Μαθηματικά Κατεύθυνσης
Γ΄ Λυκείου

Λύσεις Θεμάτων Απολυτήριων Εξετάσεων

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΚΑΡΑΦΕΡΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 30 ΜΑΪΟΥ 2000

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1^o

Α.α. Σχολικό βιβλίο (τεχνολογικής) σελίδα 62
β. Σχολικό βιβλίο (τεχνολογικής) σελίδα 67
γ. Σχολικό βιβλίο (τεχνολογικής) σελίδα 68

Β.1. $T_1 \rightarrow 3$, $T_2 \rightarrow 2$.

Β.2.α. $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ και $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$A = A_1 \cdot A_2 - A_2 \cdot A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0,$$

άρα ο μετασχηματισμός T είναι κανονικός

β. $$\begin{cases} x' = -2y \\ y' = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x' \quad (1) \\ x = -\frac{1}{2}y' \quad (2) \end{cases}$$

$$(\varepsilon) : 2x - y + 5 = 0 \overset{(1)}{\underset{(2)}{\rightarrow}} 2\left(-\frac{1}{2}y'\right) - \left(-\frac{1}{2}x'\right) + 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-y' + \frac{1}{2}x' + 5 = 0 \Leftrightarrow x' - 2y' + 10 = 0$$

Άρα η ευθεία $(\varepsilon') : x - 2y + 10 = 0$ είναι η εικόνα της (ε) ως προς το μετασχηματισμό T

ΘΕΜΑ 2^o

Α. α. $$z = \frac{5 + i}{2 + 3i} = \frac{(5 + i)(2 - 3i)}{(2 + 3i)(2 - 3i)} = \frac{10 - 15i + 2i + 3}{4 + 9} = \frac{13 - 13i}{13} = 1 - i.$$

β. $\rho = |z| = |1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu\varphi &= \frac{\alpha}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \eta\mu\varphi &= \frac{\beta}{\rho} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{4}$$

$$z = \sqrt{2}\left[\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

γ. Σωστό το β → Σχολικό βιβλίο (τεχνολογικής) σελίδα 104

δ. $z^4 = (1 - i)^4 = ((1 - i)^2)^2 = (-2i)^2 = -4 \rightarrow$ **Δ**

Β. $\left|\frac{z - 1}{z - i}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z - 1|}{|z - i|} = 1 \Leftrightarrow |z - 1| = |z - i|$.

Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι τα σημεία της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, με Α (1 , 0) και Β (0 , 1), η διχοτόμος της γωνίας xOy, με εξίσωση y = x.

ΘΕΜΑ 3^o

Α. $\lim\limits_{x\to5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to5^-} (x^2 - 8x + 16) = 1$

$$\lim_{x\to5^+} f(x) = \lim_{x\to5^+}\left[(\alpha^2+\beta^2)\ln(x - 5 + e) + 2(\alpha + 1)e^{5 - x}\right]$$
$$= \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha + 2$$

Β. Για να είναι η συνάρτηση f συνεχής στο $x_0 = 5$, πρέπει $\lim\limits_{x\to5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to5^+} f(x) = f(5)$ δηλαδή $\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha + 2 = 1 \Leftrightarrow$
$\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow (\alpha + 1)^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha + 1 = 0$ και $\beta = 0$
Άρα $\alpha = -1$ και $\beta = 0$.

Γ. Για $\alpha = -1$ και $\beta = 0$, είναι $f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 16, & 0 < x < 5 \\ \ln(x - 5 + e), & x \geq 5 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x - 5 + e) = +\infty$, διότι

$\lim\limits_{x\to+\infty} (x - 5 + e) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. $f'(t) = \dfrac{8}{t+1} - 2 = 8\,\dfrac{1}{t+1} - 2 = \left[8\ell n(t+1) - 2t\right]'$

άρα $f(t) = 8\ell n(t+1) - 2t + c$

Είναι $f(0) = 0$ άρα $c = 0$.

Επομένως $f(t) = 8\ell n(t+1) - 2t,\ t \geq 0$.

β. $f'(t) = \dfrac{8}{t+1} - 2 = \dfrac{6-2t}{t+1},\ t \geq 0$.

t	0	3	$+\infty$
$f'(t)$	$+$	0	$-$
$f(t)$	↗		↘

Η συγκέντρωσή του στον οργανισμό γίνεται μέγιστη όταν $t = 3$.

γ. $f(8) = 8\ell n(8+1) - 2\cdot 8 = 8\ell n9 - 16 = 8\ell n3^2 - 16$

$= 16\ell n3 - 16 = 16(\ell n3 - 1) > 0$, διότι $\ell n3 > 1$.

$f(10) = 8\ell n(10+1) - 2\cdot 10 = 8\ell n11 - 20$

$\cong 8\cdot 2{,}4 - 20 = 19{,}2 - 20 < 0$.

Άρα τη χρονική στιγμή $t = 8$, υπάρχει ακόμα επίδραση του φαρμάκου στον οργανισμό, ενώ πριν τη χρονική στιγμή $t = 10$, η επίδρασή του στον οργανισμό έχει μηδενιστεί.

Λύσεις Μαθηματικών
Θετικής & Τεχν.Κατ/νσης
Γ΄ Λυκείου 2000

Θέμα 1ο:

Α1. $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Α2. Αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0,θα ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Τότε για $x \neq x_0$ θα έχουμε:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$

οπότε:

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)\right] =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x\to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

Άρα:

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

Β1.
α) Η πρόταση είναι **λανθασμένη**, αφού η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot συν\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad έχει \quad f'(x = \begin{cases} 2xσxσ\frac{1}{x} + ημ\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ενώ δεν είναι συνεχής στο 0.

β) Γνωρίζουμε ότι, αν η f είναι παραγωγίσιμη σε σημείο x_0, θα είναι συνεχής σε αυτό, άρα, αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0, δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η πρόταση είναι **λάθος**.

γ) Επειδή υπάρχει η δεύτερη παράγωγος της f στο x_0, υπάρχει και η παράγωγος της f΄ στο x_0, άρα η f΄ είναι συνεχής στο x_0 και η πρόταση είναι **σωστή**.
Επομένως έχουμε: **α – Λ, β – Λ, γ – Σ**.

B.2.

α) $f'(x) = 9x^2$, άρα $f'(1) = 9$ και $f(1) = 3$.

Επομένως εξίσωση της εφαπτομένης είναι η:

$$y - 3 = 9(x - 1) \Leftrightarrow y = 9x - 6.$$

β) $f'(x) = 2συν2x$, άρα $f'(π/2) = 2συνπ = -2$ και $f(π/2) = 0$.

Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η:

$$y - 0 = -2(x-(π/2)) \Leftrightarrow y = -2x + π.$$

γ) Η συνάρτηση $f(x) = 3|x|$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, άρα δεν υπάρχει εφαπτομένη.

δ) $f'(x) = \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$ άρα $f'(4) = 1/4$ και $f(4) = 2$

Επομένως εξίσωση εφαπτομένης είναι η:

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4) \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x + 1$$

Συνεπώς έχουμε:

α $\leftrightarrow$ **3**
β $\leftrightarrow$ **1**
γ $\leftrightarrow$ **5**
δ $\leftrightarrow$ **2**.

Θέμα 2ο:

α) Είναι:

$$W_1 = f(9-5i) = \frac{2(9-5i)+i}{9+5i-2i} = \frac{18-10i+i}{9+3i} = \frac{18-9i}{9+3i} =$$

$$= \frac{6-3i}{3+i} = \frac{(6-3i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{18-6i-9i-3}{9+1} = \frac{15-15i}{10} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$$

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}} = \sqrt{2\cdot\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\alpha}{\rho} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\eta\mu\varphi = \frac{\beta}{\rho} = \frac{\frac{-3}{2}}{\frac{3}{2}\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Επειδή είναι:

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \kappa\alpha\iota \quad \eta\mu\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

προκύπτει ότι $\varphi = 7\pi/4$.

Άρα:

$$W_1 = \frac{3}{2}\sqrt{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{4} + i\eta\mu\frac{7\pi}{4}\right)$$

Επίσης:

$$W_2 = \left[\frac{\sqrt{2}}{3} f(9 - 5i)\right]^{2004} = \left\{\frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{2} \cdot \left[συν\left(-\frac{π}{4}\right) + iημ\left(-\frac{π}{4}\right)\right]\right\}^{2004} =$$

$$= συν\left(-\frac{2004π}{4}\right) + iημ\left(-\frac{2004π}{4}\right) =$$

= συν(-501π) + iημ(-501π) =

= συν(-2 • 250π - π) + iημ(-2 • 250π - π) =

= συν(-π) + iημ(-π) $\Leftrightarrow$ W_2 = συνπ + iημπ.

β) Έχουμε ότι:

$$|W_1| = \frac{3}{2}\sqrt{2} \quad και \quad |W_2| = 1,$$

άρα:

$$M = \frac{\sqrt{2}}{3}\begin{bmatrix} |W_1| & 0 \\ 0 & -|W_1| \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{3}\begin{bmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} \Leftrightarrow M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι ο πίνακας Μ είναι πίνακας του γραμμικού μετασχηματισμού: «συμμετρία ως προς τον άξονα xx΄”, άρα σωστό είναι το **Β**.

$$γ)\ \ K = \begin{bmatrix} συν\frac{π}{2} & -ημ\frac{π}{2} \\ ημ\frac{π}{2} & συν\frac{π}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Όμως:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

οπότε:

$$MX = K \Leftrightarrow X = M^{-1}K \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Θέμα 3ο**:**

α) Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο [0, 1], άρα θα είναι και συνεχής στο [0, 1]. Επίσης, επειδή είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$, θα είναι η f γνησίως αύξουσα στο (0, 1), άρα το σύνολο τιμών της θα είναι το

$$[f(0), f(1)] = [2, 4]$$

Όμως, $3 \in [2, 4]$ και, αφού $f \nearrow$, τότε η f τέμνεται από την ευθεία y = 3 σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$.

β) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο [0,1], άρα:

$$f(0) < f(1/5) < f(1)$$

$$f(0) < f(2/5) < f(1)$$

$$f(0) < f(3/5) < f(1)$$

$$f(0) < f(4/5) < f(1)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$4f(0) < f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right) < 4f(1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(0) < \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4} < f(1)$$

Όμως,η f είναι συνεχής στο [0, 1], οπότε υπάρχει $x_1 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε:

$$f(x_1) < \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$$

γ) Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0, 1] και παραγωγίσιμη στο (0, 1), προκύπτει από το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(x_2) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \Leftrightarrow f'(x_2) = 2$$

Επομένως η εφαπτομένη της C_f στο M είναι παράλληλη στην ευθεία ε: y = 2x + 2000, αφού $\lambda_\varepsilon = f'(x_2) = 2$.

Θέμα 4ο**:**

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με:

$$f'(t) = \frac{\alpha \cdot \left[1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2\right] - \alpha\, t \cdot 2 \frac{t}{\beta} \cdot \frac{1}{\beta}}{\left[1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2\right]^2} = \frac{\alpha\left[1 - \left(\frac{t}{\beta}\right)^2\right]}{\left[1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2\right]^2},\ t \geq 0$$

α) Αφού σε t = 6 ώρες επιτυγχάνεται η μέγιστη τιμή f(t) = 15 μονάδες, θα έχουμε:

$$\begin{cases} f(6) = 15 \\ f'(6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6\alpha}{1+\dfrac{36}{\beta^2}} = 15 \\ \alpha\left[1 - \dfrac{6^2}{\beta^2}\right] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\alpha = 15 + \dfrac{540}{\beta^2} \\ -\dfrac{36}{\beta^2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6\alpha = 15 + \dfrac{540}{36} \\ \beta = \pm 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\alpha = 30 \\ \beta = \pm 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = \pm 6 \end{cases}$$

Αφού β > 0, η τιμή β = -6 απορρίπτεται, άρα β = 6.

Επομένως:

$$f(t) = \frac{5t}{1+\dfrac{t^2}{36}} = \frac{180t}{36+t^2}, \quad t \geq 0$$

β) Αφού το φάρμακο έχει αποτελεσματική δράση όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, ψάχνουμε τις τιμές του t, έτσι ώστε: $f(t) \geq 12$, με $t \geq 0$. Τότε:

$$\frac{180t}{36+t^2} \geq 12 \Leftrightarrow 180t \geq 432 + 12t^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12t^2 - 180t + 432 \leq 0 \Leftrightarrow t^2 = - 15t + 36 \leq 0 \Leftrightarrow 3 \leq t \leq 12$$

Άρα το φάρμακο δρα αποτελεσματικά από 3 ώρες έως 12 ώρες.

Μαθηματικά
Θετικής & Τεχνολογικής Κατεύθυνσης
Γ' Λυκείου 2001

Ζήτημα 1ο

Απάντηση:

Α1. Θεωρία παράγραφος 2.3 σχολικού βιβλίου.

Α2. α. Σωστό
β. Λάθος
γ. Λάθος
δ. Σωστό
ε. Σωστό

Β1. 1. ζ
2. γ
3. α
4. δ
5. β

Β2. $|z| = 1$ άρα $|z|^2 = 1$

Ζήτημα 2ο

Απάντηση:

α. Αφού *f* συνεχής είναι: $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3) = 9\alpha$

β. Για x > 3 με f παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$f'(x) = \left(\frac{1-e^{x-3}}{x-3}\right)' = \frac{\left(1-e^{x-3}\right)'(x-3)-(1-e^{x-3})(x-3)'}{(x-3)^2} = \frac{-e^{x-3}(x-3)-(1-e^{x-3})}{(x-3)^2} =$$

$$= \frac{-xe^{x-3}+3e^{x-3}-1+e^{x-3}}{(x-3)^2} = \frac{-xe^{x-3}+4e^{x-3}-1}{(x-3)^2} = \frac{(4-x)\,e^{x-3}-1}{(x-3)^2}$$

Έτσι:

$$f'(4) = \frac{-1}{(4-3)^2} = -1$$

και αφού:

$$f(4) = \frac{1-e^{4-3}}{4-3} = \frac{1-e}{1} = 1-e$$

η εξίσωση της εφ/νης είναι:

$$y-(1-e) = -1(x-4) \qquad y = -x-e+5$$

γ. Επειδή για $x \in [1,2]$ είναι:

$$f(x) = -\frac{1}{9}x^2 < 0$$

Έχουμε: $$E = -\int_1^2\left(-\frac{1}{9}x^2\right)dx = -\left[-\frac{1}{9}\frac{x^3}{3}\right]_1^2 =$$

$$= +\frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{9}\left[\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right] =$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\frac{7}{3} = \frac{7}{27} \quad \text{τ.μονάδες.}$$

Παρατήρηση

Επειδή στην εκφώνηση του θέματος δεν διευκρινίζεται αν στο ερώτημα γ η τιμή του α πρέπει να ληφθεί ως -1/9, παρατηρούμε ότι:

(i) αν το α ληφθεί ως -1/9 τότε η τιμή του εμβαδού είναι:

$$E = \frac{7}{27} \quad \text{τ.μονάδες.}$$

(ii) αν όμως δεν υπονοείται κάτι τέτοιο τότε η λύση θα έχει ως εξής:

- αν $\alpha \geq 0$ τότε $f(x) \geq 0$ οπότε :

$$E = \int_1^2 ax^2 dx = \frac{7a}{3} \quad \text{τ.μονάδες.}$$

- αν $\alpha < 0$ τότε $f(x) < 0$, οπότε:

$$E = -\int_1^2 ax^2 dx = -\frac{7a}{3} \quad \text{τ.μονάδες.}$$

Ζήτημα 3ο

Απάντηση:

α) Αφού f παραγωγίσιμη στο $\Re$, παραγωγίζουμε την δοσμένη σχέση και έχουμε:

$$3f^2(x)f'(x) + 2\beta f(x)f'(x) + \gamma f'(x) = 3x^2 - 4x + 6, \quad x \in \Re$$

Δηλαδή:

$$f'(x)\cdot[3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma] = 3x^2 - 4x + 6, \quad x \in \Re \qquad (1)$$

Όμως:

$$3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma > 0 \quad \text{για κάθε } x \in \Re$$

αφού: $\alpha = 3 > 0$ και $\Delta = 4\beta^2 - 12\gamma = 4(\beta^2 - 3\gamma) < 0$

και $3x^2 - 4x + 6 > 0$ για κάθε $x \in \Re$

αφού: $\Delta = 16 - 12\cdot 6 < 0$ και $\alpha = 3 > 0$

Οπότε από την σχέση (1) παίρνουμε: $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Re$

Επομένως δεν υπάρχουν ακρότατα.

β) Επειδή είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Re$, προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

γ) Είναι:

$$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1, \ x \in \Re$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1, \ x \in [0,1]$$

Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ και

$$g(0) = -1 < 0$$
$$g(1) = 4 > 0$$

Άρα, από Θ.Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$: $g(x_0) = 0$ (2)

Για $x = x_0$ η δοσμένη σχέση γράφεται:

$$f^3(x_0) + \beta f^2(x_0) + \gamma f(x_0) = g(x_0)$$

οπότε από την σχέση (2) είναι:

$$f(x_0) \cdot [f^2(x_0) + \beta f(x_0) + \gamma] = 0 \qquad (3)$$

Όμως:

$$f^2(x_0) + \beta f(x_0) + \gamma > 0$$

Γιατί:

$$\Delta = \beta^2 - 4\gamma = (\beta^2 - 3\gamma) - \gamma < 0$$

Αυτό συμβαίνει γιατί:

$$\beta^2 < 3\gamma \quad \text{οπότε} \quad \gamma > 0, \quad \text{άρα} \quad -\gamma < 0$$

Άρα:

$$(\beta^2 - 3\gamma) - \gamma < 0$$

Επομένως, από την σχέση (3) προκύπτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$:

$$f(x_0) = 0$$

κι επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο (0,1), προκύπτει ότι η λύση x_0 είναι μοναδική στο (0,1).

Ζήτημα 4ο

Απάντηση:

α) Θέτουμε $x\,t = u$ και διαφορίζουμε ως προς t.
Έτσι έχουμε $d(x\,t) = du$ ή $x\,dt = du$

Ακόμα για

- $t = 0$ έχουμε $u = 0$ και
- $t = 1$ έχουμε $u = x$.

Άρα:

$$f(x) = 1 - 2x^2 \int_0^1 t f^2(xt)dt = 1 - 2\int_0^1 x^2 t f^2(xt)dt = 1 - 2\int_0^x u f^2(u)du$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\Re$, προκύπτει ότι η συνάρτηση $\int_0^x uf^2(u)du$

είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$. Άρα: $f'(x) = -2x f^2(x)$

β) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ με:

$$g'(x) = \left(\frac{1}{f(x)} - x^2\right)' = \frac{-f'(x)}{f^2(x)} - 2x \overset{(a)}{=}$$

$$= -\frac{-2xf^2(x)}{f^2(x)} - 2x = +2x - 2x = 0$$

για κάθε x $\in \Re$. Επομένως η g(x) σταθερή.

γ) (α' τρόπος)

Επειδή η συνάρτηση g είναι σταθερή δηλαδή g(x) = c για κάθε x $\in \Re$, θα είναι για x = 0: g(0) = c.

Ακόμα:

$$g(0) = \frac{1}{f(0)} - 0^2 = \frac{1}{f(0)}$$

οπότε:

$$\frac{1}{f(0)} = c$$

Από την (ii) για x = 0 έχουμε f(0) = 1.

Επομένως: c = 1.

Άρα: g(x) = 1 και λόγω της:

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} - x^2$$

προκύπτει:

$$1 = \frac{1}{f(x)} - x^2 \Leftrightarrow 1 + x^2 = \frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{1+x^2}\ .$$

γ) (β' τρόπος)

Από f ' (x) = -2x f(x) και επειδή f(x) $\neq$ 0 για κάθε x $\in \Re$ είναι:

$$-\frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x$$

ή

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = (x^2)'$$

Άρα:

$$\frac{1}{f(x)} = x^2 + c, \quad c \in \Re$$

Όμως:

$$f(0) = 1 - \int_0^0 uf^2(u)du = 1$$

Έτσι:

$$\frac{1}{f(0)} = 0^2 + c$$

1 = c.

Οπότε:

$$\frac{1}{f(x)} = x^2 + 1$$

Άρα:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

δ) Επομένως:

$$x \cdot f(x) \cdot \eta\mu 2x = x \cdot \frac{1}{1+x^2}\eta\mu 2x =$$

$$= \frac{x}{1+x^2}\eta\mu 2x, \quad x \in \Re$$

Έχουμε:

$$\frac{x}{1+x^2}\eta\mu 2x = \frac{x}{1+x^2}\left|\eta\mu 2x\right| \leq \frac{x}{1+x^2}$$

οπότε:

$$\frac{x}{1+x^2}\eta\mu 2x \leq \frac{x}{1+x^2}, \quad x \in \Re$$

ή

$$-\frac{x}{1+x^2} \leq \left(\frac{x}{1+x^2}\eta\mu 2x\right) \leq \frac{x}{1+x^2}, \quad x \in \Re$$

Όμως:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$$

οπότε:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1+x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$$

Σύμφωνα λοιπόν με το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι:

$$\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{x}{1+x^2}\eta\mu 2x\right) = 0$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
2002
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία. (απόδειξη σελ. 335 σχολ. βιβλίου).
Β.1. Θεωρία (σελίδες 224 - 225) σχολ. βιβλίου)
Β.2. α Λ
β Λ
γ Σ
δ Σ
ε Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α. f(3) + f(8) + f(13) + f(18) =
$= i^3 \bullet z + i^8 \bullet z + i^{13} \bullet z + i^{18} \bullet z =$
$= i^2 \bullet i \bullet z + (i^2)^4 \bullet z + (i^2)^6 \bullet i \bullet z + (i^2)^9 \bullet z =$
$= (-1) \bullet i \bullet z + z + (-1)^6 \bullet i \bullet z + (-1)^9 \bullet z =$
$= - i \bullet z + z + i \bullet z - z = 0$

β. $|z| = \rho$, $Arg(z) = \theta$.
Για $\nu = 13$ έχουμε:
$f(13) = i^{13} \bullet z = (i^2)^6 \bullet i \bullet z = (-1)^6 \bullet i \bullet z = i \bullet z$

Επειδή ο μιγαδικός z έχει μέτρο ρ και πρωτεύον όρισμα θ, θα έχει την ακόλουθη τριγωνομετρική μορφή:

$$z = |z| \,(\sigma\upsilon\nu\theta + i\ \eta\mu\theta) = \rho\,(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta) \qquad (1)$$

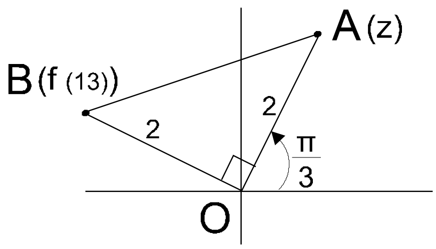
Η τριγωνομετρική μορφή του μιγαδικού αριθμού i είναι:

$$1\cdot\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}+i\,\eta\mu\frac{\pi}{2}\right) \qquad (2)$$

Επομένως ο μιγαδικός αριθμός $f(13) = i \bullet z$ γράφεται:

$$f(13)=\left[1\cdot\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}+i\,\eta\mu\frac{\pi}{2}\right)\right]\left[\rho\left(\sigma\upsilon\nu\theta+i\,\eta\mu\theta\right)\right]=$$
$$=1\cdot\rho\cdot\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+i\,\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right]=$$
$$=\rho\cdot\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+i\,\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right]$$

γ. Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα και για ρ=2 , $\theta=\frac{\pi}{3}$ έχουμε: z = $2(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} + i\eta\mu\frac{\pi}{3})$, f(13) =iz.Έτσι αν Α η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο, η εικόνα Β του f(13) = iz προκύπτει από στροφή της διανυσματικής ακτίνας Α του z κατά $\frac{\pi}{2}$.



