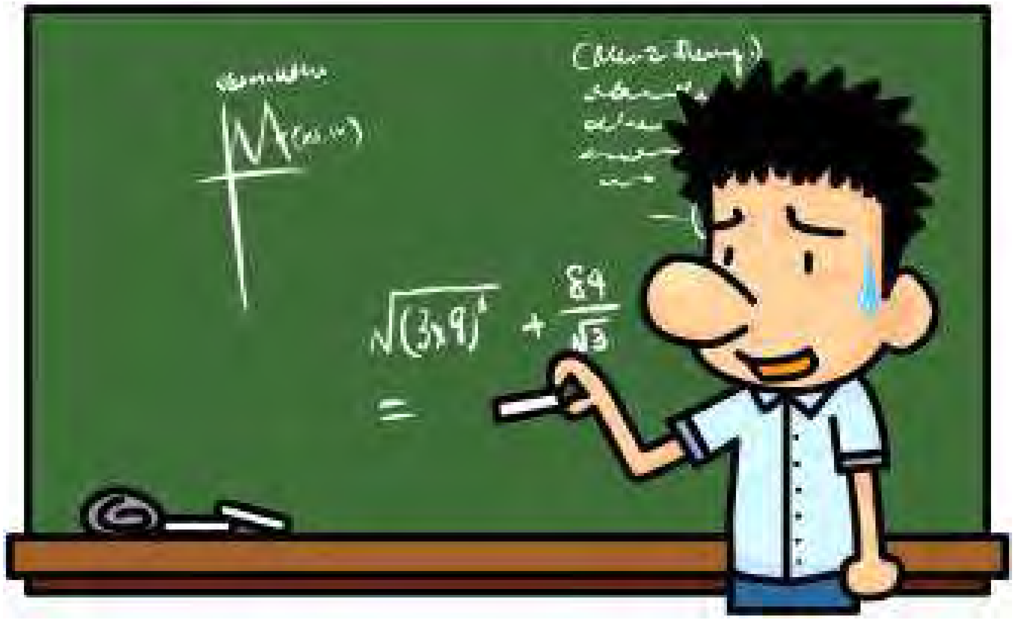
Μαθηματικά Κατεύθυνσης
Γ΄ Λυκείου



Λύσεις Επαναληπτικών Εσπερινών

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΚΑΡΑΦΕΡΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 6 ΙΟΥΛΙΟΥ 2001
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1^o

Α.α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 91

β. Α - 2, Β - 3, Γ - 6, Δ - 5.

Β.α. $z_1 = 5\overline{z_2} \Leftrightarrow k + 15i = 5(5 - \lambda i) \Leftrightarrow k + 15i = 25 - 5\lambda i \Leftrightarrow$

$k = 25$ και $15 = -5\lambda \Leftrightarrow$ **$k = 25$** και **$\lambda = -3$**

β. $z\bar{z} - (z - \bar{z}) = 5 + 2i \overset{z = x + yi}{\Rightarrow} x^2 + y^2 - 2yi = 5 + 2i \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 5 \\ -2y &= 2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 5 \\ y &= -1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x^2 &= 4 \\ y &= -1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x &= \pm 2 \\ y &= -1 \end{aligned}\right\}$$

άρα **$z = 2 - i$** ή **$z = -2 - i$**.

ΘΕΜΑ 2^o

α. $A(1, 0) \in C_f \Leftrightarrow f(1) = 0 \Leftrightarrow 1 - k + 1 = 0 \Leftrightarrow$ **$k = 2$**

β. Για $k = 17$ είναι $f(x) = x^2 - 17x + 1$ και $f'(x) = 2x - 17$

$f(0) = 1$ και $f'(0) = -17$

$(\varepsilon): y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \Leftrightarrow (\varepsilon): y - 1 = -17x \Leftrightarrow$

$(\varepsilon): y = -17x + 1$

ΘΕΜΑ 3^o

α. $z = \dfrac{2}{1 + i} = \dfrac{2(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \dfrac{2(1 - i)}{2} = \mathbf{1 - i}$

β. $\rho = |z| = |1 - i| = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu\varphi &= \frac{\alpha}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \eta\mu\varphi &= \frac{\beta}{\rho} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \text{άρα } \varphi = \frac{7\pi}{4}$$

$$z = \sqrt{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{4} + i\eta\mu\frac{7\pi}{4}\right)$$

γ. $|z - 2| = |1 - i - 2| = |-1 - i| = \sqrt{2}$

άρα **η εικόνα του z ανήκει στον κύκλο**
με κέντρο K (2 , 0) και ακτίνα $\sqrt{2}$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. $f'(x) = \left(\dfrac{1}{x^2 + 1}\right)' = \dfrac{-(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$

β. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow -2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
$f'(x)$	↗		↘

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty , 0]$ ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0 , +\infty)$.
Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(0) = 1$

γ. • $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

άρα **η ευθεία y = 0 (x΄x) είναι**
η οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο - ∞.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

άρα **η ευθεία y = 0 (x΄x) είναι**
η οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο + ∞.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 7 ΙΟΥΛΙΟΥ 2004
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1^o

Α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 91

Β. Σ, **Γ.** Λ, **Δ.** Σ, **Ε.** Σ, **ΣΤ.** Λ.

ΘΕΜΑ 2^o

α.i. $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4x^2+1}+2x-1}{x} \underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}+2}{1} = \mathbf{2}$$

ii. $$f'(x) = \left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)' = \frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}+2$$

$f'(0)=2$ και $f(0)=1$, άρα $\mathbf{f'(0)=2f(0)}$

β. $$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)$$

$$= \lim_{x\to -\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)}{\sqrt{4x^2+1}-2x}$$

$$= \lim_{x\to -\infty}\frac{\cancel{4x^2}+1-\cancel{4x^2}}{-x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-2x} = \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-2}\right) = \mathbf{0},$$

διότι $\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x} = 0$ και $\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-2} = -\frac{1}{4}$

ΘΕΜΑ 3ο

α. $A(1, -4) \in C_f \Leftrightarrow f(1) = -4 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha + \beta + 3}{-1} = -4 \Leftrightarrow \alpha + \beta + 3 = 4 \Leftrightarrow$

$\alpha = 1 - \beta$ (1)

$f(3) + 3f(1) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{9\alpha + 3\beta + 3}{1} + 3(-4) = 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$9(1 - \beta) + 3\beta + 3 - 12 = 0 \Leftrightarrow 9 - 9\beta + 3\beta - 9 = 0 \Leftrightarrow$ **$\beta = 0$**

Από την (1) για $\beta = 0$, έχουμε **$\alpha = 1$**

β. Για $\alpha = 1$ και $\beta = 0$ είναι $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x - 2}$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 + 3}{x - 2}\right)' = \frac{2x(x - 2) - (x^2 + 3)}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x - 3}{(x - 2)^2}$$

