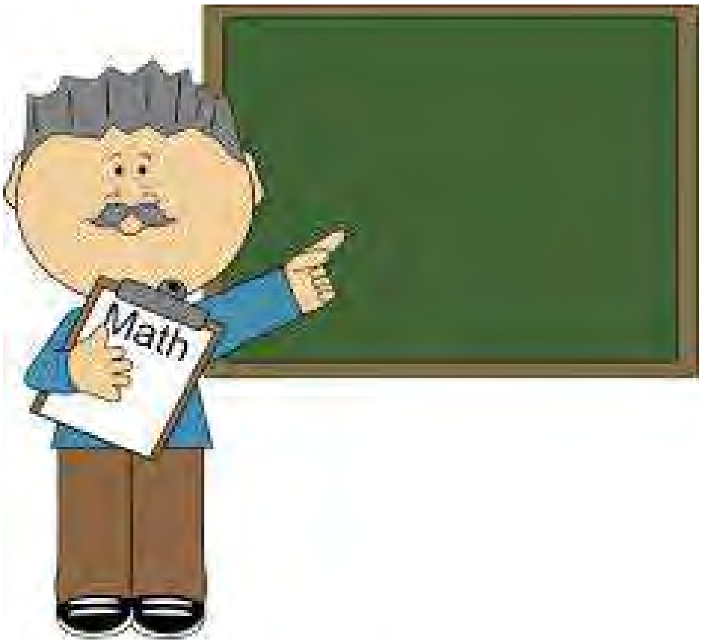
Μαθηματικά Κατεύθυνσης
Γ΄ Λυκείου



Λύσεις Θεμάτων Ομογενών

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΚΑΡΑΦΕΡΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2013
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 98
Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 192
Α3. α. Σωστό, **β.** Σωστό, **γ.** Λάθος, **δ.** Λάθος, **ε.** Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $$\frac{1}{z-1} \underset{x,y\in IR}{\overset{z=x+yi}{=}} \frac{1}{x+yi-1} = \frac{1\cdot(x-1-yi)}{(x-1+yi)\cdot(x-1-yi)} = \frac{x-1-yi}{(x-1)^2+y^2}$$

$$= \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} + \frac{-y}{(x-1)^2+y^2}i$$

$$\text{Re}\left(\frac{1}{z-1}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2 = 2x-2 \Leftrightarrow$$

$$x^2-2x+1+y^2-2x+2=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-4x+3=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=1$$

άρα ο γ.τ. των εικόνων του z είναι

κύκλος C με κέντρο $K(2,0)$ και ακτίνα $\rho=1$

με εξαίρεση το σημείο $A(1,0)$ διότι $z\neq 1$

Β2. Οι εικόνες των z_1, z_2 είναι σημεία του κύκλου $C: |z-2|=1$

άρα $|z_1-2| = |z_2-2| = 1$

Είναι $|z_1+z_2-4| = |(z_1-2)+(z_2-2)| \leq |z_1-2| + |z_2-2| = 1+1=2$

Β3. Η εικόνα του μιγαδικού $z=x+yi$, $x, y\in IR$, είναι σημείο του κύκλου C,

άρα $x^2+y^2-4x+3=0$ **(1)**

Είναι $|z| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow x^2+y^2=5$ **(2)**

$$\left.\begin{array}{l} (1) \overset{(2)}{\Rightarrow} 5-4x+3=0 \Leftrightarrow x=2 \\ (2) \overset{x=2}{\Rightarrow} 4+y^2=5 \Leftrightarrow y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{z=2\pm i}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f'(x) = \left(\frac{x}{2}\ell n^2 x + x\right)' = \frac{1}{2}\cdot \ell n^2 x + \frac{x}{2}\cdot 2\ell n x \cdot \frac{1}{x} + 1 = \frac{1}{2}\cdot \ell n^2 x + \ell n x + 1$

$$= \frac{\ell n^2 x + 2\ell n x + 2}{2} = \frac{(\ell n x + 1)^2 + 1}{2} > 0$$

άρα **η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.**

$$f''(x) = \left(\frac{1}{2}\cdot \ell n^2 x + \ell n x + 1\right)' = \ell n x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{\ell n x + 1}{x}$$

$$f''(x) = 0 \iff \frac{\ell n x + 1}{x} = 0 \iff \ell n x = -1 \iff x = e^{-1} \iff x = \frac{1}{e}$$

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f			

Η f είναι κοίλη στο $\left(0, \frac{1}{e}\right]$, ενώ είναι κυρτή στο $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

Γ2. Η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και "1-1"

$$f(x^4 + 2x) = f(4) \overset{f\ \text{"1-1"}}{\iff} x^4 + 2x = 4 \iff x^4 + 2x - 4 = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x) = x^4 + 2x - 4$, $x > 0$

- Η g είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως πολυωνυμική
- $g(1) = -1 < 0$ και $g(2) = 16 > 0$

Από Θ.Bolzano η $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$

Άρα $\alpha = 1$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ είναι $g(x) > 0$, για κάθε $x > 2$, άρα η τιμή του α είναι μοναδική.

Επίσης είναι $g'(x) = 4x^3 + 2 > 0$, για $x > 0$,

άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$,

επομένως η ρίζα επίσης είναι μοναδική.

Γ3. $x\ell n^2x < 2 - 2x \Leftrightarrow \frac{x}{2}\ell n^2x < 1 - x \Leftrightarrow \frac{x}{2}\ell n^2x + x < 1 \Leftrightarrow$

$f(x) < f(1) \underset{x>0}{\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}}$ $\mathbf{0 < x < 1}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $3\int_1^x 2t\cdot f(t)\,dt + x^3 = 3x^2\cdot f(x) + 3x - 8$ **(1)** $\Leftrightarrow$

$3\int_1^x 2t\cdot f(t)\,dt + x^3 - 3x + 8 = 3x^2\cdot f(x) \overset{x>0}{\Leftrightarrow}$

$$f(x) = \frac{3\int_1^x 2t\cdot f(t)\,dt + x^3 - 3x + 8}{3x^2}.$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0\ \ +\infty)$,
άρα η συνάρτηση f_1, με $f_1(t) = 2t\cdot f(t)$ είναι συνεχής στο $(0\ \ +\infty)$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

Επομένως η συνάρτηση f_2, με $f_2(t) = 3\int_1^x 2t\cdot f(t)\,dt = 3\int_1^x f_1(t)\,dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0\ \ +\infty)$.

Τέλος, **η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0\ \ +\infty)$**,
ως πράξεις των παραγωγίσιμων συναρτήσεων f_2, f_3, f_4,
με $f_3(x) = x^3 - 3x + 8$ και $f_4(x) = 3x^2$.

Παραγωγίζοντας τη σχέση (1) κατά μέλη έχουμε :

$$\left(3\int_1^x 2t\cdot f(t)\,dt + x^3\right)' = \left(3x^2\cdot f(x) + 3x - 8\right)' \Leftrightarrow$$

$$\cancel{6x\cdot f(x)} + 3x^2 = \cancel{6x\cdot f(x)} + 3x^2\cdot f'(x) + 3 \Leftrightarrow$$

$3x^2\cdot f'(x) = 3x^2 - 3 \Leftrightarrow$ $\mathbf{f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}, x > 0}$.

Δ2. $f'(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2} = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)'$

Από συνέπειες Θ.Μ.Τ. $f(x) = x + \dfrac{1}{x} + c,\ x > 0$ **(2)**

$$(1) \overset{x=1}{\Rightarrow} 3\int_1^1 2t \cdot f(t)\,dt + 1 = 3f(1) + 3 - 8 \Leftrightarrow f(1) = 2$$

$$(2) \overset{x=1}{\Rightarrow} f(1) = 2 + c \Leftrightarrow 2 = 2 + c \Leftrightarrow c = 0$$

$$(2) \overset{c=0}{\Rightarrow} f(x) = x + \frac{1}{x} \Leftrightarrow \mathbf{f(x) = \frac{x^2+1}{x},\ x > 0}$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - x] = \lim_{x\to+\infty}\left(\cancel{x} + \frac{1}{x} - \cancel{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$$

άρα **η ευθεία $y = x$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.**

Δ3. $f(x) - x = \cancel{x} + \dfrac{1}{x} - \cancel{x} = \dfrac{1}{x} > 0$, στο $[1, e^2]$

άρα $E = \displaystyle\int_1^{e^2}[f(x) - x]\,dx = \int_1^{e^2}\frac{1}{x}\,dx = [\ell n x]_1^{e^2} = \ell n e^2 - \ell n 1 =$ **2 τ.μ.**

Δ4. Για $x > 1$ έχουμε :

$$f'(x) > \frac{f(x) - 2}{x - 1} \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2} > \frac{x + \frac{1}{x} - 2}{x - 1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2 - 1}{x^2} > \frac{\frac{x^2 + 1 - 2x}{x}}{x - 1} \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2} > \frac{(x - 1)^{\cancel{2}}}{x \cdot \cancel{(x - 1)}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2 - 1}{x^2} > \frac{x - 1}{x} \overset{\cdot x^2 > 0}{\Leftrightarrow} x^2 - 1 > x^2 - x \Leftrightarrow x > 1 \text{ που ισχύει}$$

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΤΡΙΤΗ 4 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2012 ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 224