Επειδή το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ορθογώνιο στο Ο με μήκη κάθετων πλευρών 2, θα έχει εμβαδόν $\frac{2^2}{2} = 2$ τετραγωνικές μονάδες.

ΘΕΜΑ 3ο

α.
Επειδή η f είναι συνάρτηση έχουμε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in R$ με $g(x_1) = g(x_2)$ έπεται
$f(g(x_1)) = f(g(x_2))$ ή
$(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2)$ (1)

Επειδή όμως η $f \circ g$ είναι 1-1 στο $\Re$ προκύπτει από την (1) ότι $x_1 = x_2$.
Έτσι δείξαμε ότι:
$\forall\, x_1, x_2 \in R$ με $g(x_1) = g(x_2)$ προκύπτει $x_1 = x_2$
Άρα η g είναι 1-1.

β.
Έχουμε:

$$g\left(f(x) + x^3 - x\right) = g\left(f(x) + 2x - 1\right)$$

Επειδή η g είναι 1-1 στο R, προκύπτει ότι:

$$f(x) + x^3 - x = f(x) + 2x - 1 \quad \text{ή}$$

$$x^3 - x = +2x - 1 \quad \text{ή}$$

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$h(x) = x^3 - 3x+1 \quad , \; x \in R$$

Η h είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με:

$$h'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x+1)$$

Η μονοτονία της h(x) φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			Τ.μεγ. $h(-1)=3$		Τ.ελαχ. $h(1)=-1$		

- Η h στο διάστημα [-2, -1] ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Bolzano, αφού:
  - Η h συνεχής στο [-2, -1] ως πολυωνυμική και
  - $h(-2)\cdot h(-1) = (-1)\cdot(+3) = -3 < 0$

  Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (-2, -1)$ τέτοιο ώστε $h(x_1) = 0$.
  Επειδή η h στο $(-\infty, -1]$ είναι γνησίως αύξουσα η παραπάνω ρίζα x_1 είναι μοναδική στο $(-\infty, -1]$.

- Έχουμε $h(0) = 1$ και $h(1) = -1$.
  Επειδή η h είναι συνεχής στο [0, 1] και
  $$h(0)\cdot h(1) = 1\cdot(-1) = -1 < 0$$
  προκύπτει ότι στο διάστημα (0, 1) η $h(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα x_2. Επειδή ακόμα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο [-1, 1], προκύπτει ότι η ρίζα αυτή είναι μοναδική στο [-1, 1].

- Έχουμε $h(1) = -1$ και $h(2) = 3$
  Επειδή η h είναι συνεχής στο [1, 2] και
  $$h(1)\cdot h(2) = (-1)\cdot 3 = -3 < 0$$
  προκύπτει ότι στο διάστημα (1, 2) η $h(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα x_3. Επειδή ακόμα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$, προκύπτει ότι η ρίζα αυτή είναι μοναδική στο
  $[1, +\infty)$.

  Επειδή:
  - $x_1 \in (-2, -1)$ είναι $x_1 < 0$
  - $x_2 \in (0, 1)$ είναι $x_2 > 0$
  - $x_3 \in (1, 2)$ είναι $x_3 > 0$

  Έτσι η $h(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα στο R.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Θεωρούμε τη συνάρτηση
$\varphi(x) = h(x) - g(x)$ $x \in [\alpha, \beta]$

Η φ(x) είναι συνεχής στο [α, β] ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Επειδή είναι $h(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ προκύπτει ότι

$\Phi(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

Σύμφωνα τώρα με το θεώρημα 3 σελίδα 332 σχολ. βιβλίου έχουμε:

$$\int_a^\beta \varphi(x)\,dx > 0 \quad ή \quad \int_a^\beta (h(x)-g(x))\,dx > 0 \quad ή \quad \int_a^\beta f(x)dx - \int_a^\beta g(x)dx > 0$$

Άρα $\int_a^\beta h(x)\,dx > \int_a^\beta g(x)\,dx$.

β.i.

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο R έχουμε:

$f'(x) - e^{-f(x)}(-f(x)' = 1$ ή

$f'(x) + f'(x)e^{-f(x)} = 1$ ή

$f'(x)[1 + e^{-f(x)}] = 1$ ή

$f'(x) = \dfrac{1}{1+e^{-f(x)}}$, αφού $1 + e^{-f(x)} \neq 0$ για κάθε $x \in R$

Άρα $f'(x) = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{e^{f(x)}}} = \dfrac{e^{f(x)}}{e^{f(x)}+1}$ με $x \in R$.

β.ii.

Επειδή είναι $f(0) = 0$ η ζητούμενη ανίσωση

$\dfrac{x}{2} < f(x) < x f'(x)$ για $x > 0$ γράφεται:

$\dfrac{x}{2} < f(x) - f(0) < x f'(x)$ ή $\dfrac{1}{2} < \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} < f'(x)$.

Η f στο [0,x] ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,x)$: $f'(\xi) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

Τότε όμως αρκεί να δειχθεί

$\dfrac{1}{2} < f'(\xi) < f'(x)$ ή

$\dfrac{e^{f(0)}}{1+e^{f(0)}} < f'(\xi) < f'(x)$ ή

$f'(0) < f'(\xi) < f'(x)$, με $0 < \xi < x$.

Έτσι αρκεί να δειχθεί ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, x]$.

Υπολογίζοντας την $f''(x)$ έχουμε:

$$f''(x) = \left(\frac{e^{f(x)}}{1+e^{f(x)}}\right)' = \frac{e^{f(x)}\cdot f'(x)\cdot(1+e^{f(x)}) - e^{f(x)}\cdot e^{f(x)}\cdot f'(x)}{\left(1+e^{f(x)}\right)^2} = \frac{e^{f(x)}\cdot f'(x)}{\left(1+e^{f(x)}\right)^2} =$$

$$= \frac{e^{f(x)}\cdot\dfrac{e^{f(x)}}{1+e^{f(x)}}}{\left(1+e^{f(x)}\right)^2} = \frac{e^{2f(x)}}{\left[1+e^{f(x)}\right]^3} > 0 \quad \text{για κάθε } x \in R.$$

Άρα f' γνησίως αύξουσα στο R άρα και στο $[0,x]$.

β.iii.

Από β.ii. είναι $f(x) > \frac{x}{2} > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη στο R άρα και στο [0,1], θα είναι $E = \int_0^1 f(x)\,dx$.

Οι συναρτήσεις $\frac{x}{2}$, $f(x)$, $xf'(x)$ είναι συνεχείς στο R, οπότε με βάση το ερώτημα α) από $\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x)$ είναι:

$$\int_0^1 \frac{x}{2}dx < \int_0^1 f(x)dx < \int_0^1 xf'(x)dx \Leftrightarrow \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1 < E < [xf(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} < E < f(1) - E.$$

Έτσι $\frac{1}{4} < E$ και $2E < f(1) \Leftrightarrow E < \frac{1}{2}f(1)$.

Οπότε τελικά $\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2}f(1)$.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2003
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

α. Θεωρία: Θεώρημα σελ. 217 σχολικού βιβλίου

β. Θεωρία: Η απάντηση βρίσκεται στη σελ. 247 του σχολικού βιβλίου

γ.

α-Σ

β-Σ

γ-Σ

δ-Λ

ε-Λ

ΘΕΜΑ 2ο

α. Είναι:

$$w = 3z - i\overline{z} + 4 = 3(\alpha + \beta i) - i(\alpha - \beta i) + 4 = 3\alpha + 3\beta i - \alpha i - \beta + 4 = (3\alpha - \beta + 4) + (3\beta - \alpha)i$$

Έτσι Re(w) = 3α - β + 4 και Im(w) = 3β - 4.

β. Οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο είναι τα σημεία Μ(3α-β+4, 3β-α), όπου α, β $\in \Re$.

Αφού ανήκουν σε ευθεία με εξίσωση y = x - 12 είναι:

3β - α = 3α - β + 4 - 12 $\Leftrightarrow$ 4β - 4α = -8 $\Leftrightarrow$ β - α = -2 $\Leftrightarrow$ β = α - 2.

Από την τελευταία συνάγεται ότι τα σημεία Ν(α,β) που είναι οι εικόνες του z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν στην ευθεία με εξίσωση y = x - 2.

γ. Από τις εικόνες των μιγαδικών αριθμών, των οποίων οι εικόνες κινούνται στην ευθεία (ε): y = x - 2, ελάχιστο μέτρο έχει εκείνος του οποίου η εικόνα Κ είναι τέτοια ώστε ΟΚ κάθετη στην (ε). Έτσι:

$$\lambda_{OK} = -1 \text{ και } OK: y = -x$$

Λύνοντας το σύστημα:

$$y = x - 2,\ y = -x$$

προκύπτει x = 1, y = -1. Δηλαδή το σημείο Κ έχει συντεταγμένες (1,-1). Άρα ο μιγαδικός με το ελάχιστο μέτρο από αυτούς που κινούνται στην ευθεία με εξίσωση y = x - 2 είναι ο z = 1 - i.

ΘΕΜΑ 3ο

α. Η συνάρτηση $f(x)=x^5+x^3+x$ είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη 2 φορές σε όλο το $\Re$ με:

$f'(x) = (x^5+x^3+x)' = 5x^4+3x^2+1$ και

$f''(x) = (5x^4+3x^2+1)' = 20x^3+6x$

- Επειδή είναι $f'(x) = 5x^4+3x^2+1 > 0$ για κάθε $x \in \Re$, προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\Re$.
- $f''(x)=0 \Leftrightarrow 20x^3+6x=0 \Leftrightarrow 2x(10x^2+3)=0 \Leftrightarrow x=0$ εφόσον $10x^2+3>0$ για κάθε $x \in \Re$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f	$\cap$		$\cup$

Επομένως η f είναι:

- κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και
- κυρτή στο διάστημα $[0, +\infty)$.
- Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $\Re$ θα είναι 1-1 σε αυτό και συνεπώς η f είναι αντιστρέψιμη στο $\Re$.

β. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$ (ερώτημα α). Προκειμένου να δείξουμε ότι $f(e^x) \geq f(1+x)$ για κάθε $x \in \Re$, αρκεί να δείξουμε ότι:

$e^x \geq 1+x$ για κάθε $x \in \Re$.

Πράγματι, θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^x-1-x$ στο $\Re$, η οποία είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό με $g'(x)=e^x-1$. Από την εξίσωση $g'(x)=0$ έχουμε $e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$.

Έχουμε:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	-	0	+
g	γν. φθίνουσα		γν. αύξουσα

ελάχ. $g(0) = 0$

Επομένως $g(x) \geq g(0)=0$ για κάθε $x \in \Re$ ή $e^x-1-x \geq 0$ για κάθε $x \in \Re$ και άρα:

$e^x \geq 1+x$ για κάθε $x \in \Re$

γ. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο (0,0) έχει εξίσωση
$y-f(0) = f'(0)(x-0)$ ή $y-0 = 1(x-0)$ ή $\boxed{y=x}$
που είναι η διχοτόμος της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων. Επειδή τώρα η f είναι αντιστρέψιμη (ερώτημα α) προκύπτει ότι υπάρχει η f^{-1} ή οποία (λόγω πρότασης σελ. 155 σχολ. βιβλ.) έχει $C_{f^{-1}}$ συμμετρική την C_f ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία $y=x$

δ. Για κάθε $x \in [0,3]$ είναι: $x \geq 0$ και επειδή η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό (*), θα είναι $f^{-1}(x) \geq f^{-1}(0) \Leftrightarrow f^{-1}(x) \geq 0$. (αφού $f^{-1}(0) = 0$ **)

Έτσι το εμβαδόν του ζητουμένου χωρίου ισούται με: $E = \int_0^3 f^{-1}(y)dy$.

Θέτουμε $f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow y=f(x)$. (1)

Διαφορίζοντας την (1) λαμβάνουμε: $dy=d[f(x)]=f'(x)dx$ και

$y\Big|_0^3 \to x\Big|_{f(x)=0}^{f(x)=3} \to x\Big|_{x^5+x^3+x=0}^{x^5+x^3+x=3} \to x\Big|_0^1$ (***), άρα

$$E=\int_0^1 x\cdot f'(x)dx=\int_0^1 x(x^5+x^3+x)'dx=\int_0^1(5x^5+3x^3+x)dx=5\int_0^1 x^5dx+3\int_0^1 x^3dx+\int_0^1 xdx=$$

$$=5\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1+3\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=5\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{25}{12}\text{τ.μ.}$$

<u>Αιτιολογήσεις για το ερώτημα δ του 3ου θέματος:</u>

(*) Η f^{-1} είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο $\Re$, σύμφωνα με την πρόταση που λέει ότι αν η f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη σε διάστημα Δ τότε υπάρχει η αντίστροφή της η οποία είναι επίσης συνεχής στο f(Δ) και διατηρεί το ίδιο είδος μονοτονίας με την f. (Η πρόταση αυτή, όμως, δεν υπάρχει στο σχολικό βιβλίο και αναφέρεται για λόγους μαθηματικής πληρότητας. Έτσι, η μη αναφορά σε αυτήν από κάποιο μαθητή δεν έχει βαθμολογικές απώλειες).

(**) Ισχύει ότι: $f^{-1}(0)=0$. Πράγματι για x=0 έχουμε: $f^{-1}(0)=y \Leftrightarrow f(f^{-1}(0))=f(y) \Leftrightarrow 0=f(y) \Leftrightarrow 0=y^5+y^3+y \Leftrightarrow y(y^4+y^2+1)=0 \Leftrightarrow y=0$.

(***)

- **Η εξίσωση $x^5+x^3+x=3$ έχει μοναδική λύση την x=1 γιατί η f(x) είναι 1-1 στο $\Re$ και επομένως κάθε οριζόντια ευθεία, οπότε και η y=3, τέμνει την C_f σε μοναδικό σημείο.**
- **Η εξίσωση $x^5+x^3+x=0$ έχει μοναδική λύση την x=0, γιατί $x(x^4+x^2+1)=0 \Leftrightarrow x=0$, αφού $x^4+x^2+1>0$ για κάθε $x \in \Re$.**

ΘΕΜΑ 4ο

α. Αφού η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα με άκρα γ, δ και $f(\gamma)\cdot f(\delta) < 0$, εφαρμόζεται το θεώρημα Bolzano από το οποίο συνάγεται ότι υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα x_0 που ανήκει στο ανοιχτό διάστημα με άκρα γ, δ ώστε $f(x_0) = 0$.

β. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\gamma < \delta$ και $f(\gamma) > 0$, $f(\delta) < 0$, οπότε $\alpha < \gamma < x_0 < \delta < \beta$.

i) Στο διάστημα [α, γ] είναι:
$f(\alpha) = 0$, $f(\gamma) > 0$, άρα $f(\alpha) < f(\gamma)$ και επειδή
είναι $\alpha < \gamma$ συνάγεται ότι:

$$\frac{f(\alpha)-f(\gamma)}{\alpha-\gamma}>0 \qquad (1)$$

Όμως από το θεώρημα μέσης τιμής (ΘΜΤ) για την f στο διάστημα [α,γ], υπάρχει $\kappa_1 \in (\alpha,\gamma)$ ώστε $f'(\kappa_1)=\dfrac{f(\alpha)-f(\gamma)}{\alpha-\gamma}$ και λόγω της (1) $f'(\kappa_1) > 0$.

ii) Εργαζόμενοι ομοίως, στο διάστημα $[\gamma,x_0]$ έχουμε:
$f(\gamma) > 0$, $f(x_0) = 0$ άρα $f(\gamma) > f(x_0)$ και επειδή είναι $\gamma < x_0$ συνάγεται:

$$\frac{f(\gamma)-f(x_0)}{\gamma-x_0}<0 \qquad (2)$$

Από το ΘΜΤ για την f στο διάστημα $[\gamma, x_0]$ έχουμε ότι υπάρχει $\kappa_2 \in (\gamma, x_0)$ ώστε

$$f'(\kappa_2) = \frac{f(\gamma) - f(x_0)}{\gamma - x_0}$$

και λόγω της (2) είναι $f'(\kappa_2) < 0$.

iii) Για το διάστημα $[x_0, \delta]$ όμοια έχουμε ότι υπάρχει $\kappa_3 \in (x_0, \delta)$ ώστε

$$\frac{f(\delta) - f(x_0)}{\delta - x_0} = f'(\kappa_3) < 0$$

iv) Για το διάστημα $[\delta, \beta]$ όμοια έχουμε ότι υπάρχει $\kappa_4 \in (\delta, \beta)$ ώστε

$$\frac{f(\beta) - f(\delta)}{\beta - \delta} = f'(\kappa_4) > 0$$

v) Είναι $f'(\kappa_1) > 0$, $f'(\kappa_2) < 0$ άρα $f'(\kappa_1) > f'(\kappa_2)$ και επειδή $\kappa_1 < \kappa_2$, είναι:

$$\frac{f'(\kappa_1) - f'(\kappa_2)}{\kappa_1 - \kappa_2} < 0$$

Όμως για την f΄ εφαρμόζεται το ΘΜΤ στο διάστημα $[\kappa_1, \kappa_2]$, οπότε υπάρχει $\xi_1 \in (\kappa_1, \kappa_2)$ ώστε

$$f''(\xi_1) = \frac{f'(\kappa_1) - f'(\kappa_2)}{\kappa_1 - \kappa_2} < 0$$

vi) Είναι $f'(\kappa_3) < 0$, $f'(\kappa_4) > 0$, άρα $f'(\kappa_3) < f'(\kappa_4)$ και επειδή $\kappa_3 < \kappa_4$ είναι

$$\frac{f'(\kappa_3) - f'(\kappa_4)}{\kappa_3 - \kappa_4} > 0$$

Όμως για την f΄ εφαρμόζεται το ΘΜΤ στο διάστημα $[\kappa_3, \kappa_4]$, οπότε υπάρχει $\xi_2 \in (\kappa_3, \kappa_4)$ ώστε

$$f''(\xi_2) = \frac{f'(\kappa_3) - f'(\kappa_4)}{\kappa_3 - \kappa_4} > 0$$

Δείξαμε έτσι ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f''(\xi_1) < 0$ και $f''(\xi_2) > 0$.

γ. Από το β ερώτημα με βάση το θεώρημα Bolzano για την f″ στο κλειστό διάστημα με άκρα ξ_1, ξ_2 προκύπτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο ξ_0 που ανήκει στο ανοικτό διάστημα με άκρα ξ_1, ξ_2 ώστε $f''(\xi_0) = 0$.

Το σημείο ξ_0 θα ήταν σημείο καμπής της συνάρτησης εφόσον η f″ άλλαζε πρόσημο εκατέρωθεν αυτού. Όμως κάτι τέτοιο δεν εξασφαλίζεται από τα δεδομένα του θέματος.

<u>β΄ τρόπος λύσης για το θέμα 4β:</u>

Από το θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής για την f που είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ εξασφαλίζεται ότι υπάρχουν δύο σημεία $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ με $x_1 < x_2$ ώστε $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Εφόσον η f παίρνει μία τουλάχιστον αρνητική τιμή και μία τουλάχιστον θετική (πράγμα που συνεπάγεται από την δοσμένη σχέση $f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$), η ελάχιστη τιμή $f(x_1)$ θα είναι αρνητική, ενώ η μέγιστη τιμή $f(x_2)$ θα είναι θετική.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) άρα και στα εσωτερικά σημεία x_1, x_2, που επειδή είναι θέσεις ακρότατων από το θ. Fermat συνάγεται ότι $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.

Στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f΄ δεν μπορεί να είναι η σταθερή μηδενική διότι τότε η f θα ήταν σταθερή και άρα $f(x_1) = f(x_2)$ ή $f_{max} = f_{min}$ – άτοπο διότι υπάρχουν τα δοσμένα γ,δ για τα οποία ισχύει από υπόθεση $f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$.

Συνεπώς υπάρχει σημείο $x_3 \in (x_1, x_2)$ ώστε $f'(x_3) > 0$ ή $f'(x_3) < 0$. Έστω πχ $f'(x_3) > 0$.

Τότε

- από ΘΜΤ για την f΄ στο $[x_1,x_3]$, υπάρχει $\xi_1 \in (x_1, x_3)$ ώστε:

$$f''(\xi_1) = \frac{f'(x_3) - f'(x_1)}{x_3 - x_1} = \frac{f'(x_3)}{x_3 - x_1} > 0$$

- από ΘΜΤ για την f΄ στο $[x_3, x_2]$, υπάρχει $\xi_2 \in (x_3, x_2)$ ώστε:

$$f''(\xi_2) = \frac{f'(x_2) - f'(x_3)}{x_2 - x_3} = \frac{-f'(x_3)}{x_2 - x_3} < 0$$

Αν υποθέταμε $f(x_3) < 0$ θα προέκυπτε $f''(\xi_1) < 0$, $f''(\xi_2) > 0$.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 2004
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ1ο

Α. Θεώρημα (Fermat) σελ. 260 σχολ. βιβλίου.