$f'(1) = -6$

$(\varepsilon): y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Leftrightarrow (\varepsilon): y + 4 = -6(x - 1) \Leftrightarrow$

$(\varepsilon): y + 4 = -6x + 6 \Leftrightarrow$ **$(\varepsilon): y = -6x + 2$**

γ. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{x^2 + 3}{x - 2}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 + 3}{x^2 - 2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1 = \lambda$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f\left[(x) - \lambda x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2 + 3}{x - 2} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x + 3}{x - 2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x} = 3 = \beta$

άρα **η ευθεία $y = x + 2$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο** $+\infty$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. $3\mathrm{Re}(z) + 4\mathrm{Im}(z) = 3 \Leftrightarrow$

$3(3 - k) + 4(2k + 1) = 3 \Leftrightarrow$

$9 - 3k + 8k + 4 = 3 \Leftrightarrow$

$5k = -10 \Leftrightarrow$ **$k = -2$**

β. $|z-1| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |(3-k) + 4(2k+1)i - 1| = \sqrt{5} \Leftrightarrow$

$|(2-k) + (2k+1)i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(2-k)^2 + (2k+1)^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow$

$(2-k)^2 + (2k+1)^2 = 5 \Leftrightarrow 4 - 4k + k^2 + 4k^2 + 4k + 1 = 5 \Leftrightarrow$

$5k^2 = 0 \Leftrightarrow k = 0$

Για $k = 0$ είναι $z = 3 + i$ και $\mathbf{|z| = \sqrt{10}}$

γ. $\begin{cases} x = 3 - k \\ y = 2k + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 - x \\ y = 2k + 1 \end{cases} \Rightarrow y = 2(3-x) + 1 \Leftrightarrow y = -2x + 7$

άρα **οι εικόνες του z ανήκουν στην ευθεία (ε) : $y = -2x + 7$**

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 8 ΙΟΥΛΙΟΥ 2005
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 251
Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 133
Β.1. Σ, **2.** Λ, **3.** Λ, **4.** Σ, **5.** Σ.

ΘΕΜΑ 2ο

α. $z = \dfrac{x + 3i}{2 - i} = \dfrac{(x + 3i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \dfrac{2x + xi + 6i - 3}{5} = \dfrac{2x - 3}{5} + \dfrac{x + 6}{5}i$

$z \in I \Leftrightarrow Re(z) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x - 3}{5} = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x = \dfrac{3}{2}}$

β. Για $x = -6$: $z = \dfrac{-6 + 3i}{2 - i} = \dfrac{-3(2 - i)}{2 - i} = \mathbf{-3 \in IR}$

γ. Για $x = 4$: $|z| = \left|\dfrac{4 + 3i}{2 - i}\right| = \dfrac{|4 + 3i|}{|2 - i|} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{\mathbf{5}}$

ΘΕΜΑ 3ο

α. Η f είναι συνεχής στα $(-\infty , 1)$ και $(1 , +\infty)$ ως πολυωνυμική.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(-x^3 + 1\right) = 0, \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^4 - 1\right) = 0 \\ \bullet\ f(1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{η f συνεχής στο } x_0 = 1$$

Άρα **η f είναι συνεχής στο IR.**

β. • $x < 1$: $f'(x) = (-x^3 + 1)' = -3x^2$
• $x > 1$: $f'(x) = (x^4 - 1)' = 4x^3$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-x^3+1}{x-1} \underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-3x^2}{1} = -3 \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^4-1}{x-1} \underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{4x^3}{1} = 4\end{array}\right\}\Rightarrow$$

η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$

Άρα $f'(x) = \begin{cases} -3x^2, & x < 1 \\ 4x^3, & x > 1 \end{cases}$

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
f΄(x)	− ‖ +
f (x)	↘ ↗

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (-∞ , 1], ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο [1 , +∞).

γ. Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, άρα **δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ. Rolle στο διάστημα [-1 , 2].**

ΘΕΜΑ 4^o

α. $f'(x) = \left(\dfrac{\kappa x - x^2}{4}\right)' = \dfrac{\kappa}{4}(x)' - \dfrac{1}{4}(x^2)' = \dfrac{\kappa}{4} - \dfrac{1}{2}x$

$f'(0) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\kappa}{4} = 1 \Leftrightarrow$ **$\kappa = 4$**

β. Για $\kappa = 4$ είναι $f(x) = \dfrac{4x - x^2}{4}$ και $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{2}x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{1}{2}x = 0 \Leftrightarrow x = 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για x = 2 την τιμή

$$f(2) = \frac{8-4}{4} = \mathbf{1}$$

γ. Είναι Α (2 , 1) και Β (4 , 0)

$$\lambda_{AB} = \frac{0-1}{4-2} = -\frac{1}{2}$$

$$f'(\xi) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\xi = -\frac{1}{2} \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} 2 - \xi = -1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\xi = 3}$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 4 ΙΟΥΛΙΟΥ 2007

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. **1.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 224
2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 149

Β. **1.** ΛΑΘΟΣ
2. ΣΩΣΤΟ
3. ΣΩΣΤΟ
4. ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ 2ο

α.i. $|z - 1 + i| = |iz| \Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow |z - (1 - i)| = |z|$

άρα ο γ.τ. των εικόνων του z είναι

η μεσοκάθετος του ΑΟ, με Α (1, - 1) και Ο (0 , 0).

Αν $z = x + yi$, τότε $|x + yi - 1 + i| = |x + yi| \Leftrightarrow$

$|(x - 1) + (y + 1)i| = |x + yi| \Leftrightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 1)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow$

$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow$

$-2x + 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow -x + y + 1 = 0 \Leftrightarrow$ $\mathbf{y = x - 1}$ (1)

ii. Από τη σχέση (1) έχουμε ότι $z = x + (x - 1)i$, άρα $M(x , x - 1)$.

$(MO) = \sqrt{5} \Leftrightarrow |z| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (x - 1)^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow$

$x^2 + (x - 1)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 + x^2 - 2x + 1 - 5 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 2$

- για $x = -1 \rightarrow$ **Μ (-1, - 2)**
- για $x = 2 \rightarrow$ **Μ (2 , 1)**

β. $Re(z) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} y = -1$ άρα $\mathbf{z = - i}$.

ΘΕΜΑ 3ο

α.
$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\left(-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{2}\right) = 0\\
&\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-5x+6}{2(x-1)} = 0\\
&f(2) = \frac{2^2-5\cdot 2+6}{2\cdot(2-1)} = 0
\end{aligned}\right\}$$ άρα **η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$**.

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{2}}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{-\frac{1}{8}(x-2)(x+2)}{x-2}\\
&\qquad = \lim_{x\to 2^-}\left[-\frac{1}{8}(x+2)\right] = -\frac{1}{2}\\
&\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{\frac{x^2-5x+6}{2(x-1)}}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x-3)}{2(x-1)(x-2)}\\
&\qquad = \lim_{x\to 2^+}\frac{x-3}{2(x-1)} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}\right\}$$ άρα **$f'(2) = -\frac{1}{2}$**.