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 151

Α3. α. Λάθος, β. Σωστό, γ. Λάθος, δ. Σωστό, ε. Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. 1ος τρόπος

$$|iz-1|=1 \Leftrightarrow |iz+i^2|=1 \Leftrightarrow |i(z+i)|=1 \Leftrightarrow$$

$$|i||z+i|=1 \Leftrightarrow |z+i|=1,$$ άρα ο γ.τ. των εικόνων του z είναι

κύκλος με κέντρο $K(0,-1)$ και ακτίνα $\rho=1$

2ος τρόπος

$$|iz-1|=1 \overset{z=x+yi}{\Leftrightarrow} |i(x+yi)-1|=1 \Leftrightarrow |-y-1+xi|=1 \Leftrightarrow$$

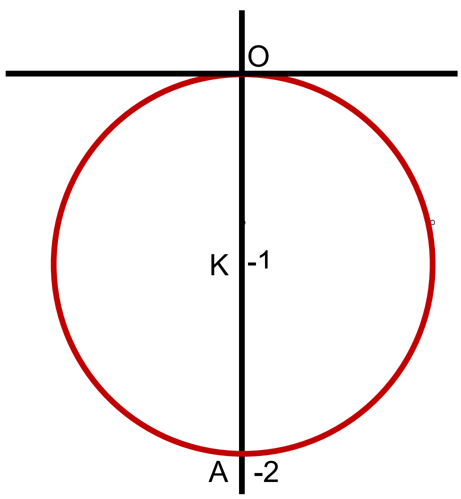
$$\sqrt{(-y-1)^2+x^2}=1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{(-y-1)^2+x^2}\right)^2=1^2 \Leftrightarrow (-y-1)^2+x^2=1 \Leftrightarrow$$

$x^2+(y+1)^2=1$, άρα ο γ.τ. των εικόνων του z είναι

κύκλος με κέντρο $K(0,-1)$ και ακτίνα $\rho=1$

Β2. 1ος τρόπος (με σχήμα)

$|z|_{max}=(OA)=2$, άρα $|z|\le 2$



2ος τρόπος

$$||z|-|1|| \le |z+1| = 1 \Leftrightarrow$$

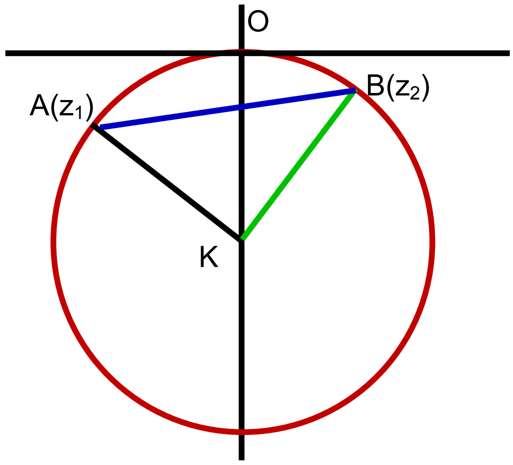
$$-1\le |z|-1\le 1 \Leftrightarrow 0\le |z|\le 2$$

άρα $|z|\le 2$

Β3. $(AB)^2 = |z_1 - z_2|^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$

$(KA)^2 + (KB)^2 = \rho^2 + \rho^2 = 1 + 1 = 2$

Από Πυθαγόρειο Θεώρημα προκύπτει ότι **το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ορθογώνιο στο Κ**.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f'(x) = \left(e^{2x} - 2x\right)' = 2e^{2x} - 2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} = 2 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$\searrow$		$\nearrow$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.
Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 0$, την τιμή $f(0) = 1$

Γ2. $f''(x) = \left(2e^{2x} - 2\right)' = 4e^{2x} > 0$, άρα **η f είναι κυρτή**.

Γ3. • Προφανής ρίζα το 0, αφού $f(0) = 1$

• $x < 0 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 1$

• $x > 0 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 1$

Επομένως **η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μοναδική ρίζα το 0**.

Γ4. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$ είναι η $y = 1$

Η f είναι κυρτή

Η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη με εξαίρεση

το σημείο επαφής, άρα $f(x) \geq 1 \Leftrightarrow e^{2x} - 2x - 1 \geq 0$

Άρα $E = \int_0^1 [f(x) - 1]\, dx = \int_0^1 \left[e^{2x} - 2x - 1\right] dx =$

$$= \left[\frac{e^{2x}}{2} - x^2 - x\right]_0^1 = \frac{e^2}{2} - 2 - \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{e^2 - 5}{2}} \textbf{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε συνάρτηση φ, με $\varphi(x) = \dfrac{f(x) - 2}{x - 2}$.

Ισχύει $\lim\limits_{x \to 2} \varphi(x) = 2$.

Είναι $f(x) = (x - 2) \cdot \varphi(x) + 2$

- $f(2) \overset{f \text{ συνεχής}}{=} \lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \left[(x - 2) \cdot \varphi(x) + 2\right]$

  $= \lim\limits_{x \to 2} (x - 2) \cdot \lim\limits_{x \to 2} \varphi(x) + 2 = 0 \cdot 2 = 2 = 2$

- $f'(2) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - 2}{x - 2} = 2$

Δ2.
- Η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$
- $f(0) = f(2) = 2$

από Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 2)$,

τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$

και επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα το ξ είναι μοναδικό.

Επομένως **υπάρχει μοναδικό ξ Î (0 , 2), τέτοιο ώστε**

η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ είναι παράλληλη στον $x'x$.

Δ3. Η f' είναι γνησίως αύξουσα, άρα η f είναι κυρτή.

Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = \xi$ είναι η $y = f(\xi)$

Η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη με εξαίρεση το σημείο επαφής, άρα $f(x) \geq f(\xi)$.

Δ4. Θεωρούμε συνάρτηση g, με $g(x) = \int_1^x f(t)\,dt - x^2 + 2x,\ x \in IR$

- Η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως πράξεις συνεχών
- $g(0) = \int_1^0 f(t)\,dt = -\int_0^1 f(t)\,dt$
- $g(1) = 1 > 0$

$f(x) \geq f(\xi) > 0$, στο $[0, 1]$, άρα $\int_0^1 f(t)\,dt > 0 \Leftrightarrow -\int_0^1 f(t)\,dt < 0$

Επομένως $g(0) \cdot g(1) < 0$

Από Θ. Bolzano η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

Επομένως η εξίσωση $\int_1^x f(t)\,dt = x^2 - 2x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 6 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2011
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 217

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 273

Α3. **α.** Σωστό, **β.** Σωστό, **γ.** Λάθος, **δ.** Σωστό, **ε.** Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $w = 2 \Leftrightarrow z + \dfrac{4}{z} = 2 \Leftrightarrow z^2 + 4 = 2z \Leftrightarrow z^2 - 2z + 4 = 0$

$$\Delta = -12 \text{ και } z_{1,2} = \frac{2 \pm i\sqrt{12}}{2} = \frac{2 \pm 2i\sqrt{3}}{2} = \mathbf{1 \pm i\sqrt{3}}$$

Β2. $z_1^{\,3} = (1 + i\sqrt{3})^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot i\sqrt{3} + 3 \cdot 1 \cdot (i\sqrt{3})^2 + (i\sqrt{3})^3$

$= 1 + 3i\sqrt{3} - 9 - 3i\sqrt{3} = -8$

$z_2^{\,3} = (1 - i\sqrt{3})^3 = 1^3 - 3 \cdot 1^2 \cdot i\sqrt{3} + 3 \cdot 1 \cdot (i\sqrt{3})^2 - (i\sqrt{3})^3$

$= 1 - 3i\sqrt{3} - 9 + 3i\sqrt{3} = -8$

άρα $\mathbf{z_1^{\,3} = z_2^{\,3} = -8}$

Β3. $z_3 = \dfrac{z_1^{\,3}}{4} = \dfrac{-8}{4} = -2$

$|z_1 - z_2| = |1 + i\sqrt{3} - 1 + i\sqrt{3}| = |2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$

$|z_2 - z_3| = |1 - i\sqrt{3} + 2| = |3 - i\sqrt{3}| = \sqrt{3^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$|z_1 - z_3| = |1 + i\sqrt{3} + 2| = |3 + i\sqrt{3}| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

άρα **το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των z_1, z_2 και z_3 είναι ισόπλευρο**.

Β4. $|z| = 2 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow z\bar{z} = 4 \Leftrightarrow \bar{z} = \dfrac{4}{z}$ (1)

$$w = z + \frac{4}{z} \overset{(1)}{=} z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$$

ΘΕΜΑ Γ

$f(x) = x - \ell n(e^x + 1),\ x \in IR$

Γ1. $f'(x) = \left[x - \ell n(e^x + 1)\right]' = 1 - \dfrac{e^x}{e^x + 1} = \dfrac{e^x + 1 - e^x}{e^x + 1} = \dfrac{1}{e^x + 1} > 0$

άρα **η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR**.

Γ2. $f''(x) = \left(\dfrac{1}{e^x + 1}\right)' = -\dfrac{(e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2} = -\dfrac{e^x}{(e^x + 1)^2} < 0,$

άρα **η f είναι κοίλη στο IR**.

