει μόνο για $x = 0$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις δύο τελευταίες σχέσεις έχουμε $2x^2 + 1 \geq 2x$ (2)

Επίσης είναι:

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow e^{x^2} > e^0 \Rightarrow e^{x^2} > 1 \quad (3)$$

Για $x > 0$, αν πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε:

$$\begin{aligned} (2x^2 + 1) \cdot e^{x^2} &\geq 2x \cdot 1 \Rightarrow \\ (2x^2 + 1) \cdot e^{x^2} - 2x &\geq 0 \stackrel{\cdot(-e) < 0}{\Rightarrow} \\ -e \cdot \left((2x^2 + 1)e^{x^2} - 2x \right) &< 0 \Rightarrow \\ g'(x) &< 0, \quad x > 0 \end{aligned}$$

Για $x \leq 0$ προφανώς ισχύει $g'(x) < 0$. Άρα $g'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Επομένως η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R}

Η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} , άρα το σύνολο τιμών της είναι:

$$g(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \right)$$

Είναι:

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (ex^2 + e - xe^{x^2+1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(e + \frac{e}{x^2} - \frac{e^{x^2+1}}{x} \right) = -\infty, \text{ διότι}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2+1}}{x} \stackrel{+\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} (2xe^{x^2+1}) = +\infty$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (ex^2 + e - xe^{x^2+1}) = +\infty$$

Επομένως το σύνολο τιμών της συνάρτηση g είναι το $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

iii) Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} και έχει σύνολο τιμών το \mathbb{R} , άρα θα υπάρχει μοναδικό x_0 τέτοιο, ώστε $g(x_0) = 0$

- Για $x < x_0 \Rightarrow g(x) > g(x_0) \Rightarrow g(x) > 0$
- Για $x > x_0 \Rightarrow g(x) < g(x_0) \Rightarrow g(x) < 0$

Το πρόσημο της συνάρτησης g φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

Επειδή $g(0) = e > 0$, συμπεραίνουμε ότι $0 \in (-\infty, x_0)$. Άρα $x_0 > 0$

Για κάθε $x \in [0, x_0]$ είναι $g(x) \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $x = x_0$, επομένως

$$\int_0^{x_0} g(x) dx > 0 \Rightarrow \int_0^{x_0} (ex^2 + e - xe^{x^2+1}) dx > 0 \Rightarrow$$

$$e \int_0^{x_0} x^2 dx + \int_0^{x_0} e dx - \int_0^{x_0} xe^{x^2+1} dx > 0 \Rightarrow$$

$$e \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{x_0} + e(x_0 - 0) - \frac{1}{2} \int_0^{x_0} (e^{x^2+1})' dx > 0 \Rightarrow$$

$$e \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{x_0} + e(x_0 - 0) - \frac{1}{2} [e^{x^2+1}]_0^{x_0} > 0 \Rightarrow$$

$$\frac{ex_0^3}{3} + ex_0 - \frac{1}{2}(e^{x_0^2+1} - e) > 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x_0^3}{3} + x_0 > \frac{1}{2}(e^{x_0^2} - 1) \Rightarrow \frac{2x_0^3 + 6x_0}{3} > e^{x_0^2} - 1$$

$$\beta) \text{ Θέτοντας } \frac{t}{x^2+1} = u \Rightarrow t = (x^2 + 1)u \Rightarrow dt = (x^2 + 1)du$$

Για $t=1 \Rightarrow u=\frac{1}{x^2+1}$, ενώ για $t=x^2+1 \Rightarrow u=1$, οπότε έχουμε:

$$h(x) = (x^2 + 1) \int_{\frac{1}{x^2+1}}^1 f(u) du = -(x^2 + 1) \int_1^{\frac{1}{x^2+1}} f(u) du \Rightarrow$$

Η συνάρτηση h έχει πεδίο ορισμού το R και παρουσιάζει ακρότατο στη θέση $x_0 = 1$, επίσης είναι παραγωγίσιμη στο R , με:

$$h'(x) = -2x \int_1^{\frac{1}{x^2+1}} f(u) du - (x^2 + 1) \cdot f\left(\frac{1}{x^2+1}\right) \left(\frac{1}{x^2+1}\right)' \Rightarrow$$

$$h'(x) = -2x \int_1^{\frac{1}{x^2+1}} f(u) du + \frac{2x}{x^2+1} \cdot f\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$$

Άρα είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, με:

$$h'(1) = -2 \int_1^{\frac{1}{2}} f(u) du + f\left(\frac{1}{2}\right)$$

Ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Fermat, οπότε έχουμε:

$$h'(1) = 0 \Rightarrow -2 \int_1^{\frac{1}{2}} f(u) du + f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \int_1^{\frac{1}{2}} f(u) du = \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) \quad (4)$$

Είναι:

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 f^2(x) dx \geq f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} \int_{\frac{1}{2}}^1 f^2(x) dx \geq 2 \int_1^{\frac{1}{2}} f(x) dx - 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 f^2(x) dx \geq -2 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 1 dx \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 f^2(x) dx + 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 1 dx \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (f^2(x) + 2f(x) + 1) dx \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 (f(x) + 1)^2 dx \geq 0$$

