Μαθηματικά Γενικής Παιδείας
Γ΄ Λυκείου

Λύσεις Εξετάσεων Εσπερινών

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΚΑΡΑΦΕΡΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 26 ΜΑΪΟΥ 2000
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 65.
β. Σχολικό βιβλίο σελίδα 65.
γ. Σχολικό βιβλίο σελίδα 65.

Β. 1. Δ, **2.** Β.

ΘΕΜΑ 2ο

α. Πρέπει $x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$,

άρα **το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = IR - \{2\}$.**

β. $$f'(x) = \left(\frac{ημx}{x - 3}\right)' = \frac{(ημx)' \cdot (x - 3) - ημx \cdot (x - 3)'}{(x - 3)^2}$$

$$= \frac{συνx \cdot (x - 3) - ημx \cdot 1}{(x - 3)^2} = \boldsymbol{\frac{(x - 3) \cdot συνx - ημx}{(x - 3)^2}}$$

γ. $$f'(0) = \frac{(0 - 3) \cdot συν0 - ημ0}{(0 - 3)^2} = \frac{-3 \cdot 1 - 0}{(-3)^2} = \frac{-3}{9} = \boldsymbol{-\frac{1}{3}}$$

ΘΕΜΑ 3ο

α. $f'(x) = (2x^3 + 5x + 3)' = \boldsymbol{6x^2 + 5,\ x \in IR.}$

β. Είναι $f'(x) > 0$, άρα **η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR.**

ΘΕΜΑ 4ο

α. $\bar{x}_A = \dfrac{9+6+7+9+9+8}{6} = \dfrac{48}{6} = \mathbf{8}$

Γράφουμε τις παρατηρήσεις με αύξουσα σειρά : 6 , 7 , **8** , **9** , 9 , 9

$\delta_A = \dfrac{8+9}{2} \Leftrightarrow \boldsymbol{\delta_A = 8,5}$

β. $\bar{x}_B = \dfrac{8+10+7+8+12}{5} = \dfrac{45}{5} = \mathbf{9}$

Γράφουμε τις παρατηρήσεις με αύξουσα σειρά : 7 , 8 , **8** , 10 , 12

$\boldsymbol{\delta_B = 8}$

γ. Αν ένας πωλητής ήθελε να πείσει έναν υποψήφιο να αγοράσει το αυτοκίνητο Α, θα χρησιμοποιούσε τη μέση τιμή, διότι $\bar{x}_A < \bar{x}_B$.

Αν ένας πωλητής ήθελε να πείσει έναν υποψήφιο να αγοράσει το αυτοκίνητο Β, θα χρησιμοποιούσε τη διάμεσο, διότι $\delta_B < \delta_A$.

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2001
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. α. Α - 4, Β - 7, Γ - 6, Δ - 3, Ε - 1.

β. $f'(x) + g'(x)$, $\dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$, $f'(g(x))\cdot g'(x)$.

Β. α. $f_1'(x) = 3x^2 + \text{συν}x - 3\text{ημ}x$,

β. $f_2'(x) = 2(x - 1)$,

γ. $f_3'(x) = \dfrac{(x)'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$,

δ. $f_4'(x) = \left(\sqrt{x^2+3}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+3}}\cdot(x^2+3)' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$,

ε. $f_5'(x) = \left[\text{συν}(2x+3)\right]' = -\text{ημ}(2x+3)\cdot(2x+3)' = -2\text{ημ}(2x+3)$.

ΘΕΜΑ 2ο

α. Γράφουμε τις παρατηρήσεις με αύξουσα σειρά

3 , 5 , 7 , 10 , **11** , **11** , 11 , 12 , 14 , 16

$\delta = \dfrac{11+11}{2} \Leftrightarrow \boldsymbol{\delta = 11}$

β. $\bar{x} = \dfrac{\sum t_i}{\nu} = \dfrac{3+5+7+10+11\cdot 3+12+14+16}{10} = \dfrac{100}{10} = \mathbf{10}$

γ. M_0 = 11

δ. R = 16 - 3 = **13**

ε. $s^2 = \dfrac{(3-10)^2+(5-10)^2+(7-10)^2+(10-10)^2+3(11-10)^2+(12-10)^2+(14-10)^2+(16-10)^2}{10}$

$= \dfrac{49+25+9+0+3+4+16+36}{10} = \dfrac{142}{10} = \mathbf{14{,}2}$

ΘΕΜΑ 3ο

Κλάσεις	x_i	v_i	f_i	$F_i\%$
[1 , 5)	3	8	0,20	20
[5 , 9)	7	12	0,30	50
[9 , 13)	11	14	0,35	85
[13, 17)	15	4	0,10	95
[17, 21)	19	2	0,05	100
Σύνολα		40	1	

ΘΕΜΑ 4ο

α. $f'(x) = (x^3 + 5x + 6)' = 3x^2 + 5 > 0.$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR,

άρα **η f δεν έχει ακρότατα**.

β. $f''(x) = (3x^2 + 5)' = 6x$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f'(x)$	↘		↗

Η f' γίνεται ελάχιστη όταν $x = 0$.

Είναι $f(0) = 6$,

άρα **ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f γίνεται ελάχιστος στο σημείο Α (0 , 6).**

γ. $$\lim_{x\to -1}\frac{x^3 + 5x + 6}{x + 1} = \lim_{x\to -1}\frac{(x + 1)(x^2 - x + 6)}{x + 1}$$

$$= \lim_{x\to -1}(x^2 - x + 6)$$

$$= \mathbf{8}$$

Σχήμα Horner για το $x^3 + 5x + 6$

1	**0**	**5**	**6**	
	-1	**1**	**-6**	**-1**
1	**-1**	**6**	$\boxed{\mathbf{0}}$	

Άρα $x^3 + 5x + 6 = (x + 1) \cdot (x^2 - x + 6)$

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΔΕΥΤΕΡΑ 20 ΜΑΪΟΥ 2002 ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 28

Β.1. Σ, **2.** Σ, **3.** Λ, **4.** Λ, **5.** Σ, **6.** Σ, **7.** Λ, **8.** Λ.

ΘΕΜΑ 2ο

α. Πρέπει $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$,

άρα **το πεδίο ορισμού της f είναι $A = \mathbb{R} - \{2\}$**.

β. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 + 3x - 10}{x - 2} = \dfrac{-6}{-1} = \mathbf{6}$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 + 3x - 10}{x - 2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\cancel{(x-2)}(x+5)}{\cancel{x-2}} = \lim\limits_{x\to 2}(x+5) = \mathbf{7}$

γ. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 10}{x - 2} = \dfrac{\cancel{(x-2)}(x+5)}{\cancel{x-2}} = x + 5,\ x \neq 2$

$f'(x) = (x+5)' = 1 > 0$, για $x > 2$,

άρα **η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$**.

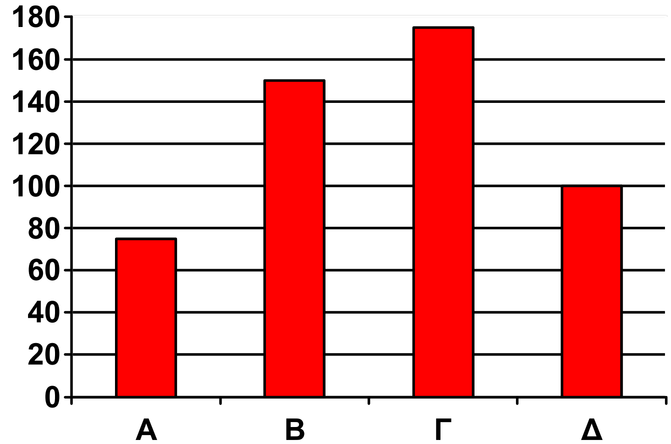
ΘΕΜΑ 3ο

α. $f_2 = \dfrac{v_2}{v} \Leftrightarrow 0{,}3 = \dfrac{150}{v} \Leftrightarrow v = \dfrac{150}{0{,}3} \Leftrightarrow \mathbf{v = 500}$

β.

x_i	v_i	f_i
Α	**75**	**0,15**
Β	**150**	**0,30**
Γ	**175**	**0,35**
Δ	**100**	**0,20**
ΣΥΝΟΛΑ	**500**	**1**

γ.