Γ3. 1ος τρόπος

Για κάθε $x > 0$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, x]$

άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $x_0 \in (0, x)$, τέτοιο ώστε

$$f'(x_0) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - (-\ell n2)}{x} = \frac{f(x) + \ell n2}{x}$$

$$0 < x_0 < x \overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(x_0) > f'(x) \Leftrightarrow \frac{f(x) + \ell n2}{x} > f'(x) \overset{x>0}{\Leftrightarrow}$$

$f(x) + \ell n2 > x \cdot f'(x) \Leftrightarrow$

$\mathbf{x \cdot f'(x) < f(x) + \ell n2}$

2ος τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x) = x \cdot f'(x) - f(x) - \ell n2,\ x \geq 0$

$g'(x) = [x \cdot f'(x) - f(x) - \ell n2]'$

$= f'(x) + x \cdot f''(x) - f'(x)$

$= x \cdot f''(x) < 0$, για $x > 0$

άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

$$x > 0 \overset{g\downarrow}{\Rightarrow} g(x) < g(0) \Leftrightarrow x \cdot f'(x) - f(x) - \ell n2 < 0 \Leftrightarrow$$

$\mathbf{x \cdot f'(x) < f(x) + \ell n2}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Παραγωγίζουμε τη δοθείσα σχέση κατά μέλη

$$\left(2\int_0^x f(t)\,dt\right)' = \left[\ell n^2(x+1)\right]' \Leftrightarrow \cancel{2}\cdot f(x) = \cancel{2}\cdot \ell n(x+1)\left[\ell n(x+1)\right]' \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \ell n(x+1)\cdot\frac{(x+1)'}{x+1} \Leftrightarrow \mathbf{f(x) = \frac{\ell n(x+1)}{x+1}}\ ,\ \mathbf{x > -1}$$

Δ2. $$f'(x) = \left[\frac{\ell n(x+1)}{x+1}\right]' = \frac{\left[\ell n(x+1)\right]'\cdot(x+1) - \ell n(x+1)\cdot(x+1)'}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x+1}\cdot(x+1) - \ell n(x+1)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1-\ell n(x+1)}{(x+1)^2},\ \ x > -1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-\ell n(x+1)}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow 1-\ell n(x+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ell n(x+1) = 1 \Leftrightarrow x+1 = e \Leftrightarrow x = 1 - e$$

x	-1	e - 1	+∞
f′(x)	+	0	-
f (x)	↗		↘

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f(e-1) = \frac{1}{e}$,

άρα για κάθε $x > -1$ είναι :

$$f(x) \le \frac{1}{e} \Leftrightarrow \frac{\ell n(x+1)}{x+1} \le \frac{1}{e} \Leftrightarrow e\cdot\ell n(x+1) \le x+1 \Leftrightarrow$$

$$\ell n(x+1)^e \le x+1 \Leftrightarrow e^{\ell n(x+1)^e} \le e^{x+1} \Leftrightarrow \mathbf{(x+1)^e \le e^{x+1}}$$

Δ3. $$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ell n(x+1)}{x+1} = 0 \Leftrightarrow \ell n(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Αναζητώ το πρόσημο της f στο [0 , e - 1]

$$0 \le x \le e-1 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(0) \le f(x) \le f(e-1) \Leftrightarrow 0 \le f(x) \le \frac{1}{e}$$

$$E = \int_0^{e-1} f(x)dx = \int_0^{e-1}\frac{\ell n(x+1)}{x+1}dx = \left[\frac{\ell n^2(x+1)}{2}\right]_0^{e-1} = \mathbf{\frac{1}{2}\ τ.μ.}$$

Δ4. Για $x > -1$ έχουμε :

$$(x+1)^2 = 2^{x+1} \Leftrightarrow \ell n(x+1)^2 = \ell n 2^{x+1} \Leftrightarrow$$

$$2\ell n(x+1) = (x+1)\cdot \ell n2 \Leftrightarrow \frac{\ell n(x+1)}{x+1} = \frac{\ell n2}{2} \Leftrightarrow f(x) = f(1)$$

$1^η$ λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x) = f(x) - f(1)$

Έστω ότι η g έχει 3 ρίζες $ρ_1$, $ρ_2$, $ρ_3$ με $ρ_1 < ρ_2 < ρ_3$

Η g είναι παραγωγίσιμη στα $[ρ_1, ρ_2]$ και $[ρ_2, ρ_3]$

άρα από Θ. Rolle υπάρχουν $x_1 \in (ρ_1, ρ_2)$ και $x_2 \in (ρ_2, ρ_3)$

τέτοια ώστε $g'(x_1) = g'(x_2) = 0$

Όμως $g'(x) = f'(x)$ και η f' έχει μοναδική ρίζα το $1 - e$

ΑΤΟΠΟ, άρα η g έχει το πολύ δύο ρίζες

Είναι $g(1) = g(3) = 0$, άρα

εξίσωση $f(x) = f(1)$ έχει ακριβώς δύο λύσεις τις $x = 1$ και $x = 3$

$2^η$ λύση

- Στο διάστημα $Δ_1 = (-1, e - 1)$
  η εξίσωση $f(x) = f(1)$ έχει προφανή λύση την $x = 1$
  και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $Δ_1$,
  η εξίσωση $f(x) = f(1)$ έχει μοναδική λύση στο $Δ_1$ την $x = 1$
- Στο διάστημα $Δ_2 = [e - 1, +\infty)$
  $f(3) = \frac{\ell n4}{4} = \frac{2\ell n2}{4} = \frac{\ell n2}{2} = f(1)$, άρα
  η εξίσωση $f(x) = f(1)$ έχει λύση την $x = 3$
  και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $Δ_2$,
  η εξίσωση $f(x) = f(1)$ έχει μοναδική λύση στο $Δ_2$ την $x = 3$

Άρα η εξίσωση $f(x) = f(1)$ έχει ακριβώς δύο λύσεις τις $x = 1$ και $x = 3$

Επομένως και **η ισοδύναμή της εξίσωση**

$(x+1)^2 = 2^{x+1}$ έχει ακριβώς δύο λύσεις, τις $x = 1$ και $x = 3$.

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΟΜΟΓΕΝΩΝ
ΤΡΙΤΗ 14 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2010
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α
Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 232
Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 188
Α3. α. Σωστό, **β.** Σωστό, **γ.** Σωστό, **δ.** Λάθος, **ε.** Λάθος.

ΘΕΜΑ Β
Β1. $|z| = |z-2i| \overset{z=x+yi}{\Leftrightarrow} |x+yi| = |x+yi-2i| \Leftrightarrow$

$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-2)^2} \Leftrightarrow x^2+y^2 = x^2+y^2-4y+4 \Leftrightarrow$

$4y = 4 \Leftrightarrow$ $\mathbf{y=1}$.

Β2. $|z| = \sqrt{2} \overset{z=x+i}{\Leftrightarrow} |x+i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = \sqrt{2} \Leftrightarrow$

$x^2+1 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

άρα $z = -1+i$ ή $z = 1+i$.

Β3. $z_1^4 + z_2^4 = (1+i)^4 + (-1+i)^4 = \left[(1+i)^2\right]^2 + \left[(-1+i)^2\right]^2$

$= (2i)^2 + (-2i)^2 = -4-4 = -8$

ΘΕΜΑ Γ
Γ1. $f'(x) = 3x^2 - \dfrac{3}{x},\ x>0$

$f''(x) = 6x + \dfrac{3}{x^2} > 0$, για $x>0$, άρα **η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$**.

Γ2. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^3 - 3\ell n x\right) = +\infty$

άρα η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τον άξονα $y'y$.

Γ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x) = f(x) - 2,\ x\in[1, e]$.

$g(x) = x^3 - 3\ell n x - 2,\ x\in[1, e]$

- η g είναι συνεχής στο $[1, e]$ ως πράξεις συνεχών
- $g(1) = 1^3 - 3\ell n1 - 2 = -1 < 0$
  $g(e) = e^3 - 3\ell ne - 2 = e^3 - 5 > 0$

από Θ. Bolzano υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της g στο διάστημα $(1, e)$ και επειδή

$g'(x) = 3x^2 - \dfrac{3}{x} = \dfrac{3(x-1)(x^2+x+1)}{x} > 0$, για $x\in(1, e]$

άρα η g είναι γν. αύξουσα στο $[1, e]$ η ρίζα αυτή είναι μοναδική,

άρα **η εξίσωση $f(x)=2$ έχει μοναδική ρίζα στο $(1,e)$**.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $f'(x) + f(x) - x = 0, x \in IR$ (1)

$$g'(x) = (e^x)'[f(x) - x + 1] + e^x[f(x) - x + 1]'$$
$$= e^x[f(x) - x + 1] + e^x[f'(x) - 1]$$
$$= e^x[f(x) - x + 1 + f'(x) - 1]$$
$$= e^x[f'(x) + f(x) - x] = 0 \text{ από την (1)}$$

άρα η g είναι σταθερή στο IR.

Δ2. $g(0) = e^0[f(0) - 0 + 1] = 1$, άρα $g(x) = 1, x \in IR$ ή

$$e^x[f(x) - x + 1] = 1 \Leftrightarrow f(x) - x + 1 = e^{-x} \Leftrightarrow f(x) = e^{-x} + x - 1, x \in IR.$$

Δ3. $f'(x) = -e^{-x} + 1 = 1 - \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{e^x - 1}{e^x}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(0) = 0$, άρα για κάθε $x \in IR$ είναι $f(x) \geq 0$.