το οποίο είναι αληθές, διότι $(f(x) + 1)^2 \geq 0$ για κάθε $x \in R$ και $\frac{1}{2} < 1$

Επομένως ισχύει:

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 f^2(x) dx \geq f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}$$

ΘΕΜΑ 41ο :

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z με $z \neq 1$ και $z \neq 2$, για τους οποίους ισχύει $|z - 1| + |z - 2| = 1$ (1)

$$\text{Επιπλέον θεωρούμε τη συνάρτηση } f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = \frac{x}{2} + \int_0^x |z - 1| e^{\eta \mu t} dt$$

a) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z

β) Να βρείτε σημείο του γεωμετρικού τόπου των εικόνων των μιγαδικών z , αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$

γ) Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{|z-1|^2} + \frac{1}{|z-2|^2} \geq 8$

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_{\frac{1}{4}}^{|z-2|} \frac{1}{x+|z-2|} dx < \ln \frac{8}{5}$

ΛΥΣΗ

α) Αν τα σημεία M, A και B είναι αντίστοιχα οι εικόνες των μιγαδικών z , $1=1+0i$ και $2=2+0i$ τότε έχουμε:

$$|z-1| + |z-2| = 1 \Leftrightarrow (MA) + (MB) = (AB)$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι το ευθύγραμμο τμήμα AB , εκτός των άκρων του A και B , αφού από υπόθεση είναι $z \neq 1$ και $z \neq 2$

β) Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} + |z-1| e^{\eta \mu x} \right) = \frac{1}{2} + |z-1|$$

Όμως:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

Άρα:

$$\frac{1}{2} + |z-1| = 1 \Rightarrow |z-1| = \frac{1}{2}$$

Οπότε από τη σχέση (1) προκύπτει ότι και $|z-2| = \frac{1}{2}$

Επομένως το ζητούμενο σημείο είναι το μέσο του AB , δηλαδή το σημείο $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

γ) 1^{ος} τρόπος:

Έστω $z = x \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$

Στο (α) ερώτημα αποδείξαμε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι το ευθύγραμμο τμήμα AB , όπου $A(1, 0)$ και $B(2, 0)$ με εξαίρεση τα σημεία του A και B , αφού από υπόθεση είναι $z \neq 1$ και $z \neq 2$

Επομένως ισχύει:

$$1 < x < 2$$

Είναι:

$$\frac{1}{|z-1|^2} + \frac{1}{|z-2|^2} = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-2)^2} = g(x), \text{ με } 1 < x < 2$$

Για κάθε $x \in (1, 2)$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= -\frac{2}{(x-1)^3} - \frac{2}{(x-2)^3} = \frac{-2((x-1)^3 + (x-2)^3)}{(x-1)^3(x-2)^3} = \\
 &= \frac{-2(x-1+x-2)((x-1)^2 - (x-1)(x-2) + (x-2)^2)}{(x-1)^3(x-2)^3} = \\
 &= \frac{-2(2x-3)((x-1)^2 - (x-1)(x-2) + (x-2)^2)}{(x-1)^3(x-2)^3}
 \end{aligned}$$

$$\blacklozenge \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2(2x-3)\underbrace{\left((x-1)^2 - (x-1)(x-2) + (x-2)^2\right)}_{\geq 0} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$\blacklozenge \quad g'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{-2(2x-3)}{(x-1)^3(x-2)^3} > 0 \stackrel{1 < x < 2}{\Leftrightarrow} 2x-3 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$$

Επομένως ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων για τη συνάρτηση y είναι ο παρακάτω:

x	1	$\frac{3}{2}$	2
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	8	$+\infty$

ελάχιστο

Η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = \frac{3}{2}$ το $g\left(\frac{3}{2}\right) = 8$

$$\text{Αριθμητική μεθοδος} \quad \text{Αριθμητική μεθοδος} \quad \text{Αριθμητική μεθοδος}$$

2^{ος} τρόπος:

Γνωρίζουμε ότι για $x, y \in \mathbb{R}^*$ με $xy > 0 \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$

Αν λοιπόν θέσουμε:

$$x = |z - 1| > 0 \quad \text{and} \quad y = |z - 2| > 0,$$

τότε από τη σχέση (1) προκύπτει ότι:

$$x + y = 1$$

καὶ ἔχουμεν

$$\begin{aligned} \frac{1}{|z-1|^2} + \frac{1}{|z-2|^2} &= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{(x+y)^2}{x^2} + \frac{(x+y)^2}{y^2} = \frac{x^2 + y^2 + 2xy}{x^2} + \frac{x^2 + y^2 + 2xy}{y^2} = \\ &= 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2 \cdot \frac{y}{x} + \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1 + 2 \cdot \frac{x}{y} = 2 + \underbrace{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}_{\geq 2} + 2 \cdot \underbrace{\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)}_{\geq 2} \geq 8 \end{aligned}$$