Β. Ορισμός σελ. 213 σχολ. βιβλίου.

Γ.

α	β	γ	δ	ε
Σ	*	Λ	Λ	Σ

(*) Η απάντηση στο ερώτημα 1 Γ β μπορεί να χαρακτηρισθεί Σωστό μόνο εφ' όσον η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε σύνολο της μορφής $(a,x_0)\cup(x_0,\beta)$. Όπως είναι διατυπωμένη, σωστό είναι μόνο το αντίστροφο. Δηλαδή αν $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=l \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$, αφού για την περίπτωση του ευθέως μπορεί να θεωρηθούν ως σύνολα ορισμού της f και τα μεμονωμένα σύνολα (a,x_0) ή (x_0,β). Επομένως από <u>αυστηρή μαθηματική άποψη</u>, η απάντηση είναι Λάθος.

ΘΕΜΑ1ο

α. Πρέπει x>0. Άρα $A_f=(0,+\infty)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων σ' αυτό με

$$f'(x)=(x^2\cdot\ln x)'=(x^2)'\cdot\ln x+x^2(\ln x)'=$$
$$=2x\cdot\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}=2x\cdot\ln x+x=x\cdot(2\ln x+1)$$

Έχουμε:
$f'(\mathrm{x})=0\Leftrightarrow\ x\cdot(2\ln x+1)=0$. Οπότε:
x=0 απορρίπτεται αφού $A_f=(0,+\infty)$

ή $2\ln x+1=0\Leftrightarrow\ln x=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}$.

x	0		$e^{-1/2}$		$+\infty$
f΄		-	0	+	
f		↘		↗	
			T. min.		

Επομένως η συνάρτηση f είναι:

- Γνησίως φθίνουσα στο $(0,e^{-\frac{1}{2}}]$, αφού είναι συνεχής στο $(0,e^{-\frac{1}{2}}]$ και ισχύει ότι f ΄(x) <0 στο $(0,e^{-\frac{1}{2}})$.

- Γνησίως αύξουσα στο $[e^{-\frac{1}{2}},+\infty)$, αφού είναι συνεχής στο $[e^{-\frac{1}{2}},+\infty)$ και ισχύει ότι f �What (x) >0 στο $(e^{-\frac{1}{2}},+\infty)$.

Άρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=e^{-\frac{1}{2}}$ το

$$f(e^{-\frac{1}{2}})=(e^{-\frac{1}{2}})^2\cdot\ln e^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}\cdot e^{-1}=-\frac{1}{2e}$$

β. Η f είναι και 2η φορά παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως γινόμενο δις παραγωγίσιμων συναρτήσεων σε αυτό μέ $f''(x)=(2x\cdot\ln x+x)'=2\ln x+2+1=2\ln x+3$.

Έχουμε:

$$f''(\mathrm{x})=0\Leftrightarrow 2\ln x+3=0\Leftrightarrow \ln x=-\frac{3}{2}\Leftrightarrow x=e^{-\frac{3}{2}}$$

x	0		$e^{-3/2}$		$+\infty$
f΄΄		-	0	+	
f		$\frown$	Σ.Κ	$\smile$	

$$f(e^{-\frac{3}{2}})=(e^{-\frac{3}{2}})^2\cdot\ln(e^{-\frac{3}{2}})=-\frac{3}{2}e^{-3}=-\frac{3}{2e^3}.$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι:

- κοίλη στο $(0,e^{-\frac{3}{2}}]$
- κυρτή στο $[e^{-\frac{3}{2}},+\infty)$.

Άρα παρουσιάζει σημείο καμπής το Μ $(e^{-\frac{3}{2}},-\frac{3}{2e^3})$.

γ. Είναι:

- $$\lim_{x\to o^+}f(x)=\lim_{x\to o^+}x^2\ln x=\lim_{x\to o^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}\overset{(De\,L'Hospital)}{=}$$

$$=\lim_{x\to o^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2x}{x^4}}=\lim_{x\to o^+}\left(-\frac{x^4}{2x^2}\right)=-\lim_{x\to o^+}\frac{x^2}{2}=0.$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2\cdot\ln x\right) = +\infty$.

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο διάστημα $(0,e^{-\frac{1}{2}}]$, είναι

$$f\left((0,e^{-\frac{1}{2}}]\right) = [-\frac{1}{2e},0).$$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $[e^{-\frac{1}{2}},+\infty)$ είναι

$$f\left([e^{-\frac{1}{2}},+\infty)\right) = [-\frac{1}{2e},+\infty).$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι $f\left((0,+\infty)\right) = [-\frac{1}{2e},0)\cup[-\frac{1}{2e},+\infty) = [-\frac{1}{2e},+\infty)$.

Έτσι, το τοπικό ακρότατο απο το ερώτημα α, μπορεί να χαρακτηριστει και ως ολικό ελάχιστο.

ΘΕΜΑ 3ο

α. Αφού f παραγωγίσιμη στο R, τότε και η g είναι παραγωγίσιμη στο R ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων σε αυτό. Άρα η g είναι και συνεχής στο R.

Έτσι η g είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{3}{2}\right]\subseteq \mathrm{R}$ και παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{3}{2}\right)\subseteq \mathrm{R}$ με

$g'(x) = e^x f(x) + e^x f'(x)$.

Επίσης είναι $\left.\begin{array}{l} g(0) = e^0 f(0) = 0 \\ g\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\frac{3}{2}} f\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \end{array}\right|$ άρα $g(0) = g\left(\frac{3}{2}\right)$.

Οπότε από θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(0,\frac{3}{2}\right)$ ώστε

$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^{\xi}f(\xi) + e^{\xi}f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^{\xi}\left(f(\xi)\right) + f'(\xi) = 0$.

Όμως $e^{\xi}\neq 0$ άρα προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(0,\frac{3}{2}\right)$ ώστε

$$f'(\xi) = -f(\xi).$$

β. Αφού $f(x) = 2x^2 - 3x$ είναι

$I(\alpha) = \int_\alpha^0 g(x)dx = \int_\alpha^0 e^x\left(2x^2-3x\right)dx = \int_\alpha^0 \left(e^x\right)'\left(2x^2-3x\right)dx =$

$= \left[e^x\left(2x^2-3x\right)\right]_\alpha^0 - \int_\alpha^0 e^x(2x^2-3x)'\,dx =$

$= \left[e^x\left(2x^2-3x\right)\right]_\alpha^0 - \int_\alpha^0 e^x(4x-3)dx = \left[e^x\left(2x^2-3x\right)\right]_\alpha^0 - \int_\alpha^0 \left(e^x\right)'(4x-3)dx =$

$= \left[e^x\left(2x^2-3x\right)\right]_\alpha^0 - \left[e^x\left(4x-3\right)\right]_\alpha^0 + \int_\alpha^0 e^x(4x-3)'\,dx =$

$$= \left[e^x\left(2x^2-3x\right)\right]_\alpha^0 - \left[e^x\left(4x-3\right)\right]_\alpha^0 + \int_\alpha^0 e^x \cdot 4dx =$$

$$= \left[e^x\left(2x^2-3x\right)\right]_\alpha^0 - \left[e^x\left(4x-3\right)\right]_\alpha^0 + 4\left[e^x\right]_\alpha^0 =$$

$$= -e^\alpha\left(2\alpha^2-3\alpha\right) - e^0(-3) + e^\alpha(4\alpha-3) + 4e^0 - 4e^\alpha =$$

$$= -e^\alpha\left(2\alpha^2-3\alpha\right) + 3 + e^\alpha(4\alpha-3) + 4 - 4e^\alpha = 7 + e^\alpha\left(4\alpha - 3 - 2\alpha^2 + 3\alpha - 4\right) =$$

$$= 7 + e^\alpha\left(-2\alpha^2 + 7\alpha - 7\right).$$

Άρα $I(\alpha) = 7 + e^\alpha\left(-2\alpha^2 + 7\alpha - 7\right), \alpha \in R$.

γ. Είναι για α < 0 , $I(\alpha) = 7 + e^\alpha \cdot a^2\left[-2 + \frac{7}{a} - \frac{7}{a^2}\right]$.

Έχουμε $\lim\limits_{\alpha\to-\infty}\left(e^\alpha \cdot \alpha^2\right) = \lim\limits_{\alpha\to-\infty}\frac{\alpha^2}{\frac{1}{e^\alpha}} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim\limits_{\alpha\to-\infty}\frac{2\alpha}{-e^{-\alpha}} \overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{=} \lim\limits_{\alpha\to-\infty}\frac{2\alpha}{e^{-\alpha}} = 0$

και $\lim\limits_{\alpha\to-\infty}\left[-2 + \frac{7}{\alpha} - \frac{7}{\alpha^2}\right] = -2$

Άρα $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} I(\alpha) = 7 + 0(-2) = 7$.

ΘΕΜΑ4ο

α. Η συνάρτηση g(x) γράφεται:

$$g(x) = |z| \cdot \int_1^{x^3} f(t)dt - 3 \cdot \left|z + \frac{1}{z}\right| \cdot (x-1).$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο R, η συνάρτηση φ(x)= $\int_1^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό.

Ακόμα, η συνάρτηση $h(x) = x^3$ είναι παραγωγίσιμη στο R ως πολυωνυμική.

Έτσι η συνάρτηση $F(x) = \int_1^{x^3} f(t)dt = \phi(h(x))$ είναι παραγωγίσιμη στο R ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων h και φ στο R, με

$$F'(x) = f(x^3) \cdot 3x^2 = 3x^2 \cdot f(x^3).$$

Ακόμα η συνάρτηση $l(x) = 3 \cdot \left|z + \frac{1}{z}\right| \cdot (x-1)$ είναι παραγωγίσιμη στο R με

$$l'(x) = 3 \cdot \left|z + \frac{1}{z}\right|.$$

Επομένως η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x) = 3x^2 \cdot |z| \cdot f(x^3) - 3 \cdot \left|z + \frac{1}{z}\right|.$$

β. Αφού $g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in R$ και g(1)=0, η δοσμένη ανισότητα γράφεται: $g(x)\geq g(1)$ για κάθε $x\in R$.

Έτσι όμως η g στο x_0=1 παρουσιάζει ελάχιστο και επειδή είναι παραγωγίσιμη σε αυτό συνεπάγεται απο θ. Fermat ότι g′(1)=0.

Όμως g′(1)=$3\cdot|z|\cdot f(1)-3\cdot\left|z+\frac{1}{z}\right|$ και επειδή f(1)=1 βρίσκουμε ότι g′(1)=$3\cdot|z|-3\cdot\left|z+\frac{1}{z}\right|$.

Αφού g′(1)=0, έπεται $|z|=\left|z+\frac{1}{z}\right|$.

γ. Επειδή είναι $|z|=\left|z+\frac{1}{z}\right|$, προκύπτει ότι $|z|^2=\left|z+\frac{1}{z}\right|^2 \Leftrightarrow z\cdot\bar{z}=(z+\frac{1}{z})\cdot(\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}})$

$\Leftrightarrow z\cdot\bar{z}=z\cdot\bar{z}+\frac{z}{\bar{z}}+\frac{\bar{z}}{z}+\frac{1}{z\cdot\bar{z}} \Leftrightarrow 0=z^2+\bar{z}^2+1 \Leftrightarrow z^2+\bar{z}^2=-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^2+\bar{z}^2=-1 \Leftrightarrow 2\mathrm{Re}(z^2)=-1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z^2)=-\frac{1}{2}$.

δ. Είναι $z^2=(a+\beta\cdot i)^2=\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta\cdot i$ οπότε $\mathrm{Re}(z^2)=a^2-\beta^2$ και λόγω του ερωτήματος γ έχουμε:

$$a^2-\beta^2=-\frac{1}{2}\ \acute{\eta}\ (\alpha-\beta)\cdot(\alpha+\beta)=-\frac{1}{2}.$$

Επειδή α>β προκύπτει ότι

$\alpha+\beta<0$, οπότε $\beta<-\alpha<0$.

Έτσι για την συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο R άρα και στο [2,3] είναι:

f(2)=α>0 και f(3)=β<0, οπότε f(2)·f(3) <0.

Συνεπώς, εφαρμόζοντας το θεώρημα Bolzano για την f στο διάστημα [2,3], συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $x_0\in(a,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
2005
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

Α.1. Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.
Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν:

- η f είναι συνεχής στο [α, β] και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = \eta$

Α.2. Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αν $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[f(x) - (\lambda x + \beta)\right] = 0$.

Β.
α → Λ,
β → Λ
γ → Σ
δ → Σ
ε → Λ
στ → Σ

ΘΕΜΑ 2

α. Από τη σχέση $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$ έχουμε:

$$|z_1| = 3 \Leftrightarrow |z_1|^2 = 9 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 = 9 \Leftrightarrow \bar{z}_1 = \frac{9}{z_1}.$$

β. Αρκεί (*) να δειχθεί ότι:

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}\right)} \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}.$$

Όμως $\bar{z}_1 = \dfrac{9}{z_1}$, $\bar{z}_2 = \dfrac{9}{z_2}$, $\bar{z}_3 = \dfrac{9}{z_3}$ αφού $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$.

Άρα $$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} = \frac{\frac{9}{z_1}}{\frac{9}{z_2}} + \frac{\frac{9}{z_2}}{\frac{9}{z_1}} = \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_1}{z_2}.$$

* Ισχύει ότι $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathrm{IR}$
γιατί αν $z = \alpha + \beta i$ τότε $\bar{z} = \alpha - \beta i$ άρα $z - \bar{z} = 2\beta i$ (1).

Έτσι $z = \bar{z} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \beta = 0 \Leftrightarrow z \in \mathrm{IR}$

γ. α' τρόπος

Είναι:

$$|z_1 + z_2 + z_3| = |\overline{z_1 + z_2 + z_3}| = |\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}| = \left|\frac{9}{z_1} + \frac{9}{z_2} + \frac{9}{z_3}\right| = 9\left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right| = 9\left|\frac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{z_1 z_2 z_3}\right| =$$

$$= 9\frac{|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|}{|z_1||z_2||z_3|} = 9\frac{|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|}{27} = \frac{1}{3}|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|.$$

β' τρόπος

Είναι:

$$|z_1 + z_2 + z_3|^2 = \frac{1}{9}|z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1|^2 \Leftrightarrow$$

$$(z_1 + z_2 + z_3)\overline{(z_1 + z_2 + z_3)} = \frac{1}{9}(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)\overline{(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)}$$

$$(z_1 + z_2 + z_3)(\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}) = \frac{1}{9}(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)(\overline{z_1 z_2} + \overline{z_2 z_3} + \overline{z_3 z_1})$$

$$(z_1 + z_2 + z_3)\left(\frac{9}{z_1} + \frac{9}{z_2} + \frac{9}{z_3}\right) = \frac{1}{9}(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)\left(\frac{81}{z_1 z_2} + \frac{81}{z_2 z_3} + \frac{81}{z_3 z_1}\right)$$

$$9(z_1 + z_2 + z_3)\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right) = \frac{81}{9}(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)\left(\frac{1}{z_1 z_2} + \frac{1}{z_2 z_3} + \frac{1}{z_3 z_1}\right)$$

$$\left(1 + \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_1} + 1 + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} + 1\right) = \left(1 + \frac{z_1 z_2}{z_2 z_3} + \frac{z_1 z_2}{z_3 z_1} + \frac{z_2 z_3}{z_1 z_2} + 1 + \frac{z_2 z_3}{z_3 z_1} + \frac{z_3 z_1}{z_1 z_2} + \frac{z_3 z_1}{z_2 z_3} + 1\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} = \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} + \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} + \frac{z_1}{z_2}.$$

Η τελευταία ισχύει προφανώς, άρα και η αρχική.

ΘΕΜΑ 3

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων σ' αυτό, με $f'(x) = (e^{\lambda x})' = e^{\lambda x} \cdot (\lambda x)' = \lambda e^{\lambda x}$, $x \in \mathbb{R}$.
Είναι $\lambda > 0$, $e^{\lambda x} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β. Έστω $(x_0,\ f(x_0))$ οι συντεταγμένες του σημείου Μ. Τότε η εξίσωση της εφαπτομένης στο Μ είναι
(ε): $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - e^{\lambda x_0} = \lambda e^{\lambda x_0}(x - x_0)$.
Για να διέρχεται η (ε) από την αρχή των αξόνων πρέπει και αρκεί:

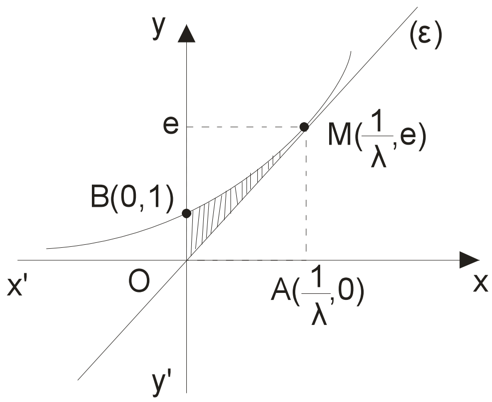
$$0 - e^{\lambda x_0} = \lambda e^{\lambda x_0}(0 - x_0) \Leftrightarrow -1 = \lambda(-x_0) \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{\lambda}.$$

Έτσι η (ε) γίνεται:

$$y - e = \lambda e(x - \frac{1}{\lambda}) \Leftrightarrow y = \lambda e x.$$

Οι συντεταγμένες του Μ είναι: $M(\frac{1}{\lambda}, e)$.

γ.



Το ζητούμενο εμβαδόν όπως φαίνεται από το σχήμα ισούται με:

$$(OAMB) - (OAM) = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} e^{\lambda x}dx - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot e = \left[\frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}\right]_0^{\frac{1}{\lambda}} - \frac{e}{2\lambda} = \frac{1}{\lambda}\cdot e - \frac{1}{\lambda} - \frac{e}{2\lambda} = \frac{2e-2-e}{2\lambda} = \frac{e-2}{2\lambda}.$$

δ. Είναι $\dfrac{\lambda^2\cdot E(\lambda)}{2+\eta\mu\lambda} = \dfrac{\lambda^2\cdot\dfrac{e-2}{2\lambda}}{2+\eta\mu\lambda} = \dfrac{(e-2)\lambda}{2(2+\eta\mu\lambda)} = \dfrac{e-2}{2}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{2+\eta\mu\lambda}{\lambda}}$.

Για κάθε $\lambda > 0$ είναι:

$$-1 \le \eta\mu\lambda \le 1 \Leftrightarrow 1 \le 2+\eta\mu\lambda \le 3 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{\lambda} \le \frac{2+\eta\mu\lambda}{\lambda} \le \frac{3}{\lambda}.$$

Όμως $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\lambda}\right) = \lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(\dfrac{3}{\lambda}\right) = 0$, οπότε με βάση το κριτήριο παρεμβολής είναι

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{2+\eta\mu\lambda}{\lambda} = 0$, ενώ $\dfrac{2+\eta\mu\lambda}{\lambda} > 0$.

Έτσι $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{1}{\dfrac{2+\eta\mu\lambda}{\lambda}} = +\infty$ και αφού $\dfrac{e-2}{2} > 0$ προκύπτει τελικά ότι

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda^2\cdot E(\lambda)}{2+\eta\mu\lambda} = +\infty.$$

<u>Παρατήρηση:</u>

Για την εύρεση του εμβαδού του χωρίου Ε (λ) είναι δυνατόν να μη χρησιμοποιηθεί το σχήμα ως εξής:

Για την $f(x) = e^{\lambda x}$ είναι $f'(x) = \lambda e^{\lambda x}$ και $f''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έτσι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ οπότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο της, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση με εξαίρεση το σημείο επαφής. (Σχόλιο σελ. 274 σχολικού βιβλίου).
Έτσι $f(x) \geq \lambda ex \Leftrightarrow f(x) - \lambda ex \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση $g(x) = f(x) - \lambda ex$ είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων στο $\left[0, \frac{1}{\lambda}\right]$ οπότε το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με:

$$E(\lambda) = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} (f(x) - \lambda ex)dx = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} (e^{\lambda x} - \lambda ex)dx = \left[\frac{1}{\lambda}e^{\lambda x} - \frac{\lambda ex^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{\lambda}} = \ldots = \frac{e-2}{2\lambda}.$$

ΘΕΜΑ 4

α. Από τη δοσμένη σχέση $2f'(x) = e^{x - f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$2f'(x) = \frac{e^x}{e^{f(x)}} \quad \text{ή}$$

$$2f'(x)e^{f(x)} = e^x \quad \text{ή}$$

$$f'(x)e^{f(x)} = \frac{1}{2}e^x \quad \text{ή}$$

$$\left(e^{f(x)}\right)' = \frac{1}{2}e^x \quad \text{ή}$$

$$\left(e^{f(x)}\right)' = \left(\frac{e^x}{2}\right)' \quad \Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)} = \frac{e^x}{2} + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

Για $x = 0$ έχουμε: $e^{f(0)} = \frac{e^0}{2} + C$

η οποία λόγω του ότι $f(0) = 0$ γράφεται:

$$e^0 = \frac{e^0}{2} + C \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{2} + C \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}.$$

Οπότε: $e^{f(x)} = \frac{e^x}{2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{f(x)} = \frac{e^x + 1}{2}$.

Άρα: $f(x) = \ln\left(\frac{e^x + 1}{2}\right)$.

β. Θέτουμε $x - t = u$.
Διαφορίζουμε την τελευταία και βρίσκουμε $du = -dt$.
Επιπλέον για $t = 0$ είναι $u = x$, ενώ για $t = x$ είναι $u = 0$.
Έτσι:

$$\int_0^x f(x-t)dt = -\int_x^0 f(u)du = \int_0^x f(u)du$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(x-t)dt}{\etaμx}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{\etaμx}.$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε η $\int_0^x f(u)du$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$\left(\int_0^x f(u)du\right)'=f(x).$$

Επειδή η $\int_0^x f(u)du$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ θα είναι και συνεχής σ' αυτό.