Δ4. $E = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (e^{-x} + x - 1)dx = \left[-e^{-x} + \dfrac{x^2}{2} - x\right]_0^1$

$$= -e^{-1} + \frac{1}{2} - 1 + 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{e} = \boldsymbol{\frac{e-2}{2e}} \textbf{ τ.μ.}$$

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΟΜΟΓΕΝΩΝ
ΤΡΙΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2009
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1°

Α.1. **Σχολικό βιβλίο σελίδα 229**
Α.2. **Σχολικό βιβλίο σελίδα 279**
Β. α. **ΣΩΣΤΟ**
β. **ΛΑΘΟΣ**
γ. **ΛΑΘΟΣ**
δ. **ΣΩΣΤΟ**
ε. **ΣΩΣΤΟ**

ΘΕΜΑ 2°

Α. α. $z = \frac{1}{1+i} - \frac{i(i-3)}{2} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} - \frac{-1-3i}{2} = \frac{1-i}{2} + \frac{1+3i}{2}$

$= \frac{2+2i}{2} = 1 + i$, άρα

- $-\bar{z} = -\overline{(1+i)} = -(1-i) = -1+i$
- $z^2 = (1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$
- $z^3 = z^2 z = 2i(1+i) = 2i + 2i^2 = 2i - 2 = -2 + 2i$

β. 1^ος^ τρόπος

$(AB) = |z^2 - (-\bar{z})| = |2i - (-1+i)| = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$(A\Gamma) = |z^3 - (-\bar{z})| = |-2+2i-(-1+i)| = |-1+i| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$

άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

2^ος^ τρόπος

Είναι Α (-1 , 1), Β(0 , 2) και Γ (-2 , 2)

$(AB) = \sqrt{(0+1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$(A\Gamma) = \sqrt{(-2+1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

γ. 1^{ος} τρόπος

$$\left.\begin{array}{l} \left| z^3 - z^2 \right|^2 = \left| -2 + 2i - 2i \right|^2 = |-2|^2 = 2^2 = 4 \\ \left|z^2 - (-\bar{z})\right|^2 + \left|z^3 - (-\bar{z})\right|^2 = \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2 = 2 + 2 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left| z^3 - z^2 \right|^2 = \left|z^2 - (-\bar{z})\right|^2 + \left|z^3 - (-\bar{z})\right|^2$$

2^{ος} τρόπος

Είναι $(ΒΓ) = \sqrt{(-2-0)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2$ και

$(ΒΓ)^2 = (ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2 \Leftrightarrow \left| z^3 - z^2 \right|^2 = \left|z^2 - (-\bar{z})\right|^2 + \left|z^3 - (-\bar{z})\right|^2$

*** <u>Σημείωση</u> : Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.**

ΘΕΜΑ 3^{ο}

α. $f'(x) = \left(x \cdot e^{x-α}\right)' = (x)' \cdot e^{x-α} + x \cdot (e^{x-α})'$

$= e^{x-α} + x \cdot e^{x-α} = (x+1) \cdot e^{x-α}$

Πρέπει $f'(0) = e \Leftrightarrow e^{-α} = e \Leftrightarrow -α = 1 \Leftrightarrow$ **$α = -1$**

β. i. Για $α = -1$

$f(x) = x \cdot e^{x+1}$

$f'(x) = (x+1) \cdot e^{x+1}$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$,
ενώ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, +\infty)$.
Ολικό ελάχιστο $f(-1) = -1$

ii. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x \cdot e^{x+1}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{e^{-x-1}} \overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{\underset{\text{L' Hospital}}{=}} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{-e^{-x-1}}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-e^{x+1}\right) = 0$

άρα η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$
την ευθεία $y = 0$ (άξονας $x'x$).

ΘΕΜΑ 4ο

α. 1ος τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση h, με $h(x) = f(x) - g(x) = x - 1 - \ell nx,\ x > 0$

$$h'(x) = (x - 1 - \ell nx)' = x - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x},\ x > 0$$

x	0		1		e	$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$		
$h(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		

Η h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $h(1) = 0$, άρα για κάθε $x > 0$ είναι $h(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow$ $\mathbf{f(x) \geq g(x)}$.

2ος τρόπος

Βρίσκουμε την εφαπτομένη της C_g στο σημείο Α (1 , 0).

$$g'(x) = \frac{1}{x},\ x > 0$$

$(\varepsilon) : y - g(1) = g'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = x - 1.$

$g''(x) = -\dfrac{1}{x^2},\ x > 0$, άρα η g είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$.

Η εφαπτόμενη ευθεία (ε) βρίσκεται πάνω από τη C_g, με εξαίρεση το σημείο επαφής Α, άρα $x - 1 \geq g(x) \Leftrightarrow$ $\mathbf{f(x) \geq g(x)}$.

β.i. Η h είναι γνησίως αύξουσα στο [1 , e], άρα

$1 \leq x \leq e \Leftrightarrow h(1) \leq h(x) \leq h(e) \Leftrightarrow$ $\mathbf{0 \leq h(x) \leq e - 2}$.

ii. Από α' ερώτημα είναι $h(x) \geq 0$, για κάθε $x > 0$, άρα

$$E = \int_1^e h(x)dx = \int_1^e (x - 1 - \ell nx)dx = \int_1^e x\,dx - \int_1^e 1dx - \int_1^e (x)' \cdot \ell nx dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e - [x]_1^e - [x \cdot \ell nx]_1^e + \int_1^e x \cdot (\ell nx)' dx$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - (e - 1) - (e - 0) + \int_1^e 1dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - e + 1 - e + [x]_1^e$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - e + 1 - e + e - 1 = \mathbf{\frac{e^2 - 2e - 1}{2}}\ \textbf{τ.μ.}$$

iii. $I = \displaystyle\int_1^e e^{h(x)} \cdot [h(x) + 1] \cdot h'(x)\,dx$

Θεωρούμε $u = h(x)$ $du = h'(x)\,dx$ • $x = e \rightarrow u = e - 2$ • $x = 1 \rightarrow u = 0$

$$= \int_0^{e-2} e^u \cdot (u + 1)\,du = \int_0^{e-2} (e^u \cdot u + e^u)\,du = \int_0^{e-2} (ue^u)'\,du$$

$$= \left[ue^u\right]_0^{e-2} = \mathbf{(e-2)e^{e-2}}$$

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΟΜΟΓΕΝΩΝ
ΤΡΙΤΗ 9 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2008
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1^{o}

Α.1. **Σχολικό βιβλίο σελίδα 98**
Α.2. **Σχολικό βιβλίο σελίδα 141**
Β. α. **ΣΩΣΤΟ**
β. **ΛΑΘΟΣ**
γ. **ΛΑΘΟΣ**
δ. **ΛΑΘΟΣ**
ε. **ΣΩΣΤΟ**

ΘΕΜΑ 2^{o}

Α. α. $\begin{cases} x = k \\ y = k + 1 \end{cases} \Rightarrow y = x + 1,$

άρα ο γ.τ. των εικόνων του z είναι

η ευθεία με εξίσωση $\mathbf{y = x = 1}$.

β. $|z| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{k^2 + (k+1)^2} = 1 \Leftrightarrow$

$k^2 + (k+1)^2 = 1 \Leftrightarrow k^2 + k^2 + 2k + 1 = 1 \Leftrightarrow$

$2k^2 + 2k = 0 \Leftrightarrow 2k \cdot (k+1) = 0$

$k = 0$ ή $k = -1 \Leftrightarrow$ $\mathbf{z = i}$ ή $\mathbf{z = -1}$.

Β. Είναι $(1 \pm i)^4 = \left[(1 \pm i)^2\right]^2 = (\pm 2i)^2 = -4,$ άρα

$\alpha^2 + \beta^2 + 8 = (1 - i)^4\beta - (1 + i)^4\alpha \Leftrightarrow$

$\alpha^2 + \beta^2 + 8 = -4\beta + 4\alpha \Leftrightarrow$

$\alpha^2 - 4\alpha + 4 + \beta^2 + 4\beta + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$(\alpha - 2)^2 + (\beta + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\alpha - 2 = 0$ και $\beta + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\boldsymbol{\alpha = 2}$ **και** $\boldsymbol{\beta = -2}$.

ΘΕΜΑ 3ο

α. $f'(x) = \left(1 + \dfrac{\ell n x}{x}\right)' = ... = \dfrac{1 - \ell n x}{x^2}$

x	0 e +∞
f΄(x)	+ 0 -
f (x)	↗ ↘

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο (0 , e], ενώ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [e , +∞).

Ολικό ελάχιστο $f(e) = \dfrac{e+1}{e}$

β. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x + \ell n x}{x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{\text{L' Hospital}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 1$

γ. $I = \int_1^{e^2} f(x)\,dx = \int_1^{e^2}\left(1 + \dfrac{\ell n x}{x}\right)dx = \left[x + \dfrac{\ell n^2 x}{2}\right]_1^{e^2} = \mathbf{e^2 + 1}.$

ΘΕΜΑ 4ο

α. $f'(x) = συνx$

$f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$

$(ε) : y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow \mathbf{y = x}.$

β. $E = \int_0^1 (x - ημx)dx + \int_1^{\frac{\pi}{2}} (1 - ημx)dx = \left[\dfrac{x^2}{2} + συνx\right]_0^1 + \left[x + συνx\right]_1^{\frac{\pi}{2}}$

$= \dfrac{1}{2} + συν1 - 1 + \dfrac{\pi}{2} - 1 - συν1 = \dfrac{\mathbf{\pi - 3}}{\mathbf{2}}$ **τ.μ.**

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = ημx - x + \dfrac{3}{2}x^2,\ x \geq 0.$

$g'(x) = συνx - 1 + 3x.$

$g''(x) = -ημx + 3 > 0$, άρα g' είναι γν. αύξουσα στο $[0 , +\infty)$.