3^{ος} τρόπος:

Η ισότητα $|z-1|+|z-2|=1$ σε συνδυασμό με τις $z \neq 1$ και $z \neq 2$ μας δίνει τη δυνατότητα να θέσουμε:

$$|z-1| = \eta \mu^2 \theta \quad \text{και} \quad |z-2| = \sigma v^2 \theta, \quad \theta \neq \frac{\kappa\pi}{2}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

και έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|z-1|^2} + \frac{1}{|z-2|^2} &= \frac{1}{\eta \mu^4 \theta} + \frac{1}{\sigma v^4 \theta} = \frac{(\eta \mu^2 \theta + \sigma v^2 \theta)^2}{\eta \mu^4 \theta} + \frac{(\eta \mu^2 \theta + \sigma v^2 \theta)^2}{\sigma v^4 \theta} = \\ &= \frac{\eta \mu^4 \theta + \sigma v^4 \theta + 2\eta \mu^2 \theta \sigma v^2 \theta}{\eta \mu^4 \theta} + \frac{\eta \mu^4 \theta + \sigma v^4 \theta + 2\eta \mu^2 \theta \sigma v^2 \theta}{\sigma v^4 \theta} = \\ &= 1 + \sigma \varphi^4 \theta + 2\sigma \varphi^2 \theta + \varepsilon \varphi^4 \theta + 1 + 2\varepsilon \varphi^2 \theta = \\ &= 2 + \underbrace{\varepsilon \varphi^4 \theta + \sigma \varphi^4 \theta}_{\geq 2} + 2 \cdot \underbrace{(\varepsilon \varphi^2 \theta + \sigma \varphi^2 \theta)}_{\geq 2} \geq 8 \end{aligned}$$

δ) Θέτουμε $|z-2|=\alpha$, τότε $0 < \alpha < 1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{4}}^{|z-2|} \frac{1}{x+|z-2|} dx &= \int_{\frac{1}{4}}^{\alpha} \frac{1}{x+\alpha} dx = \left[\ln|x+\alpha| \right]_{\frac{1}{4}}^{\alpha} = \\ &= \ln(2\alpha) - \ln\left(\frac{1}{4} + \alpha\right) = h(\alpha) \end{aligned}$$

Για κάθε $\alpha \in (0, 1)$ έχουμε:

$$h'(\alpha) = \frac{2}{2\alpha} - \frac{1}{\alpha + \frac{1}{4}} = \frac{\alpha + \frac{1}{4} - \alpha}{\alpha \left(\alpha + \frac{1}{4} \right)} = \frac{\frac{1}{4}}{\alpha \left(\alpha + \frac{1}{4} \right)} > 0$$

Αρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, 1)$, οπότε

$$\text{Για } 0 < \alpha < 1 \Rightarrow h(\alpha) < h(1) \Rightarrow h(\alpha) < \ln 2 - \ln \frac{5}{4} \Rightarrow h(\alpha) < \ln \frac{8}{5}$$

Επομένως:

$$\int_{\frac{1}{4}}^{|z-2|} \frac{1}{x+|z-2|} dx < \ln \frac{8}{5}$$

ΘΕΜΑ 42ο :

Δίνεται η περιττή συνάρτηση $f : R \rightarrow R$, με $|f(a) - f(b)| \leq \frac{1}{2}|a - b|$ για κάθε $a, b \in R$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_0^x (f(t) - t) dt$ είναι κοίλη στο R

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^x f(t) dt \leq \frac{x^2}{2}$

δ) Να αποδείξετε ότι $F(x+1) - F(x) < F'(x) < F(x) - F(x-1)$ για $x \geq 1$

ε) Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \in R$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} F'(x)$

ΛΥΣΗ

a) Για $x_0 \in R$ έχουμε:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq \frac{1}{2}|x - x_0| \Leftrightarrow \\ -\frac{1}{2}|x - x_0| &\leq f(x) - f(x_0) \leq \frac{1}{2}|x - x_0| \Leftrightarrow \\ -\frac{1}{2}|x - x_0| + f(x_0) &\leq f(x) \leq f(x_0) + \frac{1}{2}|x - x_0| \end{aligned}$$

Είναι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \left(-\frac{1}{2}|x - x_0| + f(x_0) \right) &= f(x_0) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{2}|x - x_0| + f(x_0) \right) &= f(x_0) \end{aligned}$$

Επομένως από Κριτήριο Παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο τυχαίο $x_0 \in R$, άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R

b) Η συνάρτηση $h(t) = f(t) - t$ είναι συνεχής στο R , ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Επομένως η συνάρτηση F ορίζεται και είναι παραγωγίσιμη στο R , ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης h . Είναι:

$$F'(x) = f(x) - x, \text{ για κάθε } x \in R$$

Για $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$\frac{F'(x_1) - F'(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{f(x_1) - x_1 - f(x_2) + x_2}{x_1 - x_2} =$$

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} - \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} - 1$$

Όμως:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{1}{2}|x_1 - x_2| \Leftrightarrow \left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq \frac{1}{2}$$