Επομένως: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(u)du}{\etaμx}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int_0^x f(u)du\right)'}{(\etaμx)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{συνx}=\dfrac{f(0)}{συν0}=f(0)=0$.

(Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και συνεχής σ' αυτό.)

γ. Είναι

$$h(x)=\int_{-x}^{x}t^{2005}f(t)dt=\int_{-x}^{0}t^{2005}f(t)dt+\int_{0}^{x}t^{2005}f(t)dt=\int_{0}^{x}t^{2005}f(t)dt-\int_{0}^{-x}t^{2005}f(t)dt.$$

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $φ(t)=t^{2005}\cdot f(t)$ η $h(x)$ γράφεται:

$$h(x)=\int_0^x φ(t)dt-\int_0^{-x}φ(t)dt.$$

Η $φ(t)=t^{2005}\cdot f(t)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα η συνάρτηση $κ(x)=\int_0^x φ(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $κ'(x)=φ(x)=x^{2005}\cdot f(x)$, όπως επίσης είναι παραγωγίσιμη και η συνάρτηση $κ(-x)=\int_0^{-x}φ(t)dt$ ως σύνθεση των παραγωγισίμων $-x$, $κ(x)$, με $(κ(-x))'=φ(-x)(-x)'=-φ(-x)$.

Επομένως

$$h'(x)=(κ(x)-κ(-x))'=φ(x)+φ(-x)=x^{2005}f(x)+(-x)^{2005}f(-x)=$$

$$=x^{2005}\cdot\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)-x^{2005}\cdot\ln\left(\frac{1+e^{-x}}{2}\right)=x^{2005}\cdot\ln\left(\frac{\frac{1+e^x}{2}}{\frac{1+e^{-x}}{2}}\right)=x^{2005}\cdot\ln\left(\frac{1+e^x}{1+e^{-x}}\right)=$$

$$=x^{2005}\cdot\ln\left(\frac{1+e^x}{1+\frac{1}{e^x}}\right)=x^{2005}\cdot\ln\left[\frac{e^x(1+e^x)}{(e^x+1)}\right]=x^{2005}\cdot\ln e^x=x^{2005}\cdot x=x^{2006}.$$

Ακόμα η $g(x)=\dfrac{x^{2007}}{2007}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=2007\cdot\dfrac{x^{2006}}{2007}=x^{2006}$.

Επειδή $h'(x)=g'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $h(x)=g(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$.

Όμως για $x=0$ είναι $h(0)=g(0)=0$, άρα $c=0$.

Επομένως $h(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ. Η εξίσωση $\int_{-x}^{x} t^{2005} f(t)dt = \frac{1}{2008}$ λόγω του ερωτήματος γ γράφεται ισοδύναμα

$\frac{x^{2007}}{2007} = \frac{1}{2008} \Leftrightarrow 2008x^{2007} - 2007 = 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$P(x) = 2008x^{2007} - 2007$, $x \in [0, 1]$.

Η P είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο [0, 1] ως πολυωνυμική.

$P(0) = -2007 < 0$ κ' $P(1) = 1 > 0$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $P(x_0) = 0$.

Επιπλέον η $P(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, άρα και στο [0, 1] με $P'(x) = 2008 \cdot 2007x^{2006}$.

Είναι $P'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$ οπότε η P είναι γνησίως αύξουσα στο (0, 1).

Άρα η $P(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο (0, 1).

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
2006

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Θεωρία. Σχολ. βιβλίο σελ. 253
Α.2 Ορισμός. Σχολ. βιβλίο σελ. 273
Β. α $\rightarrow$ Λ
β $\rightarrow$ Σ
γ $\rightarrow$ Σ
δ $\rightarrow$ Λ
ε $\rightarrow$ Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α. $f(x) = 2 + (x-2)^2, \quad x \geq 2$
Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[2,+\infty)$ με $f'(x) = 2(x-2) > 0$ για κάθε $x \in (2,+\infty)$.
Άρα f γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$ και επομένως είναι και
1-1.

β. Αφού η f είναι 1-1 υπάρχει η f^{-1} αντίστροφη συνάρτηση της f με
f^{-1} : f(A) $\rightarrow$ R.

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο Α = $[2,+\infty)$ έπεται ότι
$f(A) = \left[f(2), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = [2,+\infty)$

Τώρα αν y = f(x) $\Leftrightarrow$ y = 2 + $(x - 2)^2$ $\Leftrightarrow$ y - 2 = $(x - 2)^2$.

Επειδή x - 2 $\geq$ 0, y - 2 $\geq$ 0, έχουμε $x - 2 = \sqrt{y-2}, \quad x \in [2,+\infty), \quad y \in [2,+\infty)$

ή $x = 2 + \sqrt{y-2}, \quad x \in [2,+\infty), \quad y \in [2,+\infty)$

ή $f^{-1}(y) = 2 + \sqrt{y-2}, \quad y \in [2,+\infty)$.

Τελικά $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x-2}, \quad x \in [2,+\infty)$.

γ. i) Έχουμε

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = 2 + (x-2)^2 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + (x-2)^2 = x \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 = x-2 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} x = 2 \\ y = 2 \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} x = 3 \\ y = 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 + \sqrt{x-2} \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = 2 + \sqrt{x-2} \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + \sqrt{x-2} = x \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} = x-2 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = (x-1)^2 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} x = 2 \\ y = 2 \end{pmatrix} \text{ή} \begin{pmatrix} x = 3 \\ y = 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων f και f^{-1} με την y = x είναι τα A(2,2), B(3,3).

ii)
Οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι συνεχείς άρα και η διαφορά τους είναι συνεχής.

$f(x) - f^{-1}(x) = [2 + (x-2)^2] - [2 + \sqrt{x-2}] = (x-2)^2 - \sqrt{x-2} = \sqrt{x-2} \cdot \left(\sqrt{x-2}^{\,3} - 1 \right)$ Προκύπτει $f(x) - f^{-1}(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 0 \quad \text{ή} \quad \left(\sqrt{x-2}\right)^3 = 1 \Leftrightarrow x = 2 \quad \text{ή} \quad x = 3$.
Δηλαδή τα κοινά τους σημεία είναι τα A(2,2), B(3,3).

Επειδή $2 \le x \le 3 \Leftrightarrow 0 \le x - 2 \le 1 \Leftrightarrow$
$\sqrt{x-2} \le 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-2}^{\,3} \le 1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-2}\right)^3 - 1 \le 0$.

Επίσης είναι $\sqrt{x-2} \ge 0$ για $x \in [2,3]$.

Άρα $f(x) - f^{-1}(x) \le 0$ για $x \in [2,3]$.

Οπότε το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου είναι

$$E = \int_2^3 \left(f^{-1}(x) - f(x)\right)dx = \int_2^3 \left(\sqrt{x-2} - (x-2)^2\right)dx = \frac{1}{3} \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 3ο

α.i Από τη σχέση $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ έχουμε ισοδύναμα $z_1 = -z_2 - z_3$ (1).
Θα δείξουμε ότι $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1|$ (2).
Πράγματι η (2) λόγω της (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$|-z_2 - z_3 - z_2| = |z_3 + z_2 + z_3| \Leftrightarrow$$
$$|2z_2 + z_3| = |2z_3 + z_2| \Leftrightarrow$$
$$|2z_2 + z_3|^2 = |2z_3 + z_2|^2 \Leftrightarrow$$
$$(2z_2 + z_3)\overline{(2z_2 + z_3)} = (2z_3 + z_2)\overline{(2z_3 + z_2)} \Leftrightarrow$$
$$(2z_2 + z_3)(2\bar{z}_2 + \bar{z}_3) = (2z_3 + z_2)(2\bar{z}_3 + \bar{z}_2) \Leftrightarrow$$
$$4z_2\bar{z}_2 + 2z_2\bar{z}_3 + 2z_3\bar{z}_2 + z_3\bar{z}_3 = 4z_3\bar{z}_3 + 2z_3\bar{z}_2 + 2z_2\bar{z}_3 + z_2\bar{z}_2 \Leftrightarrow$$
$$3z_2\bar{z}_2 = 3z_3\bar{z}_3 \Leftrightarrow$$
$$z_2\bar{z}_2 = z_3\bar{z}_3 \Leftrightarrow$$
$$|z_2|^2 = |z_3|^2 \Leftrightarrow$$
$$|z_2| = |z_3|.$$

Η τελευταία σχέση είναι αληθής λόγω της υπόθεσης, άρα και η (2).
Με ανάλογο τρόπο δείχνουμε ότι $|z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$ (3).
Από τις (2) και (3) προκύπτει ότι $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3|$.
Άρα $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$.

α.ii Είναι:
$|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \le |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2| = 1 + 1 + = 2$
Άρα $|z_1 - z_2| \le 2$.
Οπότε $|z_1 - z_2|^2 \le 4$.
Τότε:

$$|z_1 - z_2|^2 \le 4 \Leftrightarrow$$
$$(z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)} \le 4 \Leftrightarrow$$
$$(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \le 4 \Leftrightarrow$$
$$z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 \le 4 \Leftrightarrow$$
$$|z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) \le 4 \Leftrightarrow$$
$$1 + 1 - (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) \le 4 \Leftrightarrow$$
$$z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 \ge -2 \Leftrightarrow$$
$$z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2} \ge -2 \Leftrightarrow$$
$$2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \ge -2 \Leftrightarrow$$
$$\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \ge -1.$$

β. Επειδή $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ προκύπτει ότι οι εικόνες των μιγαδικών $\mathrm{A}(z_1), \mathrm{B}(z_2), \Gamma(z_3)$ βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο Ο (0, 0) και ακτίνα

ρ = 1. Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο παραπάνω κύκλος.
Λόγω τώρα της σχέσης $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$ προκύπτει ότι οι κορυφές $\mathrm{A}(z_1), \mathrm{B}(z_2), \Gamma(z_3)$ αποτελούν κορυφές ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Πρέπει x > 0 και $x \neq 1$. Άρα $A_f = (0,1) \cup (1,+\infty)$.
Η f είναι παραγωγίσιμη στο A_f ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με
$f'(x) = -\left[\frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x}\right] < 0$ για κάθε $x \in A_f$.
Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα
(0, 1) και (1, +∞).
Επειδή τώρα $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ και η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο (0, 1) είναι $f((0,1)) = \mathfrak{R}$.
Επίσης επειδή $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ και η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο (1, +∞), είναι $f((1,+\infty)) = \mathfrak{R}$.
Έτσι συνολικά το σύνολο τιμών της f είναι $f((0,1) \cup (1,+\infty)) = \mathfrak{R}$.

β. Επειδή $f((0,1)) = \mathfrak{R}$ έπεται $O \in f((0,1))$ δηλαδή υπάρχει $x_1 \in (0,1)$ ωστε $f(x_1) = 0$.
Η ρίζα αυτή είναι μοναδική στο (0,1), αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα και άρα 1-1.
Ομοίως επειδή $f((1,+\infty)) = \mathfrak{R}$ έπεται $O \in f((1+\infty))$ δηλαδή υπάρχει $x_2 \in (1,+\infty)$ ώστε $f(x_2) = 0$.
Η ρίζα αυτή είναι επίσης μοναδική στο (1,+ ∞), αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα και άρα 1-1.
Έτσι η f έχει ακριβώς 2 ρίζες.

γ. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $g(x) = \ln x$ στο σημείο $A(\alpha, \ln \alpha)$, α>0 είναι:
$y = \frac{1}{\alpha} x - 1 + \ln a$ (ε_1)
Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x) = e^x$ στο σημείο $B(\beta, e^\beta)$, $\beta \in \mathfrak{R}$ είναι:
$y = e^\beta x + e^\beta - \beta e^\beta$ (ε_2).
Οι (ε_1), (ε_2) ταυτίζονται αν και μόνο αν
$\frac{1}{\alpha} = e^\beta \Leftrightarrow \beta = -\ln \alpha$ (1) και $\ln \alpha - 1 = e^\beta - \beta \cdot e^\beta$ (2)
Τότε η (2) γράφεται:

$\ln\alpha - 1 = \frac{1}{\alpha} + \ln\alpha \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow$

$\alpha \ln\alpha - \alpha = 1 + \ln\alpha \Leftrightarrow$

$-\alpha - 1 = (\ln\alpha)(1-\alpha) \Leftrightarrow$

$\frac{\alpha+1}{\alpha-1} = \ln\alpha \Leftrightarrow$

$\frac{\alpha+1}{\alpha-1} - \ln\alpha = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = 0$.

δ.

Από το 4γ προκύπτει ότι οι γραφικές παραστάσεις των g(x), h(x) έχουν κοινή εφαπτόμενη στα σημεία τους A(α, lnα) και B(β, e^{β}) αντίστοιχα αν και μόνον αν:

$$\begin{pmatrix} \beta = -\ln\alpha \\ f(\alpha) = 0 \end{pmatrix}$$

Επειδή η f(x) = 0 έχει δύο διακεκριμένες ρίζες $\alpha_1 \in (0,1)$ και $\alpha_2 \in (1,+\infty)$ προκύπτουν δύο εφαπτόμενες οι

$(\varepsilon_1): y = \frac{1}{\alpha_1}x - 1 + \ln\alpha_1$

$(\varepsilon_2): y = \frac{1}{\alpha_2}x - 1 + \ln\alpha_2$.

Οι εφαπτόμενες αυτές είναι ακριβώς δύο (διακεκριμένες) αφού έχουν δύο διακεκριμένους συντελεστές διεύθυνσης $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}$ αντίστοιχα.

$\left(\frac{1}{\alpha_1} \in (1,+\infty), \frac{1}{\alpha_2} \in (0,1)\right)$.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
2007

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Θεωρία, σελίδα 98 σχολ. βιβλίου.
Α.2 Θεωρία - Ορισμός, σελίδα 141 σχολ. βιβλίου.
Α.3 Θεωρία - Ορισμός, σελίδα 280 σχολ. βιβλίου.

Β. **α.** $\to$ Λ **β.** $\to$ Λ **γ.** $\to$ Λ **δ.** $\to$ Σ **ε.** $\to$ Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α.

$z = \dfrac{2+\alpha i}{\alpha + 2i}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Άρα $|z| = \left|\dfrac{2+\alpha i}{\alpha+2i}\right| = \dfrac{|2+\alpha i|}{|\alpha+2i|} = \dfrac{\sqrt{4+\alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2+4}} = 1$.

Άρα η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ = 1.

β.

Για $\alpha = 0$ έχουμε: $z_1 = \dfrac{2+0i}{0+2i} = \dfrac{1}{i} = -i = 0 - i$.

Για $\alpha = 2$ έχουμε: $z_2 = \dfrac{2+2i}{2+2i} = 1 = 1 + 0i$.

i. Αν Α, Β οι εικόνες των z_1, z_2 αντίστοιχα, τότε η απόστασή τους είναι
d(Α, Β) = $|z_1 - z_2| = |(0-i)-(1+0\,i)| = |-1-i| = |1+i| = \sqrt{2}$.

ii. Είναι: $(z_1)^{2\nu} = \left((z_1)^2\right)^{\nu} = ((-i)^2)^{\nu} = (-1)^{\nu} = (-z_2)^{\nu}$.

ΘΕΜΑ 3ο

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, με
$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$.
Οπότε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f΄		+	0	-	0	+	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Από τον πίνακα μεταβολών της f προκύπτει ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στο
$x_1 = -1$, το $f(-1) = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta > 0$ και έχει τοπικό ελάχιστο στο
$x_2 = 1$, το $f(1) = -2(1 + \eta\mu^2\theta)$.

Επίσης είναι: $f''(x) = 6x$.

Οπότε $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f	$\frown$		$\smile$

Προκύπτει ότι η f έχει σημείο καμπής στο $x_3 = 0$, το $f(x_3) = -2\eta\mu^2\theta$.

β.

i. Επειδή $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $f(-1) = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta > 0$ και f γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-\infty, -1]$, προκύπτει: $f\big((-\infty, -1]\big) = (-\infty, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta]$

Επειδή $0 \in f\big((-\infty, -1]\big)$, υπάρχει $\rho_1 \in (-\infty, -1)$ ώστε $f(\rho_1) = 0$. Η ρίζα ρ_1 είναι και μοναδική στο $(-\infty, -1]$, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

ii. Επειδή $f(-1) = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta > 0$, $f(1) = -2(1 + \eta\mu^2\theta) < 0$ και f γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $[-1, 1]$ προκύπτει: $f\big([-1, 1]\big) = \big[-2(1 + \eta\mu^2\theta), 2\sigma\upsilon\nu^2\theta\big]$.

Επειδή $0 \in f\big([-1, 1]\big)$, υπάρχει $\rho_2 \in (-1, 1)$ ώστε $f(\rho_2) = 0$. Η ρίζα ρ_2 είναι και μοναδική στο $[-1, 1]$, αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

iii. Επειδή $f(1) = -2(1 + \eta\mu^2\theta) < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ και η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[1, +\infty)$ προκύπτει: $f\big([1, +\infty)\big) = \big[-2(1 + \eta\mu^2\theta), +\infty\big)$.

Επειδή $0 \in f\big([1, +\infty)\big)$, υπάρχει $\rho_3 \in (1, +\infty)$ ώστε $f(\rho_3) = 0$. Η ρίζα ρ_3 είναι και αυτή μοναδική στο $[1, +\infty)$, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 3 ρίζες στο $\mathbb{R}$.

γ. Έχουμε
$A\big(-1, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta\big)$, $B\big(1, -2(1 + \eta\mu^2\theta)\big)$, $\Gamma(0, -2\eta\mu^2\theta)$

$A \in (\varepsilon)$ αφού:
$2\sigma\upsilon\nu^2\theta = -2(-1) - 2\eta\mu^2\theta \Leftrightarrow 2(1 - \eta\mu^2\theta) = 2 - 2\eta\mu^2\theta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2 - 2\eta\mu^2\theta = 2 - 2\eta\mu^2\theta$.

$B \in (\varepsilon)$ αφού:
$-2(1 + \eta\mu^2\theta) = (-2) \cdot 1 - 2\eta\mu^2\theta$ ή $-2 - 2\eta\mu^2\theta = -2 - 2\eta\mu^2\theta$.

$Γ \in (ε)$ αφού:
$-2ημ^2θ = 2 \cdot 0 - 2ημ^2θ$ ή $-2ημ^2θ = -2ημ^2θ$.

δ. Βρίσκουμε τα κοινά σημεία των C_f, ε:
$f(x) = y \Leftrightarrow x^3 - 3x - 2ημ^2θ = -2x - 2ημ^2θ \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$
$x(x - 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1$ ή $x = -1$.

Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν Ε του χωρίου είναι:

$$E=\int_{-1}^{1}|f(x)-y|\,dx=\int_{-1}^{1}|x^3-x|\,dx\overset{(*)}{=}$$

$$=\int_{-1}^{0}(x^3-x)\,dx-\int_{0}^{1}(x^3-x)\,dx=\frac{1}{2}\ τ.μ.$$

(*) $x^3 - x = x(x - 1)(x + 1)$.
$x^3 - x > 0$ για $x \in (-1, 0)$.
$x^3 - x < 0$ για $x \in (0, 1)$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Αφού f, g συνεχείς στο [0, 1] η F είναι παραγωγίσιμη στο [0, 1] με $F'(x) = f(x)g(x)$.
Όμως $g(x) > 0$ στο [0, 1] από υπόθεση, ενώ αφού f γνησίως αύξουσα στο [0, 1] έχουμε: $x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) > 0$, άρα $f(x) > 0$ στο [0, 1].
Συνεπώς $f(x) \cdot g(x) > 0$ στο [0, 1] και επομένως $F'(x) > 0$ στο [0, 1].
Οπότε F γνησίως αύξουσα στο [0, 1].

Έτσι για $x \in (0, 1]$ είναι $x > 0 \Rightarrow F(x) > F(0) \Rightarrow F(x)>\int_0^0 f(t)g(t)dt \Rightarrow F(x) > 0$.

β. Είναι: $0 \leq t \leq x$ με $x \in (0, 1]$.
Αφού f γνησίως αύξουσα στο [0, 1] έχουμε $t \leq x \Rightarrow f(t) \leq f(x)$
οπότε $f(x) - f(t) \geq 0$ για κάθε $x \in (0, 1]$.
Ακόμη $g(t) > 0$ στο (0, 1].
άρα και $g(t) \cdot [f(x) - f(t)] \geq 0$ για κάθε $x \in (0, 1]$ και για κάθε $t \in [0, x]$.
Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $t = x$
Ακόμη η $g(t) \cdot [f(x) - f(t)]$ συνεχής στο [0, x] με $x \in (0, 1]$.
Άρα $\int_0^x g(t)[f(x)-f(t)]\,dt>0$ με $x \in (0, 1]$.

Επομένως για κάθε $x \in (0, 1]$ έχουμε:

$$\int_0^x g(t)f(x)\,dt-\int_0^x f(t)g(t)\,dt>0$$

$$\Leftrightarrow f(x)\int_0^x g(t)\,dt>\int_0^x f(t)g(t)\,dt$$

$$\Leftrightarrow f(x)G(x)>F(x).$$

γ. Είναι για κάθε $x \in (0, 1]$ και για κάθε $t \in [0, x]$: $g(t) > 0$.
Επίσης g συνεχής στο [0, x] άρα η $G(x)=\int_0^x g(t)\,dt$ είναι παραγωγίσιμη και θετική για κάθε $x \in (0, 1]$.

Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $H(x)=\dfrac{F(x)}{G(x)}$ που ορίζεται και παραγωγίζεται στο (0, 1] με

$$H'(x)=\frac{F'(x)G(x)-F(x)G'(x)}{G^2(x)}=\frac{f(x)g(x)G(x)-F(x)g(x)}{G^2(x)}=$$

$=\dfrac{g(x)\big(f(x)G(x)-F(x)\big)}{G^2(x)}>0$ στο (0, 1]. (Διότι από το ερώτημα β είναι $f(x)G(x)-F(x)>0$).

Άρα η συνάρτηση H είναι γνησίως αύξουσα στο (0, 1] και επομένως για x ∈ (0, 1] έχουμε: x ≤ 1 ⇒ H(x) ≤ H(1) δηλαδή $\dfrac{F(x)}{G(x)}\le\dfrac{F(1)}{G(1)}$.