ΘΕΜΑ 4ο

α. $\bar{x}_A = \dfrac{\sum t_{i(A)}}{\nu_A} \Leftrightarrow 720 = \dfrac{\sum t_{i(A)}}{10} \Leftrightarrow \boldsymbol{\sum t_{i(A)} = 7200}$

β. $\bar{x}_B = \dfrac{\sum t_{i(B)}}{\nu_B} = \dfrac{9500}{10} = \mathbf{950}$

$R_B = 1060 - 900 = \mathbf{160}$

γ. $\bar{x} = \dfrac{\sum t_{i(A)} + \sum t_{i(B)}}{\nu} = \dfrac{7200 + 9500}{20} = \dfrac{16700}{20} = \mathbf{835}$

Οι δύο μεσαίες παρατηρήσεις είναι η 10^{η}

(ο μεγαλύτερος μισθός του τμήματος Α που είναι 900)

και η 11^{η} (ο μικρότερος μισθός του τμήματος Β που είναι 900)

άρα $\delta = \dfrac{900 + 900}{2} = \mathbf{900}$

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΔΕΥΤΕΡΑ 19 ΜΑΪΟΥ 2003 ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 28

Β.α. Λ, **β.** Σ, **γ.** Λ, **δ.** Λ, **ε.** Σ.

ΘΕΜΑ 2ο

α. $v = N_5 =$ **40**

β.

Κλάσεις	N_i	v_i	x_i	$x_i v_i$
[0 , 2)	5	5	1	5
[2 , 4)	15	10	3	30
[4 , 6)	20	5	5	25
[6 , 8)	35	15	7	105
[8 , 10)	40	5	9	45
ΣΥΝΟΛΑ	-	40	-	210

γ. $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i v_i}{v} = \dfrac{210}{40} = \mathbf{5{,}25}$

ΘΕΜΑ 3ο

α. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{3x^2}{4x^2+5} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

άρα **η C_f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο O (0 , 0).**

β. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2}{4x^2+5} = \mathbf{0}$

γ. $f'(x) = \left(\dfrac{3x^2}{4x^2+5}\right)' = \dfrac{(3x^2)' \cdot (4x^2+5) - 3x^2 \cdot (4x^2+5)'}{(4x^2+5)^2}$

$= \dfrac{6x \cdot (4x^2+5) - 3x^2 \cdot 8x}{(4x^2+5)^2} = \dfrac{24x^3 + 30x - 24x^2}{(4x^2+5)^2} = \dfrac{30x}{(4x^2+5)^2}$

δ.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

ε. Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο την τιμή $f(0) = 0$

ΘΕΜΑ 4ο

α. $\bar{x} = \dfrac{0+0+1+2+4+5}{6} = \dfrac{12}{6} = \mathbf{2}$

Οι μεσαίες παρατηρήσεις είναι 1 και 2, άρα $\delta = \dfrac{1+2}{2} = \mathbf{\dfrac{3}{2}}$

β.i. $f'(x) = \left[(t_1 - x)^2 + (t_2 - x)^2 + (t_3 - x)^2 + (t_4 - x)^2 + (t_5 - x)^2 + (t_6 - x)^2\right]'$

$= 2(t_1-x)(t_1-x)'+2(t_2-x)(t_2-x)'+2(t_3-x)(t_3-x)'+2(t_4-x)(t_4-x)'+2(t_5-x)(t_5-x)'+2(t_6-x)(t_6-x)'$

$= -2(t_1 - x) - 2(t_2 - x) -2(t_3 - x) -2(t_4 - x) -2(t_5 - x) -2(t_6 - x)$

$= -2(t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 - 6x) = -2(12 - 6x) = 12x - 24$

$f'(\bar{x}) = f'(2) = 12 \cdot 2 - 24 = \mathbf{0}$

ii. $f(\bar{x}) = (t_1 - \bar{x})^2 + (t_2 - \bar{x})^2 + (t_3 - \bar{x})^2 + (t_4 - \bar{x})^2 + (t_5 - \bar{x})^2 + (t_6 - \bar{x})^2$

$= 6 \cdot \dfrac{(t_1 - \bar{x})^2 + (t_2 - \bar{x})^2 + (t_3 - \bar{x})^2 + (t_4 - \bar{x})^2 + (t_5 - \bar{x})^2 + (t_6 - \bar{x})^2}{6}$

$= \mathbf{6 \cdot s^2}$

iii. $s^2 = \dfrac{(0-2)^2 \cdot 2 + (1-2)^2 + (2-2)^2 + (4-2)^2 + (5-2)^2}{6} = \dfrac{22}{6} = \dfrac{11}{3}$

$(\varepsilon) : y - f(2) = f'(2)\cdot(x-2) \Leftrightarrow (\varepsilon) : y - 6\cdot s^2 = 0\cdot(x-2) \Leftrightarrow$

$(\varepsilon) : y - 6\cdot\dfrac{11}{3} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{(\varepsilon) : y = 22}$

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΔΕΥΤΕΡΑ 17 ΜΑΪΟΥ 2004 ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 87

Β. $\bar{x} = \dfrac{\sum ti}{v}$

Γ. Σ

Δ. Λ

Ε. $\{x \in A \mid g(x) \neq 0\}$,

ΣΤ. Σχολικό βιβλίο σελίδα 16

Ζ. $\lim\limits_{x\to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$, $\lim\limits_{x\to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$, $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi x_0$, (όταν $\sigma\upsilon\nu x_0 \neq 0$)

ΘΕΜΑ 2ο

α. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(x^2 - 5x + 6) = \mathbf{0}$

$\lim\limits_{x\to 2} g(x) = \lim\limits_{x\to 2}(x - 3) = \mathbf{-1}$

β. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(x-2)}{(x-3)} = \lim\limits_{x\to 3}(x - 2) = \mathbf{1}$

γ. $f'(x) = (x^2 - 5x + 6)' = 2x - 5$ και $f'(200) = 2\cdot 200 - 5 = 395$

$g'(x) = (x - 3)' = 1$ και $f'(-1) = 1$

$K = 3\cdot f'(200) + 819\cdot g'(-1) = 3\cdot 395 + 819\cdot 1 = 1185 + 819 = \mathbf{2004}$

ΘΕΜΑ 3ο

α. $\bar{x} = \dfrac{\sum t_i}{v} = \dfrac{280}{10} = 28$

β.

x_i	v_i	f_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 v_i$
15	**4**	**0,4**	**-13**	**169**	**676**
20	**2**	**0,2**	**-8**	**64**	**128**
30	**1**	**0,1**	**2**	**4**	**4**
50	**3**	**0,3**	**22**	**484**	**1452**
ΣΥΝΟΛΑ	**10**	**1**	**-**	**-**	**2260**

γ.1. $s^2 = \dfrac{\sum (x_i - \overline{x}^2)\nu_i}{\nu} = \dfrac{2260}{10} = 226$

γ.2. $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{226}$

ΘΕΜΑ 4ο

α. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2}{x^2 + 1} = \mathbf{2}$

β. $f'(x) = \left(\dfrac{2}{x^2 + 1}\right)' = \dfrac{0\cdot(x^2 + 1) - 2\cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{-4x}{(x^2 + 1)^2}$

$f'(1) = \dfrac{-4}{(1 + 1)^2} = \mathbf{-1}$

γ.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

δ. Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο την τιμή $f(0) = 2$

ε. $(\varepsilon): y - f(1) = f'(1)\cdot(x - 1) \Leftrightarrow$

$(\varepsilon): y - 1 = -1\cdot(x - 1) \Leftrightarrow$

$(\varepsilon): y - 1 = -x + 1 \Leftrightarrow$

$\mathbf{(\varepsilon): y = -x + 2}$

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 23 ΜΑΙΟΥ 2005
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 28

Β. Σχολικό βιβλίο σελίδα 13

Γ. α. Σ, **β.** Λ, **γ.** Λ, **δ.** Σ, **ε.** Λ.