β. Για $x < 2$ είναι $f'(x) = \left(-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{2}\right)' = -\frac{1}{4}x$.

$f(0) = \frac{1}{2}$ και $f'(0) = 0$, άρα η ζητούμενη εφαπτομένη είναι

$(\varepsilon): y - f(0) = f'(0)\cdot(x-0) \Leftrightarrow (\varepsilon): y - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow$ **$(\varepsilon): y = \frac{1}{2}$**.

γ. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2-5x+6}{2(x-1)}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-5x+6}{2x^2-2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} = \lambda$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2-5x+6}{2(x-1)}-\frac{1}{2}x\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{-4x+6}{2x-2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-4x}{2x} = -2 = \beta$$

Άρα **η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = \frac{1}{2}x - 2$**.

ΘΕΜΑ 4^{ο}

α. Παραγωγίζουμε κατά μέλη και έχουμε :

$$\left[f^3(x) + f(x)\right]' = (8x^3 - 12x^2 + 8x - 2)' \Leftrightarrow$$

$$3f^2(x) \cdot f'(x) + f'(x) = 24x^2 - 24x + 8 \Leftrightarrow$$

$$[3f^2(x) + 1] \cdot f'(x) = 8(3x^2 - 3x + 1) \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{8(3x^2 - 3x + 1)}{3f^2(x) + 1} > 0,$$

διότι $3f^2(x) + 1 > 0$ και $3x^2 - 3x + 1 > 0$ αφού $\Delta = -3 < 0$.

Άρα η f είναι γν. αύξουσα στο IR, άρα **η f είναι "1-1"**.

β. Η f είναι γν. αύξουσα στο $(0 , 1)$, άρα

η $f(x) = 0$ έχει μια το πολύ ρίζα στο $(0 , 1)$. **(1)**

- η f είναι συνεχής στο [0 , 1] ως παραγωγίσιμη
- $f(0) \cdot f(1) < 0$

- Για $x = 0$: $f^3(0) + f(0) = -2 \Leftrightarrow$

  $f(0) \cdot \left[f^2(0) + 1\right] = -2 \Leftrightarrow f(0) = \dfrac{-2}{f^2(0) + 1} < 0$
- Για $x = 1$: $f^3(1) + f(1) = 2 \Leftrightarrow$

  $f(1) \cdot \left[f^2(1) + 1\right] = 2 \Leftrightarrow f(1) = \dfrac{2}{f^2(1) + 1} > 0$

Επομένως από Θ. Bolzano,

η $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0 , 1)$. **(2)**

Από (1) και (2), **η $f(x) = 0$ έχει μια μόνο ρίζα στο $(0 , 1)$**.

γ. $f(g(x) - 3x) = f(x^2 + 2) \overset{f\ "1-1"}{\Leftrightarrow} g(x) - 3x = x^2 + 2 \Leftrightarrow$

$g(x) = x^2 + 3x + 2$

Είναι $g'(x) = 2x + 3$ και $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$

x	$-\infty$	$-3/2$	$+\infty$
$g'(x) = 2x + 3$	-	0	+
$g(x)$	↘		↗

Η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $\mathbf{x_0 = -\frac{3}{2}}$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 8 ΙΟΥΛΙΟΥ 2010
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 194

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 149

Α3. α. Σωστό, **β.** Σωστό, **γ.** Σωστό, **δ.** Λάθος, **ε.** Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

Β1. • η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$
• $f(\alpha) = 5\beta > 0$ και $f(\beta) = 5\alpha < 0$
από Θ. Bolzano υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα (α, β).

Β2. Είναι $\lambda_\varepsilon = \dfrac{1}{5}$, άρα για να είναι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ κάθετη στην ευθεία (ε), αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi) = -5$.

1η λύση

• η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$
• η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β)
από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{5\alpha - 5\beta}{\beta - \alpha} = \frac{-5(\beta - \alpha)}{\beta - \alpha} = -5$$

2η λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση h, με $h(x) = f(x) + 5x$.
• η h είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, ως άθροισμα συνεχών
• η h είναι παραγωγίσιμη στο (α, β), με $h'(x) = f'(x) + 5$
• $h(\alpha) = f(\alpha) + 5\alpha = 5\alpha + 5\beta$
$h(\beta) = f(\beta) + 5\beta = 5\alpha + 5\beta$
από Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε
$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) + 5 = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = -5$.

Β3. ***1η λύση***

- η f είναι συνεχής στο [α , β]
- $f(\beta) = 5\alpha < \frac{5}{2}(\alpha + \beta) < 5\beta = f(\alpha)$, διότι $\alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} < \beta$

από Θ. ενδιαμέσων τιμών υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha , \beta)$, τέτοιο ώστε $f(\xi) = \frac{5}{2}(\alpha + \beta)$.

2η λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x) = f(x) - \frac{5}{2}(\alpha + \beta)$

- η g είναι συνεχής στο [α , β]
- $g(\alpha) = f(\alpha) - \frac{5}{2}(\alpha + \beta) = 5\beta - \frac{5}{2}(\alpha + \beta) = \frac{5}{2}(\beta - \alpha) > 0$

  $g(\beta) = f(\beta) - \frac{5}{2}(\alpha + \beta) = 5\alpha - \frac{5}{2}(\alpha + \beta) = \frac{5}{2}(\alpha - \beta) > 0$

από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha , \beta)$, τέτοιο ώστε

$g(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) - \frac{5}{2}(\alpha + \beta) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{5}{2}(\alpha + \beta)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $z_2 = \overline{z_1}$.

$z_1 z_2 = \frac{\gamma}{1} = \gamma$ και $z_1 z_2 = z_1 \overline{z_1} = |z_1|^2 = 5^2 = 25$, άρα $\boldsymbol{\gamma = 25}$.

Γ2. Η εξίσωση γίνεται : $z^2 - 6z + 25 = 0$

$\Delta = -64$ και $z_{1,2} = \frac{6 \pm i\sqrt{64}}{2} = 3 \pm 4i$

και επειδή $Im(z_1) > 0$ θα είναι $\boldsymbol{z_1 = 3 + 4i}$ και $\boldsymbol{z_2 = 3 - 4i}$.