δ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $K(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)g(t)\,dt}{\int_0^x g(t)\,dt}\cdot\dfrac{\int_0^{x^2}\eta\mu(t^2)\,dt}{x^5}$ για κάθε x ∈ (0, 1].

- Αφού οι F, G παραγωγίσιμες στο [0, 1] είναι και συνεχείς σε αυτό άρα:

$$\lim_{x\to 0^+}F(x)=F(0)=0$$
$$\lim_{x\to 0^+}G(x)=G(0)=0$$

Συνεπώς:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x f(t)g(t)\,dt}{\int_0^x g(t)\,dt}=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)}{G(x)}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{L.H}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{x\to 0^+}f(x)\underset{\sigma\tau o\,[0,1]}{\overset{f\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma}{=}}f(0).\quad(1)$$

- Η φ(t) = ημ(t^2) είναι συνεχής στο ℝ και η x^2 είναι παραγωγίσιμη στο ℝ άρα η $\int_0^{x^2}\eta\mu t^2dt$ είναι παραγωγίσιμη στο ℝ και άρα είναι συνεχής στο ℝ.

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\int_0^{x^2}\eta\mu(t^2)dt\right)=\int_0^0\eta\mu(t^2)dt=0$ Ακόμη $\lim\limits_{x\to 0^+}x^5=0$

Συνεπώς

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\eta\mu(t^2)dt}{x^5}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{LH}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\int_0^{x^2}\eta\mu(t^2)dt\right)'}{(x^5)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu(x^4)\cdot 2x}{5x^4}=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\eta\mu(x^4)}{x^4}\cdot\frac{2}{5}x\right]=$$

$=1\cdot\dfrac{2}{5}\cdot 0=0$ (2)

Επομένως: $\lim\limits_{x\to 0^+}K(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x g(t)dt}\right)\left(\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}\eta\mu t^2dt}{x^5}\right)\underset{(2)}{\overset{(1)}{=}}f(0)\cdot 0=0$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

2008

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Θεωρία (Σελ. 235 σχολ. βιβλίου).

Α.2 Θεωρία (Σελ. 191 σχολ. βιβλίου).

Β

α. Σωστό
β. Σωστό
γ. Λάθος
δ. Λάθος
ε. Σωστό

ΘΕΜΑ 2ο

α. Η ισότητα $\left|(i+2\sqrt{2})z\right|=6$, γράφεται ισοδύναμα:

$$\left|i+2\sqrt{2}\right|\cdot|z|=6 \Leftrightarrow \sqrt{8+1}\cdot|z|=6 \Leftrightarrow 3|z|=6 \Leftrightarrow |z|=2.$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων Ο, ακτίνα $\rho=2$ και εξίσωση (c): $x^2+y^2=2^2$.

β. Η δοσμένη σχέση για τους μιγαδικούς αριθμούς w περιγράφει τη μεσοκάθετο του τμήματος **ΓΔ**, όπου **Γ**(1, −1) και **Δ**(3, −3). Πιο αναλυτικά αν $w=x+yi$ οι μιγαδικοί αριθμοί που ικανοποιούν τη δοσμένη σχέση, έχουμε:

$$|w-(1-i)|=|w-(3-3i)| \Leftrightarrow |x+yi-1+i|=|x+yi-3+3i| \Leftrightarrow$$

$$|(x-1)+(y+1)i|^2=|(x-3)+(y+3)i|^2 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=(x-3)^2+(y+3)^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2-2x+1+y^2+2y+1=x^2-6x+9+y^2+6y+9 \Leftrightarrow$$

$$4x-4y-16=0 \Leftrightarrow x-y-4=0.$$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων M(w) είναι τα σημεία της ευθείας (ε) με εξίσωση: $x-y-4=0$.

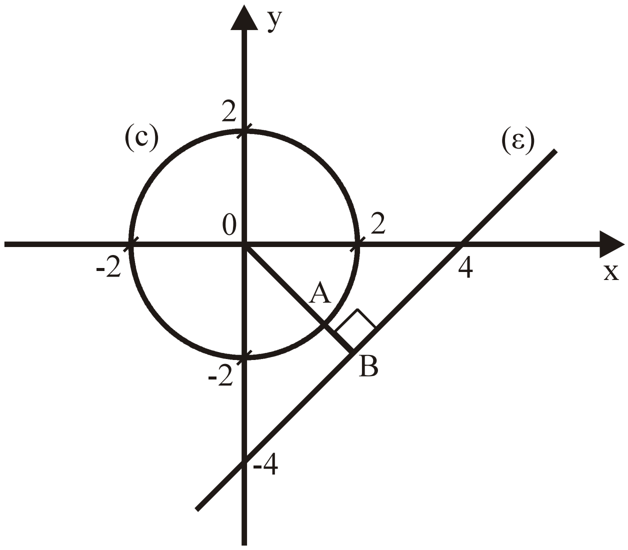
γ. Η ελάχιστη τιμή του $|w|$ είναι η απόσταση του σημείου Ο από την ευθεία

(ε): $x-y-4=0$, δηλαδή:

$$d(O,\varepsilon)=\frac{|-4|}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}.$$

δ. Σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα, όπου αναπαριστώνται γεωμετρικά οι γεωμετρικοί τόποι των εικόνων (c), (ε) αντίστοιχα των μιγαδικών αριθμών z και w βρίσκουμε ότι, η ελάχιστη τιμή του $|z-w|$ είναι το μήκος του τμήματος AB:

$$AB = OB - OA = 2\sqrt{2} - \rho = 2(\sqrt{2}-1).$$



ΘΕΜΑ 3ο

α) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x\cdot \ln x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{\text{De l' Hospital}}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=\!=}} =$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0.$$

Επίσης $f(0) = 0$. Συνεπώς f συνεχής στο 0.

β) Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως γινόμενο συνεχών και συνεχής στο 0 λόγω του α.

Άρα η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$.

Για $x > 0$: $f'(x) = (x\ln x)' = (x)'\ln x + x\cdot(\ln x)' = \ln x + x\dfrac{1}{x} = \ln x + 1$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$.

Έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f΄		-	0	+	
f		↘		↗	

- Στο $\left[0, \frac{1}{e}\right)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα:

$$f\left(\left[0, \frac{1}{e}\right)\right) = \left(\lim_{x \to \frac{1}{e}} f(x),\ f(0)\right] = \left(-\frac{1}{e}, 0\right].$$

- Στο $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$ η f είναι γνησίως αύξουσα άρα:

$$f\left(\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)\right) = \left[f\left(\frac{1}{e}\right),\ \lim_{x \to +\infty} f(x)\right) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right).$$

Επομένως: $f([0,\ +\infty)) = \left(-\frac{1}{e},\ 0\right] \cup \left[-\frac{1}{e},\ +\infty\right) = \left[-\frac{1}{e},\ +\infty\right)$.

γ.

Επειδή $e^{\frac{a}{x}} > 0$, για κάθε $x \neq 0$, για την εξίσωση $x = e^{\frac{a}{x}}$ προκύπτει ο περιορισμός $x \in (0, +\infty)$. Με τον περιορισμό αυτό η εξίσωση $x = e^{\frac{a}{x}}$ γράφεται ισοδύναμα:

$$\ln x = \ln e^{\frac{a}{x}} \Leftrightarrow \ln x = \frac{a}{x} \Leftrightarrow x \ln x = a \Leftrightarrow f(x) = a,\ \ x > 0 \quad (1).$$

Επειδή το σύνολο των τιμών της f βρέθηκε $\left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$ προκύπτουν οι περιπτώσεις:

i) Αν $a \in (-\infty, -\frac{1}{e})$ η (1) είναι αδύνατη.

ii) Αν $a=-\frac{1}{e}$, η τιμή $-\frac{1}{e}$ είναι η ελάχιστη τιμή της f την οποία παίρνει μόνον για $x=\frac{1}{e}$.

Έτσι η (1) έχει την ρίζα $x=\frac{1}{e}$.

iii) Αν $a\in(-\frac{1}{e},0)$, επειδή $\left(-\frac{1}{e},0\right)=f\left(\left(0,\frac{1}{e}\right)\right)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ προκύπτει ότι, η (1) έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ που είναι θετική.

Επίσης επειδή $\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)=f\left(\left[\frac{1}{e},+\infty\right)\right)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$ προκύπτει ότι η (1) έχει ακριβώς άλλη μία ρίζα στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$ που είναι επίσης θετική.

iv) Αν $a=0$ η (1) γίνεται $x\ln x=0\Leftrightarrow x=0$ (απορρίπτεται) ή $\ln x=0\Leftrightarrow x=1$. (Μία ρίζα θετική).

v) Αν $a\in(0,+\infty)$ επειδή $(0,+\infty)\subseteq\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)=f\left(\left[\frac{1}{e},+\infty\right)\right)$ και η f γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$, προκύπτει ότι η (1) έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$, που είναι θετική.

δ. Είναι $f''(x)=\frac{1}{x}>0$ για κάθε $x>0$.

Άρα f' γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[x, x+1]$, για κάθε $x>0$.

Άρα υπάρχει $\xi\in(x,\ x+1)$: $\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}=f'(\xi)\Leftrightarrow f(x+1)-f(x)=f'\xi)\quad(2)$.

Όμως $\xi<x+1\overset{f'\ \text{γν. αύξουσα}}{\Longrightarrow}f'(\xi)<f'(x+1)\overset{(2)}{\Longrightarrow}f(x+1)-f(x)<f'(x+1)$.

ΘΕΜΑ 4ο

α) Το $\int_0^2 f(t)dt$ είναι πραγματικός αριθμός.

Έτσι μπορούμε να θέσουμε $\int_0^2 f(t)dt = k \in R$. **(1)**

Τότε $f(x) = (10x^3 + 3x)k - 45$ και άρα :

$$\int_0^2 f(t)dt = \int_0^2 \left[\left(10t^3 + 3t\right)k - 45\right]dt = \left[k\left(10\frac{t^4}{4} + 3\frac{t^2}{2}\right) - 45t\right]_0^2 = 40k + 6k - 90 = 46k - 90.$$

(2)

Από τις **(1)**, **(2)** προκύπτει ότι: $k = 46\,k - 90 \Leftrightarrow k = 2$

Οπότε τελικά: $f(x) = (10x^3 + 3x)2 - 45 = 20x^3 + 6x - 45$.

β) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{g'(x) - g'(x-h)}{h} = \lim_{h\to 0}\left[-\frac{g'(x-h) - g'(x)}{h}\right] =$$

$$\underset{\substack{h \to 0 \\ u \to 0}}{\overset{-h=u}{=\!=\!=}} \lim_{u\to 0}\left[-\frac{g'(x+u) - g'(x)}{-u}\right] = \lim_{u\to 0}\frac{g'(x+u) - g'(x)}{u} = g''(x),$$

αφού ή g από υπόθεση είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.

γ) (i) Έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} \underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{h\to 0}\frac{\left[g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)\right]'}{(h^2)'} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h) - g'(x-h)}{2h} = \frac{1}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h) - g'(x-h)}{h} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\left[\frac{g'(x+h) - g'(x) - g'(x-h) + g'(x)}{h}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\left[\frac{g'(x+h) - g'(x)}{h} + \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[g''(x) + g''(x)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot g''(x) = g''(x).$$

Οπότε $g''(x) = f(x) + 45 = (20x^3 + 6x - 45) + 45 = 20x^3 + 6x$.

Η $g''(x) = 20x^3 + 6x$ γράφεται:

$$\left(g'(x)\right)' = (20\frac{x^4}{4} + 6\frac{x^2}{2})' \Rightarrow g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + c_1.$$

Για $x = 0$ έχουμε: $g'(0) = c_1 = 1$. Οπότε $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$.

Η $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$ τώρα γράφεται:

$$g'(x) = \left(5\frac{x^5}{5} + 3\frac{x^3}{3} + x\right)' \Rightarrow g(x) = x^5 + x^3 + x + c_2$$

Για $x = 0$ έχουμε: $g(0) = c_2 = 1$

Άρα $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$.

(ii) Η $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$ ως πολυωνυμική, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$.

Όμως $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και '1–1'.

<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ</u>

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΕΠΑ.Λ. (ΟΜΑΔΑ Β΄)

2009

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ</u>

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία - Θεώρημα σελίδα 251 σχολ. βιβλίου.

Β. Θεωρία - Ορισμός σελίδα 213 σχολ. βιβλίου.

Γ.

α. Σωστό

β. Σωστό

γ. Λάθος

δ. Λάθος

ε. Λάθος

ΘΕΜΑ 2ο

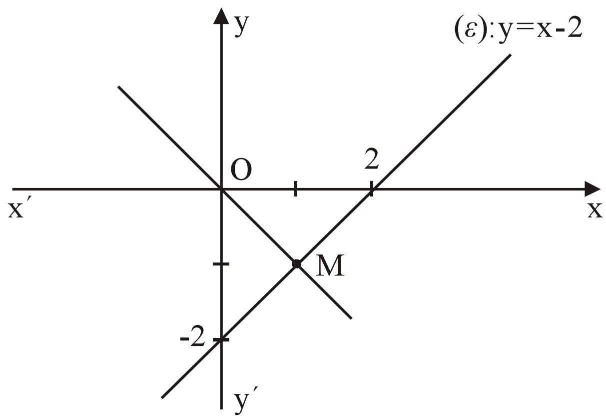
Α.

α. Έστω $z = x + yi$ και $M(x, y)$ η εικόνα του. Τότε $x + yi = (2\lambda + 1) + (2\lambda - 1)i$.

Άρα $x = 2\lambda + 1$ και $y = 2\lambda - 1$. Έτσι όμως $y - x = -2 \Leftrightarrow y = x - 2$.

Δηλαδή οι εικόνες των μιγαδικών z βρίσκονται στην ευθεία $(\varepsilon): y = x - 2$.

β. Ο μιγαδικός z_0 με το μικρότερο μέτρο έχει εικόνα το σημείο M για το οποίο είναι $OM \perp (\varepsilon)$.



Αφού $OM \perp (\varepsilon) \Rightarrow \lambda_{OM} \cdot \lambda_{\varepsilon} = -1 \Rightarrow \lambda_{OM} \cdot 1 = -1 \Rightarrow \lambda_{OM} = -1$.

Άρα η εξίσωση της OM είναι: $y = -x$.

Οι συντεταγμένες του M (σημείου τομής των OM, ε) προκύπτουν από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων $y = -x$, $y = x - 2$.

Επομένως $M: \left\{\begin{matrix} y = -x \\ y = x - 2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} y = -x \\ -x = x - 2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} y = -1 \\ x = 1 \end{matrix}\right\}$. Άρα $M(1, -1)$ και $z_0 = 1 - i$.

Β. Έστω $w = x + yi$, με $x, y \in R$. Η εξίσωση $|w|^2 + \overline{w} - 12 = z_0$ γράφεται

$x^2 + y^2 + x - yi - 12 = 1 - i \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - 12 - yi = 1 - i \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - 12 = 1$

και $y = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0$ και $y = 1 \Leftrightarrow (x = -4$ ή $x = 3)$ και $y = 1$.

Άρα $w = -4 + i$ ή $w = 3 + i$.

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Ισχύει ότι $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$. Δηλαδή $\alpha^x - \ln(x + 1) \geq 1$ για κάθε $x > -1$.

Όμως $f(0) = 1$, οπότε $f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x > -1$.

Επομένως η f παρουσιάζει στη θέση $x = 0$ (ολικό, άρα και τοπικό) ελάχιστο το $f(0) = 1$.

Ακόμη η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1, +\infty)$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι $f'(0) = 0$.

Όμως $f'(x) = a^x \ln a - \dfrac{1}{x+1}$, οπότε $f'(0) = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = e$.

Β.

α. Για $\alpha = e$ είναι $f(x) = e^x - \ln(x + 1)$.

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1, +\infty)$ με $f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x+1}$ και

$$f''(x) = \left(e^x - \frac{1}{x+1}\right)' = e^x + \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \text{ για κάθε } x \in (-1, +\infty).$$

Άρα η f είναι κυρτή.

β. Αφού η f είναι κυρτή στο $(-1, \infty)$ προκύπτει ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, \infty)$, με προφανή ρίζα $x = 0$ που είναι και μοναδική αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Έτσι αν $-1 < x < 0 \Rightarrow f'(x) < f'(0) = 0$, ενώ αν $x > 0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) = 0$.

Δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

γ. Η δοσμένη εξίσωση ισοδύναμα γράφεται: $\dfrac{(f(\beta)-1)(x-2)+(f(\gamma)-1)(x-1)}{(x-1)(x-2)} = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \big(f(\beta) - 1\big)(x - 2) + \big(f(\gamma) - 1\big)(x - 1)$, με $x \in [1, 2]$.

Η g είναι συνεχής στο R ως πολυωνυμική άρα και στο $[1, 2]$.

- $g(1) = -\big(f(\beta) - 1\big) = 1 - f(\beta) = f(0) - f(\beta) < 0$, διότι $f(0)$ ολικό ελάχιστο της f και $\beta \neq 0$,
- $g(2) = f(\gamma) - 1 = f(\gamma) - f(0) > 0$, επίσης διότι $f(0)$ ολικό ελάχιστο της f και $\gamma \neq 0$.

*(Πιο αναλυτικά είναι $f(0) - f(\beta) < 0$ διότι:

Αν $\beta \in (-1, 0)$ επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό ισχύει:

$-1 < \beta < 0 \Rightarrow f(\beta) > f(0) \Rightarrow f(0) - f(\beta) < 0$

Αν $\beta \in (0, +\infty)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό ισχύει:

$0 < \beta \Leftrightarrow f(0) > f(\beta)$.

Ομοίως προκύπτει $f(\gamma) - f(0) > 0$).

Άρα $g(1) \cdot g(2) < 0$, οπότε λόγω του θεωρήματος Bolzano υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ ώστε

$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow \big(f(\beta) - 1\big)(x_0 - 2) + \big(f(\gamma) - 1\big)(x_0 - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\big(f(\beta)-1\big)(x_0-2)+\big(f(0)-1\big)(x_0-1)}{(x_0-1)(x_0-2)} = 0 .$$

Άρα η δοσμένη εξίσωση έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1, 2).

*Παρατήρηση: Θέτοντας χάριν συντομίας $f(\beta) - 1 = \kappa > 0$ και $f(\gamma) - 1 = \lambda > 0$ θα μπορούσαν να δοθούν και οι παρακάτω λύσεις:

α) Η συνάρτηση $h(x) = \dfrac{\kappa}{x-1} + \dfrac{\lambda}{x-2}$ με πεδίο ορισμού το (1, 2) έχει όρια $+\infty$ και $-\infty$ αντίστοιχα όταν $x \to 1^+$ και $x \to 2^-$ ενώ αποδεικνύεται πολύ εύκολα ότι είναι και γνησίως φθίνουσα στο (1, 2), διότι $h(x) = -\left(\dfrac{\kappa}{(x-1)^2} + \dfrac{\lambda}{(x-2)^2}\right) < 0$ για κάθε $x \in (1, 2)$, άρα έχει σύνολο τιμών το $\left(\lim\limits_{x\to 2^-} h(x), \lim\limits_{x\to 1^+} h(x)\right) = (-\infty, +\infty)$ και άρα το μηδέν περιέχεται στο σύνολο τιμών της δηλαδή η h έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1, 2).

Επίσης εναλλακτικά από το ότι η h έχει όρια $+\infty$ και $-\infty$ αντίστοιχα όταν $x \to 1^+$ και $x \to 2^-$, προκύπτει ότι υπάρχουν αριθμοί γ, δ ώστε $1 < \gamma < \delta < 2$ με $f(\gamma) > 0$ και $f(\delta) < 0$ οπότε λόγω του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα (γ, δ) υπάρχει ρίζα της εξίσωσης $h(x) = 0$.

β) Αλγεβρική λύση:

Θέτοντας $\dfrac{\kappa}{x-1}+\dfrac{\lambda}{x-2}=0,\ \ x\in(1,2)$ προκύπτει $\dfrac{\kappa(x-2)+\lambda(x-1)}{(x-1)(x-2)})=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \kappa(x-2)+\lambda(x-1)=0 \Leftrightarrow (\kappa+\lambda)\,x=2\kappa+\lambda \Leftrightarrow x=\dfrac{2\kappa+\lambda}{\kappa+\lambda}$.

Η τιμή αυτή είναι αποδεκτή ως ρίζα της εξίσωσης αφού

$$1=\frac{\kappa+\lambda}{\kappa+\lambda}<\frac{2\kappa+\lambda}{\kappa+\lambda}<\frac{2\kappa+2\lambda}{\kappa+\lambda}=2$$ (και είναι μάλιστα μοναδική ρίζα).

ΘΕΜΑ 4^{o}

α) Η f συνεχής στο [0, 2] άρα και η $tf(t)$ είναι συνεχής στο [0, 2].

Επομένως η συνάρτηση $H(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο [0, 2], άρα είναι και συνεχής.

Η συνάρτηση $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ είναι παραγωγίσιμη στο [0, 2] αφού η f είναι συνεχής στο [0, 2].

Άρα η G είναι συνεχής στο (0, 2] ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Εξετάζουμε τη συνέχεια της συνάρτησης G στη θέση $x_0 = 0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{H(x)}{x}-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+3\right)=0-0+3=3$, διότι:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{H(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{xf(x)}{1}=0\cdot f(0)=0\,.$$

(είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$, αφού η f είναι συνεχής στο [0, 2], και

$\lim\limits_{x\to 0^+}\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t=\int_0^0 tf(t)\mathrm{d}t=0$ διότι η συνάρτηση $tf(t)$ είναι συνεχής, άρα η $\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$

παραγωγίσιμη άρα και συνεχής.

Επίσης $G(0)=6\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2}=6\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\left(1-\sqrt{1-t^2}\right)\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)}{t^2\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)}=$

$=6\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-1+t^2}{t^2\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)}=6\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t^2}{t^2\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)}=6\cdot\dfrac{1}{2}=3$.

Οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+}G(x)=G(0)=3$.

Άρα η συνάρτηση G είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$.

Επομένως η G είναι συνεχής στο [0, 2].

β. Στο διάστημα (0, 2) είναι:

- η συνάρτηση H παραγωγίσιμη αφού η f είναι συνεχής, με $H'(x) = xf(x)$.
- η συνάρτηση x παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $(x)' = 1$.