ΘΕΜΑ 2ο

α. Πρέπει $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$,

άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbb{R} - \{2\}$

β. $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \dfrac{2}{2} = 1$

γ. $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{\cancel{x-2}} = \lim\limits_{x \to 4}(x - 3) = 1$

δ. $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \dfrac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{\cancel{x-2}} = x - 3,\ x \in \mathbb{R} - \{2\}$

$f'(x) = (x - 3)' = 1,\ x \in \mathbb{R} - \{2\}$

ΘΕΜΑ 3ο

α. $\alpha_1 = 72^0 \Leftrightarrow \dfrac{v_1}{v} \cdot 360^0 = 72^0 \Leftrightarrow \dfrac{v_1}{20} \cdot 360 = 72 \Leftrightarrow v_1 = 4$

x_i	v_i	$x_i v_i$	$x_i^2 v_i$
2	4	8	16
3	6	18	54
9	8	72	648
11	2	22	242
ΣΥΝΟΛΑ	20	120	960

β. $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i v_i}{v} = \dfrac{120}{20} = 6$

$$s^2 = \frac{1}{v}\left\{\sum x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum x_i v_i\right)^2}{v}\right\} = \frac{\sum x_i^2 v_i}{v} - \bar{x}^2 = \frac{960}{20} - 6^2 = 12$$

$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

γ. $CV = \dfrac{s}{\overline{x}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

ΘΕΜΑ 4ο

α. $f'(x) = (2x^3 - 9x^2 + 12x - 1)' = 6x^2 - 18x + 12$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 18x + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 2$

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

τ. μεγ. τ. ελάχ.

$\alpha = f(1) = 2 - 9 + 12 - 1 = 4$

$\beta = f(2) = 16 - 36 + 24 - 1 = 3$

x_i	v_i	$x_i v_i$	N_i
1	4	4	4
2	5	10	9
3	3	9	12
4	2	8	14
5	1	5	15
ΣΥΝΟΛΑ	15	36	-

β. $\overline{x} = \dfrac{\sum x_i v_i}{v} = \dfrac{36}{15} = 2{,}4$

Από τη στήλη N_i προκύπτει ότι αν γραφούν οι παρατηρήσεις με αύξουσα σειρά η μεσαία παρατήρηση (η όγδοη) είναι 3. Άρα $\delta = 3$.

γ. $N_4 = 14$ μαθητές εργάστηκαν το πολύ 4 ώρες.

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2006
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1^{o}

Α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 28

Β. α. ΛΑΘΟΣ, **β.** ΣΩΣΤΟ, **γ.** ΛΑΘΟΣ, **δ.** ΛΑΘΟΣ, **ε.** ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ 2^{o}

α. $\bar{x} = \dfrac{1+2+3+3+1}{5} = \dfrac{10}{5} = 2$

$$s^2 = \frac{(1-2)^2\cdot 2+(2-2)^2+(3-2)^2\cdot 2}{5} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

β. Γράφουμε τις παρατηρήσεις με αύξουσα σειρά.

1 , 1 , 2 , 3 , 3

Η μεσαία παρατήρηση είναι 2 άρα δ = 2.

γ. $v_3 = 2$ και $f_3 = 0{,}4$.

δ. R = 3 - 1 = 2

ΘΕΜΑ 3^{o}

Ι. $f(1) = 2 \Leftrightarrow 2\cdot 1^2 - \alpha\cdot 1 - 8 = -2 \Leftrightarrow 2 - \alpha - 8 = -2 \Leftrightarrow \alpha = -4$

ΙΙ. Για α = -4.

$f(x) = 2x^2 + 4x - 8$

α) $f'(x) = 4x + 4$.

β) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

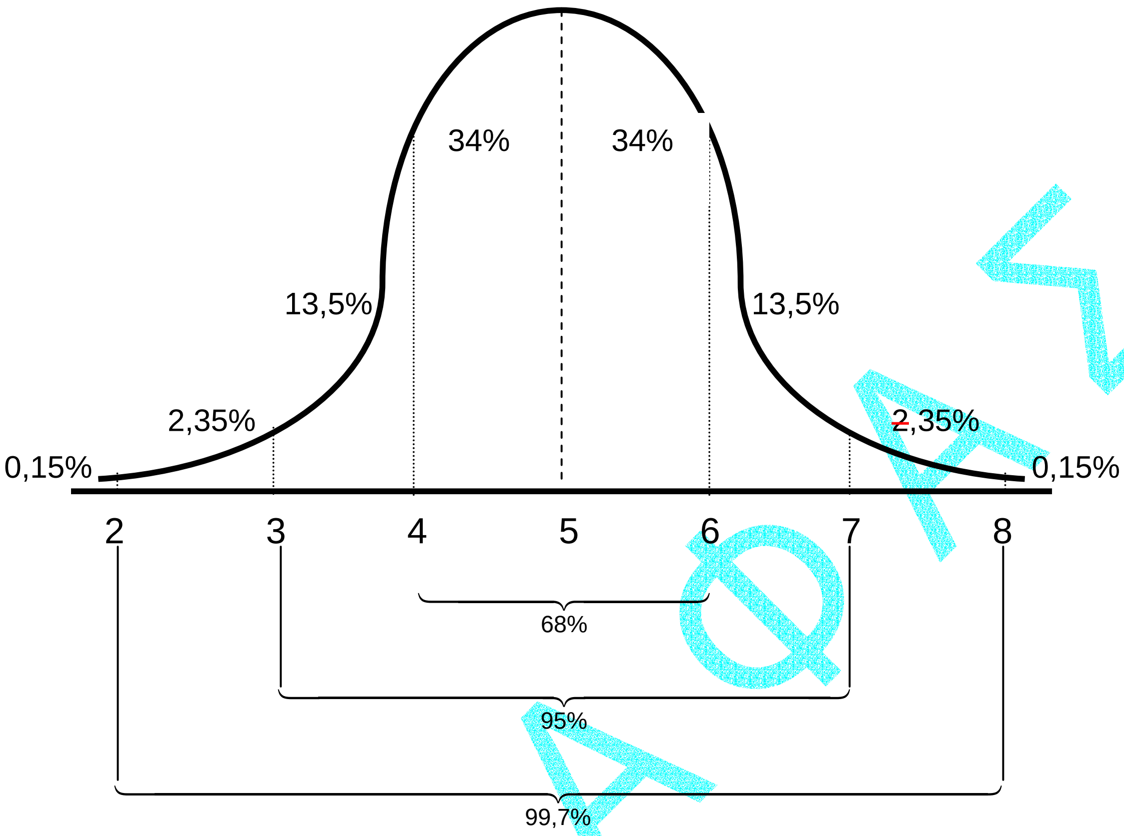
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
P'(x)	-	0	+
P(x)	↘		↗

ελάχιστο

γ) $\lambda = f'(1) = 4\cdot 1 + 4 = 8$

ΚΕΛΑΦΑΣ

ΘΕΜΑ 4ο



I. α) 68%

β) 81,5%

II. δ = = 5

R ≈ 6s = 6 · 1 = 6

III. $CV = \frac{s}{\bar{x}}100\% = \frac{1}{5}100\% = 20\%$

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 21 ΜΑΪΟΥ 2007
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1°

Α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 31

Β. α. ΛΑΘΟΣ, β. ΣΩΣΤΟ, γ. ΣΩΣΤΟ,
δ. ΛΑΘΟΣ, ε. ΛΑΘΟΣ.

ΘΕΜΑ 2°

α. $f'(x) = (x^2 + 1' = 2x$
$f'(2) = 4$.

β.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x) = 2x$		-	0	+	
f (x)		↘		↗	

Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 0$ την τιμή **$f(0) = 1$.**

γ. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $y = 3$ είναι 0 άρα
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, οπότε το σημείο είναι το **Α (1 ,0)**.

ΘΕΜΑ 3°

α.

Κλάσεις	**x_i**	**f_i**	**$x_i f_i$**
[8 , 10)	9	0,2	1,8
[10 , 12)	11	f_2	$11f_2$
[12 , 14)	13	0,3	3,9
[14 , 16)	15	f_4	$15f_4$
ΣΥΝΟΛΑ	**-**	**1**	**$5{,}7 + 11f_2 + 15f_4$**

- $\sum f_i = 1 \Rightarrow 0{,}2 + f_2 + 0{,}3 + f_4 = 1 \Leftrightarrow f_2 + f_4 = 0{,}5$ **(1)**
- $\bar{x} = \sum x_i f_i \Rightarrow 11{,}6 = 5{,}7 + 11f_2 + 15f_4 \Leftrightarrow 11f_2 + 15f_4 = 5{,}9$ **(2)**

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε
$f_2 = 0{,}4$ και **$f_4 = 0{,}1$**.