Γ3. $|w - z_1| = |w - z_2| \overset{w = x + yi}{\Leftrightarrow} |x + yi - 3 - 4i| = |x + yi - 3 + 4i| \Leftrightarrow$

$\sqrt{(x - 3)^2 + (y - 4)^2} = \sqrt{(x - 3)^2 + (y + 4)^2} \Leftrightarrow$

$\cancel{(x - 3)^2} + (y - 4)^2 = \cancel{(x - 3)^2} + (y + 4)^2 \Leftrightarrow$

$y^2 - 8y + 16 = y^2 + 8y + 16 \Leftrightarrow -16y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{w \in IR}$

Γ4. $(z_1 - 2 - 3i)^8 + (z_2 - 4 + 5i)^8 = (3 + 4i - 2 - 3i)^8 + (3 - 4i - 4 + 5i)^8$

$= (1 + i)^8 + (-1 + i)^8$

$= \left[(1 + i)^2\right]^4 + \left[(-1 + i)^2\right]^4$

$= (2i)^4 + (-2i)^4 = 16 + 16 = \boldsymbol{32}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Πρέπει και αρκεί $9 - x^2 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 \leq 9 \;\Leftrightarrow\; |x| \leq 3 \;\Leftrightarrow\; -3 \leq x \leq 3$

Άρα $\mathbf{D_f = [-3\,,\,3]}$

Δ2. α. Για $x \in (-3\,,\,3)$ είναι :

$$f'(x) = (x+3)' \cdot \sqrt{9-x^2} + (x+3)\cdot\left(\sqrt{9-x^2}\right)'$$

$$= \sqrt{9-x^2} + (x+3)\,\frac{(9-x^2)'}{2\sqrt{9-x^2}} = \sqrt{9-x^2} + (x+3)\,\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$= \frac{9-x^2}{\sqrt{9-x^2}} + \frac{-x(x+3)}{\sqrt{9-x^2}} = \mathbf{\frac{-2x^2-3x+9}{\sqrt{9-x^2}}}$$

β. $$\lim_{x\to -3}\frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)} = \lim_{x\to -3}\frac{(x+3)\sqrt{9-x^2}}{x+3} = \lim_{x\to -3}\sqrt{9-x^2} = \mathbf{0}$$

άρα $\mathbf{f'(-3) = 0.}$

Δ3. $f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; -2x^2 - 3x + 9 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -3$ ή $x = \frac{3}{2}$

x	$-\infty$	-3		$\frac{3}{2}$		3	$+\infty$
$f'(x)$		0	+	0	-		
$f(x)$			↗		↘		
		τ. ελάχιστο		τ. μέγιστο		τ. ελάχιστο	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-3\,,\,\frac{3}{2}\right]$**, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο** $\left[\frac{3}{2}\,,\,3\right]$

Δ4. τοπικό ελάχιστο : $\mathbf{f(-3) = 0}$

τοπικό μέγιστο : $f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}+3\right)\sqrt{9-\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$

τοπικό ελάχιστο : $\mathbf{f(3) = 0}$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2011
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. **Σχολικό βιβλίο σελίδα 225**
Α2. **Σχολικό βιβλίο σελίδα 97**
Α3. α. **Λάθος,** **β.** **Σωστό,** **γ.** **Σωστό,** **δ.** **Σωστό,** **ε.** **Λάθος.**

ΘΕΜΑ Β

Β1. $|z - i| = 1 + \mathrm{Im}(z) \overset{z = x + yi}{\Leftrightarrow} |x + yi - i| = 1 + y \Leftrightarrow$

$\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} = 1 + y \overset{y > -1}{\Leftrightarrow} x^2 + (y - 1)^2 = (y + 1)^2 \Leftrightarrow$

$x^2 + \cancel{y^2} - 2y + \cancel{1} = \cancel{y^2} + 2y + \cancel{1} \Leftrightarrow x^2 = 4y \Leftrightarrow \mathbf{y = \frac{1}{4}x^2}$

Β2. $w(\overline{w} + 3i) = i(3\overline{w} + i) \Leftrightarrow w\overline{w} + 3wi = 3\overline{w}i - 1 \Leftrightarrow$

$|w|^2 + 3(w - \overline{w})i + 1 = 0 \Leftrightarrow \overset{z = x + yi}{\Leftrightarrow} x^2 + y^2 + 3 \cdot 2yi \cdot i + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 + y^2 - 6y + 9 = 8 \Leftrightarrow x^2 + (y - 3)^2 = 8$

άρα ο γ.τ. των εικόνων του z είναι

κύκλος με κέντρο $\mathbf{K(0,3)}$ και ακτίνα $\mathbf{\rho = 8 = 2\sqrt{2}}$

Β3. Αναζητούμε τα κοινά σημεία των δύο γεωμετρικών τόπων

$$\begin{cases} x^2 = 4y \ \ (1) \\ x^2 + y^2 - 6y + 1 = 0 \ \ (2) \end{cases}$$

$(2) \overset{(1)}{\Rightarrow} 4y + y^2 - 6y + 1 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1$

$(1) \overset{y=1}{\Rightarrow} x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Άρα **Α(2 , 1)** και **Β(-2 , 1)**.

Β4. Είναι $\Lambda(0, -1)$ και

$(ΚΑ) = (ΚΒ) = (ΛΑ) = (ΛΒ) = 2\sqrt{2} \rightarrow$ ΚΑΛΒ ρόμβος

$(ΑΒ) = (ΚΛ) = 4 \rightarrow$ ΚΑΛΒ ορθογώνιο

Άρα **το ΚΑΛΒ είναι τετράγωνο**.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $x'(t) = 16 \Leftrightarrow x'(t) = (16t)'$, $t \geq 0$

Από συνέπειες Θ.Μ.Τ. $x(t) = 16t + c$, $t \geq 0$

Για $x = 0$ είναι $x(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0$, άρα $\mathbf{x(t) = 16t, t \geq 0}$

Γ2. **Παρατήρηση : Έπρεπε να εξηγηθεί γιατί ο παρατηρητής χάνει την οπτική επαφή με το κινητό στο Α.**

Έστω $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, με $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$

(ε) : η εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το Π (0 , 1).

$$(\varepsilon) : y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0) \Leftrightarrow (\varepsilon) : y - \sqrt{x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}\cdot(x - x_0)$$

$$\Pi \in C_f \Leftrightarrow 1 - \sqrt{x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}\cdot(-x_0) \Leftrightarrow 2\sqrt{x_0} - 2x_0 = -x_0 \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{x_0} = x_0 \Leftrightarrow 4x_0 = x_0^{\,2} \Leftrightarrow \cancel{x_0 = 0} \text{ ή } x_0 = 4$$

Για $x_0 = 4 \Rightarrow y_0 = 2 \rightarrow$ **Α (4 , 2)**

$$x(t_0) = 4 \Leftrightarrow 16t_0 = 4 \Leftrightarrow t_0 = \frac{1}{4}\text{min ή } t_0 = 15\text{sec}$$

Επομένως **η οπτική επαφή διαρκεί 15 δευτερόλεπτα**

Γ3. $y(t) = \sqrt{x(t)}$, άρα $y'(t) = \left(\sqrt{x(t)}\right)' = \dfrac{x'(t)}{2\sqrt{x(t)}} = \dfrac{16}{2\sqrt{16t}} = \dfrac{2}{\sqrt{t}}$

$$y'(t_0) = 4 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{t_0}} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{t_0} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t_0 = \frac{1}{4}$$

Άρα **ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης είναι 4 m/min τη χρονική στιγμή** $\mathbf{t_0 = \frac{1}{4}min}$ **ή** $\mathbf{t_0 = 15sec}$.