Άρα και η συνάρτηση $\dfrac{H(x)}{x}$ είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων με:

$$\left(\frac{H(x)}{x}\right)' = \frac{H'(x)\cdot x - H(x)(x)'}{x^2} = \frac{x\cdot f(x)\cdot x - \int_0^x t\cdot f(t)\,\mathrm{d}t}{x^2} = f(x) - \frac{\int_0^x t\cdot f(t)\,\mathrm{d}t}{x^2}.$$

Επίσης στο ίδιο διάστημα, αφού η f είναι συνεχής συνάρτηση θα είναι παραγωγίσιμη και η συνάρτηση $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ με $\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f(x)$.

Άρα η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$G'(x) = f(x) - \frac{\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t}{x^2} - f(x) = -\frac{H(x)}{x^2},\ \ 0 < x < 2.$$

γ. Η συνάρτηση G είναι συνεχής στο [0, 2] και παραγωγίσιμη στο (0, 2), με $G(0) = 3$ (από το β ερώτημα).

Βρίσκουμε την τιμή της G στη θέση $x = 2$: $G(2) = \dfrac{H(2)}{2} - \displaystyle\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t + 3$ (1).

Όμως

$$\int_0^2 (t-2)f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Rightarrow \int_0^2 t f(t)\mathrm{d}t - 2\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t = 0 \Rightarrow \int_0^2 t f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t \Rightarrow H(2) = 2\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t.$$

Έτσι λόγω της (1) είναι

$$G(2) = \frac{2\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t}{2} - \int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t + 3 = 3 = G(0).$$

Ισχύουν επομένως για τη συνάρτηση G οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα [0, 2], άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\alpha \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $G'(\alpha) = 0$.

Όμως από β ερώτημα $G'(\alpha) = -\dfrac{H(\alpha)}{\alpha^2}$.

Άρα είναι $H(\alpha) = 0$.

δ. Η συνάρτηση G είναι συνεχής στο [0, α] και παραγωγίσιμη στο (0, α). Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in$ (0, α):

$$G'(\xi) = \frac{G(a)-G(0)}{a-0} \Leftrightarrow -\frac{H(\xi)}{\xi^2} = \frac{\frac{H(\alpha)}{\alpha} - \int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t + 3 - 3}{\alpha} \overset{H(\alpha)=0}{\Longleftrightarrow}$$

$$-\frac{\int_0^\xi t f(t)\,\mathrm{d}t}{\xi^2} = -\frac{\int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha\int_0^\xi t f(t)\,\mathrm{d}t = \xi^2 \int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

***β' τρόπος:**

Αρκεί να δειχθεί ότι υπάρχει ρίζα στο (0, α), με $\alpha \in$ (0, 2) για την εξίσωση:

$$\alpha \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t = x^2 \cdot \int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow \alpha H(x) = x^2 \int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow -\frac{H(x)}{x^2} = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow G'(x) + \frac{1}{a}\int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Leftrightarrow \left(G(x) + \frac{x}{\alpha}\int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = 0 \qquad (1).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $P(x) = G(x) + \frac{x}{\alpha}\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$ (αρχική της $G'(x) + \frac{x}{\alpha}\int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t$), για την οποία έχουμε :

α) είναι συνεχής στο [0, α) ως άθροισμα της συνεχούς G (από το α' ερώτημα) και της πολυωνυμικής $\left(\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t\right)x$.

β) είναι παραγωγίσιμη στο (0, α) ως άθροισμα της παραγωγίσιμης G (από το β' ερώτημα) και της πολυωνυμικής, $\left(\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t\right)x$ με $P'(x) = G'(x) + \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t$.

γ) $P(0) = P(\alpha) = 3$ διότι

$P(0) = G(0) + 0 = 3$ και

$$P(\alpha) = G(\alpha) + \int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{H(\alpha)}{\alpha} - \int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t + 3 + \int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{H(a)}{\alpha} + 3 = \frac{0}{\alpha} + 3 = 3\,.$$

Έτσι ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle και άρα υπάρχει $\xi \in (0, \alpha)$ ώστε

$P'(\xi) = 0 \Leftrightarrow P'(\xi) = 0 \Leftrightarrow G'(\xi) + \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_0^{\alpha} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, δηλαδή αποδείχθηκε ότι η εξίσωση (1)

έχει ρίζα $\xi \in (0, \alpha)$.

<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ</u>

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β΄

19 ΜΑΪΟΥ 2010

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, θεώρημα, σελίδα 304 σχολικού βιβλίου.

Α2. Θεωρία, ορισμός, σελίδα 279 σχολικού βιβλίου.

Α3. Θεωρία, ορισμός, σελίδα 273 σχολικού βιβλίου.

Α4.

α	β	γ	δ	ε
Σ	Σ	Λ	Λ	Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι: $z+\frac{2}{z}=2 \Leftrightarrow z^2-2z+2=0$.

Άρα $z_1=\frac{2-2i}{2}=1-i,\quad z_2=\frac{2+2i}{2}=1+i$.

Β2. Είναι: $z_1^{2010}+z_2^{2010}=(1-i)^{2010}+(1+i)^{2010}=\left[(1-i)^2\right]^{1005}+\left[(1+i)^2\right]^{1005}=$

$$=(1-2i-1)^{1005}+(1+2i-1)^{1005}=(-2i)^{1005}+(2i)^{1005}=(-2)^{1005}\cdot i^{1005}+2^{1005}\cdot i^{1005}=$$

$$=(-2)^{1005}\cdot(i^2)^{502}\cdot i+2^{1005}\cdot(i^2)^{502}\cdot i=(-2^{1005})\cdot i+(2^{1005})\cdot i=-2^{1005}\cdot i+2^{1005}\cdot i=0$$

<u>2η λύση:</u>

Είναι:

$$(1-i)^{2010}+(1+i)^{2010}=\ (1-i)^{2010}+\left[i(1-i)\right]^{2010}=$$

$$=(1-i)^{2010}+i^{2010}\cdot(1-i)^{2010}=(1-i)^{2010}\cdot(1+i^{2010})=(1-i)^{2010}\cdot(1-1)=0$$

Β3. Είναι

$|w-4+3i|=|z_1-z_2|=|1-i-1-i|=|-2i|=2$

Έστω $w=x+\psi i$, τότε

$|x+\psi i-4+3i|=2 \Leftrightarrow |(x-4)+(\psi+3)i|=2 \Leftrightarrow (x-4)^2+(\psi+3)^2=4$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο Κ (4, –3) και ακτίνα ρ = 2.

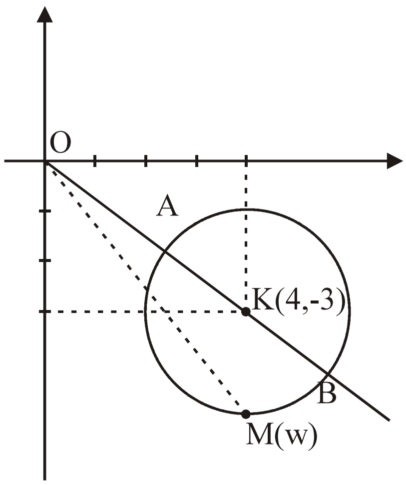
B4. Το |w| είναι η απόσταση της εικόνας M(w) από την αρχή O(0, 0), δηλαδή το μήκος (ΟΜ). Από τη Γεωμετρία όμως, γνωρίζουμε ότι αν η ευθεία ΟΚ τέμνει τον κύκλο στα σημεία Α και Β τότε

$$(OA) \leq (OM) \leq (OB) \quad (1)$$

που σημαίνει ότι η μέγιστη τιμή του |w| είναι το μήκος (ΟΒ) και η ελάχιστη το μήκος (ΟΑ).

Όμως

- $(OA) = (OK) - \rho = 5 - 2 = 3 \quad (2)$ και
- $(OB) = (OK) + \rho = 5 + 2 = 7 \quad (3)$



Επομένως, λόγω των (1),(2) και (3) έχουμε $3 \leq |w| \leq 7$.

<u>2η λύση:</u>

Γράφουμε :

$$|w| = |w + (-4+3i) - (-4+3i)|$$

Οπότε σύμφωνα με την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$\left| |w + (-4+3i)| - |-4+3i| \right| \leq |w + (-4+3i) - (-4+3i)| \leq |w + (-4+3i)| + |-4+3i| \text{ ή}$$

$$\left| |z_1 - z_2| - |-4+3i| \right| \leq |w| \leq |z_1 - z_2| + |-4+3i| \quad \text{ή} \quad |2-5| \leq |w| \leq 2+5 .$$

Άρα $3 \leq |w| \leq 7$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\Re$, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$f'(x) = 2 + \frac{1}{x^2+1}(x^2+1)' = 2 + \frac{2x}{x^2+1} = \frac{2x^2+2x+2}{x^2+1} = \frac{2(x^2+x+1)}{x^2+1}.$$

Επειδή $x^2+x+1>0$ καθώς και $x^2+1>0$ για κάθε $x \in \Re$, είναι $f'(x)>0$ για κάθε $x \in \Re$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

Γ2. Η δοσμένη εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$2(x^2-3x+2) = \ln\left[(3x-2)^2+1\right] - \ln(x^4+1) \Leftrightarrow$$

$$2x^2 - 2(3x-2) = \ln\left[(3x-2)^2+1\right] - \ln(x^4+1) \Leftrightarrow$$

$$2x^2 + \ln(x^4+1) = \ln\left[(3x-2)^2+1\right] + 2(3x-2) \Leftrightarrow$$

$$2x^2 + \ln(x^4+1) = 2(3x-2) + \ln\left[(3x-2)^2+1\right] \Leftrightarrow \ f(x^2) = f(3x-2) \qquad (1)$$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, θα είναι και 1-1.
Επομένως από την (1) προκύπτει
$x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$. Άρα $x = 1$ ή $x = 2$.

Γ3. Είναι $f''(x) = \left(2 + \dfrac{2x}{x^2+1}\right)' = 2\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)' = 2\dfrac{x'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$

$$= 2\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}.$$

Είναι $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 1$, ενώ είναι $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1,1)$ και $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$.

Έτσι η C_f έχει σημεία καμπής στα σημεία με τετμημένες $x_1 = -1,\ x_2 = 1$.

- Η εφαπτόμενη της C_f στο $x_1 = -1$ έχει εξίσωση (ε_1):

  $y - f(-1) = f'(-1)(x+1) \Leftrightarrow y - (-2 + \ln 2) = 1(x+1) \Leftrightarrow y = x + \ln 2 - 1$

  Για $x = 0$ προκύπτει $y = \ln 2 - 1$

- Η εφαπτόμενη της C_f στο $x_2 = 1$ έχει εξίσωση (ε_2):

  $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - (2+\ln 2) = 3(x-1) \Leftrightarrow y = 3x - 1 + \ln 2$

  Για $x = 0$ προκύπτει $y = \ln 2 - 1$.

  Οι (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $M(0, \ln 2 - 1)$ του άξονα $y'y$.

Γ4. $\int_{-1}^{1} x\, f(x)dx = \int_{-1}^{1} (2x^2 + x\ln(x^2+1))dx = 2\int_{-1}^{1} x^2 dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (x^2+1)' \ln(x^2+1)dx =$

$$= 2\int_{-1}^{1} x^2 dx + \frac{1}{2}[(x^2+1)\ln(x^2+1)]_{-1}^{1} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (x^2+1)\left[\ln(x^2+1)\right]' dx =$$

$$= 2\int_{-1}^{1} x^2 dx + \frac{1}{2}\left[(x^2+1)\ln(x^2+1)\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (x^2+1)\frac{2x}{(x^2+1)}dx =$$

$$= 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{2}\left[x^2\right]_{-1}^{1} = 2\frac{2}{3} - \frac{1}{2}(1-1) = \frac{4}{3}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση $\varphi(t) = \dfrac{t}{f(t) - t}$ είναι

α) ορισμένη σε όλο το $\Re$ αφού $f(t) \neq t$ για κάθε $t \in \Re$ και

β) συνεχής σε όλο το $\Re$, ως πηλίκο συνεχών.

Έτσι η συνάρτηση $f(x) = \int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t + x + 3$ είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$, με

$$f'(x) = \varphi(x) + 1 = \frac{x}{f(x)-x} + 1 = \frac{x + f(x) - x}{f(x)-x} = \frac{f(x)}{f(x)-x},\ x \in \Re.$$

Δ2. Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\Re$, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$g'(x) = \left[\left(f(x)\right)^2 - 2x\cdot f(x)\right]' = 2f(x)\cdot f'(x) - 2f(x) - 2x\cdot f'(x) =$$

$$= 2f'(x)\left(f(x)-x\right) - 2f(x) \overset{(\Delta 1)}{=} 2\frac{f(x)}{f(x)-x}\left(f(x)-x\right) - 2f(x) = 0,\ x \in \Re.$$

Άρα η g είναι συνεχής στο $\Re$.

Δ3. Είναι: $f(0) = 0 + 3 + \int_0^0 \dfrac{t}{f(t)-t}dt = 3$.

Λόγω του **Δ2** είναι $g(x) = c,\ c \in \Re$, για κάθε $x \in \Re$, άρα $\left(f(x)\right)^2 - 2x\cdot f(x) = c,$ για κάθε $x \in \Re$.

Για $x = 0$ προκύπτει $c = \left(f(0)\right)^2 - 2\cdot 0\cdot f(0) = 9$.

Έτσι $\left(f(x)\right)^2 - 2x\cdot f(x) = 9 \Leftrightarrow \left(f(x)\right)^2 - 2x\cdot f(x) + x^2 = x^2 + 9 \Leftrightarrow$

$\left(f(x) - x\right)^2 = x^2 + 9.$ (1)

Αν θέσουμε $h(x) = f(x) - x$, έχουμε ότι η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $\Re$ και $h(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Re$, αφού $f(x) \neq x$, $x \in \Re$.

Άρα η h διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\Re$, δηλαδή είναι
ή $h(x) > 0$ για κάθε $x \in \Re$ ή $h(x) < 0$ για κάθε $x \in \Re$.

Όμως $h(0) = f(0) - 0 = 3 > 0$ άρα

$h(x) > 0$, $x \in \Re$ και $f(x) > x$, $x \in \Re$. (2).

Από την (1) προκύπτει ότι

$$|f(x) - x| = \sqrt{x^2 + 9} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} f(x) - x = \sqrt{x^2 + 9} \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9},\ x \in \Re.$$

Δ4. Έστω $F(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt,\ x \in \Re$.

Είναι $F(x) = \int_c^{x+1} f(t)dt - \int_c^x f(t)dt,\ x \in R,\ c \in \Re.$
και $F'(x) = f(x+1) - f(x),\ x \in \Re$. (1)

Όμως $f'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} = \dfrac{\sqrt{x^2+9} + x}{\sqrt{x^2+9}} > \dfrac{\sqrt{x^2} + x}{\sqrt{x^2+9}} = \dfrac{|x| + x}{\sqrt{x^2+9}} \geq 0, x \in \Re$.

Δηλαδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in R$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

Προκύπτει έτσι: $x < x+1 \Rightarrow f(x) < f(x+1) \Rightarrow f(x+1) - f(x) > 0,\ x \in \Re$. (2)

Λόγω των (1), (2) η F είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

Επομένως: $x < x+1 \Leftrightarrow F(x) < F(x+1) \Leftrightarrow \int_x^{x+1} f(t)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$.

<u>2η λύση:</u>

Η $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ είναι μια αρχική της f στο $\Re$ και η προς απόδειξη ανισότητα

γράφεται

$$F(x+1) - F(x) < F(x+2) - F(x+1) \Leftrightarrow \frac{F(x+1) - F(x)}{(x+1) - x} < \frac{F(x+2) - F(x+1)}{(x+2) - (x+1)}.$$

Από Θ.Μ.Τ. για την F στα διαστήματα $[x, x+1]$ και $[x+1, x+2]$ προκύπτει ότι υπάρχουν αντίστοιχα $\xi_1 \in (x_1, x_1+1)$ και $\xi_2 \in (x+1, x+2)$ ώστε

$$\frac{F(x+1)-F(x)}{(x+1)-x} = F'(\xi_1) = f(\xi_1) \text{ και } \frac{F(x+2)-F(x+1)}{(x+2)-(x+1)} = F'(\xi_2) = f(\xi_2).$$

Έτσι αρκεί να δειχθεί $f(\xi_1) < f(\xi_2)$ με $\xi_1 < \xi_2$, ή ισοδύναμα ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Πράγματι:

$$f'(x) = \left(x+\sqrt{x^2+9}\right)' = 1+\frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{\sqrt{x^2+9}+x}{\sqrt{x^2+9}} > \frac{\sqrt{x^2}+x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{|x|+x}{\sqrt{x^2+9}} \geq 0, \text{ για κάθε}$$

$x \in \Re$, δηλαδή $f'(\mathrm{x}) > 0$ για κάθε $x \in \Re$ και η f γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β΄

16 ΜΑΪΟΥ 2011

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία (θεώρ. Fermat) σχολικό βιβλίο, σελ. 260-261.

Α2. Θεωρία (ορισμός) σχολικό βιβλίο, σελ. 280.

Α3.

α	β	γ	δ	ε
Σ	Σ	Λ	Λ	Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε από υπόθεση ότι:

$|z-3i|+|\bar{z}+3i|=2$ (1)

Όμως $|\bar{z}+3i|=|\overline{\bar{z}+3i}|=|z-3i|$ (2)

Οπότε από τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$|z-3i|+|z-3i|=2 \Leftrightarrow 2|z-3i|=2 \Leftrightarrow |z-3i|=1$ (3).

Αν $z = x + yi$ η (3) γράφεται: $|x+(y-3)i|=1 \Leftrightarrow x^2+(y-3)^2=1$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z είναι κύκλος με κέντρο το σημείο Κ(0,3) και ακτίνα $\rho = 1$.

Β2. Από το ερώτημα Β1 έχουμε: $|z-3i|=1$

Οπότε $|z-3i|^2=1 \Leftrightarrow (z-3i)\cdot\overline{(z-3i)}=1 \Leftrightarrow (z-3i)\cdot\left(\bar{z}+3i\right)=1 \Leftrightarrow \bar{z}+3i=\dfrac{1}{z-3i}$.

Β3. Σύμφωνα με την προηγούμενη ισότητα ο w γράφεται

$$w=z-3i+\frac{1}{z-3i}=z-3i+\bar{z}+3i=z+\bar{z}=2\operatorname{Re}(z)\in R.$$

Όμως από τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z έχουμε ότι: $x^2 \le 1 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$.
Και επειδή $x = \operatorname{Re}(z)$ προκύπτει ότι: $-1 \le \operatorname{Re}(z) \le 1$.
Οπότε: $-2 \le 2\operatorname{Re}(z) \le 2$. Άρα $-2 \le w \le 2$.

Β4. Είναι: $|z-w|=\left|z-z+3i-\dfrac{1}{z-3i}\right|=\left|3i-\dfrac{1}{z-3i}\right|=|3i-\bar{z}-3i|=|-\bar{z}|=|z|$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η δοσμένη σχέση γράφεται:

$$(e^x)' \cdot f'(x) + e^x \cdot f''(x) - (e^x)' = (x \cdot f'(x))' \Leftrightarrow$$
$$(e^x \cdot f'(x) - e^x)' = (x \cdot f'(x))' \Leftrightarrow e^x \cdot f'(x) - e^x = x \cdot f'(x) + c_1,\ c_1 \in R$$

Για x = 0 προκύπτει:

$e^0 \cdot f'(0) - e^0 = 0 \cdot f'(0) + c_1$ και λόγω των δεδομένων αρχικών συνθηκών είναι

$c_1 = -1$.

Η τελευταία σχέση έτσι γράφεται:

$$e^x \cdot f'(x) - e^x = x \cdot f'(x) - 1 \Leftrightarrow f'(x)(e^x - x) = e^x - 1 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \left[\ln(e^x - x)\right]' \Leftrightarrow f(x) = \ln(e^x - x) + c_2.$$

Για x = 0 προκύπτει $c_2 = 0$.

Έτσι $f(x) = \ln(e^x - x)$.

(*) Αν θέσουμε $h(x) = e^x - x,\ x \in R$, είναι:

$h'(x) = e^x - 1,\ x \in R$.

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \overset{e^x\ 1-1}{\Leftrightarrow} x = 0.$$

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \overset{e^x \uparrow}{\Leftrightarrow} x > 0.$$

$$h'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < e^0 \overset{e^x \uparrow}{\Leftrightarrow} x < 0.$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
h′		−	0	+	
h		↘	1	↗	

Έτσι η h έχει ολικό ελάχιστο στη θέση x=0 την τιμή $h(0) = e^0 - 0 = 1$.

Δηλαδή $h(x) \geq 1 > 0$, για κάθε $x \in R$.

Γ2. Είναι $f'(x) = \left[\ln(e^x - x)\right]' = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$.

Λόγω της παρατήρησης (*) του ερωτήματος Γ1 οι ρίζες και το πρόσημο, συνεπώς ο πίνακας μεταβολών της f εξαρτάται μόνον από τις ρίζες και το πρόσημο του αριθμητού. $h'(x) = e^x - 1$.

Συνεπώς $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$f'(x)>0 \Leftrightarrow x>0$.

$f'(x)<0 \Leftrightarrow x<0$.

Άρα η f είναι: γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση x = 0 την τιμή $f(0)=\ln(e^0-0)=\ln 1=0$.

Γ3. Είναι: $f''(x)=\left(\dfrac{e^x-1}{e^x-x}\right)'=\dfrac{\left(e^x-1\right)'\left(e^x-x\right)-\left(e^x-1\right)\left(e^x-x\right)'}{\left(e^x-x\right)^2}=$

$$=\frac{e^x\left(e^x-x\right)-\left(e^x-1\right)\left(e^x-1\right)}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{e^x\left(e^x-x\right)-\left(e^x-1\right)^2}{\left(e^x-x\right)^2}=$$

$$=\frac{e^{2x}-xe^x-(e^{2x}-2e^x+1)}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{(2-x)e^x-1}{\left(e^x-x\right)^2}.$$

Θέτουμε $\varphi(x)=(2-x)e^x-1,\ x\in R$.