β. i. Το ποσοστό των καταστημάτων που η τιμή του προϊόντος είναι μεγαλύτερη ή ίση των 10 € είναι :

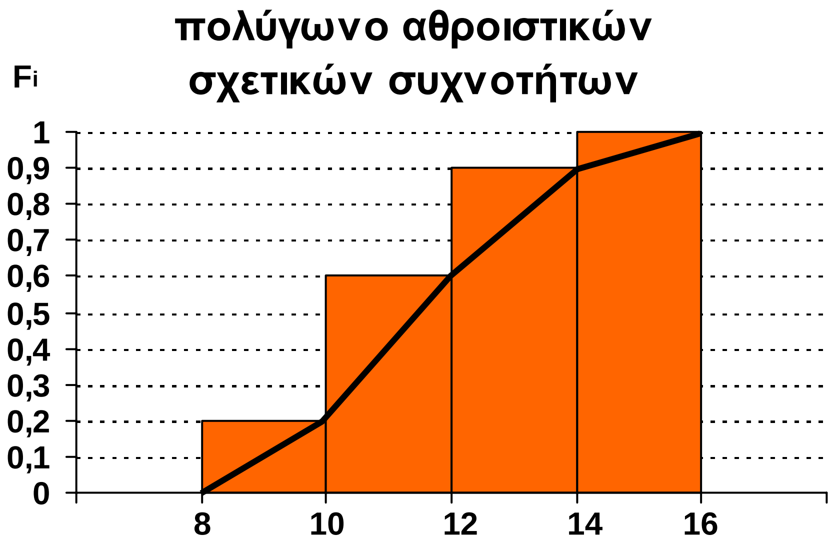
$f_2 + 0{,}3 + f_4 = 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}8$

Άρα ο αριθμός των καταστημάτων που η τιμή του προϊόντος είναι μεγαλύτερη ή ίση των 10 € είναι :

$0{,}8 \cdot 50 =$ **40 καταστήματα.**

ii.

Κλάσεις	**f_i**	**F_i**
[8 , 10)	0,2	0,2
[10 , 12)	0,4	0,6
[12 , 14)	0,3	0,9
[14 , 16)	0,1	1
ΣΥΝΟΛΑ	**1**	**-**



ΘΕΜΑ 4^o

α. $y_i = x_i + \frac{10}{100}x_i = x_i + 0{,}1x_i = 1{,}1x_i$

Από εφαρμογή σχολικού βιβλίου έχουμε :

$\bar{y} = 1{,}1\bar{x} = 1{,}1 \cdot 8 = 8{,}8$ και

$s_y = |1{,}1| s_x = 1{,}1 \cdot 2 = 2{,}2$

i. $CV_y = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{2{,}2}{8{,}8} = 0{,}25 = 25\% > 10\%$

άρα δεν είναι ομοιογενές.

ii. $CV_x = \frac{s_x}{\bar{x}} = \frac{2}{8} = 0{,}25 = CV_y$

άρα τα δείγματα έχουν την ίδια ομοιογένεια.

β. i. $z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s_x} = \frac{x_i - 8}{2} = \frac{1}{2}x_i - 4$

Από εφαρμογή σχολικού βιβλίου έχουμε :

$\bar{z} = \frac{1}{2}\bar{x} - 4 = \frac{1}{2} \cdot 8 - 4 = 0$ και

$s_y = \left|\frac{1}{2}\right| s_x = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$

ii. Το CV_z δεν ορίζεται διότι $\bar{z} = 0$.

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 21 ΜΑΪΟΥ 2008
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
& ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 30
Β. Σχολικό βιβλίο σελίδα 13
Γ. α. ΛΑΘΟΣ,
β. ΣΩΣΤΟ,
γ. ΛΑΘΟΣ,
δ. ΛΑΘΟΣ.

ΘΕΜΑ 2ο

α. $f(3) = 8 \Leftrightarrow 9 + 3k + 2 = 8 \Leftrightarrow 3k = -3 \Leftrightarrow \mathbf{k = -1}$

β. $f'(x) = x^2 - 1$ και $f''(x) = 2x$
$f'(x) + f''(x) + 2 = x^2 - 1 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$

γ. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x) = x^2 - 1$		+	○	-	○	+	
f (x)		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Η f παρουσιάζει τ. μέγιστο στο $x = -1$ την τιμή $\mathbf{f(-1) = \frac{8}{3}}$.

Η f παρουσιάζει τ. ελάχιστο στο $x = 1$ την τιμή $\mathbf{f(1) = \frac{4}{3}}$.

ΘΕΜΑ 3^{o}

Α. $\bar{x} = \dfrac{1+2+4+2+6+1+3+6+\alpha+6}{10} \Leftrightarrow 4 = \dfrac{\alpha+31}{10} \Leftrightarrow$

$\alpha + 31 = 40 \Leftrightarrow$ **$\alpha = 9$**.

Β. α. Γράφουμε τις παρατηρήσεις με αύξουσα σειρά :

1 , 1 , 2 , 2 , **3** , **4** , 6 , 6 , 6 , 9

$$\boldsymbol{\delta = \frac{3+4}{2} = 3{,}5}$$

β. $s^2 = \dfrac{\sum (t_i - \bar{x})^2 \cdot v_i}{10} \Leftrightarrow$

$$s^2 = \frac{(1\text{-}4)^2 \cdot 2 + (2\text{-}4)^2 \cdot 2 + (3\text{-}4)^2 + (4\text{-}4)^2 + (6\text{-}4)^2 \cdot 3 + (9\text{-}4)^2}{10} = \mathbf{6{,}4}$$

γ. Από εφαρμοφή σχολικού βιβλίου είναι

$\bar{x}' = \bar{x} + 2008 = 4 + 2008 =$ **2012**

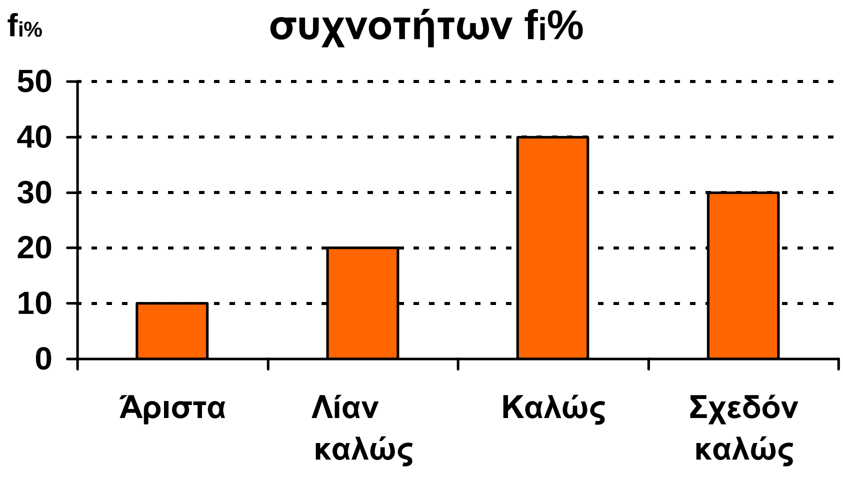
ΘΕΜΑ 4^{o}

α.

i	**x_i**	**v_i**	**f_i**	**f_i%**	**α_i**
1	Άριστα	15	0,1	10	36^0
2	Λίαν καλώς	30	0,2	20	72^0
3	Καλώς	60	0,4	40	144^0
4	Σχεδόν καλώς	45	0,3	30	108^0
	ΣΥΝΟΛΑ	**150**	**1**	**100**	**360^0**

β.

ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων fi%



ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 19 ΜΑΪΟΥ 2009
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
& ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1^o

Α. **Σχολικό βιβλίο σελίδα 28**

Β. α. **ΛΑΘΟΣ,**

β. **ΣΩΣΤΟ,**

γ. **ΣΩΣΤΟ,**

δ. **ΣΩΣΤΟ,**

ε. **ΣΩΣΤΟ.**

ΘΕΜΑ 2^o

x_i	v_i	$x_i v_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 v_i$
1	1	1	-4	16	16
3	2	6	-2	4	8
5	1	5	0	0	0
7	4	28	2	4	16
ΣΥΝΟΛΑ	8	40	-	-	40

α) $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i v_i}{v} = \dfrac{40}{8} = 5$

β) Γράφω τις παρατηρήσεις με αύξουσα σειρά

1 , 3 , 3 , 5 , 7 , 7 , 7 , 7

Οι δύο μεσαίες παρατηρήσεις είναι 5 και 7

$\delta = \dfrac{5+7}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$

γ) $s^2 = \dfrac{\sum (x_i - \bar{x})^2 v_i}{v} = \dfrac{40}{8} = 5$

ΘΕΜΑ 3^o

α) $f'(x) = \left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)'$

$$= \frac{(x^2)'(x^2+1) - x^2(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2x(x^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

β) $f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{2x}{(x^2+1)^2} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 0$

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	↘	↗

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$,
ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

γ) Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(0) = 0$.

δ) $y_0 = f(-1) = \dfrac{(-1)^2}{(-1)^2+1} = \dfrac{1}{2}$

$\lambda = f'(-1) = \dfrac{2(-1)}{[(-1)^2+1]^2} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

$(\varepsilon): y - y_0 = \lambda(x - x_0) \quad \Leftrightarrow \quad (\varepsilon): y - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}(x+1) \quad \Leftrightarrow$

$(\varepsilon): y - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{(\varepsilon): y = -\dfrac{1}{2}x}$

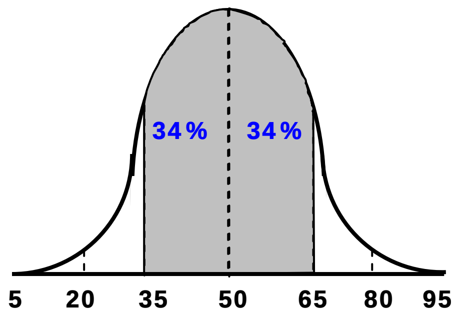
ΘΕΜΑ 4°

α) $\delta = \bar{x} = 50$

β) $CV = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{15}{50} \cdot 100\% = 30\% > 10\%$

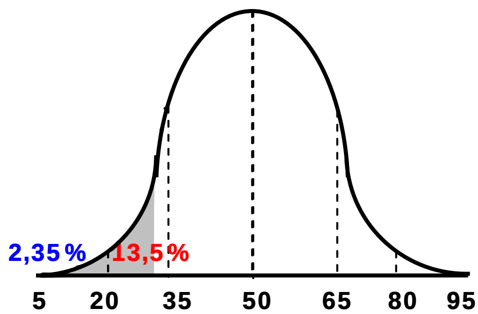
Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

γ) i)



Στο διάστημα (35 , 65) βρίσκεται το 68% των παρατηρήσεων, δηλαδή $\frac{68}{100} \cdot 4000 =$ **2720 άτομα**

ii)



Στο διάστημα (5 , 35) βρίσκεται το 2,35% + 13,5% = 15,85% των παρατηρήσεων, δηλαδή $\frac{15{,}85}{100} \cdot 4000 =$ **634 άτομα**

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 18 ΜΑΪΟΥ 2010
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
& ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. **Σχολικό βιβλίο σελίδα 28**
Α2. **Σχολικό βιβλίο σελίδα 16**
Α3. α. **ΣΩΣΤΟ,**
β. **ΛΑΘΟΣ,**
γ. **ΛΑΘΟΣ,**
δ. **ΛΑΘΟΣ,**
ε. **ΣΩΣΤΟ.**

ΘΕΜΑ Β

Β1. 40 παρατηρήσεις είναι μεγαλύτερες της διαμέσου
10 + α παρατηρήσεις είναι μικρότερες της διαμέσου
Πρέπει $10 + \alpha = 40 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha = 30}$

Για $\alpha = 30$ είναι :

Β2.

x_i	ν_i	$x_i\nu_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2\nu_i$
2	10	20	-2	4	40
3	30	90	-1	1	30
4	10	40	0	0	0
5	10	50	1	1	10
6	20	120	2	4	80
ΣΥΝΟΛΑ	80	320	-	-	160

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i\nu_i}{\nu} = \frac{320}{80} = \mathbf{4}$$

Β3. $$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2\nu_i}{\nu} = \frac{160}{80} = \mathbf{2}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f(x) = x^3 + \alpha x^2 - 9x + \beta$

$f'(x) = (x^3 + \alpha x^2 - 9x + \beta)' = 3x^2 + 2\alpha x - 9$

Είναι $f'(2) = 15 \Leftrightarrow 12 + 4\alpha - 9 = 15 \Leftrightarrow 4\alpha = 12 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha = 3}$

Είναι $f(2) = 5 \Leftrightarrow 8 + 4\alpha - 18 + \beta = 5 \overset{\alpha = 3}{\Leftrightarrow} \boldsymbol{\beta = 3}$

Για $\alpha = \beta = 3$, είναι $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$.

Γ2. $$\lim_{x\to -2}\frac{f'(x)+9}{x^2-4} = \lim_{x\to -2}\frac{3x^2+6x-9+9}{x^2-4} = \lim_{x\to -2}\frac{3x(x+2)}{(x-2)(x+2)}$$
$$= \lim_{x\to -2}\frac{3x}{x-2} = \frac{-6}{-4} = \mathbf{\frac{3}{2}}$$

Γ3. $g(x) = f'(x) + 10 = 3x^2 + 6x - 9 + 10 = 3x^2 + 6x + 1$

$g'(x) = (3x^2 + 6x + 1)' = 6x + 6$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘		↗

Η g παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το

$g(-1) = 3(-1)^2 + 6(-1) + 1 = 3 - 6 + 1 = \mathbf{-2}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $F_4 = 1 \Leftrightarrow \frac{25}{\lambda} = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda = 25}$

Για $\lambda = 25$ είναι :

Δ2. $F_1 = \frac{4}{25} = 0{,}16$ και $f_1 = F_1 = \mathbf{0{,}16}$

$F_2 = \frac{11}{25} = 0{,}44$ και $f_2 = F_2 - F_1 = \mathbf{0{,}28}$

$F_3 = \frac{18}{25} = 0{,}72$ και $f_3 = F_3 - F_2 = \mathbf{0{,}28}$

$F_4 = 1$ και $f_4 = F_4 - F_3 = \mathbf{0{,}28}$

Δ3. $\bar{x} = \sum x_i f_i \Leftrightarrow$

$19 = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4 \Leftrightarrow$

$19 = 0{,}16\alpha + 0{,}28(\alpha + 5) + 0{,}28(\alpha + 10) + 0{,}28(\alpha + 35) \Leftrightarrow$

$19 = 0{,}16\alpha + 0{,}28\alpha + 1{,}4 + 0{,}28\alpha + 2{,}8 + 0{,}28\alpha + 9{,}8 \Leftrightarrow$

$19 = \alpha + 14 \Leftrightarrow$

$\boldsymbol{\alpha = 5}$

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 14 ΜΑΪΟΥ 2011
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
& ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. **Σχολικό βιβλίο σελίδα 31**
Α2. **Σχολικό βιβλίο σελίδα 14**
Α3. **Σχολικό βιβλίο σελίδα 13**
Α4. **α.** **ΛΑΘΟΣ,**
β. **ΛΑΘΟΣ,**
γ. **ΣΩΣΤΟ,**
δ. **ΛΑΘΟΣ,**
ε. **ΣΩΣΤΟ.**

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f'(x) = -3x^2 - 3 < 0$, για κάθε $x \in IR$
Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο IR.

Β2. $f''(x) = -6x$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
$f'(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Η f' παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f'(0) = -3$

Β3. $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y - 0 = -6(x - 1) \Leftrightarrow$
$\mathbf{y = -6x + 6}$

Β4. $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - 4}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^3 - 3x + 4 - 4}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x(-x^2 - 3)}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0}(-x^2 - 3) = \mathbf{-3}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $(-1\ ,\ 12) \in C_f \Leftrightarrow f(-1) = 12 \Leftrightarrow 1 + \kappa + 5 = 12 \Leftrightarrow \boldsymbol{\kappa = 6}$

Γ2. Για $\kappa = 6$, είναι $f'(x) = x^2 - 6x + 5$ και $f'(x) = 2x - 6$.