$x > 0 \overset{g'\uparrow}{\Leftrightarrow} g'(x) > g'(0) \Leftrightarrow g'(x) > 0$

άρα g είναι γν. αύξουσα στο $[0 , +\infty)$.

$x > 0 \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x) > g(0) \Leftrightarrow ημx - x + \dfrac{3}{2}x^2 > 0 \Leftrightarrow ημx > x - \dfrac{3}{2}x^2.$

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 11 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2007
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Σχολικό βιβλίο σελίδες 224 - 225
Α.2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 149
Β.1. Σωστό, **2.** Λάθος, **3.** Σωστό, **4.** Σωστό, **5.** Λάθος.

ΘΕΜΑ 2ο

α. $|z_1| = |i| = 1,\ |z_2| = |1| = 1,\ |z_3| = |1+i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = 2$

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1^2 + 1^2 = 2 = |z_3|^2$$

β.i. $|z - z_1| = |z - z_2| \overset{z = x + yi}{\Leftrightarrow} |x + yi - i| = |x + yi - 1| \Leftrightarrow$

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \Leftrightarrow$$

$$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 2y + \cancel{1} = \cancel{x^2} - 2x + \cancel{1} + \cancel{y^2} \Leftrightarrow$$

$$\cancel{2}x = \cancel{2}y \Leftrightarrow \mathbf{Re(z) = Im(z)}$$

ii. $$A = \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} = \frac{x + xi}{x - xi} + \frac{x - xi}{x + xi} = \frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i}$$

$$= \frac{(1+i)^2 + (1-i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{1 + 2i - 1 + 1 - 2i - 1}{1+1} = \frac{0}{2} = \mathbf{0}$$

ΘΕΜΑ 3ο

α. $$f\left(\frac{1}{e^5}\right) = \ell n\frac{1}{e^5} + \frac{1}{4\frac{1}{e^5}} = \ell n e^{-5} + \frac{e^5}{4} = -5 + \frac{e^5}{4} > 0$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \ell n\frac{1}{4} + \frac{1}{4\frac{1}{4}} = \ell n 2^{-2} + 1 = -2\ell n2 + 1 < 0$$

$$f(e^5) = \ell n e^5 + \frac{1}{4e^5} = 5 + \frac{1}{4e^5} > 0$$

β. $f(1) = \ell n1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$$f'(x) = \left(\ell n x + \frac{1}{4x}\right)' = (\ell n x)' + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x} - \frac{1}{4x^2} = \frac{4x-1}{4x^2},\ x > 0$$

$f'(1) = \frac{3}{4}$

$(\varepsilon): y - f(1) = f'(1)\cdot(x-1) \Leftrightarrow (\varepsilon): y - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}(x-1) \Leftrightarrow$

$\boldsymbol{(\varepsilon): y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}}$

γ.

x	0	¼	+∞
f΄(x)	-	0	+
f (x)	↘		↗

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{1}{4}\right]$, ενώ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$.

δ. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{1}{4}\right]$, ενώ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$, άρα η f έχει 2 το πολύ ρίζες **(1)**.

- Η f είναι συνεχής στα $\left[\frac{1}{e^5}, \frac{1}{4}\right]$, $\left[\frac{1}{4}, e^5\right]$
- $f\left(\frac{1}{e^5}\right) > 0$, $f\left(\frac{1}{4}\right) < 0$ και $f(e^5) > 0$

Από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in \left(\frac{1}{e^5}, \frac{1}{4}\right)$ και ένα τουλάχιστον $x_2 \in \left(\frac{1}{4}, e^5\right)$, τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2) = 0$ **(2)**

Από (1) και (2) **η εξίσωση f (x) = 0 έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα (0 , +∞)**.

ΘΕΜΑ 4ο

α. $h'(x) = \left[e^{-x} \cdot f(x) - e^{-4x}\right]'$

$= -e^{-x} \cdot f(x) - e^{-4x} + e^{-x} \cdot f'(x) + 4e^{-4x}$

$= e^{-x} \cdot [f'(x) - f(x)] + 4e^{-4x}$

$= e^{-x} \cdot \left(-4e^{-3x}\right) + 4e^{-4x}$

$= -4e^{-4x} + 4e^{-4x} = 0$

άρα **η h είναι σταθερή στο IR**.

β. $h(0) = e^{0} \cdot f(0) - e^{0} = 2 - 1 = 1$,

άρα $h(x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Είναι $e^{-x} \cdot f(x) - e^{-4x} = 1 \Leftrightarrow e^{-x} \cdot f(x) = 1 + e^{-4x} \Leftrightarrow$

$\frac{f(x)}{e^{x}} = 1 + \frac{1}{e^{4x}} \overset{\cdot e^{x}}{\Leftrightarrow} \mathbf{f(x) = e^{x} + \frac{1}{e^{3x}}}$

γ. $I(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x (e^{t} + e^{-3t})\,dt$

$= \left[e^{t} - \frac{e^{-3t}}{3}\right]_0^x = \left[e^{t} - \frac{1}{3e^{3t}}\right]_0^x$

$= e^{x} - \frac{1}{3e^{3x}} - \left(e^{0} - \frac{1}{3e^{0}}\right) = \mathbf{e^{x} - \frac{1}{3e^{3x}} - \frac{2}{3}}$

δ. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{I(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x} - \frac{1}{3}e^{-3x} - \frac{2}{3}}{x^2} \underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x} + e^{-3x}}{2x}$

$\underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x} - 3e^{-3x}}{2} = +\infty$

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 12 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2006
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 224
β. Σχολικό βιβλίο σελίδα 188
γ. Σωστό, **2.** Λάθος, **3.** Σωστό, **4.** Σωστό, **5.** Σωστό.

ΘΕΜΑ 2ο

α. $(5z-1)^5 = (z-5)^5 \Rightarrow \left|(5z-1)^5\right| = \left|(z-5)^5\right| \Leftrightarrow$

$$|5z-1|^5 = |z-5|^5 \Leftrightarrow \boldsymbol{|5z-1| = |z-5|}$$

β. $|5z-1| = |z-5| \Leftrightarrow |5z-1|^2 = |z-5|^2 \Leftrightarrow$

$$(5z-1)(5\bar{z}-1) = (z-5)(\bar{z}-5) \Leftrightarrow$$

$$25z\bar{z} - \cancel{5z} - \cancel{5\bar{z}} + 1 = z\bar{z} - \cancel{5z} - \cancel{5\bar{z}} + 25 \Leftrightarrow$$

$$24z\bar{z} = 24 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{|z| = 1}$$

γ. $w = 5z + 1 \Leftrightarrow z = \dfrac{w-1}{5}$

$$|z| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{w-1}{5}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|w-1|}{5} = 1 \Leftrightarrow |w-1| = 5$$

Οι μιγαδικοί z προκύπτουν από την επίλυση της εξίσωσης $(5z-1)^5 = (z-5)^5$. Η εξίσωση αυτή έχει ακριβώς 5 ρίζες, άρα υπάρχουν ακριβώς 5 μιγαδικοί z που οι εικόνες τους βρίσκονται στον μοναδιαίο κύκλο (από το β΄ ερώτημα).
Αν $w = 5z + 1$, τότε **ο γ.τ. των εικόνων του w είναι ακριβώς 5 σημεία του κύκλου με κέντρο Κ (1 , 0) και ακτίνα ρ = 5.**

(*) ΣΧΟΛΙΟ
Θα ήταν ορθότερο να διατυπωθεί το γ΄ ερώτημα ως εξής :
Αν $w = 5z + 1$, να βρεθεί η εξίσωση της γραμμής στην οποία βρίσκονται οι εικόνες Μ (w) στο μιγαδικό επίπεδο.
Είναι μάλλον αδύνατο ένας μαθητής να σκεφτεί τη σωστή απάντηση.

ΘΕΜΑ 3^o

α. Πρέπει $x > 5$, άρα $\mathbf{D_f = (5\,,+\infty)}$

β. $f'(x) = \left[\ell n(x-5) + 2x - 12\right]' = \dfrac{1}{x-5} + 2 > 0$, για $x > 5$

άρα **η f είναι γνησίως αύξουσα στο (5 , +∞)**.

γ. • $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^+}\left[\ell n(x-5) + 2x - 12\right] = -\infty$

διότι $\lim\limits_{x\to 5^+}\left[\ell n(x-5)\right] = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to 5^+}(2x-12) = -2$

• $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left[\ell n(x-5) + 2x - 12\right] = +\infty$

διότι $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\ell n(x-5)\right] = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty}(2x-12) = +\infty$

Το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbf{f((5\,,+\infty)) = IR}$.

δ. $2006 \in f((5\,,+\infty))$ και η f είναι γν. αύξουσα στο $(5\,,+\infty)$, άρα **η εξίσωση $\mathbf{f(x) = 2006}$ έχει μοναδική λύση στο (5 , + ∞)**.

ΘΕΜΑ 4^o

α. $\Phi'(x) = \left[\dfrac{f(x)}{e^{2x}}\right]' = \dfrac{f'(x)\cdot e^{2x} - f(x)\cdot 2e^{2x}}{e^{4x}} = \dfrac{f'(x) - 2\cdot f(x)}{e^{2x}} = 0,$

διότι $f'(x) = \left[3 + 2\cdot\int_0^x f(t)\,dt\right]' = 2\cdot f(x)$

άρα **η Φ είναι σταθερή στο IR**.