Γ4. $M(x , y) \rightarrow M(x , \sqrt{x}) \rightarrow M(16t , 4\sqrt{t})$

$$d(t) = (\Pi M) = \sqrt{(16t - 0)^2 + (4\sqrt{t} - 1)^2} = \sqrt{256t^2 + 16t - 8\sqrt{t} + 1}$$

$$d'(t) = \left(\sqrt{256t^2 + 16t - 8\sqrt{t} + 1}\right)' = \frac{256t + 8 - \dfrac{2}{\sqrt{t}}}{\sqrt{256t^2 + 16t - 8\sqrt{t} + 1}}$$

Θεωρούμε συνάρτηση g, με $g(t) = 256t + 8 - \frac{2}{\sqrt{t}}, t > 0$

$g'(t) = 256 + \frac{1}{t\sqrt{t}} > 0$, άρα η g είναι γν.αύξουσα στο $(0, +\infty)$

1ος τρόπος

- Η g είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{64}, \frac{1}{4}\right]$ ως πράξεις συνεχών
- $g\left(\frac{1}{64}\right) = 4 + 8 - 16 = -4 < 0$
- $g\left(\frac{1}{4}\right) = 64 + 8 - 4 = 68 > 0$

Από Θ. Bolzano η g έχει μια τουλάχιστον ρίζα t_0 στο $\left(\frac{1}{64}, \frac{1}{4}\right) \subseteq \left(0, \frac{1}{4}\right)$ και επειδή g γνησίως αύξουσα η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

2ος τρόπος

- Η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta = \left(0, \frac{1}{4}\right]$
- $\lim_{t\to 0^+} g(t) = \lim_{t\to 0^+}\left(256t + 8 - \frac{2}{\sqrt{t}}\right) = -\infty$
- $g\left(\frac{1}{4}\right) = 64 + 8 - 4 = 68$

Άρα $g(\Delta) = (-\infty, 68]$.

Είναι $0 \in (-\infty, 68]$, άρα η g έχει μια τουλάχιστον ρίζα $t_0 \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ και επειδή g γνησίως αύξουσα η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

$$d'(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) > g(t_0) \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} x > t_0$$

x	0	t_0	$+\infty$
d΄(x)	-	0	+
d (x)	↘		↗

Η d είναι γν.φθίνουσα στο $(0, t_0]$ και γν.αύξουσα στο $[t_0, +\infty)$.

Η απόσταση d γίνεται ελάχιστη τη χρονική στιγμή $t_0 \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x) = \left(\dfrac{\alpha}{x^2} - \dfrac{1}{x-\beta}\right)' = -\dfrac{2\alpha}{x^3} + \dfrac{1}{(x-\beta)^2}$

$A\left(-2\,,\ \dfrac{5}{12}\right) \in C_f \Leftrightarrow f(-2) = \dfrac{5}{12} \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{4} + \dfrac{1}{\beta+2} = \dfrac{5}{12}$ **(1)**

$f'(-2) = \dfrac{5}{18} \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{4} + \dfrac{1}{(\beta+2)^2} = \dfrac{5}{18}$ **(2)**

Από (1) και (2) με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε :

$\dfrac{1}{(\beta+2)^2} - \dfrac{1}{\beta+2} = -\dfrac{5}{36}$

Θέτουμε όπου $\dfrac{1}{\beta+2} = \omega \rightarrow \omega^2 - \omega + \dfrac{5}{36} = 0$

$\Delta = \dfrac{4}{9}$ και ρίζες $\omega_1 = \dfrac{5}{6}$ και $\omega_2 = \dfrac{1}{6}$

- $\omega_1 = \dfrac{5}{6} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\beta+2} = \dfrac{5}{6} \Leftrightarrow \beta + 2 = \dfrac{6}{5} \Leftrightarrow \beta = -\dfrac{4}{5} \notin Z$
- $\omega_2 = \dfrac{1}{6} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\beta+2} = \dfrac{1}{6} \Leftrightarrow \beta + 2 = 6 \Leftrightarrow \boldsymbol{\beta = 4} \in Z$

$(1) \overset{\beta=4}{\Rightarrow} \dfrac{\alpha}{4} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{12} \overset{\cdot 12}{\Leftrightarrow} 3\alpha + 2 = 5 \Leftrightarrow 3\alpha = 3 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha = 1}$

Δ2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x-4},\ x \in IR - \{0\,,\ 4\}$

$f'(x) = -\dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{(x-4)^2},\ x \in IR - \{0\,,\ 4\}$

Για $x \neq 0$ και $x \neq 4$:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{1}{(x-4)^2} \Leftrightarrow x^3 = 2(x-4)^2 \Leftrightarrow$

$x^3 = 2(x^2 - 4x + 16) \Leftrightarrow$

$x^3 = 2x^2 - 8x + 32 \Leftrightarrow$

$x^3 - 2x^2 + 16x - 32 = 0 \Leftrightarrow$

$(x-2)(x^2 + 16) = 0 \Leftrightarrow$

$x = 2$

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	-	0	+	‖	+	
f		↗	‖	↘		↗	‖	↗	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty , 0)$, $[2 , 4)$ και $(4 , +\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0 , 2]$.

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο την τιμή $f(2) = \frac{3}{4}$.

Δ3. • $\Delta_1 = (-\infty , 0)$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_1

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-4}\right) = 0 \\ \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-4}\right) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow f(\Delta_1) = (0 , +\infty)$$

• $\Delta_2 = (0 , 2]$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_2

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-4}\right) = +\infty \\ \\ f(2) = \frac{3}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow f(\Delta_2) = \left[\frac{3}{4} , +\infty\right)$$

• $\Delta_3 = (2 , 4)$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_3

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \overset{f\ \text{συνεχής}}{=} f(2) = \frac{3}{4} \\ \\ \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^-}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-4}\right) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow f(\Delta_3) = \left(\frac{3}{4} , +\infty\right)$$

• $\Delta_4 = (4 , +\infty)$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_4

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-4}\right) = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-4}\right) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(\Delta_4) = (-\infty , 0)$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι :

$f(\Delta) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) \cup f(\Delta_4) =$ **$(-\infty , 0) \cup (0 , +\infty)$** ή **IR***.

Δ4. Εξίσωση : $\kappa x^3 + (1 - 4\kappa)x^2 - x + 4 = 0$ (1).