- $y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y + 3 = -2(x - 2) \Leftrightarrow$
  $\mathbf{y = -2x + 1}$ **(ε_1)**
- $y - f(4) = f'(4) \cdot (x - 4) \Leftrightarrow y + 3 = 2(x - 4) \Leftrightarrow$
  $\mathbf{y = 2x - 11}$ **(ε_2)**

Γ3. $\begin{cases} y = -2x + 1 \\ y = 2x - 11 \end{cases} \Rightarrow \; 2x - 11 = -2x + 1 \;\Leftrightarrow\; -4x = 12 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{x = 3}$

$y = -2 \cdot 3 + 1 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{y = -5}$

Οι ευθείες τέμνονται στο σημείο Μ (3 , -5)

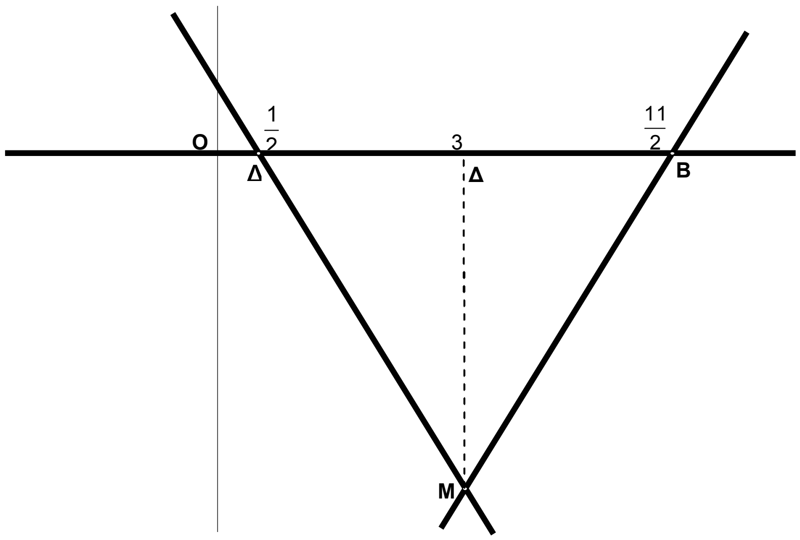
που βρίσκεται στην ευθεία x = 3

Γ4. $(\varepsilon_1) : y = -2x + 1 \overset{y=0}{\Rightarrow} x = \frac{1}{2}$

άρα η (ε_1) τέμνει τον x΄x στο Α $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

$(\varepsilon_2) : y = 2x - 11 \overset{y=0}{\Rightarrow} x = \frac{11}{2}$

άρα η (ε_2) τέμνει τον x΄x στο Β $\left(\frac{11}{2}, 0\right)$



$(AB) = \frac{11}{2} - \frac{1}{2} = 5$ και $(M\Delta) = 5$

Άρα $E = \frac{1}{2} \cdot (AB) \cdot (M\Delta) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 =$ **12,5 τ.μ.**

ΘΕΜΑ Δ

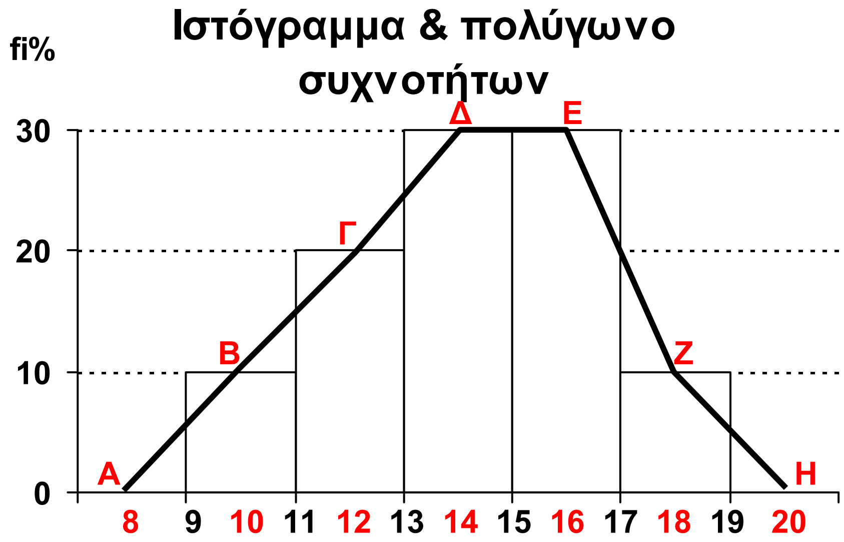
Δ1. Το τμήμα ΔΕ είναι παράλληλο στον x΄x, άρα $y_Δ = y_E$.

$$\sum f_i\% = 100\% \Leftrightarrow 10 + 20 + y_Δ + y_E + 10 = 100 \overset{y_Δ = y_E}{\Leftrightarrow}$$

$$2y_Δ = 60 \Leftrightarrow \mathbf{y_Δ = y_E = 30}$$

**** Το ότι δίνεται η μέση τιμή είναι περιττό στοιχείο που μάλλον μπέρδευε τους μαθητές.***

Δ2.



Δ3.

Κλάσεις	x_i	$f_i\%$
[9 , 11)	10	10
[11 , 13)	12	20
[13 , 15)	14	30
[15 , 17)	16	30
[17 , 19)	18	10
ΣΥΝΟΛΑ	-	100

Δ4. Αναζητούμε το ποσοστό των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο διάστημα [15 , 19).

Είναι $f_4\% + f_5\% = 30\% + 10\% =$ **40%.**

Δ4. Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων της κατανομής των πωλήσεων οι οποίες έγιναν από τους πωλητές της εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους και του οριζόντιου άξονα είναι ίσο με το πλήθος ν των πωλητών.

Άρα ο ζητούμενος αριθμός των πωλητών είναι :

$40\% \cdot ν = 0{,}4 \cdot 80 =$ **32 πωλητές**.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΤΕΤΑΡΤΗ 23 ΜΑΪΟΥ 2012
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. **Σχολικό βιβλίο σελίδα 30**

Α2. **Σχολικό βιβλίο σελίδα 96**

Α3. α. ΛΑΘΟΣ, β. ΣΩΣΤΟ, γ. ΛΑΘΟΣ, δ. ΣΩΣΤΟ, ε. ΣΩΣΤΟ.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f'(x) = 2x + \alpha,\ x \in \mathbb{R}$.

$f(0) = \beta$, άρα η C_f τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $A(0, \beta)$

$\lambda_\varepsilon = f'(0) = \varepsilon\varphi 45^0 = 1$, άρα $\boldsymbol{\alpha = 1}$

Β2. $$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)+\beta x}{x+1} = \lim_{x\to -1}\frac{x^2+x+\beta+\beta x}{x+1} = \lim_{x\to -1}\frac{x(x+1)+\beta(x+1)}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}(x+\beta)}{\cancel{x+1}} = \lim_{x\to -1}(x+\beta) = -1+\beta$$

Πρέπει $-1 + \beta = 6 \Leftrightarrow \boldsymbol{\beta = 7}$.

Β3. $g(x) = f(x) - x^3 = x^2 + x + 7 - x^3 = -x^3 + x^2 + x + 7,\ x \in \mathbb{R}$.