β. $f(0) = 3 + 2\cdot\int_0^0 f(t)\,dt = 3$ και $\Phi(0) = \dfrac{f(0)}{e^0} = 3$

άρα $\Phi(x) = 3$, για κάθε $x \in IR$

Είναι $\dfrac{f(x)}{e^{2x}} = 3 \Leftrightarrow \mathbf{f(x) = 3e^{2x},\ x \in IR}$

γ. Είναι $f(x) > 0$, άρα $E(\lambda) = \int_0^\lambda f(x)\,dx = \int_0^\lambda 3e^{2x}dx$

$= \left[\dfrac{3e^{2x}}{2}\right]_0^\lambda = \dfrac{3e^{2\lambda}}{2} - \dfrac{3}{2} = \mathbf{\dfrac{3}{2}(e^{2\lambda} - 1)}$ **τ.μ.**

δ. $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\dfrac{E(\lambda)}{\lambda} = \lim\limits_{\lambda\to 0^+}\dfrac{\frac{3}{2}(e^{2\lambda}-1)}{\lambda} \underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{\lambda\to 0^+}\dfrac{3e^{2\lambda}}{1} = \mathbf{3}$

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΟΜΟΓΕΝΩΝ
ΤΡΙΤΗ 13 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2005
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1°

Α.1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 217
Α.2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 97
Β. α. Σωστό, **β.** Σωστό, **γ.** Λάθος, **δ.** Λάθος, **ε.** Σωστό.

ΘΕΜΑ 2°

α. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+i}{1-3i} = \frac{-3i^2+i}{1-3i} = \frac{i(-3i+1)}{1-3i} = i$, άρα $z_1 = i\cdot z_2$ **(1)**

$$\left|i\cdot z_1 + z_2\right|^2 \overset{(1)}{=} \left|i\cdot\left(i\cdot z_2\right) + z_2\right|^2 = \left|-z_2 + z_2\right|^2 = |0|^2 = 0$$

β. $z_1^{2006} + z_2^{2006} \overset{(1)}{=} \left(i\cdot z_2\right)^{2006} + z_2^{2006} = i^{2006}\cdot z_2^{2006} + z_2^{2006}$
$= -z_2^{2006} + z_2^{2006} = 0$

γ. $w = \frac{\kappa\cdot z_1 - i\cdot z_2}{z_2 - \kappa\cdot z_2} \overset{(1)}{=} \frac{\kappa\cdot i\cdot z_2 - i\cdot z_2}{z_2 - \kappa\cdot z_2} = \frac{-i(z_2 - \kappa\cdot z_2)}{z_2 - \kappa\cdot z_2} = -i$

άρα $\text{Im}(w) = -1$

ΘΕΜΑ 3°

Α.
$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(\alpha + e^x) = \alpha + 1\\
&\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x\cdot \ln x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DL'H}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0\\
&f(0) = 0
\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow$ **$\alpha = -1$**

$$\left.\begin{aligned}&\textbf{B.i. } \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x} \underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 0^-}\frac{e^x}{1} = 1\\ &\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x\ell n x}{x} = \lim_{x\to 0^+}\ell n x = -\infty\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

ii. $f'(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ 1 + \ell n x, & x > 0 \end{cases}$

x	$-\infty$		0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$		+		-		+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, 0]$ και $[e^{-1}, +\infty)$, ενώ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, e^{-1}]$,

iii. Στο διάστημα $[1, e]$ είναι $f(x) = x\ell n x \geq 0$

$$E = \int_1^e f(x)dx = \int_1^e x\ell n x dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ell n x dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\ell n x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}(\ell n x)' dx$$

$$= \frac{e^2}{2} - 0 - \int_1^e \frac{x}{2}dx$$

$$= \frac{e^2}{2} - 0 - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e$$

$$= \frac{e^2}{2} - 0 - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= \mathbf{\frac{e^2+1}{4}} \textbf{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 4^o

α. $f'(x) = (x - \ell nx + e^x)' = 1 - \dfrac{1}{x} + e^x = \dfrac{x-1}{x} + e^x > 0$, για $x > 1$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1 , +\infty)$.

β. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x - \ell nx + e^x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(1 - \dfrac{\ell nx}{x} + \dfrac{e^x}{x}\right)\right] = +\infty$

διότι : • $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ell nx}{x} \underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = 0$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} \underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{1} = +\infty$

γ. $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+}(x - \ell nx + e^x) = 1 + e$

άρα $f((1 , +\infty)) = (1 + e , +\infty)$

$2005 \in f((1 , +\infty))$ και η f είναι γν.αύξουσα στο $(1 , +\infty)$,

άρα η εξίσωση $f(x) = 2005$ έχει μοναδική λύση στο $(1 , +\infty)$.

δ. $\Pi = \int_2^e f(x)dx + \int_{f(2)}^{f(e)} f^{-1}(x)dx$

$u = f^{-1}(x)$
$x = f(u)$
$dx = f'(u)\, du$
• $x = f(2) \to u = 2$
• $x = f(e) \to u = e$

$= \int_2^e f(x)dx + \int_2^e uf'(u)du$

$= \int_2^e [f(x) + xf'(x)]dx$

$= \int_2^e [xf(x)]'du = [xf(x)]_2^e = ef(e) - 2f(2)$

$= e(e - \ell ne + e^e) - 2(2 - \ell n2 + e^2)$

$= e^2 - e + e^{1+e} - 4 + 2\ell n2 - 2e^2$

$= e^{1+e} - e^2 - e - 4 + 2\ell n2$

άρα $\Pi - 2\ell n2 = e^{1+e} - e^2 - e - 4$

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΠΕΜΠΤΗ 16 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2004
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 304
β. Σχολικό βιβλίο σελίδα 150
γ. Σ, **2.** Σ, **3.** Λ, **4.** Λ, **5.** Σ.

ΘΕΜΑ 2ο

α.
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(-x^2) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(\alpha x + \beta) = \beta \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{\beta = 0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(\alpha x + \beta) = \alpha + \beta \overset{\beta = 0}{=} \alpha \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(1 + x\ell n x) = 1 \\ f(1) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = 1}$$

β. Για $\alpha = 1$ και $\beta = 0$ είναι
$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \le 0 \\ x, & 0 < x < 1 \\ 1 + x\ell n x, & x \ge 1 \end{cases}$$

i. $$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1 + x\ell n x}{x^2} \underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1 + \ell n x}{2x} \underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2} = \mathbf{0}$$

ii. $$\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x - 1}{x - 1} = 1$$

$$\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\cancel{1} + x\ell n x - \cancel{1}}{x - 1} \underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1 + \ell n x}{1} = 1$$

ΘΕΜΑ 3ο

α. $w \in IR \Leftrightarrow \overline{w} = w \Leftrightarrow \dfrac{\overline{z}}{\overline{z}^2 + 1} = \dfrac{z}{z^2 + 1} \Leftrightarrow$

$z^2\overline{z} + \overline{z} = z\overline{z}^2 + z \Leftrightarrow z^2\overline{z} - z\overline{z}^2 + \overline{z} - z = 0 \Leftrightarrow$

$z\overline{z}(z - \overline{z}) - (z - \overline{z}) = 0 \Leftrightarrow (z - \overline{z})(z\overline{z} - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$z - \overline{z} = 0$ ή $z\overline{z} - 1 = 0 \Leftrightarrow z = \overline{z}$ ή $|z|^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\mathbf{z \in IR}$ **ή** $\mathbf{|z| = 1}$

β. $\sqrt{3}z^2 + \sqrt{3} = 3z \Leftrightarrow \sqrt{3}z^2 - 3z + \sqrt{3} = 0 \overset{:\sqrt{3}}{\Leftrightarrow} z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$

$\Delta = -1$ και $z_{1,2} = \dfrac{\sqrt{3} \pm i}{2} = \mathbf{\dfrac{\sqrt{3}}{2} \pm \dfrac{1}{2} i}$

γ. Από τύπους Vieta $z_1 \cdot z_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha} = 1$ και $z_1 + z_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha} = \sqrt{3}$

$K = \dfrac{(z_1 \cdot z_2)^3 - i}{4 + (z_1 + z_2)^2} = \dfrac{1^3 - i}{4 + (\sqrt{3})^2} = \dfrac{1 - i}{7} = \mathbf{\dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{7} i}$

ΘΕΜΑ 4ο

α. $f(1) = 1^2 - 1 + \dfrac{1}{2} \cdot \int_1^1 f(t)\,dt = \mathbf{0}$

β. Είναι $(x + 1) \cdot f(x) = (x + 1) \cdot (x^2 - 1) + \int_1^x f(t)\,dt$

Παραγωγίζουμε κατά μέλη και έχουμε :

$(x + 1)'f(x) + (x + 1)f'(x) = (x^3 + x^2 - x - 1)' + \left[\int_1^x f(t)\,dt\right]' \Leftrightarrow$

$\cancel{f(x)} + (x + 1) \cdot f'(x) = (3x^2 + 2x - 1) + \cancel{f(x)} \overset{x > 0}{\Leftrightarrow}$

$f'(x) = \dfrac{3x^2 + 2x - 1}{x + 1} \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{(x + 1)(3x - 1)}{x + 1} \Leftrightarrow$

$\mathbf{f'(x) = 3x - 1, x > 0}$

γ. Είναι $f'(x) = 3x - 1 \Leftrightarrow f'(x) = \left(\dfrac{3x^2}{2} - x\right)'$,

άρα από συνέπειες Θ.Μ.Τ. $f(x) = \dfrac{3x^2}{2} - x + c$

$f(1) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2} - 1 + c = 0 \Leftrightarrow c = -\dfrac{1}{2}$

Επομένως $\mathbf{f(x) = \dfrac{3x^2}{2} - x - \dfrac{1}{2},\ x > 0}$

δ. Αναζητώ το πρόσημο της f στο διάστημα $[2, 4]$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	2	4	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	0	+	**+**	+

$$E = \int_2^4 f(x)\,dx = \int_2^4 \left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{2}\right) dx = \left[\frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right]_2^4$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^3 - x^2 - x\right]_2^4 = \frac{1}{2}\left[(64 - 16 - 4) - (8 - 4 - 2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(44 - 2) = \frac{1}{2}\cdot 42 = \mathbf{21\ \text{τ.μ.}}$$

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 16 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2003
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 151

β. Σχολικό βιβλίο σελίδα 251

γ.1. Σ, **2.** Σ, **3.** Λ, **4.** Σ.