Επομένως:

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{F'(x_1) - F'(x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \stackrel{x_1 < x_2}{\Rightarrow} F'(x_1) > F'(x_2)$$

Άρα η συνάρτηση F' είναι γνησίως φθίνουσα στο R , οπότε η συνάρτηση F είναι κοίλη στο R

γ) Η συνάρτηση f είναι περιττή στο R , άρα για κάθε $x \in R$ είναι:

$$-x \in R \quad \text{και} \quad f(-x) = -f(x)$$

Για $x = 0$ έχουμε:

$$f(0) = -f(0) \Rightarrow 2f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

Είναι:

$$F(0) = \int_0^0 (f(t) - t) dt = 0 \quad \text{και} \quad F'(0) = f(0) - 0 = 0$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_F στο σημείο της $(0, F(0))$ είναι:

$$y - F(0) = F'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = 0$$

Η συνάρτηση F είναι κοίλη στο R , ára για κάθε $x \in R$ είναι:

$$F(x) \leq y \Leftrightarrow F(x) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^x (f(t) - t) dt \leq 0 \Leftrightarrow \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t dt \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^x f(t) dt \leq \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x \Leftrightarrow \int_0^x f(t) dt \leq \frac{x^2}{2}$$

δ) Η συνάρτηση F είναι:

- συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[x-1, x]$, $[x, x+1]$
- παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $(x-1, x)$, $(x, x+1)$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, οπότε θα υπάρχουν:

$$\blacklozenge \quad \xi_1 \in (x-1, x) \text{ τέτοιο, ώστε } F'(\xi_1) = \frac{F(x) - F(x-1)}{x - (x-1)} = F(x) - F(x-1)$$

$$\blacklozenge \quad \xi_2 \in (x, x+1) \text{ τέτοιο, ώστε } F'(\xi_2) = \frac{F(x+1) - F(x)}{(x+1) - x} = F(x+1) - F(x)$$

Είναι:

$$x-1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x+1 \Rightarrow \xi_1 < x < \xi_2$$

Η συνάρτηση F' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$, οπότε έχουμε:

$$F'(\xi_1) > F'(x) > F'(\xi_2) \Rightarrow$$

$$F(x) - F(x-1) > F'(x) > F(x+1) - F(x)$$

$$F(x+1) - F(x) < F'(x) < F(x) - F(x-1)$$

ε) Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \ell, \quad \ell \in R$$

Οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x+1) = \lim_{u \rightarrow +\infty} F(u) = \ell \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x-1) = \lim_{u \rightarrow +\infty} F(u) = \ell$$

Άρα

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x+1) - F(x)) = \ell - \ell = 0 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x) - F(x-1)) = \ell - \ell = 0$$

Επομένως από Κριτήριο Παρεμβολής αξιοποιώντας το ερώτημα (δ) είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} F'(x) = 0$

ΘΕΜΑ 43ο :

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : R \rightarrow R$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$x + 1 \leq f(x) \leq e^x \text{ για κάθε } x \in R \quad (1)$$

και η συνάρτηση $F(x) = \int_{\ln 3}^x \left(\sqrt{1+e^t} \left(e^t \int_{\ln 3}^t f(t) dt \right) \right) dt$, $x \in R$ με $F(\ln 8) = 2 + \ln \frac{3}{2}$

- a) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο της $O(0, f(0))$

$$\int_0^x (f(t) - xe^t) dt - x$$

b) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2}$

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x + x - \int_0^x f(t) dt = \frac{2014}{2013}$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0, 1)$

- δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x = \ln 3$, $x = \ln 8$

ΛΥΣΗ

- a) Για $x = 0$ από τη σχέση (1) έχουμε $1 \leq f(0) \leq 1$, άρα $f(0) = 1$

Για $x \neq 0$ έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - 1}{x}$$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$x + 1 \leq f(x) \leq e^x \Leftrightarrow x \leq f(x) - 1 \leq e^x - 1 \quad (2)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

Αν $x > 0$ τότε από τη σχέση (2) έχουμε $1 \leq \frac{f(x) - 1}{x} \leq \frac{e^x - 1}{x}$

Είναι:

- o $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$

- o $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \frac{d(e^x)}{dx} \Big|_{x=0} = 1$

Επομένως από Κριτήριο Παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = 1$

Αν $x < 0$ τότε από τη σχέση (2) έχουμε $1 \geq \frac{f(x) - 1}{x} \geq \frac{e^x - 1}{x}$

Είναι:

- o $\lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1$

- o $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \frac{d(e^x)}{dx} \Big|_{x=0} = 1$

Επομένως από Κριτήριο Παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - 1}{x} = 1$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-1}{x} = 1$$

Άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $f'(0) = 1$

Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο $O(0, f(0))$ είναι:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y - 1 = x \Rightarrow y = x + 1$$