Είναι:

$\varphi'(x) = -e^x + (2-x)\cdot e^x = e^x(1-x)$

$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$

$\varphi'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Φ΄		+	0	−	
Φ		↗	e − 1	↘	

Προκύπτει ότι η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ και έχει ολικό μέγιστο $\varphi(1) = e-1 > 0$.

Βρίσκουμε τώρα τα όρια της φ στα $-\infty$, $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[(2-x)\cdot e^x-1\right]=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(2-x)\cdot e^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-x}{e^{-x}}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{(2-x)'}{\left(e^{-x}\right)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{-e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{e^{-x}}=0$$

Έτσι $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=-1$.

Λόγω της συνέχειας και της μονοτονίας της φ είναι

$$\varphi\left((-\infty,1]\right)=\left(\lim_{x\to-\infty}\varphi(x),\varphi(1)\right]=(-1,e-1].$$

$$\varphi\left([1,+\infty)\right)=\left(\lim_{x\to+\infty}\varphi(x),\varphi(1)\right]=(-\infty,e-1].$$

Παρατηρούμε ότι:

- $0\in\varphi\left((-\infty,1]\right)$ άρα υπάρχει $x_1\in(-\infty,1]$ ώστε $\varphi(x_1)=0$.

  Εν τω μεταξύ η φ είναι γνησίως αύξουσα, άρα εκατέρωθεν του x_1 αλλάζει πρόσημο. Διότι με $x < x_1$ είναι $\varphi(x) < \varphi(x_1) \Leftrightarrow \varphi(x_1) < 0$

  Ενώ με $1 > x > x_1$ είναι $\varphi(x) > \varphi(x_1) \Leftrightarrow \varphi(x) > 0$.

  Έτσι ισοδύναμα (επειδή $(e^x-x)^2>0$ για κάθε $x\in R$) η f'' έχει μία μόνο ρίζα στο $(-\infty,1]$, εκατέρωθεν της οποίας αλλάζει πρόσημο.

- Όμοια τώρα $0\in\varphi\left([1,+\infty]\right)$ άρα υπάρχει $x_2\in[1,+\infty)$, ώστε $\varphi(x_2)=0$. Εν τω μεταξύ η φ είναι γνησίως φθίνουσα άρα εκατέρωθεν του x_2 αλλάζει πρόσημο.

  Διότι με $1 < x < x_2$ είναι $\varphi(x) > \varphi(x_2) \Leftrightarrow \varphi(x) > 0$

  Ενώ με $x > x_2$ είναι $\varphi(x) < \varphi(x_2) \Leftrightarrow \varphi(x) < 0$.

  Έτσι η f'' έχει επίσης μία μόνο ρίζα x_2 στο $[1,+\infty)$, εκατέρωθεν της οποίας αλλάζει πρόσημο. Άρα τελικά, η f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής στις θέσεις x_1,x_2.

Γ4. Θέτουμε $g(x)=\ln(e^x-x)-\text{συν}\,x=f(x)-\text{συν}\,x,\ x\in R.$

- Ύπαρξη : Η g είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών στο R, άρα και στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

  Είναι $g(0)=f(0)-\text{συν}(0)=-1<0$

  $$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)-\text{συν}\frac{\pi}{2}=f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

  Όμως $f\uparrow$ στο $[0,+\infty)$, άρα είναι $\frac{\pi}{2}>0\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)>f(0)\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0.$

  Έτσι $g(0)\cdot g\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$, οπότε λόγω του Θ. Bolzano η g έχει μία ρίζα στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

- Μοναδικότητα:

Θα δείξουμε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, οπότε η ρίζα θα είναι μοναδική.

Έστω $x_1, x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ με $x_1 < x_2$ τότε

$f(x_1) < f(x_2)$ διότι $f \uparrow$ στο $[0, +\infty)$

$\text{συν}\, x_1 > \text{συν}\, x_2$ διότι $\text{συν}\, x \downarrow$ στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Άρα $-\text{συν}\, x_1 < -\text{συν}\, x_2$.

Έτσι όμως $f(x_2) - \text{συν}\, x_1 < f(x_2) - \text{συν}\, x_2$, άρα $g(x_1) < g(x_2)$.

Άρα g γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

<u>Παρατήρηση (2ος τρόπος για τη μονοτονία):</u>

Η μονοτονία της g στο [0, π/2] μπορεί να προκύψει και ως εξής:

g΄(x) = f΄(x) + ημx. Όμως f΄(x) > 0, για κάθε x ∈ (0, +∞) άρα και για κάθε x ∈ (0, π/2), ενώ επίσης ημx > 0 για κάθε x ∈ (0, π/2).

Άρα g΄(x) > 0 για κάθε x ∈ (0, π/2) και επομένως g γνησίως αύξουσα στο [0, π/2].

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε ότι:

$$\frac{1 - f(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)}\,\mathrm{dt}$$

Θέτουμε: x + t = u ⇔ t = u – x. Οπότε: dt = du.

Ακόμη για t = 0 έχουμε u = x και για t = – x έχουμε u = 0.

Επομένως:

$$\frac{1 - f(x)}{e^{2x}} = \int_x^{0} \frac{e^{2u-2x}}{g(u)}\,\mathrm{du} = \int_x^{0} e^{-2x}\frac{e^{2u}}{g(u)}\,\mathrm{du} = e^{-2x}\int_x^{0} \frac{e^{2u}}{g(u)}\,\mathrm{du} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - f(x) = -e^{2x}e^{-2x}\int_0^{x} \frac{e^{2u}}{g(u)}\,\mathrm{du} \Leftrightarrow 1 - f(x) = -\int_0^{x} \frac{e^{2u}}{g(u)}\,\mathrm{du}$$

Άρα $f(x)=1+\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)}\,\mathrm{du}$ (1)

Με ανάλογο τρόπο προκύπτει ότι:

$$g(x)=1+\int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)}\,\mathrm{du} \quad (2)$$

Επειδή οι συναρτήσεις $\frac{e^{2u}}{g(u)}$ και $\frac{e^{2u}}{f(u)}$ είναι συνεχείς στο [0, x] με x ∈ R συμπεραίνουμε ότι οι συναρτήσεις $\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)}\,\mathrm{du}$ και $\int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)}\,\mathrm{du}$ είναι παραγωγίσιμες στο R, επομένως και οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο R.

$$f'(x)=\frac{e^{2x}}{g(x)} \quad \text{και} \quad g'(x)=\frac{e^{2x}}{f(x)}$$

οπότε $f'(x)g(x)=e^{2x}$ και $g'(x)f(x)=e^{2x}$

άρα

$$f'(x)g(x)=g'(x)f(x) \Leftrightarrow f'(x)g(x)-g'(x)f(x)=0 \overset{g(x)>0}{\Rightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=0\,.$$

Από την τελευταία προκύπτει ότι: $\frac{f(x)}{g(x)}=c$

και επειδή $f(0)=g(0)\overset{(1)\&(2)}{=}1$, θα είναι c = 1.

Άρα $f(x)=g(x)$.

Δ2. Επειδή είναι:

$$f'(x)=\frac{e^{2x}}{f(x)} \Leftrightarrow \quad \text{(Ερώτημα Δ1)}$$

$$f'(x)f(x)=e^{2x} \Leftrightarrow 2f'(x)f(x)=2e^{2x} \Leftrightarrow \left(f^2(x)\right)'=\left(e^{2x}\right)'$$

Σύμφωνα με γνωστό θεώρημα (συνέπεια του Θ.Μ.Τ.) έχουμε:

$$f^2(x)=e^{2x}+c$$

Όμως $f(0)=1$, οπότε $c=0$.

Άρα $f^2(x)=e^{2x} \Leftrightarrow \left[f(x)\right]^2=\left[e^x\right]^2 \Leftrightarrow |f(x)|=e^x$

Και επειδή $f(x)>0$, προκύπτει ότι $f(x)=e^x$.

Δ3. Είναι

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln e^x}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^-}\left(x\cdot e^{-\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{=}(De\,L'\,Hospital)\ (*)$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{-1}{x}}\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=-\lim_{x\to 0^-}e^{\frac{-1}{x}}=-\infty.$$

(*): Θέτουμε $\frac{1}{x}=y$ οπότε το $\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to -\infty}\frac{e^{-y}}{y}:\ \frac{+\infty}{-\infty}$.

Δ4. Είναι $F'(x)=f(x^2)>0$. Άρα η $F\uparrow$ στο $[0,1]$.
Άρα για $0\le x\le 1$ θα είναι $F(x)\le F(1)$ και επειδή $F(1)=0$, προκύπτει ότι $F(x)\le 0$ $\forall x\in[0,1]$.
Επομένως $\forall x\in[0,1]$, θα είναι:

$$E=-\int_0^1 F(x)dx=-\int_0^1 x'F(x)dx=-\left[xF(x)\right]_0^1+\int_0^1 xF'(x)dx=$$

$$=-F(1)+\int_0^1 x\left(\int_1^x f(t^2)\right)'\mathrm{dx}=\int_0^1 xf(x^2)\mathrm{dx}=$$

$$=\int_0^1 xe^{x^2}\mathrm{dx}=\frac{1}{2}\int_0^1 2xe^{x^2}\mathrm{dx}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(e^{x^2}\right)'\mathrm{dx}=\frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1=\frac{1}{2}(e-1)\ \text{τ.μ.}$$

<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ</u>

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β΄

28 ΜΑΪΟΥ 2012

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, σελ. 253, σχολικού βιβλίου.

Α2. Θεωρία, σελ. 191, σχολικού βιβλίου.

Α3. Θεωρία, σελ. 258, σχολικού βιβλίου.

Α4. **α)** $\to$ Σ, **β)** $\to$ Σ, **γ)** $\to$ Λ, **δ)** $\to$ Λ, **ε)** $\to$ Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. α΄ τρόπος: Αν $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, η σχέση (1) γράφεται

$$\left|(x-1)+yi\right|^2 + \left|(x+1)+yi\right|^2 = 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + (x+1)^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 .$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$.

β΄ τρόπος: Η σχέση (1) γράφεται:

$$(z-1)\cdot\overline{(z-1)} + (z+1)\cdot\overline{(z+1)} = 4 \Leftrightarrow (z-1)\cdot(\overline{z}-1) + (z+1)\cdot(\overline{z}+1) = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z\cdot\overline{z} - z - \overline{z} + 1 + z\cdot\overline{z} + z + \overline{z} + 1 = 4 \Leftrightarrow 2\cdot z\cdot\overline{z} = 2 \Leftrightarrow z\cdot\overline{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1 .$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$.

Β2. Έστω $|z_1 + z_2| = k,\ k \geq 0.$ Τότε

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 = 2 \Leftrightarrow (z_1 - z_2)\left(\overline{z_1 - z_2}\right) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z_1 - z_2)(\overline{z}_1 - \overline{z}_2) = 2 \Leftrightarrow z_1\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 - z_2\overline{z}_1 - z_1\overline{z}_2 = 2 \Leftrightarrow$$

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 - \left(z_2\overline{z}_1 + z_1\overline{z}_2\right) = 2 \quad (2\alpha)$$

$$|z_1 + z_2| = x \Leftrightarrow |z_1 + z_2|^2 = x^2 \Leftrightarrow (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1 + z_2}\right) = x^2 \Leftrightarrow$$

$$(z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2) = x^2 \Leftrightarrow z_1\overline{z}_1 + z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1 + z_1\overline{z}_2 = x^2 \Leftrightarrow$$

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + \left(z_2\overline{z}_1 + z_1\overline{z}_2\right) = x^2 \quad (2\beta).$$

Προσθέτοντας τις (2α), (2β) κατά μέλη έχουμε: $2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right) = k^2 + 2.$

Όμως $|z_1| = 1,\quad |z_2| = 1$ οπότε προκύπτει $k^2 + 2 = 4 \Leftrightarrow k^2 = 2 \Leftrightarrow k = \sqrt{2},$ αφού $k \geq 0.$

Β3. $$\left|w - 5\overline{w}\right| = 12 \Leftrightarrow \left|w - 5\overline{w}\right|^2 = 12^2 \Leftrightarrow (w - 5\overline{w})\cdot(\overline{w} - 5w) = 144 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w\overline{w} - 5w^2 - 5\overline{w}^2 + 25w\overline{w} = 144 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |w|^2 - 5(w^2 + \overline{w}^2) + 25|w|^2 = 144 \Leftrightarrow 26|w|^2 - 5(w^2 + \overline{w}^2) = 144 \qquad (3)$$

Έστω $w = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ τότε η σχέση (3) γίνεται:

$26(\sqrt{x^2+y^2})^2-5\left[(x+yi)^2+(x-yi)^2\right]=144 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 26(x^2+y^2)-5(x^2-y^2+2xyi+x^2-y^2-2xyi)=144 \Leftrightarrow$

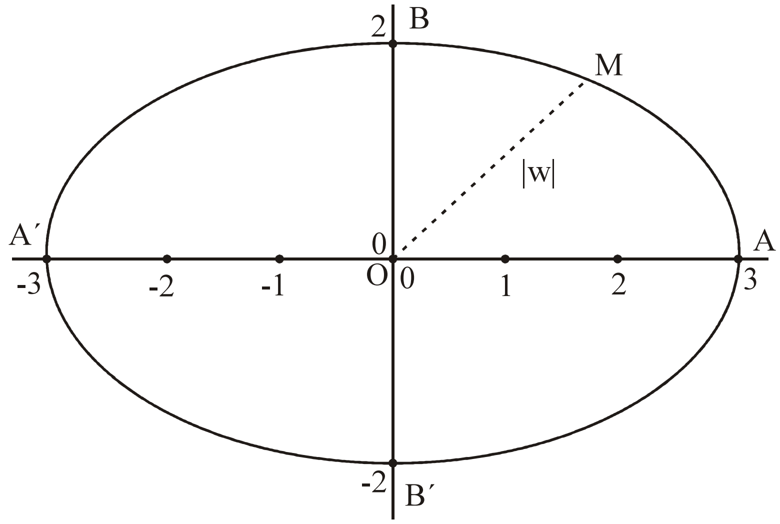
$\Leftrightarrow 26x^2+26y^2-5(2x^2-2y^2)=144 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 26x^2+26y^2-10x^2+10y^2=144 \Leftrightarrow 16x^2+36y^2=144 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^2+9y^2=36 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$.

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w είναι η παραπάνω έλλειψη με μήκος μεγάλου ημιάξονα $a=3$ και μήκος μικρού ημιάξονα $\beta=2$.

Είναι όμως γνωστό (μαθ. κατεύθυνσης Β Λυκείου, σελίδα 104) ότι για οποιοδήποτε σημείο M της έλλειψης ισχύει ότι $2\beta \le 2OM \le 2\alpha$ ή $\beta \le OM \le \alpha$.
Αν Α΄, Α, Β΄, Β οι κορυφές της έλλειψης, τότε: $A'(-3,0)$, $A(3, 0)$, $B'(0, -2)$, $B(0, 2)$.
Έτσι $|w|_{\max}=(OA)=(OA')=3$ και $|w|_{\min}=(OB)=(OB')=2$.



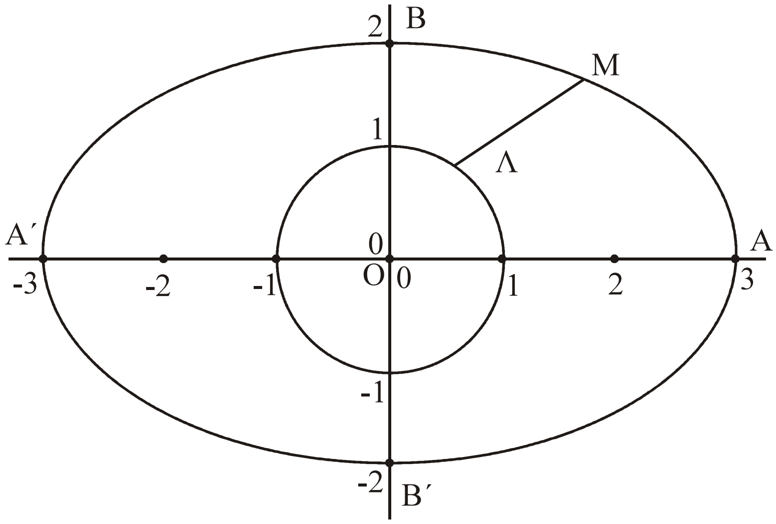
<u>Παρατήρηση 1:</u> Το παραπάνω σχήμα είναι επιβοηθητικό της κατανόησης από τους μαθητές και δεν είναι απαραίτητο για τη λύση του ερωτήματος.

B4. Με βάση την τριγωνική ανισότητα και επειδή $|z-w|=|w-z|$ έχουμε:

$\big||w|-|z|\big| \le |w-z| \le |w|+|z| \Leftrightarrow \big||w|-1\big| \le |w-z| \le |w|+1$ (4)

Όμως λόγω του B_3 είναι $2 \le |w| \le 3$, άρα: $|w|-1 \ge 1$ και $|w|+1 \le 4$.

Τότε όμως η (4) γράφεται: $1 \le |w-z| \le 4$.



Η παραπάνω ανίσωση είναι η αλγεβρική έκφραση της $1 \leq (ΛM) \leq 3$, με $(OΛ) = |z|$, $OM = |w|$ και $(ΛM) = |z - w|$ η οποία προκύπτει από το παραπάνω σχήμα.

<u>Παρατήρηση 2:</u> Το σχήμα και εδώ δεν είναι απαραίτητο. Θα μπορούσε όμως πιθανώς και μια τέτοια «γεωμετρική λύση», αν και όχι τόσο αυστηρή όσο η αλγεβρική, να γίνει κατά ένα ποσοστό μονάδων βαθμολογίας αποδεκτή ανεξάρτητη λύση, καθόσον αναδεικνύει κατανόηση της έννοιας της μετρικής στο μιγαδικό επίπεδο.

<u>Παρατήρηση 3:</u>
Τα δύο πρώτα ερωτήματα του δεύτερου θέματος θα μπορούσαν να απαντηθούν χρησιμοποιώντας την άσκηση Α9 του σχολ. Βιβλίου σελ. 101, γνωστή ως κανόνα του παραλληλογράμμου (αφού πρώτα αποδειχθεί) :
Για κάθε $z_1, z_2 \in C$ ισχύει ότι $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$

Απόδειξη:
$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2) + (z_1 - z_2)(\overline{z}_1 - \overline{z}_2)$$
$$= z_1\overline{z}_1 + \overline{z}_1 z_2 + z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_2 + z_1\overline{z}_1 - \overline{z}_1 z_2 - z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_2 = 2z_1\overline{z}_1 + 2z_2\overline{z}_2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$$

Β1. γ΄ τρόπος: για $z_1 = z$ και $z_2 = 1$ έχουμε :
$$|z-1|^2 + |z+1|^2 = 2|z|^2 + 2|1|^2 \Leftrightarrow$$
$$4 = 2|z|^2 + 2 \Leftrightarrow 2|z|^2 = 2 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$$
Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων O και ακτίνα $\rho = 1$.

Β2. β΄ τρόπος: Από τον κανόνα του παραλληλογράμμου έχουμε ότι
$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 \Leftrightarrow$$
$$|z_1 + z_2|^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2 \Leftrightarrow$$
$$|z_1 + z_2|^2 + 2 = 2 + 2 \Leftrightarrow |z_1 + z_2| = \sqrt{2}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη με $f'(x) = \ln x + \dfrac{x-1}{x} = \ln x + 1 - \dfrac{1}{x}$, $x \in (0\ +\infty)$.

- Όταν $x \in (0, 1)$ είναι $x < 1$ και επειδή η συνάρτηση $\ln x$ είναι γνησίως αύξουσα έχουμε $\ln x < \ln 1 \Leftrightarrow \ln x < 0$. Επίσης $x - 1 < 0$ και $x > 0$ άρα $\dfrac{x-1}{x} < 0$.
  Έτσι $\ln x + \dfrac{x-1}{x} < 0$ για κάθε $x \in (0,1)$, άρα η f είναι γν. φθίνουσα στο $(0,1]$.

- Όταν $x \in (1, +\infty)$ είναι $x > 1$ και επειδή lnx γνησίως αύξουσα είναι $\ln x > \ln 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \ln x > 0$. Επίσης είναι $\dfrac{x-1}{x} > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$, οπότε $\ln x + \dfrac{x-1}{x} > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$. Δηλαδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$. Έτσι όμως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Από τα προηγούμενα προκύπτει ο επόμενος πίνακας μεταβλητών για την f:

x	0		1		$+\infty$
f′	‖	−	0	+	
f	‖	↘		↗	
			min (-1)		

Επειδή f γνησίως φθίνουσα στο (0, 1] είναι $f\big((0,1]\big) = \Big[f(-1), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\Big)$.

Όμως $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\big[(x-1)\ln x - 1\big] = +\infty$.

Άρα $f\big((0,1]\big) = [-1, +\infty)$ (1).

Επίσης επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ είναι

$f\big([1,+\infty)\big) = \Big[f(1), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\Big)$.

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\big[(x-1)\ln x - 1\big] = +\infty$.

Άρα $f\big([1,+\infty)\big) = [-1, +\infty)$ (2).

Από (1), (2) προκύπτει ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $[-1, +\infty)$.

<u>Παρατήρηση:</u> Η μονοτονία της f στα διαστήματα $(0, 1]$ και $[1, +\infty)$ μπορεί να προκύψει και από το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου:

$$f''(x) = \frac{1}{x} - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και επειδή $f'(1) = 0$ η x = 1 είναι μοναδική ρίζα της $f'(x) = 0$. Ακόμη, είναι:

- $0 < x < 1 \Leftrightarrow f'(x) < f'(1) \Leftrightarrow f'(x) < 0$ άρα η f είναι γν. φθίνουσα στο (0, 1].
- $x > 1 \Leftrightarrow f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$, άρα η f είναι γν. αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Η f παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x = 1$ το $f(1) = (1 - 1) \cdot \ln 1 - 1 = -1$.

Γ2. Η εξίσωση $x^{x-1} = e^{2013}$ (επειδή η συνάρτηση $y = \ln x$ είναι γνησίως αύξουσα και άρα 1–1) γράφεται ισοδύναμα:

$\ln(x^{x-1}) = \ln(e^{2013}) \Leftrightarrow (x-1)\ln x = 2013 \Leftrightarrow (x-1)\ln x - 1 = 2012 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) - 2012 = 0$.