$g'(x) = (-x^3 + x^2 + x + 7)' = -3x^2 + 2x + 1,\ x \in \mathbb{R}$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$ ή $x = 1$

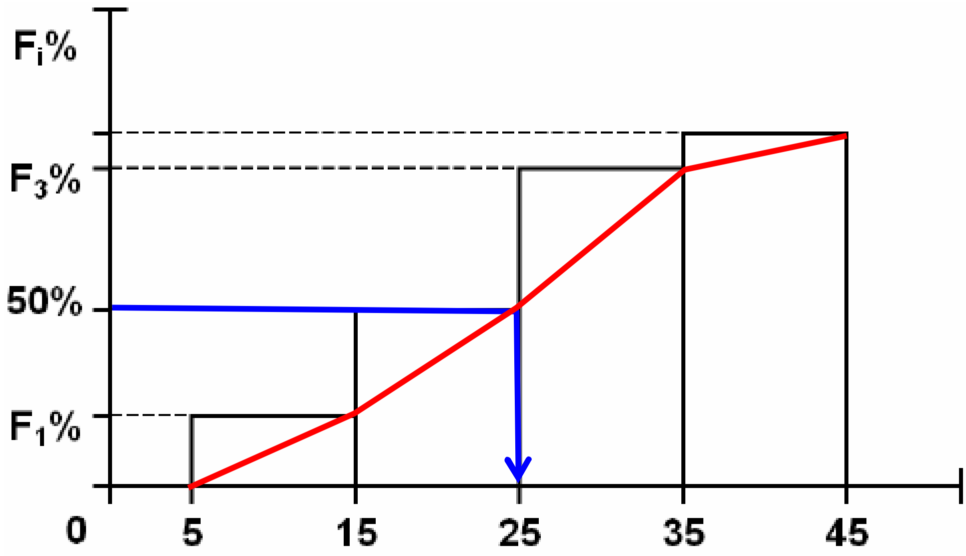
x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
g΄(x)		-	0	+	0	-	
g (x)		↘		↗		↘	

Η g είναι γνησίως φθίνουσα στα $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$ και $[1, +\infty)$ ενώ

είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{1}{3}, 1\right]$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.



Άρα **δ = 25**

Γ2. $v = \sum v_i = 7\alpha + 4$

$$F_2 = 0{,}50 \Leftrightarrow \frac{v_1 + v_2}{v} = 0{,}5 \Leftrightarrow \frac{4\alpha - 2}{7\alpha + 4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = 8$$

Κλάσεις	x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$	$x_i v_i$	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(x_i-\bar{x})^2 v_i$
[5 , 15)	10	12	20	12	20	120	-14	196	2352
[15 , 25)	20	18	30	30	50	360	-4	16	288
[25 , 35)	30	24	40	54	90	720	6	36	864
[35 , 45)	40	6	10	60	100	240	16	256	1536
ΣΥΝΟΛΑ	-	60	100	-	-	1440	-	-	5040

Γ3. $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i v_i}{v} = \dfrac{1440}{60} = 24$

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 v_i}{v} = \frac{5040}{60} = 84$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{84} \cong 9{,}17$$

Γ4. Στην κλάση [35 , 45) έχουμε :

Σε πλάτος 10 (45 – 35) αντιστοιχεί το 10% των μαθητών

Σε πλάτος 8 (45 – 37) αντιστοιχεί το x% των μαθητών

$10x = 8 \cdot 10 \Leftrightarrow$ **x = 8% των μαθητών**

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x) = \left(\dfrac{2}{x^2+1}\right)' = \dfrac{-2(x^2+1)'}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{-4x}{\left(x^2+1\right)^2}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

Δ2. $0 < \alpha < \beta < \gamma < 3 \overset{f \downarrow \text{ στο } [0,+\infty)}{\Rightarrow} f(0) > f(\alpha) > f(\beta) > f(\gamma) > f(3)$

$R = f(0) - f(3) = 2 - 0{,}2 = 1{,}8$

Δ3. $(\varepsilon): y = -x + 2 \rightarrow y_i = -x_i + 2,\ i = 1, 2, \ldots, 10$

Από εφαρμογή σχολικού βιβλίου

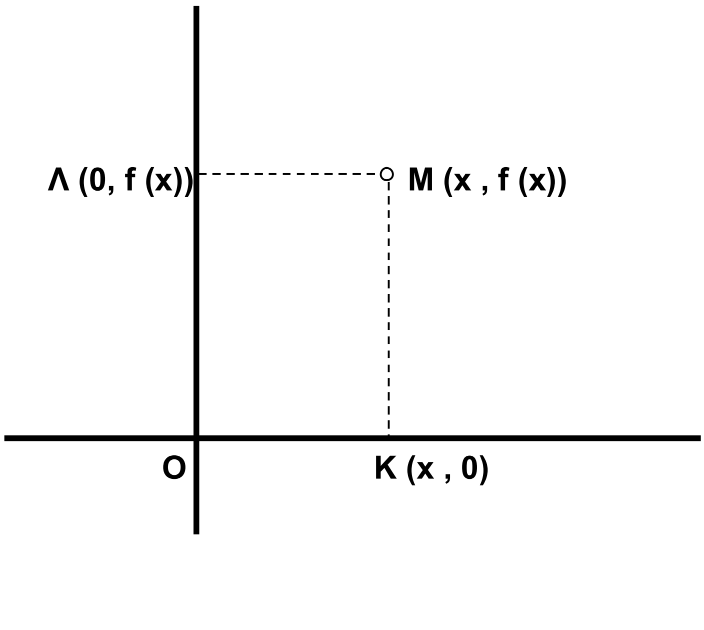
- όταν όλες οι τιμές μιας μεταβλητής x_i πολλαπλασιάζονται επί μια σταθερά c, τότε οι νέες τιμές y_i που προκύπτουν έχουν $\bar{y} = \bar{x}\cdot c$ και $s_y = s_x \cdot |c|$.
- όταν σε όλες τις τιμές μιας μεταβλητής x_i προσθέσουμε μια σταθερά c, τότε οι νέες τιμές y_i που προκύπτουν έχουν $\bar{y} = \bar{x} + c$ και $s_y = s_x$.

x_i	$\rightarrow$	$z_i = (-1)\cdot x_i$	$\rightarrow$	$y_i = z_i + 2$	$, i = 1, \ldots 10$
$\bar{x} = 10$	$\rightarrow$	$\bar{z} = (-1)\cdot 10 = -10$	$\rightarrow$	$\bar{y} = -10 + 2 = -8$	
$s_x = 2$	$\rightarrow$	$s_z = \lvert -1 \rvert \cdot 2 = 2$	$\rightarrow$	$s_y = 2$	

Δ4. $E(x) = (OK)\cdot(O\Lambda)$

$= x \cdot \dfrac{2}{x^2+1}$

$= \dfrac{2x}{x^2+1},\ x > 0$



$$E'(x) = \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)' = \frac{(2x)'\cdot(x^2+1) - 2x\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2\cdot(x^2+1) - 2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2},\ x>0$$

x	0	1	$+\infty$
$E'(x)$	+	0	-
$E(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Το εμβαδόν γίνεται μέγιστο για $x = 1$ και
(ΟΚ) = (ΟΛ) = 1, άρα **όταν το ΟΚΜΛ γίνει τετράγωνο.**

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΔΕΥΤΕΡΑ 20 ΜΑΪΟΥ 2013

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 28

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 14

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 87

Α4. **α.** Λάθος, **β.** Σωστό, **γ.** Λάθος, **δ.** Λάθος, **ε.** Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\gamma = \lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+6} - 3} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{x+6} - 3\right)}{\left(\sqrt{x+6} - 3\right)\left(\sqrt{x+6} - 3\right)}$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)\left(\sqrt{x+6} - 3\right)}{\cancel{x-3}} = 6 \cdot 6 = 36$$

Β2. $f'(x) = 3x^2 - 2\alpha x + \beta$

Για να είναι οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία με τετμημένες 1 και $\frac{1}{3}$ παράλληλες με τον άξονα $x'x$, πρέπει $f'(1) = f'\left(\frac{1}{3}\right) = 0$

- $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 - 2\alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow 2\alpha - \beta = 3$ **(1)**
- $f'\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} - \frac{2\alpha}{3} + \beta = 0 \overset{\cdot 3}{\Leftrightarrow} -2\alpha + 3\beta = -1$ **(2)**

Από (1) και (2) με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε $2\beta = 2 \Leftrightarrow \beta = 1$

Από τη σχέση (1) για $\beta = 1$, έχουμε $2\alpha - 1 = 3 \Leftrightarrow \alpha = 2$

Β3. Για $\alpha = 2$, $\beta = 1$ και $\gamma = 36$

$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 36$

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $\left(-\infty\ ,\ \frac{1}{3}\right]$, $[1\ ,\ +\infty)$, ενώ

είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{3}\ ,\ 1\right]$.