ΘΕΜΑ 2ο

α.
$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to -\frac{4}{3}^-} f(x) = \lim_{x\to -\frac{4}{3}^-} (-x-3) = \frac{4}{3} - 3 = -\frac{5}{3} \\ &\lim_{x\to -\frac{4}{3}^+} f(x) = \lim_{x\to -\frac{4}{3}^+} (2x+1) = -\frac{8}{3} + 1 = -\frac{5}{3} \\ &f\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3} - 3 = -\frac{5}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

f συνεχής στο $x_0 = -\frac{4}{3}$

β.
$$\lim_{x\to -\frac{4}{3}^-} \frac{f(x) - f\left(-\frac{4}{3}\right)}{x+\frac{4}{3}} = \lim_{x\to -\frac{4}{3}^-} \frac{-x-3+\frac{5}{3}}{x+\frac{4}{3}} = \lim_{x\to -\frac{4}{3}^-} \frac{-\left(x+\frac{4}{3}\right)}{x+\frac{4}{3}} = -1$$

$$\lim_{x\to -\frac{4}{3}^+} \frac{f(x) - f\left(-\frac{4}{3}\right)}{x+\frac{4}{3}} = \lim_{x\to -\frac{4}{3}^+} \frac{2x+1+\frac{5}{3}}{x+\frac{4}{3}} = \lim_{x\to -\frac{4}{3}^-} \frac{2\left(x+\frac{4}{3}\right)}{x+\frac{4}{3}} = 2$$

άρα **η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = -\frac{4}{3}$**

γ. $f'(x) = \begin{cases} -1, & x < -\dfrac{4}{3} \\ 2, & x > -\dfrac{4}{3} \end{cases}$

- $x < -\dfrac{4}{3}$: $f(x) + f'(x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow -x - 3 - 1 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \mathbf{x = -\dfrac{9}{2}}$
- $x > -\dfrac{4}{3}$: $f(x) + f'(x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x + 1 + 2 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \mathbf{x = -\dfrac{5}{4}}$

ΘΕΜΑ 3ο

α. $|f(z)| = |f(\bar{z})| \Leftrightarrow \left|\dfrac{z+i}{z}\right| = \left|\dfrac{\bar{z}+i}{\bar{z}}\right| \Leftrightarrow \dfrac{|z+i|}{\cancel{|z|}} = \dfrac{|\bar{z}+i|}{\cancel{|\bar{z}|}} \Leftrightarrow$

$|z+i| = |\bar{z}+i| \Leftrightarrow |z+i| = |\overline{z-i}| \Leftrightarrow |z+i| = |z-i|$

η εικόνα του z κινείται στη μεσοκάθετο του ΑΒ
με Α (0 , -1) και Β (0 , 1), δηλαδή τον άξονα x΄x
με εξαίρεση το σημείο Ο (0 , 0), άρα $\mathbf{z \in IR^*}$

β. $|f(z)| = 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{z+i}{z}\right| = 1 \Leftrightarrow |z+i| = |z| \underset{x,y\in IR}{\overset{z=x+yi}{\Leftrightarrow}}$

$|x+yi+i| = |x+yi| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y+1)^2} = \sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow$

$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 2y + 1 = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{2}$

άρα **ο γ.τ. των εικόνων του z είναι η ευθεία** $\mathbf{y = -\dfrac{1}{2}}$

γ. $f(z) = \dfrac{z+i}{z} = \dfrac{z\bar{z}+i\bar{z}}{z\bar{z}} \underset{x,y\in IR}{\overset{z=x+yi}{=}} \dfrac{x^2+y^2+i(x-yi)}{x^2+y^2} = \dfrac{x^2+y^2+y}{x^2+y^2} + \dfrac{x}{x^2+y^2}i$

$Re(f(z)) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+y^2+y}{x^2+y^2} = 2 \Leftrightarrow x^2+y^2-y = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$, άρα **οι εικόνες του μιγαδικού z**

βρίσκονται στον κύκλο με κέντρο $\mathbf{K\left(0, \dfrac{1}{2}\right)}$ **και ακτίνα** $\mathbf{\rho = \dfrac{1}{2}}$

ΘΕΜΑ 4^o

α. Έστω $x > 0$. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. με την f στο $[0, x]$

Υπάρχει $\xi \in (0, x)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{f(x)}{x}$

άρα $\mathbf{f(x) = x \cdot f'(\xi)}$

β. $h'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2} + e^x$

$= \dfrac{x \cdot f'(x) - x \cdot f'(\xi)}{x^2} + e^x$

$= \dfrac{x \cdot [f'(x) - f'(\xi)]}{x^2} + e^x$

$= \dfrac{f'(x) - f'(\xi)}{x} + e^x > 0$

$x > \xi \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}$

$f'(x) > f'(\xi) \Leftrightarrow$

$f'(x) - f'(\xi) > 0$

άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$,

άρα **η h είναι "1-1" στο $(0, +\infty)$**

γ. $h(x) = e^x + x^5 + x \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x} + e^x = e^x + x^5 + x \Leftrightarrow$

$\dfrac{f(x)}{x} = x^5 + x \Leftrightarrow f(x) = x^6 + x^2$

$I = \int_1^{e-1} f(x+1)\,dx$

$= \int_2^{e} f(u)\,du$

$u = x + 1$

$du = dx$

- $x = 1 \rightarrow u = 2$
- $x = e - 1 \rightarrow u = e$

$= \int_2^{e} (u^6 + u^2)\,du$

$= \left[\dfrac{u^7}{7} + \dfrac{u^3}{3}\right]_2^e$

$= \mathbf{\dfrac{e^7}{7} + \dfrac{e^3}{3} - \dfrac{2^7}{7} - \dfrac{2^3}{3}}$

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ

ΤΡΙΤΗ 17 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2002

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1^o

Α. α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 217
β. $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$
Β. α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 104
β. 3.

ΘΕΜΑ 2^o

α. $$x + yi = \frac{z_2}{z_1} = \frac{3+4i}{1-2i} = \frac{(3+4i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$$

$$= \frac{3+6i+4i-8}{1+4} = \frac{-5+10i}{5} \Leftrightarrow$$

$x + yi = -1 + 2i \Leftrightarrow$ $\mathbf{x = -1}$ και $\mathbf{y = 2}$

β. Αν η $w_1 = -1 + 2i$ είναι η μία ρίζα της εξίσωσης, τότε η άλλη είναι η $w_2 = \overline{w_1} = -1 - 2i$. Από τύπους Vieta :

$$S = w_1 + w_2 = \frac{-\beta}{1} \Rightarrow -1 + 2i + -1 - 2i = -\beta \Leftrightarrow \boldsymbol{\beta = 2}$$

$$P = w_1 \cdot w_2 = \frac{\gamma}{1} \Rightarrow (-1+2i)(-1-2i) = \gamma \Leftrightarrow \boldsymbol{\gamma = 5}$$

γ. $|z - 2z_1| = |z_2| \Leftrightarrow |z - 2(1-2i)| = |3+4i| \Leftrightarrow |z - (2-4i)| = 5$

άρα **ο γ.τ. των εικόνων του z είναι ο κύκλος με κέντρο Κ (2 , - 4) και ακτίνα ρ = 5**.

ΘΕΜΑ 3ο

α. $f(0) = 4 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{17}{4}$

$f'(x) = 2 - \dfrac{2}{(2x+4)^2}$ και $f'(0) = 2 - \dfrac{2}{16} = 2 - \dfrac{1}{8} = \dfrac{15}{8}$

$(\varepsilon): y - f(0) = f'(0)\cdot(x - 0) \Leftrightarrow (\varepsilon): y - \dfrac{17}{4} = \dfrac{15}{8}x \Leftrightarrow$

$\boldsymbol{(\varepsilon): y = \dfrac{15}{8}x + \dfrac{17}{4}}$

β. $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

- $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+}\left(2x + 4 + \dfrac{1}{2x+4}\right) = +\infty,$

  άρα **η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = -2$**.

- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x + 4 + \dfrac{1}{2x+4}}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\dfrac{4x^2 + 16x + 16 + 1}{2x+4}}{x}$

  $= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4x^2 + 16x + 17}{2x^2 + 4x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4x^2}{2x^2} = 2 = \lambda$

  $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[f(x) - \lambda x\right] = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\cancel{2x} + 4 + \dfrac{1}{2x+4} - \cancel{2x}\right)$

  $= \lim\limits_{x\to +\infty}\left(4 + \dfrac{1}{2x+4}\right) = 4 = \beta$

  άρα **η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη** στο $+\infty$ **την ευθεία $y = 2x + 4$**.