Από το Γ_1 ερώτημα είναι:

α) $f\big((0,1]\big) = [-1, +\infty)$ άρα υπάρχει $x_1 \in (0, 1]$ ώστε $f(x_1) = 2012$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα είναι και 1–1, άρα η τιμή x_1 είναι μοναδική στο διάστημα (0,1].

β) $f\big([1,+\infty]\big) = [-1,+\infty)$, άρα υπάρχει $x_2 \in [1, +\infty)$ ώστε $f(x_2) = 2012$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα είναι και 1–1, άρα η τιμή x_2 είναι μοναδική στο διάστημα $[1, +\infty)$.

Από α) και β) προκύπτει ότι η δοσμένη εξίσωση έχει 2 ακριβώς θετικές ρίζες.

Γ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = e^x f(x) - 2012 \cdot e^x$ με $x \in (0,+\infty)$.

- Η h είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.
- Η h είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x) = \big(f'(x) + f(x) - 2012\big)e^x$.
- $h(x_1) = e^{x_1} f(x_1) - 2012 \cdot e^{x_1} = 2012 \cdot e^{x_1} - 2012 \cdot e^{x_1} = 0$

  $h(x_2) = e^{x_2} f(x_2) - 2012 \cdot e^{x_2} = 2012 \cdot e^{x_2} - 2012 \cdot e^{x_2} = 0$

Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle για την h στο $[x_1, x_2]$, οπότε υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$, ώστε $h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow$

$e^{x_0}\big(f'(x_0) + f(x_0) - 2012\big) = 0 \overset{e^{x_0} \neq 0}{\Leftrightarrow} f'(x_0) + f(x_0) - 2012 = 0$.

<u>Β΄ τρόπος</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f'(x) + f(x) - 2012$ με $x > 0$.

Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως γινόμενο συνεχών.

Η f' είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως άθροισμα συνεχών.

Άρα η h είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως άθροισμα συνεχών.

- Άρα η h είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$.
- $h(x_1) = f'(x_1) + f(x_1) - 2012 \overset{\Gamma 2}{=} f'(x_1) + 2012 - 2012 = f'(x_1) < 0$, αφού από το Γ1 για $x \in (0, 1)$ είναι $f'(x) < 0$.
- $h(x_2) = f'(x_2) + f(x_2) - 2012 \overset{\Gamma 2}{=} f'(x_2) + 2012 - 2012 = f'(x_2) > 0$, αφού από το Γ1 για $x \in (0, +\infty)$ είναι $f'(x) > 0$.

Δηλαδή είναι $h(x_2) \cdot h(x_2) < 0$. Από το Θεώρημα Bolzano θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (x_1, x_2)$ ώστε:

$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) + f(x_0) - 2012 = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) + f(x_0) = 2012$.

Γ4. Είναι: $g(x) = f(x)+1 = (x-1)\ln x - 1 + 1 = (x-1)\ln x > 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

Άρα: $E(\Omega) = \int_1^e (x-1)\ln x dx = \int_1^e x\ln x dx - \int_1^e \ln x dx = \int_1^e (\frac{x^2}{2})' \ln x dx - \int_1^e (x)' \ln x dx =$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx - [x\ln x]_1^e + \int_1^e dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\int_1^e xdx - e + [x]_1^e =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e - e + e - 1 = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} - 1 = \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4} = \frac{e^2-3}{4} \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$G(x) = \int_1^{x^2-x+1} f(t)dt - \frac{x-x^2}{e}$, $x \in (0,+\infty)$.

$\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt = H(x^2 - x + 1)$, όπου $H(x) = \int_1^x f(t)dt$. Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ άρα η $H(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο στο $(0, +\infty)$. Επίσης η $y = x^2 - x + 1$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πολυωνυμική, άρα και η $H(x^2 - x + 1)$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Επίσης παραγωγίσιμη είναι και η $-\frac{x-x^2}{e}$ ως πολυωνυμική. Έτσι η G είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων με $G'(x) = f(x^2-x+1)(2x-1) - \frac{1}{e}(1-2x)$, για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

Η δοσμένη σχέση $\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt \geq \frac{x-x^2}{e}$ επειδή $G(1) = 0$ γράφεται ισοδύναμα:

$\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt - \frac{x-x^2}{e} \geq 0 \Leftrightarrow G(x) \geq G(1)$, για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

Η συνάρτηση G είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = 1$ που είναι εσωτερικό σημείο του $(0, +\infty)$.

Από το θεώρημα Fermat προκύπτει τότε ότι $G'(1) = 0 \Leftrightarrow f(1) = -\frac{1}{e}$.

Επειδή η f συνεχής στο $(0,+\infty)$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$, η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,+\infty)$ και επειδή $f(1) = -\frac{1}{e} < 0$, είναι $f(x) < 0$, $x \in (0,+\infty)$.

Έτσι $|f(x)| = -f(x)$ και από τη δοσμένη σχέση προκύπτει

$\ln x - x = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)(f(x))$.

Για τη συνάρτηση $h(x) = \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e$ ισχύει $h(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$, διότι αν υπήρχε $\xi \in (0,+\infty)$ ώστε $h(\xi) = 0$ τότε θα ήταν $\ln\xi - \xi = 0$. Αυτό όμως είναι άτοπο επειδή για τη συνάρτηση $\varphi(x) = \ln x - x$ ισχύει $\varphi(x) \leq -1 < 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$ (σύμφωνα με τη γνωστή εφαρμογή στη σελ.266 του σχολ. βιβλίου) αλλά μπορεί και να αποδειχθεί: $\varphi'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$ οπότε όπως προκύπτει από τον πίνακα μεταβολών της φ είναι $\varphi(x) \le -1 < 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

x	0		1		$+\infty$
φ΄(x)	‖	+	0	−	
φ(x)	‖	$\nearrow$	max φ(1) = -1	$\searrow$	

(*) Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\ln x - x}{\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)}$ είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, ενώ προκύπτει $\frac{\ln x - x}{f(x)} = \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e$.

Οι συναρτήσεις και στα δύο μέλη είναι παραγωγίσιμες οπότε:

$\left(\frac{\ln x - x}{f(x)}\right)' = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)'$, άρα $\left(\frac{\ln x - x}{f(x)}\right)' = \frac{\ln x - x}{f(x)}$.

Αν θέσουμε $g(x) = \frac{\ln x - x}{f(x)}$ έχουμε $g'(x) = g(x)$ για κάθε x ∈ (0, +∞), οπότε σύμφωνα με την εφαρμογή της σελίδας 252 του σχολικού βιβλίου είναι:

$g(x) = ce^x$, δηλαδή $\frac{\ln x - x}{f(x)} = ce^x$.

Για $x = 1$ προκύπτει $\frac{-1}{f(1)} = c \cdot e \Leftrightarrow e = c \cdot e \Leftrightarrow c = 1$.

Άρα τελικά $f(x) = \frac{\ln x - x}{e^x} = e^{-x}(\ln x - x)$, $x \in (0, +\infty)$.

(*) Παρατήρηση:

Από το σημείο αυτό θα μπορούσε να ακολουθηθεί και η εξής πορεία:

Για την συνάρτηση h(x) = $\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt$ +e έχουμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ διότι η $\frac{\ln t - t}{f(t)}$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών. Είναι h'(x) = $\frac{\ln x - x}{f(x)}$, οπότε από την σχέση $\ln x - x = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)(f(x))$ προκύπτει $\ln x - x = h(x) f(x) \Leftrightarrow$

$\frac{\ln x - x}{f(x)} = h(x) \Leftrightarrow h'(x) = h(x)$, $x \in (0, +\infty)$. Τότε όμως είναι $h(x) = ce^x$.

Επειδή $h(1) = 1$ προκύπτει $c = 1$, άρα $h(x) = e^x$.

Δηλαδή $\dfrac{\ln x - x}{f(x)} = e^x \Leftrightarrow f(x) = e^{-x}(\ln x - x),\ x \in (0,+\infty)$.

Δ2. Είναι: $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-x} = e^0 = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}(-x) = 0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-x}(\ln x - x) = -\infty$.

Τότε όμως $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Αν θέσουμε $\dfrac{1}{f(x)} = u$ έχουμε $u<0$ και

$$\lim_{x\to 0^+}\left[f^2(x)\eta\mu\frac{1}{f(x)} - f(x)\right] = \lim_{u\to 0^-}\left[\frac{1}{u^2}\eta\mu u - \frac{1}{u}\right] = \lim_{u\to 0^-}\left(\frac{\eta\mu u - u}{u^2}\right) \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{u\to 0^-}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu u - 1}{2u}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{u\to 0^-}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu u - 1}{u}\right) = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0.$$

Δ3. Η F είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $F'(x) = f(x)$ και

$$F''(x) = f'(x) = -e^{-x}(\ln x - x) + e^{-x}\left(\frac{1}{x} - 1\right) = e^{-x}\left[\frac{1}{x} + (x - 1 - \ln x)\right].$$

Επειδή $x - 1 - \ln x \geq 0$ και $\dfrac{1}{x} > 0$, για κάθε x>0 είναι $F''(x) > 0$, για κάθε x>0.

Άρα η F είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

Η σχέση τώρα $F(x) + F(3x) > 2F(2x)$, x>0 γράφεται:

$$F(3x) - F(2x) > F(2x) - F(x),\ x>0 \Leftrightarrow \frac{F(3x) - F(2x)}{3x - 2x} > \frac{F(2x) - F(x)}{2x - x},\ x > 0.$$

Από Θ.Μ.Τ. για την F στα διαστήματα $[x, 2x]$ και $[2x, 3x]$ αντίστοιχα υπάρχουν

$\xi_1 \in (x, 2x)$ και $\xi_2 \in (2x, 3x)$ ώστε $F'(\xi_1) = \dfrac{F(2x) - F(x)}{2x - x}$ και $F'(\xi_2) = \dfrac{F(3x) - F(2x)}{3x - 2x}$,

οπότε αρκεί να δειχθεί ότι $F'(\xi_2) > F'(\xi_1)$ με $x < \xi_1 < 2x < \xi_2 < 3x$. Η τελευταία είναι αληθής διότι η F είναι κυρτή και άρα η F' γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Δ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = 2F(x) - F(\beta) - F(3\beta)$, $x \in [\beta, 2\beta]$.

Η F είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ άρα και η h.

$h(\beta) = F(\beta) - F(3\beta)$

$h(2\beta) = 2F(2\beta) - F(\beta) - F(3\beta)$.

Επειδή $F'(x) = f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ η F είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Έτσι από $\beta < 3\beta$ έπεται: $F(\beta) > F(3\beta) \Leftrightarrow F(\beta) - F(3\beta) > 0 \Leftrightarrow h(\beta) > 0$.

Λόγω τώρα του Δ3 είναι $h(\beta) = 2F(2\beta) - F(\beta) - F(3\beta) < 0$.

Άρα $h(\beta)\cdot h(2\beta) < 0$, οπότε λόγω του θεωρ. Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει

$\xi \in (\beta, 2\beta)$ ώστε $h(\xi) = 0 \Leftrightarrow F(\beta) + F(3\beta) = 2F(\xi)$.

Η τιμή ξ είναι μοναδική διότι η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα και άρα 1–1, αφού $h'(x) = F'(x) = f(x) < 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ</u>

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β΄

27 ΜΑΪΟΥ 2013

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σελ. 304, σχολικού βιβλίου.

Α2. Θεωρία σελ. 247, σχολικού βιβλίου.

Α3. Θεωρία σελ. 222, σχολικού βιβλίου.

Α4. **α)** $\rightarrow$ Λ, **β)** $\rightarrow$ Σ, **γ)** $\rightarrow$ Σ, **δ)** $\rightarrow$ Λ, **ε)** $\rightarrow$ Σ.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η δοσμένη σχέση γράφεται:

$|z-2|^2 + |z-2| = 2 \Leftrightarrow |z-2|^2 + |z-2| - 2 = 0.$

Αν $|z-2| = y$ είναι $y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 1$ ή $y = -2$.

Όμως $y = |z-2| \geq 0$ άρα $|z-2| = 1$.

Οπότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z είναι κύκλος με κέντρο Κ(2, 0) και ακτίνα ρ = 1.

Β2. Είναι $z_1 = \dfrac{-\beta - \sqrt{-\Delta}i}{2}$ και $z_2 = \dfrac{-\beta + \sqrt{-\Delta}i}{2}$, οπότε

$$\left|\mathrm{Im}(z_1) - \mathrm{Im}(z_2)\right| = 2 \Leftrightarrow \left|\frac{2\sqrt{4\gamma - \beta^2}}{2}\right| = 2 \Leftrightarrow 4\gamma - \beta^2 = 4 \quad (1).$$

Επειδή z_1 ανήκει στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος Β1 είναι:

$$\left(-\frac{\beta}{2} - 2\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4\gamma - \beta^2}}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\beta}{2} + 2\right)^2 + \frac{4\gamma - \beta^2}{2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta^2}{4} + 2\beta + 4 + \gamma - \frac{\beta^2}{4} = 1 \Leftrightarrow 2\beta + \gamma = -3 \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει $\beta = -4$ και $\gamma = 5$.

Β3. Έστω $|\nu| \geq 4$. Έχουμε $\nu^3 + \alpha_2\nu^2 + \alpha_1\nu + \alpha_0 = 0 \Leftrightarrow \nu^3 = -\alpha_2\nu^2 - \alpha_1\nu - \alpha_0$.

Άρα $|\nu|^3 = \left|-\alpha_2\nu^2 - \alpha_1\nu - \alpha_0\right| = \left|\alpha_2\nu^2 + \alpha_1\nu + \alpha_0\right|$.

Λόγω της τριγωνικής ανισότητας είναι $|\nu|^3 = \left|\alpha_2\nu^2 + \alpha_2\nu + \alpha_0\right| \leq \left|\alpha_2\nu^2\right| + \left|\alpha_1\nu\right| + \left|\alpha_0\right| =$

$= |\alpha_2| \cdot \left|\nu^2\right| + |\alpha_1| \cdot |\nu| + |\alpha_0|$.

Από B_1 είναι $|\alpha_0| \le 3,\ |\alpha_1| \le 3,\ |\alpha_2| \le 3,$ άρα

$$|\alpha_2\nu^2 + \alpha_1\nu + \alpha_0| \le 3|\nu|^2 + 3|\nu| + 3 = 3\left(|\nu|^2 + |\nu| + 1\right).$$

Η τελευταία γράφεται $|\nu|^3 \le 3\dfrac{|\nu|^3 - 1}{|\nu| - 1}$ (είναι $|\nu| - 1 > 0$ αφού $|\nu| \ge 4$) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow |\nu|^3\left(|\nu| - 1\right) \le 3\left(|\nu|^3 - 1\right) \Leftrightarrow |\nu|^4 \le 4|\nu|^3 - 3.$$

Όμως $4\cdot|\nu|^3 - 3 \le 4\cdot|\nu|^3$ άρα $|\nu|^4 \le 4\cdot|\nu|^3 \Leftrightarrow |\nu| < 4$ που είναι άτοπο.

Άρα $|\nu| < 4$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για $x \in \mathbb{R}$ η δοσμένη σχέση γράφεται:

$$\left(f(x)+x\right)\left(f(x)+x\right)' = \left(\frac{x^2}{2}\right)' \Leftrightarrow \left[\frac{\left(f(x)+x\right)^2}{2}\right]' = \left(\frac{x^2}{2}\right)' \Leftrightarrow \frac{\left(f(x)+x\right)^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c.$$

Για $x = 0$: $\dfrac{1}{2} = c.$

Έτσι $\dfrac{\left(f(x)+x\right)^2}{2} = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left(f(x)+x\right)^2 = x^2 + 1.$

Θέτουμε $g(x) = f(x) + x,\quad x \in \mathbb{R}.$ Είναι $g(x) \ne 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $g(x)$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $g(0) = f(0) > 0$ θα είναι $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή $f(x) + x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα $f(x) + x = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2+1} - x,\quad x \in \mathbb{R}.$

Γ2. Είναι $f\left(g(x)\right) = \sqrt{g^2(x)+1} - g(x) = 1.$

Άρα $\sqrt{g^2(x)+1} - g(x) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{g^2(x)+1} = g(x) + 1$ (1).

Πρέπει $g(x) + 1 > 0 \Leftrightarrow x^3 + \dfrac{3x^2}{2} > 0 \Leftrightarrow x^2\left(x + \dfrac{3}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\dfrac{3}{2}, 0\right) \cup (0, +\infty).$

Τότε από την (1) προκύπτει:

$$g^2(x) + 1 = g^2(x) + 1 + 2g(x) \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2 - 2 = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2,\quad x \in \mathbb{R}.$

Είναι $\varphi'(x) = 6x^2 + 6x = 6x(x+1).$

Άρα έχουμε τον επόμενο πίνακα μεταβολής:

x	$-3/2$		-1		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Προκύπτει τοπικό μέγιστο $\varphi\,(-1) = -1$ και τοπικό ελάχιστο $\varphi\,(0) = -2$. Επίσης προκύπτει ότι το σύνολο τιμών της φ για $x \in [0, +\infty)$ είναι το $[-2, +\infty)$, ενώ για $x < 0$ είναι $\varphi(x) < 0$.
Έτσι προκύπτει ότι υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα για την φ στο $(0, +\infty)$ και επειδή η φ είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό, προκύπτει ότι η ρίζα είναι μοναδική.

Γ3. Θέτουμε $K(x) = \int_{x-\pi/4}^{0} f(t)dt - f\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cdot \text{εφ}x,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Η K είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, ενώ επειδή $f(t) = \sqrt{t^2+1} - t > 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$

θα είναι $\int_{-\pi/4}^{0} f(t)dt > 0$, δηλαδή $K(0) > 0$.

Επίσης είναι $K\left(\frac{\pi}{4}\right) = -f(0)\cdot \text{εφ}\frac{\pi}{4} = -1 < 0$.

Έτσι όμως από το θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο ώστε $K(x_0) = 0$ ή $\int_{x_0-\pi/4}^{0} f(t)dt = f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right)\text{εφ}x_0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f(1)-f(1-h)+f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\left[5\cdot\frac{f(1+5h)-f(1)}{5h} - \frac{f(1-h)-f(1)}{h}\right] =$$

$$= 5f'(1) + f'(1) = 6f'(1).$$

διότι

- $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f(1)}{5h}\cdot 5 \underset{\substack{h\to 0\\ u\to 0}}{\overset{5h=u}{=}} 5\lim\limits_{u\to 0}\frac{f(1+u)-f(1)}{u} = 5f'(1).$
- $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{h} = -\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h} \underset{\substack{h\to 0\\ u\to 0}}{\overset{-h=t}{=}} -\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(1+t)-f(1)}{t} = f'(1).$

Άρα αφού

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f(1-h)}{h} = 0 \Leftrightarrow 6f'(1) = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0.$$

Για $0 < x < 1 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(1) \Rightarrow f'(x) < 0$.

Για $x > 1 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(1) \Rightarrow f'(x) > 0$.

Άρα η f είναι $\downarrow$ στο $(0,1]$ και $\uparrow$ στο $[1,+\infty)$ με $f'(1) = 0$ άρα παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 1$.

Δ2. Είναι $g'(x)=\dfrac{f(x)-1}{x-1}, \quad x\in(0,+\infty)$.

Λόγω του Δ_1,. αφού στο $x_0 = 1$ η f παρουσιάζει ελάχιστο, είναι $f(x)\geq f(1)=1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$, άρα $f(x) > 1$ για $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Έτσι $f(x) - 1 > 0$ για $x \in (1, +\infty)$ και $x - 1 > 0$, άρα $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

Άρα g γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$.

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση $\varphi(x)=\int_x^{x+1} g(u)du,\ x\in\mathbb{R}$.

Είναι $\varphi'(x) = g(x+1) - g(x)$.

Όμως $x < x + 1$ και επειδή g γνησίως αύξουσα θα είναι $g(x) < g(x + 1)$,

άρα $\varphi'(x) > 0$, άρα φ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Η δοσμένη ανίσωση γράφεται: $\varphi(8x^2+5)>\varphi(2x^4+5)\overset{\varphi\uparrow}{\Leftrightarrow}8x^2+5>2x^4+5\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^4 < 4x^2 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 4) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 0) \cup (0, 2)$.

Δ3. Είναι $g''(x=\dfrac{(f(x)-1)'(x-1)-(f(x)-1)(x-1)'}{(x-1)^2}=\dfrac{f'(x)(x-1)-(f(x)-1)}{(x-1)^2}$.

Για την f στο $[1, x]$ ισχύει το Θ.Μ.Τ. άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον

$\xi\in(1,x):\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(\xi)\Rightarrow\dfrac{f(x)-1}{x-1}=f'(\xi)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) - 1 = (x - 1)f'(\xi)$.

Άρα $g''(x)=\dfrac{f'(x)(x-1)-(x-1)f'(\xi)}{(x-1)^2}=\dfrac{f'(x)-f'(\xi)}{x-1}$.

Είναι $\xi<x\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow}f'(\xi)<f'(x)\Rightarrow f'(x)-f'(\xi)>0$.

Επίσης για $x > 1 \Rightarrow x -1 > 0$.

Έτσι $g''(x) > 0$ για κάθε $x > 1$ άρα g κυρτή στο $(1, +\infty)$.

Η δοσμένη εξίσωση γράφεται

$(a-1)g(x)=(f(a)-1)(x-a)\overset{a>1}{\Longleftrightarrow}g(x)=\dfrac{f(a)-1}{a-1}(x-a)\Leftrightarrow g(x)=g'(a)(x-a)$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης για την g στο $x = \alpha$ είναι

$y-g(a)=g'(a)(x-a)\overset{g(a)=0}{\Longleftrightarrow}y=g'(a)(x-a)$.

Αφού g κυρτή η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Δηλαδή $g(x)\geq y\Rightarrow g(x)\geq g'(a)(x-a)$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = \alpha$.

Άρα η εξίσωση $g(x)=g'(a)(x-a)$ έχει μοναδική λύση $x = \alpha$.

Γενικό Λύκειο Νεστορίου
Σχολικό έτος 2013-2014
Βοηθητικό Υλικό της Γ΄ Λυκείου