β) Είναι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (f(t) - xe^t) dt - x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt - \int_0^x xe^t dt - x}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt - xe^x(x-0) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt - x^2 e^x - x}{x^2} \stackrel{0}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x f(t) dt - x^2 e^x - x \right)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2xe^x - x^2 e^x - 1}{2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{f(x)-1}{x} - \frac{e^x(2+x)}{2} \right) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\gamma) \text{ Θεωρούμε τη συνάρτηση } g(x) = e^x + x - \int_0^x f(t) dt - \frac{2014}{2013}, \quad x \in [0, 1]$$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Είναι:

$$\circ \quad g(0) = e^0 + 0 - 0 - \frac{2014}{2013} = 1 - \frac{2014}{2013} < 0$$

$$\circ \quad g(1) = e + 1 - \int_0^1 f(t) dt - \frac{2014}{2013}$$

$$\text{Όμως } f(x) \leq e^x \text{ άρα } \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 e^x dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx \leq e - 1 \Leftrightarrow e + 1 - \int_0^1 f(x) dx \geq 2$$

Οπότε

$$g(1) \geq 2 - \frac{2014}{2013} > 0$$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano, οπότε η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία ρίζα στο $(0, 1)$

Για κάθε $x \in [0, 1]$ είναι $g'(x) = e^x + 1 - f(x) > 0$, επομένως η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα οπότε η ρίζα αυτή είναι και μοναδική.

δ) Επειδή $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\ln 3, \ln 8]$, το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , τον άξονα x' και τις ευθείες με εξισώσεις $x = \ln 3$ και $x = \ln 8$ είναι:

$$E = \int_{\ln 3}^{\ln 8} f(x) dx$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} F(\ln 8) &= \int_{\ln 3}^{\ln 8} \sqrt{1+e^t} \left(e^{\ln 8} \int_{\ln 3}^{t} f(t) dt \right) dt = \\ &= \int_{\ln 3}^{\ln 8} \sqrt{1+e^t} (8E) dt = 8E \cdot \int_{\ln 3}^{\ln 8} \sqrt{1+e^t} dt \end{aligned}$$

Άρα είναι:

$$E = \frac{F(\ln 8)}{8 \int_{\ln 3}^{\ln 8} \sqrt{1+e^t} dt} = \frac{2 + \ln \frac{3}{2}}{8 \int_{\ln 3}^{\ln 8} \sqrt{1+e^t} dt}$$

Έστω:

$$I = \int_{\ln 3}^{\ln 8} \sqrt{1+e^t} dt$$

Θέτουμε:

$$u = \sqrt{1+e^t} \Rightarrow u^2 = 1+e^t$$

Οπότε:

$$2udu = e^t dt \Leftrightarrow dt = \frac{2u}{u^2 - 1}$$

Για $t = \ln 3$ είναι $u = \sqrt{1+e^{\ln 3}} = 2$ και για $t = \ln 8$ είναι $u = \sqrt{1+e^{\ln 8}} = 3$

Έχουμε:

$$I = \int_2^3 u \cdot \frac{2u}{u^2 - 1} du = \int_2^3 \frac{2u^2}{u^2 - 1} du = \int_2^3 \left(2 + \frac{2}{u^2 - 1} \right) du$$

Αναζητούμε πραγματικούς αριθμούς A, B έτσι, ώστε για κάθε $u \in (2, 3)$ να ισχύει:

$$\begin{aligned} \frac{2}{u^2 - 1} &= \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1} \Leftrightarrow A(u+1) + B(u-1) = 2 \Leftrightarrow \\ (A+B)u + A - B &= 2 \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A-B=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα:

$$\begin{aligned} I &= \int_2^3 2du + \int_2^3 \frac{2}{u^2 - 1} du = 2 \cdot (3-2) + \int_2^3 \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) du = \\ &= 2 + \int_2^3 \frac{1}{u-1} (u-1)' du - \int_2^3 \frac{1}{u+1} (u+1)' du = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 + \int_2^3 \frac{1}{u-1} (u-1)' du - \int_2^3 \frac{1}{u+1} (u+1)' du = \\
 &= 2 + \left[\ln|u-1| \right]_2^3 - \left[\ln|u+1| \right]_2^3 = 2 + \ln \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

Οπότε:

$$E = \frac{2 + \ln \frac{3}{2}}{8 \left(2 + \ln \frac{3}{2} \right)} \Rightarrow E = \frac{1}{8}$$

ΘΕΜΑ 44ο :

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \rightarrow R$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(1) + f(-1) = 0$ και
- $f'(x) = \sqrt{16 + f^2(x)}$ για κάθε $x \in R$

a) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $(f'(x) + f(x))e^{-x}$ είναι σταθερή στο R

β) Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$

γ) Αν επιπλέον ισχύει $f(0) = 0$, να αποδείξετε ότι $f(x) = 2(e^x - e^{-x})$, $x \in R$

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και την αντίστροφη συνάρτηση της f

ε) Να αποδείξετε ότι $\int_0^3 \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + 16}}{4} dx = 3\ln 2 - 1$

ΛΥΣΗ

a) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R , άρα και η συνάρτηση $\sqrt{16 + f^2(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο R

Από υπόθεση είναι $f'(x) = \sqrt{16 + f^2(x)}$ για κάθε $x \in R$, οπότε η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο R , άρα η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R , με:

$$f''(x) = \frac{2f(x)f'(x)}{2\sqrt{16 + f^2(x)}} = \frac{f(x)f'(x)}{f'(x)} = f(x)$$

Άρα:

$$f''(x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in R \quad (1)$$

Η συνάρτηση

$$g(x) = (f'(x) + f(x))e^{-x}, \quad x \in R$$

είναι παραγωγίσιμη στο R , ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ παραγωγισμών συναρτήσεων.