- Όμοια στο $-\infty$

γ. Είναι $f(x) \geq 0$, στο διάστημα $[0, 1]$.

$E = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1\left(2x + 4 + \dfrac{1}{2x+4}\right)dx$

$= \left[x^2 + 4x - \dfrac{\ln(2x+4)}{2}\right]_0^1$

$= 1 + 4 + \dfrac{\ln 6}{2} - \dfrac{\ln 4}{2} = \boldsymbol{\left(5 + \dfrac{\ln 6}{2} - \ln 2\right)}$ **τ.μ.**

ΘΕΜΑ 4^o

α. $h'(x) = \left[\dfrac{f(x)}{x^2}\right]' = \dfrac{f'(x)\cdot x^2 - f(x)\cdot 2x}{x^4} = \dfrac{\cancel{x}\left[x\cdot f'(x) - 2f(x)\right]}{x^{\cancel{4}3}}$

$= \dfrac{x}{x^3} = \dfrac{1}{x^2} > 0,$

άρα **η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0\,,+\infty)$**

β. Είναι $h'(x) = \dfrac{1}{x^2} \Leftrightarrow \left(\dfrac{f(x)}{x^2}\right)' = \left(-\dfrac{1}{x}\right)'$,

άρα από συνέπειες Θ.Μ.Τ. $\dfrac{f(x)}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + c \Leftrightarrow$

$f(x) = -x + c\cdot x^2,\ x > 0$

Για $x = 1 : f(1) = -1 + c \Leftrightarrow 0 = -1 + c \Leftrightarrow c = 1$

Επομένως $\mathbf{f(x) = x^2 - x,\ x > 0}$

γ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\int_1^x f(t)\,dt}{\ell n^2 x} \underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{2\ell n x\cdot\dfrac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x^2 - x)}{2\ell n x}$

$= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3 - x^2}{2\ell n x} \underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2 - 2x}{\dfrac{2}{x}} = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ

ΤΕΤΑΡΤΗ 5 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2001

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1^o

Α. α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 188

β. Σχολικό βιβλίο σελίδα 191

γ. Σχολικό βιβλίο σελίδα 194

Β. α. $x \cdot [f(x) - 2x + 2] = \eta\mu x \quad (1)$

Για $x \neq 0$ είναι $f(x) - 2x + 2 = \dfrac{\eta\mu x}{x} \Leftrightarrow f(x) = 2x - 2 + \dfrac{\eta\mu x}{x}$

$$f(0) \overset{f \text{ συνεχής}}{=} \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(2x - 2 + \frac{\eta\mu x}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}(2x-2) + \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = -2 + 1 = \mathbf{-1}$$

β. f συνεχής στο $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

$f(0) = -1 < 0$

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) > 0$

από Θ. Bolzano

υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της

$f(x) = 0$ στο διάστημα $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

$$(1) \overset{x=\frac{\pi}{2}}{\Rightarrow} \frac{\pi}{2}\left[f\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\frac{\pi}{2} + 2\right] = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\pi}{2}\left[f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \pi + 2\right] = 1 \Leftrightarrow$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \pi + 2 = \frac{2}{\pi} \Leftrightarrow$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi - 2 + \frac{2}{\pi}$$

ΘΕΜΑ 2^o

Α.α. $w = \dfrac{z - 3i}{1 + i} \Leftrightarrow 2 - 2i = \dfrac{z - 3i}{1 + i} \Leftrightarrow z - 3i = 2(1 - i)(1 + i) \Leftrightarrow$

$z - 3i = 4 \Leftrightarrow z = 4 + 3i$

$|z| = |4 + 3i| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

άρα **σωστή απάντηση είναι η Γ**

β. $|w| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \left|\dfrac{z - 3i}{1 + i}\right| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{|z - 3i|}{|1 + i|} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$\dfrac{|z - 3i|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow |z - 3i| = 4$

άρα **η εικόνα του z ανήκει στον κύκλο με κέντρο K (0 , 3) και ακτίνα 4**.

Β.α. $w = \dfrac{z - 3i}{1 + i} = \dfrac{x + yi - 3i}{1 + i} = \dfrac{(x + yi - 3i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)}$

$= \dfrac{x - xi + yi + y - 3i - 3}{2} = \dfrac{x + y - 3}{2} + \dfrac{-x + y - 3}{2}i$

άρα $\mathbf{Re(w) = \dfrac{x + y - 3}{2}}$ και $\mathbf{Im(w) = \dfrac{-x + y - 3}{2}}$

β. $Arg(w) = \dfrac{\pi}{4}$ άρα $Re(w) = Im(w) \Leftrightarrow \dfrac{x + y - 3}{2} = \dfrac{-x + y - 3}{2} \Leftrightarrow$

$x + y - 3 = -x + y - 3 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

άρα **ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι η ευθεία με εξίσωση x = 0**, **δηλαδή ο άξονας y΄y**.

ΘΕΜΑ 3^{o}

α. $f'(x) = (x\ell nx - 2x)' = (x\ell nx)' - (2x)'$

$= (x)' \cdot \ell nx + x \cdot (\ell nx)' - 2$

$= \ell nx + 1 - 2 = \ell nx - 1,\ x > 0$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ell nx - 1 > 0 \Leftrightarrow \ell nx > 1 \Leftrightarrow x > e$

x	0	e	+∞
f΄(x)	-	0	+
f (x)	↘		↗

Η Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (0 , e], ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο [e , +∞).

β. Η f παρουσιάζει ελάχιστο για x = e την τιμή f (e) = -e

$$f(x) \geq -e \;\Leftrightarrow\; x\ell nx - 2x \geq -e \;\Leftrightarrow\; x\ell nx \geq 2x - e \;\overset{x>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{x\ell nx}{x} \geq \frac{2x}{x} - \frac{e}{x} \;\Leftrightarrow\; \ell nx \geq 2 - \frac{e}{x}$$

γ. $1 \leq x \leq e \;\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow}\; f(1) \geq f(x) \geq f(e) \;\Leftrightarrow\; -2 \geq f(x) \geq -e$

άρα f (x) < 0 στο [1 , e]

$$E = -\int_1^e f(x)\,dx = -\int_1^e (x\ell nx - 2x)\,dx = -\int_1^e x\ell nx\,dx + \int_1^e 2x\,dx$$

$$= -\int_1^e \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ell nx\,dx + \left[x^2\right]_1^e$$

$$= -\left[\frac{x^2}{2}\cdot \ell nx\right]_1^e + \int_1^e \frac{x^2}{2}(\ell nx)'\,dx + e^2 - 1$$

$$= -\frac{e^2}{2} - 0 + \int_1^e \frac{x}{2}dx + e^2 - 1 = -\frac{e^2}{2} + \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e + e^2 - 1$$

$$= -\frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} + e^2 - 1 = \frac{-2e^2 + e^2 - 1 + 4e^2 - 4}{4}$$

$$= \mathbf{\frac{3e^2 - 5}{4}}\ \textbf{τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 4ο

α. $$g'(x) = \left[\frac{f'(x) + f(x)}{e^x}\right]' = \frac{[f''(x) + f'(x)]\cdot e^x - [f'(x) + f(x)]\cdot e^x}{(e^x)^2}$$

$$= \frac{\cancel{e^x}\left[f''(x) + \cancel{f'(x)} - \cancel{f'(x)} - f(x)\right]}{(e^x)^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{f''(x) - f(x)}{e^x} = \frac{0}{e^x} = 0$$

άρα **η g είναι σταθερή στο IR.**

β. $g(0) = \dfrac{f'(0) + f(0)}{e^0} = \dfrac{0 + 1}{1} = 1$,

άρα $g(x) = 1$, για κάθε $x \in IR$

$$g(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{f'(x) + f(x)}{e^x} = 1 \Leftrightarrow f'(x) + f(x) = e^x \overset{\cdot e^x}{\Leftrightarrow}$$

$$f'(x)\cdot e^x + f(x)\cdot e^x = e^x \cdot e^x \Leftrightarrow \mathbf{\left[f(x)\cdot e^x\right]' = e^{2x}}$$

γ. Είναι $\left[f(x)\cdot e^x\right]' = e^{2x} \Leftrightarrow \left[f(x)\cdot e^x\right]' = \left(\dfrac{e^{2x}}{2}\right)'$,

άρα από συνέπειες Θ.Μ.Τ. $f(x)\cdot e^x = \dfrac{e^{2x}}{2} + c \overset{\cdot e^{-x}}{\Leftrightarrow}$

$$f(x)\cdot e^x \cdot e^{-x} = \frac{e^{2x}\cdot e^{-x}}{2} + c\cdot e^{-x} \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^x}{2} + c\cdot e^{-x}$$

Για $x = 0$: $f(0) = \dfrac{1}{2} + c \Leftrightarrow 1 = \dfrac{1}{2} + c \Leftrightarrow c = \dfrac{1}{2}$

Επομένως $f(x) = \dfrac{e^x}{2} + \dfrac{1}{2}\cdot e^{-x} \Leftrightarrow$

$$\mathbf{f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ x \in IR}$$

Γενικό Λύκειο Νεστορίου
Σχολικό έτος 2013-2014
Βοηθητικό Υλικό της Γ΄ Λυκείου