- Η (1) για $x = 0$ δίνει $4 = 0 \rightarrow$ άτοπο
- Η (1) για $x = 4$ δίνει $16 = 0 \rightarrow$ άτοπο

Άρα για $x \neq 0$ και $x \neq 4$ η (1) γίνεται

$$\kappa x^3 + (1 - 4\kappa)x^2 - x + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\kappa x^3 + x^2 - 4\kappa x^2 - x + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\kappa x^3 - 4\kappa x^2 = x - 4 - x^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\kappa x^2(x - 4) = x - 4 - x^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\kappa x^2(x - 4)}{x^2(x - 4)} = \frac{x - 4}{x^2(x - 4)} - \frac{x^2}{x^2(x - 4)} \quad \Leftrightarrow$$

$$\kappa = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x - 4} \quad \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \kappa$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις

$\kappa < 0$	$\kappa \notin f(\Delta_1)$	$\kappa \notin f(\Delta_2)$	$\kappa \notin f(\Delta_3)$	$\kappa \in f(\Delta_4)$	1 ρίζα
$\kappa = 0$	$\kappa \notin f(\Delta_1)$	$\kappa \notin f(\Delta_2)$	$\kappa \notin f(\Delta_3)$	$\kappa \notin f(\Delta_4)$	0 ρίζες
$0 < \kappa < \frac{3}{4}$	$\kappa \in f(\Delta_1)$	$\kappa \notin f(\Delta_2)$	$\kappa \notin f(\Delta_3)$	$\kappa \notin f(\Delta_4)$	1 ρίζα
$\kappa = \frac{3}{4}$	$\kappa \in f(\Delta_1)$	$\kappa \in f(\Delta_2)$	$\kappa \notin f(\Delta_3)$	$\kappa \notin f(\Delta_4)$	2 ρίζες
$\kappa > \frac{3}{4}$	$\kappa \in f(\Delta_1)$	$\kappa \in f(\Delta_2)$	$\kappa \in f(\Delta_3)$	$\kappa \notin f(\Delta_4)$	3 ρίζες

Επομένως το πλήθος των ριζών της εξίσωσης (1) είναι

$$\mathbf{L} = \begin{cases} \mathbf{0}, \text{ αν } \kappa = 0 \\ \mathbf{1}, \text{ αν } \kappa \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{3}{4}\right) \\ \mathbf{2}, \text{ αν } \kappa = \frac{3}{4} \\ \mathbf{3}, \text{ αν } \kappa \in \left(\frac{3}{4}, +\infty\right) \end{cases}$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 14 ΙΟΥΝΙΟΥ 2012
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 98

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 141

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 246

Α4. α. Σωστό , **β.** Σωστό, **γ.** Λάθος, **δ.** Σωστό, **ε.** Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $w \in I \Leftrightarrow \bar{w} = -w \Leftrightarrow \overline{\frac{z-1}{z+1}} = -\frac{z-1}{z+1} \Leftrightarrow \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} = \frac{1-z}{z+1} \Leftrightarrow$

$(\bar{z}-1)(z+1) = (1-z)(\bar{z}+1) \Leftrightarrow z\bar{z} + \cancel{\bar{z}} - \cancel{z} - 1 = \cancel{\bar{z}} - 1 - z\bar{z} - \cancel{z} \Leftrightarrow$

$2z\bar{z} = 2 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$

Β2. $|z|^2 = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$ (1)

$$\left(z - \frac{1}{z}\right)^4 \overset{(1)}{=} (z-\bar{z})^4 = \left[2\text{Im}(z)i\right]^4 = 2^4 \cdot \text{Im}^4(z) \cdot i^4$$

$$= 16 \cdot \text{Im}^4(z) \cdot 1 = 16\text{Im}^4(z) \in IR$$

Β3. Ισχύουν : $\bar{z}_1 = \frac{1}{z_1}$ (2) και $\bar{z}_2 = \frac{1}{z_2}$ (3)

$$\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)(z_1 + z_2) \underset{(3)}{\overset{(2)}{=}} (\bar{z}_1 + \bar{z}_2)(z_1 + z_2) = |z_1 + z_2|^2$$

Είναι $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow |z_1 + z_2| \leq 2$

επομένως $|z_1 + z_2|^2 \leq 4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)(z_1 + z_2) \leq 4$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-}(x^3+\alpha) = 1+\alpha \\ &\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}(x-\beta)^2 = (1-\beta)^2 \\ &f(1) = (1-\beta)^2 \end{aligned}\right\} \underset{\text{στο } x_0=1}{\overset{f \text{ συνεχής}}{\Rightarrow}} (1-\beta)^2 = 1+\alpha \quad (1)$$

$$(1) \overset{(1-\beta)^2\geq 0}{\Rightarrow} 1+\alpha \geq 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha \geq -1}$$

$$(1) \Rightarrow \cancel{1} - 2\beta + \beta^2 = \cancel{1} + \alpha \Leftrightarrow \boldsymbol{\beta^2 - 2\beta = \alpha \quad (2)}$$

Γ2.

$$\left.\begin{aligned} &\bullet\ f \text{ συνεχής στο } [-1,1) \text{ ως πολυωνυμική} \\ &\bullet\ f \text{ συνεχής στο } x_0 = 1 \text{ από υπόθεση} \end{aligned}\right\} \Rightarrow f \text{ συνεχής στο } [-1,1]$$

$$\left.\begin{aligned} &\bullet\ f(-1) = \alpha - 1 \leq 0 \\ &\bullet\ f(1) = (1-\beta)^2 \geq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(-1)\cdot f(1) \leq 0$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις :

▷ Αν $f(-1)\cdot f(1) < 0$, τότε από Θ. Bolzano η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(-1,1)$

▷ Αν $f(-1)\cdot f(1) = 0$, τότε $f(-1) = 0$ ή $f(1) = 0$

Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[-1,1]$

Γ3.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{(x^3+\alpha)-(1-\beta)^2}{x-1} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to1^-}\frac{x^3 \cancel{+\alpha} - 1 \cancel{-\alpha}}{x-1} \\ &= \lim_{x\to1^-}\frac{x^3-1}{x-1} \underset{DL'H}{=} \lim_{x\to1^-}\frac{3x^2}{1} = 3 \\ &\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{(x-\beta)^2-(1-\beta)^2}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{\cancel{(x-1)}(x-\beta+1-\beta)}{\cancel{x-1}} \\ &= \lim_{x\to1^+}(x-2\beta+1) = 2-2\beta \end{aligned}\right\} \underset{\text{στο } x_0=1}{\overset{f \text{ παρ/μη}}{\Rightarrow}}$$

$$3 = 2 - 2\beta \Leftrightarrow 2\beta = -1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\beta = -\frac{1}{2}}$$

$$(2) \overset{\beta=-\frac{1}{2}}{\Rightarrow} \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{4} + 1 = \alpha \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha = \frac{5}{4}}$$

Γ4. Για $\alpha = \frac{5}{4}$ και $\beta = -\frac{1}{2}$ έχουμε :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + \frac{5}{4}, & x < 1 \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2, & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{και} \quad f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x < 1 \\ 2x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$(\varepsilon): \ y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \ \Leftrightarrow \ (\varepsilon): \ y - \frac{9}{4} = 3 \cdot (x - 1) \ \Leftrightarrow$$

$$(\varepsilon): \ y - \frac{9}{4} = 3x - 3 \ \Leftrightarrow \ (\varepsilon): \ \mathbf{y = 3x - \frac{3}{4}}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $g(x) = \frac{1}{1 - x^2} \cdot f(x)$, για κάθε $x \in (-1, 1)$ **(1)**