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (f''(x) + f'(x))e^{-x} + (f'(x) + f(x))e^{-x}(-x)' = \\ &= e^{-x}(f''(x) + f'(x) - f'(x) - f(x)) = e^{-x}(f''(x) - f(x)) \stackrel{(1)}{=} 0 \end{aligned}$$

Άρα η συνάρτηση g είναι σταθερή στο R

β) Έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &\stackrel{(1)}{=} \int_{-1}^1 f''(x) dx = [f'(x)]_{-1}^1 = f'(1) - f'(-1) = \\ &= \sqrt{16 + f^2(1)} - \sqrt{16 + f^2(-1)} = \frac{f^2(1) - f^2(-1)}{\sqrt{16 + f^2(1)} + \sqrt{16 + f^2(-1)}} = \\ &= \frac{(f(1) - f(-1))(f(1) + f(-1))}{\sqrt{16 + f^2(1)} + \sqrt{16 + f^2(-1)}} = 0, \text{ αφού } f(1) + f(-1) = 0 \end{aligned}$$

γ) Η συνάρτηση g είναι σταθερή στο R , άρα για κάθε $x \in R$ είναι:

$$g(x) = c \Leftrightarrow (f'(x) + f(x))e^{-x} = c \Leftrightarrow f'(x) + f(x) = ce^x \quad (2)$$

Είναι:

$$f(0) = 0 \quad \text{και} \quad f'(0) = \sqrt{16 + f^2(0)} = \sqrt{16} = 4$$

Για $x = 0$ από τη σχέση (2) έχουμε:

$$f'(0) + f(0) = ce^0 \Leftrightarrow 4 + 0 = c \Leftrightarrow c = 4$$

Οπότε από τη σχέση (2) έχουμε:

$$f'(x) + f(x) = 4e^x, \quad x \in R \quad (3)$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της σχέσης (3) με e^x , οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} f'(x)e^x + f(x)e^x &= 4e^{2x} \Leftrightarrow (f(x)e^x)' = (2e^{2x})' \Leftrightarrow \\ f(x)e^x &= 2e^{2x} + c_1 \Rightarrow f(x) = 2e^x + c_1 e^{-x}, \quad x \in R \quad (4) \end{aligned}$$

Για $x = 0$ από τη σχέση (4) έχουμε:

$$f(0) = 2e^0 + c_1 e^0 \Leftrightarrow 0 = 2 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = -2$$

Οπότε από τη σχέση (4) έχουμε:

$$f(x) = 2e^x - 2e^{-x} \Leftrightarrow f(x) = 2(e^x - e^{-x}), \quad x \in R$$

δ) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f'(x) = 2(e^x + e^{-x}) > 0, \quad x \in R$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R και επειδή είναι και συνεχής, το σύνολο τιμών της είναι:

$$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$$

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [2(e^x - e^{-x})] = -\infty$, αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [2(e^x - e^{-x})] = +\infty$, αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$

Επομένως το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι $f(A) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} , θα είναι και "1-1", οπότε αντιστρέφεται.

Αν θέσουμε

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow y = 2(e^x - e^{-x}) \Leftrightarrow y = 2e^x - \frac{2}{e^x} \Leftrightarrow \\ 2(e^x)^2 - ye^x - 2 &= 0 \stackrel{e^x > 0}{\Leftrightarrow} e^x = \frac{y + \sqrt{y^2 + 16}}{4} \Leftrightarrow \\ x &= \ln\left(\frac{y + \sqrt{y^2 + 16}}{4}\right), \quad y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Άρα:

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{με} \quad f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 16}}{4}\right)$$

ε) Είναι:

$$I = \int_0^3 \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 16}}{4}\right) dx = \int_0^3 f^{-1}(x) dx$$

Θέτουμε:

$$u = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(u), \text{ οπότε } dx = f'(u) du$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ είναι } u = f^{-1}(0) \Leftrightarrow u = \ln\left(\frac{0 + \sqrt{0^2 + 16}}{4}\right) = \ln 1 = 0$$

$$\text{Για } x = 3 \text{ είναι } u = f^{-1}(3) \Leftrightarrow u = \ln\left(\frac{3 + \sqrt{9 + 16}}{4}\right) = \ln 2$$

Είναι:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\ln 2} u f'(u) du = \left[u f(u) \right]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} f(u) du = \\ &= \ln 2 \cdot f(\ln 2) - \int_0^{\ln 2} \left(2e^u - 2e^{-u} \right) du = \\ &= \ln 2 \cdot f(\ln 2) - \left[2e^u + 2e^{-u} \right]_0^{\ln 2} = \\ &= \ln 2 \cdot f(\ln 2) - \left(2e^{\ln 2} + \frac{2}{e^{\ln 2}} - 4 \right) = \\ &= 3\ln 2 - (4 + 1 - 4) = 3\ln 2 - 1, \end{aligned}$$

αφού:

$$f(\ln 2) = 2e^{\ln 2} + \frac{2}{e^{\ln 2}} = 2 + \frac{2}{2} = 3$$

ΘΕΜΑ 45ο :

Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \rightarrow R$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $4 \int_0^x (f'(t))^2 dt = 2f'(x)f(x) - f^2(x) - e^2$, για κάθε $x \in R$ (1)

- $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in R$ (2)

- $f(0) = e$ (3)

a) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{e^x}$, $x \in R$

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ξ_1, ξ_2 και $\xi \in (0, e)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ για τα οποία ισχύει:

$$f'(\xi_1) + (e-1)f'(\xi_2) + f'(1) = f''(\xi) + f(e)$$

$$\int_0^x e^t f'(t) dt$$

γ) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x e^t f'(t) dt}{(x^2 + 1)f(x)}$

δ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in R$ ισχύει: $\int_0^{x^2+1} f(t) dt + \frac{1}{e^{x^2+1}} \geq x^2 + 2$

ΛΥΣΗ

a) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$, άρα η f διατηρεί πρόσημο στο R . Είναι $f(0) = e$, άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$.

Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R , οπότε η συνάρτηση:

- ♦ $\int_0^x (f'(t))^2 dt$ είναι παραγωγίσιμη στο R , ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης $(f'(t))^2$
- ♦ $f'(x)f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο R , ως γινόμενο παραγωγισίμων συναρτήσεων
- ♦ $f^2(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο R , ως γινόμενο παραγωγισίμων συναρτήσεων

Επομένως οι συναρτήσεις και στα δύο μέλη της σχέσης (1) είναι παραγωγίσιμες στο R , οπότε παραγωγίζονται και τα δύο μέλη της σχέσης αυτής έχουμε:

$$4(f'(x))^2 = 2[f''(x)f(x) + f'(x)f'(x)] - 2f(x)f'(x) \Leftrightarrow$$

$$4(f'(x))^2 = 2f''(x)f(x) + 2(f'(x))^2 - 2f(x)f'(x) \Leftrightarrow$$

$$2(f'(x))^2 = 2f''(x)f(x) - 2f(x)f'(x) \Leftrightarrow$$

$$(f'(x))^2 = f''(x)f(x) - f(x)f'(x) \Leftrightarrow$$

$$f(x)f'(x) = f''(x)f(x) - (f'(x))^2 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)' \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = c e^x, \quad x \in R \quad (4)$$

Για $x=0$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\begin{aligned} 4 \int_0^0 (f'(t))^2 dt &= 2f'(0)f(0) - f^2(0) - e^2 \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \\ 0 &= 2f'(0) \cdot e - e^2 - e^2 \stackrel{(3)}{\Rightarrow} 2f'(0) \cdot e = 2e^2 \Rightarrow f'(0) = e \quad (5) \end{aligned}$$

Για $x=0$ από τη σχέση (4) έχουμε:

$$\frac{f'(0)}{f(0)} = ce^0 \stackrel{(3),(5)}{\Rightarrow} \frac{e}{e} = c \Rightarrow c = 1$$

Επομένως, με αντικατάσταση του $c = 1$, η σχέση (4) γράφεται:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = e^x \Leftrightarrow (\ln f(x))' = (e^x)' \Leftrightarrow \ln f(x) = e^x + c_1, \quad x \in \mathbb{R} \quad (6)$$

Για $x=0$ από τη σχέση (6) έχουμε:

$$\ln f(0) = e^0 + c_1 \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \ln e = 1 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0$$

Επομένως, με αντικατάσταση του $c_1 = 0$, η σχέση (6) γράφεται:

$$\ln f(x) = e^x \Leftrightarrow f(x) = e^{e^x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x) = (e^{e^x})' = e^{e^x} (e^x)' = e^{e^x} e^x = e^{e^x + x}$$

Για τη συνάρτηση $f(x) = e^{e^x}$ στο διάστημα $[0, 1]$ ισχύουν:

- Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$
- Η f είναι παραγώγισμη στο $(0, 1)$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[0, 1]$, άρα θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \Leftrightarrow f'(\xi_1) = e^e - e$$

Για τη συνάρτηση $f(x) = e^{e^x}$ στο διάστημα $[1, e]$ ισχύουν:

- Η f είναι συνεχής στο $[1, e]$
- Η f είναι παραγώγισμη στο $(1, e)$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[1, e]$, άρα θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (1, e)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_2) = \frac{f(e) - f(1)}{e - 1} \Leftrightarrow f'(\xi_2) = \frac{e^{e^e} - e^e}{e - 1}$$