- $(1) \overset{x=0}{\Rightarrow} g(0) = \frac{1}{1 - 0^2} \cdot f(0) = f(0) = -3$

  άρα οι C_f, C_g έχουν κοινό σημείο το $A(0, -3)$

- Από την (1) προκύπτει ότι η g είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο παραγωγίσιμων, άρα παραγωγίζοντας την (1)

  έχουμε $g'(x) = \left[\frac{f(x)}{1 - x^2}\right]' = \frac{f'(x) \cdot (1 - x^2) - 2x \cdot f(x)}{(1 - x^2)^2}$

  και για $x = 0$ προκύπτει $g'(0) = f'(0)$

  άρα **οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο $A(0, -3)$**

Δ2. Θεωρούμε συνάρτηση φ, με $\varphi(x) = g(x) - \beta x + 3$, $x \in (-1, 1)$

Είναι $g(x) \leq \beta x - 3 \ \Leftrightarrow \ \varphi(x) \leq 0 = \varphi(0)$.

- Η φ παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 0$
- Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ με $\varphi'(x) = g'(x) - \beta$
- Το $x_0 = 0$ είναι εσωτερικό σημείο του $(-1, 1)$

Από Θ. Fermat ισχύει ότι $\varphi'(0) = 0 \ \Leftrightarrow \ \mathbf{g'(0) = \beta}$

Η κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο Α $(0\ ,\ -3)$ είναι :

$(\varepsilon):\ y - g(0) = g'(0)\cdot(x - 0) \Leftrightarrow$

$(\varepsilon):\ y - (-3) = \beta x \Leftrightarrow$

$\mathbf{(\varepsilon):\ y = \beta x - 3}$

Δ3. Η f' είναι γνησίως αύξουσα,

άρα η εξίσωση $f'(x) = \beta$ έχει μια το πολύ ρίζα στο $(-1\ ,\ 1)$

Όμως $f'(0) = g'(0) = \beta$,

άρα **η εξίσωση $\mathbf{f'(x) = \beta}$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbf{(-1, 1)}$ το $\mathbf{0}$.**

Δ4. Η f' είναι γνησίως αύξουσα,

άρα η f είναι κυρτή στο $(-1\ ,\ 1)$

Η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της (ε)

με εξαίρεση το σημείο επαφής Α $(0\ ,\ -3)$

άρα $\mathbf{f(x) \geq \beta x - 3}$, **για κάθε $\mathbf{x \in (-1, 1)}$.**

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 13 ΙΟΥΝΙΟΥ 2013
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 217
Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 260
Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 261
Α4. **α.** Σωστό, **β.** Λάθος, **γ.** Σωστό, **δ.** Σωστό, **ε.** Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η εξίσωση γίνεται : $2x^2 - |w-4-3i|\cdot x + 2|z| = 0$

- Πρέπει $\Delta = 0 \Leftrightarrow \left(-|w-4-3i|\right)^2 - 4\cdot 2\cdot 2|z| = 0 \Leftrightarrow$

  $|w-4-3i|^2 = 16|z| \Leftrightarrow |z| = \dfrac{|w-4-3i|^2}{16}$ **(1)**

- **1^ος^ τρόπος** Το 1 είναι διπλή ρίζα άρα $\dfrac{-\beta}{2\alpha} = \dfrac{|w-4-3i|}{4} = 1$

  $\Leftrightarrow |w-4-3i| = 4$ **(2)**

- **2^ος^ τρόπος** Το 1 είναι ρίζα της εξίσωσης άρα

  $2 - |w-4-3i| + 2|z| = 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 2 - |w-4-3i| + 2\dfrac{|w-4-3i|^2}{16} = 0$

  $\overset{\cdot 8}{\Leftrightarrow} 16 - 8|w-4-3i| + |w-4-3i|^2 = 0 \Leftrightarrow$

  $\left(|w-4-3i| - 4\right)^2 = 0 \Leftrightarrow |w-4-3i| - 4 = 0 \Leftrightarrow |w-4-3i| = 4$ **(2)**

  Επομένως ο γ.τ. των εικόνων του w είναι

  ο κύκλος C_2 με κέντρο $K(4,3)$ και ακτίνα $\rho_2 = 4$

- **(1)** $\overset{(2)}{\Rightarrow} |z| = \dfrac{4^2}{16} \Leftrightarrow |z| = 1$

  Επομένως ο γ.τ. των εικόνων του z είναι

  ο κύκλος C_1 με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho_1 = 1$

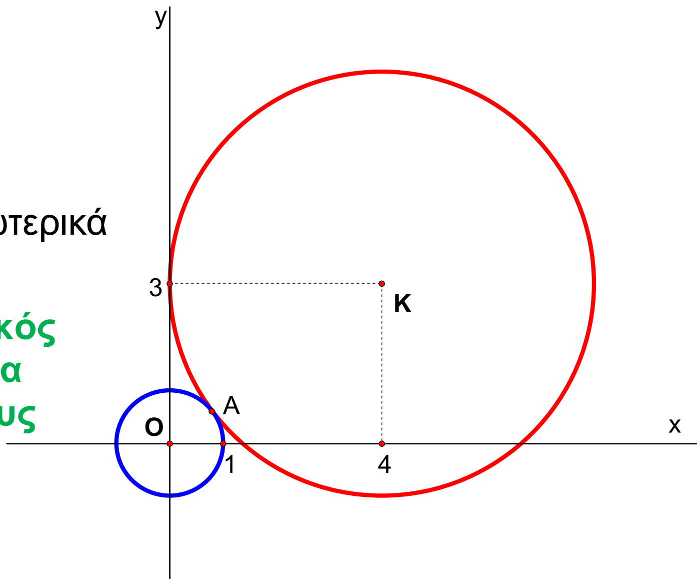
B2. $(OK) = \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2}$

$= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

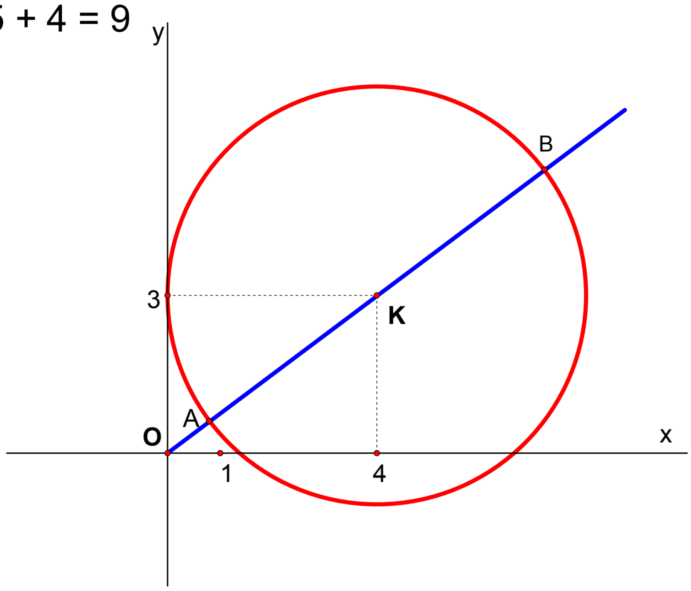
Είναι $(OK) = \rho_1 + \rho_2$,

άρα οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά σε ένα σημείο A (σχήμα)