Για τη συνάρτηση $f'(x) = e^{e^x+x}$ στο διάστημα $[0, 1]$ ισχύουν:

- Η f' είναι συνεχής στο $[0, 1]$
- Η f' είναι παραγώγισμη στο $(0, 1)$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[0, 1]$, άρα θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f''(\xi) = \frac{f'(1) - f'(0)}{1 - 0} \Leftrightarrow f''(\xi) = e^{e+1} - e$$

Είναι:

$$\begin{aligned} f'(\xi_1) + (e-1)f'(\xi_2) + f'(1) &= f''(\xi) + f(e) \Leftrightarrow \\ e^e - e + (e-1)\frac{e^{e^e} - e^e}{e-1} + e^{e+1} &= e^{e+1} - e + e^{e^e} \Leftrightarrow \\ e^e - e + e^{e^e} - e^e + e^{e+1} &= e^{e+1} - e + e^{e^e} \Leftrightarrow 0 = 0, \text{ αληθές} \end{aligned}$$

Άρα αληθής είναι και η προς απόδειξη σχέση.

γ) Υπολογίζουμε καταρχάς το ολοκλήρωμα $\int_0^x e^t f'(t) dt$

Έχουμε:

$$\int_0^x e^t f'(t) dt = \int_0^x e^t \cdot e^{e^t+t} dt = \int_0^x e^t \cdot e^{e^t} \cdot e^t dt \quad (7)$$

Θέτουμε:

$$u = e^t, \text{ οπότε } du = e^t dt$$

$$\text{Για } t=0 \text{ είναι } u=e^0=1$$

$$\text{Για } t=x \text{ είναι } u=e^x$$

Οπότε από τη σχέση (7) έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_0^x e^t f'(t) dt &= \int_0^x e^t \cdot e^{e^t} \cdot e^t dt = \int_1^{e^x} ue^u du = \int_1^{e^x} u(e^u)' du = \left[ue^u \right]_1^{e^x} - \int_1^{e^x} (u)' e^u du = \\ &= \left[ue^u \right]_1^{e^x} - \int_1^{e^x} e^u du = \left[ue^u \right]_1^{e^x} - \left[e^u \right]_1^{e^x} = e^x e^{e^x} - 1 \cdot e^1 - (e^{e^x} - e^1) = \\ &= e^x e^{e^x} - e - e^{e^x} + e = e^{e^x} (e^x - 1) \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε το όριο:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x e^t f'(t) dt}{(x^2+1)f(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{e^x}(e^x-1)}{(x^2+1)e^{e^x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x-1}{x^2+1} \stackrel{+\infty}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} \stackrel{+\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty \end{aligned}$$

δ) Θα αποδείξουμε καταρχάς ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $e^x \geq x+1$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = e^x - x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$g'(x) = e^x - 1$$

Έχουμε:

- ο $g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$
- ο $g'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$

Το πρόσημο της $g'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$		0	

Ελάχιστο

Η συνάρτηση g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$ με ελάχιστη τιμή $g(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq x + 1 \quad (8)$$

Αν στη σχέση (8) θέσουμε $x = e^t$ έχουμε:

$$\begin{aligned} e^{e^t} \geq e^t + 1 &\Rightarrow \int_0^{x^2+1} e^{e^t} dt \geq \int_0^{x^2+1} (e^t + 1) dt \Rightarrow \int_0^{x^2+1} f(t) dt \geq \int_0^{x^2+1} e^t dt + \int_0^{x^2+1} 1 dt \Rightarrow \\ \int_0^{x^2+1} f(t) dt &\geq [e^t]_0^{x^2+1} + 1 \cdot (x^2 + 1 - 0) \Rightarrow \int_0^{x^2+1} f(t) dt \geq e^{x^2+1} - e^0 + x^2 + 1 \Rightarrow \\ \int_0^{x^2+1} f(t) dt &\geq e^{x^2+1} - 1 + x^2 + 1 \Rightarrow \int_0^{x^2+1} f(t) dt \geq e^{x^2+1} + x^2, \quad x \in \mathbb{R} \quad (9) \end{aligned}$$

$$\text{Για κάθε } x > 0 \text{ ισχύει } x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad (10)$$

Αν στη σχέση (10) θέσουμε όπου x το $e^{x^2+1} > 0$ έχουμε:

$$e^{x^2+1} + \frac{1}{e^{x^2+1}} \geq 2 \Rightarrow e^{x^2+1} \geq 2 - \frac{1}{e^{x^2+1}} \quad (11)$$

Από τις σχέσεις (9) και (11) έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_0^{x^2+1} f(t) dt &\geq e^{x^2+1} + x^2 \geq 2 - \frac{1}{e^{x^2+1}} + x^2 \Rightarrow \\ \int_0^{x^2+1} f(t) dt &\geq 2 - \frac{1}{e^{x^2+1}} + x^2 \Rightarrow \int_0^{x^2+1} f(t) dt + \frac{1}{e^{x^2+1}} \geq x^2 + 2, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$