Επομένως **υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός, η εικόνα του οποίου ανήκει και στους δύο παραπάνω γεωμετρικούς τόπους.**



B3. $|w|_{max} = (OB) = (OK) + \rho_2 = 5 + 4 = 9$



$|z - w| \le |z| + |-w| \Leftrightarrow$

$|z - w| \le 1 + |w| \Leftrightarrow$

$|z - w| \le 1 + |w|_{max} \Leftrightarrow$

$|z - w| \le 1 + 9 \Leftrightarrow$

$\mathbf{|z - w| \le 10}$

$|z + w| \le |z| + |w| \Leftrightarrow$

$|z + w| \le 1 + |w| \Leftrightarrow$

$|z + w| \le 1 + |w|_{max} \Leftrightarrow$

$|z + w| \le 1 + 9 \Leftrightarrow$

$\mathbf{|z + w| \le 10}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x \in IR$ είναι : $2xf(x) + x^2[f'(x) - 3] = -f'(x) \Leftrightarrow$

$$\left(x^2\right)' f(x) + x^2 f'(x) - 3x^2 + f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[x^2 f(x) - x^3 + f(x)\right]' = 0$$

από συνέπειες Θ.Μ.Τ. είναι $x^2 f(x) - x^3 + f(x) = c$

Για $x = 1$ έχω : $f(1) - 1 + f(1) = c \Leftrightarrow c = 0$

Επομένως για κάθε $x \in IR$ είναι :

$$x^2 f(x) - x^3 + f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 f(x) + f(x) = x^3 \Leftrightarrow$$

$$(x^2 + 1)f(x) = x^3 \Leftrightarrow \mathbf{f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}}$$

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{x^2+1}\right)' = \frac{3x^2 \cdot (x^2+1) - (x^3) \cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2 \cdot (x^2+3)}{(x^2+1)^2} \geq 0$$

και το "=" ισχύει μόνο για $x = 0$ **ΚΕΛΑΦΑΣ**

άρα **η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR**

Γ2. Η f είναι συνεχής στο IR, άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^3+x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^3} = 1 = \lambda$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - \lambda x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} = 0 = \beta$$

άρα **η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την $y = x$**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3} = 1 = \lambda$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - \lambda x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} = 0 = \beta$$

άρα **η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y = x$**

Γ3. $f\left(5(x^2+1)^3-8\right) \le f\left(8(x^2+1)^2\right) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}$

$5(x^2+1)^3-8 \le 8(x^2+1)^2 \Leftrightarrow$

$5(x^2+1)^3 \le 8(x^2+1)^2+8 \Leftrightarrow$

$5(x^2+1)^3 \le 8\left[(x^2+1)^2+1\right] \Leftrightarrow$

$\dfrac{(x^2+1)^3}{(x^2+1)^2+1} \le \dfrac{8}{5} \Leftrightarrow$

$f\left(x^2+1\right) \le f\left(2\right) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}$

$x^2+1 \le 2 \Leftrightarrow x^2 \le 1 \Leftrightarrow$

$|x| \le 1 \Leftrightarrow$ $\mathbf{-1 \le x \le 1}$

Γ4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{f'(x)} = \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{x^4+3x^2}{\left(x^2+1\right)^2}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{x^4+3x^2}{x^4+2x^2+1}}$

$$= \lim_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{\dfrac{x^4}{x^4}+\dfrac{3x^2}{x^4}}{\dfrac{x^4}{x^4}+\dfrac{2x^2}{x^4}+\dfrac{1}{x^4}}} = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{1+\dfrac{3}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}}$$

$$= \sqrt{\dfrac{1+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x^2}}{1+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x^2}+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^4}}} = \sqrt{\dfrac{1+0}{1+0+0}} = 1$$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{f'(x)}-\kappa\right) = 5 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{f'(x)}-\kappa = 5 \Leftrightarrow$

$1-\kappa = 5 \Leftrightarrow$ $\mathbf{\kappa = -4}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\sqrt{x^2+1}\cdot f'(x) + \dfrac{x\cdot f(x)}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\sqrt{x^2+1}\cdot f'(x) + \left(\sqrt{x^2+1}\right)'\cdot f(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\left(f(x)\cdot\sqrt{x^2+1}\right)' = (x)' \overset{\text{συνέπειες ΘΜΤ}}{\Rightarrow}$$

$$f(x)\cdot\sqrt{x^2+1} = x + c$$

Για $x = 0$ είναι $f(0) = c = 0$

Άρα $f(x)\cdot\sqrt{x^2+1} = x \Leftrightarrow$ $\mathbf{f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}},\ x \in IR}$

Δ2. $$f'(x) = \frac{1\cdot\sqrt{x^2+1} - x\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1} - \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$$

$$= \frac{\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3} > 0$$

άρα **η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR**.

Δ3. $f(x^4+1) = f(3x^3+2x^2+3x) \overset{f\uparrow}{\underset{f\ "1-1"}{\Leftrightarrow}}$

$x^4 + 1 = 3x^3 + 2x^2 + 3x \Leftrightarrow$

$x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0$

Θεωρούμε συνάρτηση φ, με $\varphi(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 3x + 1$

- η φ είναι συνεχής στα $[0, 1]$ και $[1, 4]$ ως πολυωνυμική
- $\varphi(0) = 1 > 0$, $\varphi(1) = -6 < 0$ και $\varphi(4) = 21 > 0$

Από Θ. Bolzano υπάρχουν :

ένα τουλάχιστον $x_1 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $\varphi(x_1) = 0$

ένα τουλάχιστον $x_2 \in (1, 4)$, τέτοιο ώστε $\varphi(x_2) = 0$

Δ4. $\varphi'(x) = \left(x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 3x + 1\right)' = 4x^3 - 9x^2 - 4x - 3$

- η φ είναι παραγωγίσιμη στο $[x_1, x_2]$
- $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$ από Δ3

από Θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (0, 4)$,

τέτοιο ώστε $\varphi'(\xi) = 0$, $\Leftrightarrow$

άρα $4\xi^3 - 9\xi^2 - 4\xi - 3 = 0$

$4\xi^3 - 9\xi^2 = 4\xi + 3$

Επομένως **η εξίσωση $4x^3 - 9x^2 = 4x + 3$**
έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 4)$.

Γενικό Λύκειο Νεστορίου
Σχολικό έτος 2013-2014
Βοηθητικό Υλικό της Γ΄ Λυκείου