τοπικό μέγιστο : $f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} + 36 = \frac{976}{27}$

τοπικό ελάχιστο : $f(1) = 1^3 - 2\cdot 1^2 + 1 + 36 = 36$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. 1η κλάση : $[\ 50\ ,\ 50 + c\ )$

2η κλάση : $[\ 50 + c\ ,\ 50 + 2c\ )$

3η κλάση : $[\ 50 + 2c\ ,\ 50 + 3c\ )$

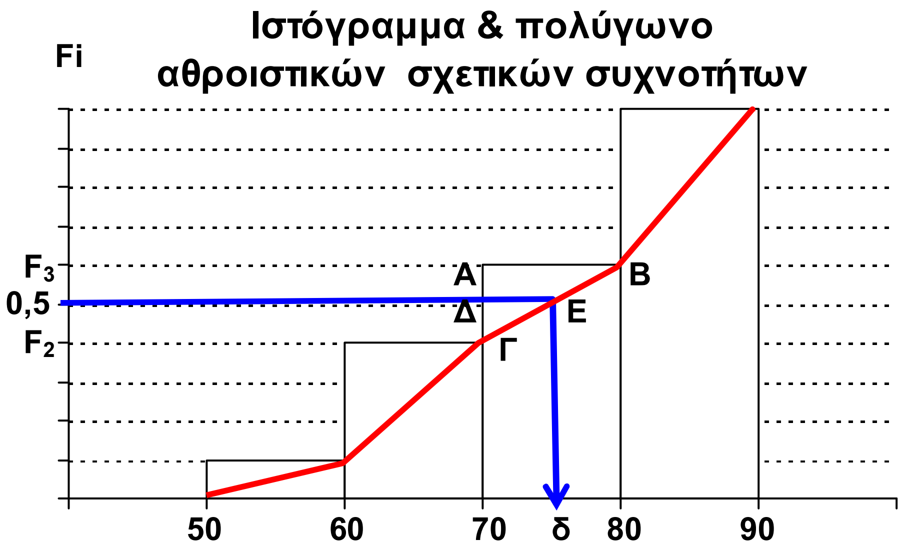
4η κλάση : $[\ 50 + 3c\ ,\ 50 + 4c\ )$

$$x_4 = \frac{50 + 3c + 50 + 4c}{2} \Leftrightarrow 85 = \frac{100 + 7c}{2} \Leftrightarrow$$

$$100 + 7c = 170 \Leftrightarrow 7c = 70 \Leftrightarrow c = 10$$

Γ2.

Κλάσεις	x_i	f_i	F_i	$x_i f_i$
[50 , 60)	55	f_1	f_1	$55f_1$
[60 , 70)	65	f_2	$f_1 + f_2$	$65f_2$
[70 , 80)	75	f_3	$f_1 + f_2 + f_3$	$75f_3$
[80 , 90)	85	$2f_3$	$f_1 + f_2 + 3f_3$	$170f_3$
ΣΥΝΟΛΑ	-	1	-	$55f_1 + 65f_2 + 245f_3$



- $\sum f_i = 1 \Leftrightarrow f_1 + f_2 + 3f_3 = 1 \Leftrightarrow f_1 + f_2 = 1 - 3f_3$ **(1)**
- $\bar{x} = \sum x_i f_i = 74 \Leftrightarrow 55f_1 + 65f_2 + 245f_3 = 74$ **(2)**
- Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΓ είναι όμοια άρα

$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \frac{10}{5} = \frac{F_3 - F_2}{0{,}5 - F_2} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 2 = \frac{f_3}{0{,}5 - (1 - 3f_3)} \Leftrightarrow$$

$$6f_3 - 1 = f_3 \Leftrightarrow 5f_3 = 1 \Leftrightarrow f_3 = 0{,}2 \quad \textbf{(3)}$$

- $f_4 = 2f_3 = 0{,}4$

• $(1) \overset{(3)}{\Rightarrow} f_1 + f_2 = 0{,}4 \Leftrightarrow f_2 = 0{,}4 - f_1$ **(4)**

• $(2) \underset{(4)}{\overset{(3)}{\Rightarrow}} 55f_1 + 65(0{,}4 - f_1) + 245 \cdot 0{,}2 = 74 \Leftrightarrow$

$55f_1 + 26 - 65f_1 + 49 = 74 \Leftrightarrow -10f_1 = -1 \Leftrightarrow f_1 = 0{,}1$ **(5)**

• $(4) \overset{(5)}{\Rightarrow} f_2 = 0{,}3$

Επομένως ο πίνακας συμπληρωμένος είναι

Κλάσεις	x_i	f_i
[50 , 60)	**55**	**0,1**
[60 , 70)	**65**	**0,3**
[70 , 80)	**75**	**0,2**
[80 , 90)	**85**	**0,4**
ΣΥΝΟΛΑ	**-**	**1**

Γ3. Για τις παρατηρήσεις μικρότερες του 80 ισχύει :

Κλάσεις	x_i	f_i	v_i	$x_i v_i$
[50 , 60)	**55**	**0,1**	**0,1v**	**5,5v**
[60 , 70)	**65**	**0,3**	**0,3v**	**19,5v**
[70 , 80)	**75**	**0,2**	**0,2v**	**15v**
ΣΥΝΟΛΑ	**-**	**1**	**0,6v**	**40v**

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i v_i}{\sum v_i} = \frac{40v}{0{,}6v} = \frac{200}{3}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) = x^2 + \kappa + 1$ και $f(1) = \kappa + 2$

$f'(x) = \left(x^2 + \kappa + 1\right)' = 2x$ και $f'(1) = 2$

Εύρεση εξίσωσης εφαπτομένης

$(\varepsilon) : y - f(1) = f'(1)\cdot(x - 1) \Leftrightarrow (\varepsilon) : y = 2x + \kappa$

Εύρεση σημείων τομής με τους άξονες

- $x'x$: θέτω $y = 0$, οπότε $x = -\frac{\kappa}{2}$, άρα $A\left(-\frac{\kappa}{2}, 0\right)$
- $y'y$: θέτω $x = 0$, οπότε $y = \kappa$, άρα $B(0, \kappa)$

Εύρεση εμβαδού

$$E = \frac{1}{2}\cdot(OA)\cdot(OB) = \frac{1}{2}\cdot\left|-\frac{\kappa}{2}\right|\cdot|\kappa| \overset{\kappa>2}{=} \frac{1}{2}\cdot\frac{\kappa}{2}\cdot\kappa = \frac{\kappa^2}{4}$$

$$E < 4 \Leftrightarrow \frac{\kappa^2}{4} < 4 \Leftrightarrow \kappa^2 < 16 \Leftrightarrow |\kappa| < 4$$

$$\overset{\kappa>2}{\Leftrightarrow} \kappa < 4 \overset{\kappa>2}{\Leftrightarrow} 2 < \kappa < 4 \overset{\kappa\in Z}{\Leftrightarrow} \kappa = 3$$

Δ2. α) Τα $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_{50}, y_{50})$ είναι τα 50 σημεία της (ε), άρα επαληθεύουν την εξίσωση $y = 2x + 3$.

Επομένως $y_i = 2x_i + 3 \Leftrightarrow x_i = \frac{1}{2}y_i - \frac{3}{2}$, $i = 1, \ldots, 50$

Από εφαρμογή του σχολικού βιβλίου $\bar{x} = \frac{1}{2}\bar{y} - \frac{3}{2} \overset{\bar{y}=63}{=} 30$

β) $$\overline{x}' = \frac{(x_1+3)+\ldots+(x_{20}+3)+x_{21}+\ldots+x_{35}+(x_{36}-\lambda)+\ldots+(x_{50}-\lambda)}{50}$$

$$\Leftrightarrow \quad 31 = \frac{(x_1+\ldots+x_{20}+x_{21}+\ldots+x_{35}+x_{36}+\ldots+x_{50})+60-15\lambda}{50}$$

$$\Leftrightarrow \quad 31 = \frac{\sum x_i + 60-15\lambda}{50} \quad \Leftrightarrow \quad 31 = \frac{\sum x_i}{50} + \frac{60-15\lambda}{50}$$

$$\Leftrightarrow \quad 31 = \overline{x} + \frac{60-15\lambda}{50} \quad \Leftrightarrow \quad 31 = 30 + \frac{60-15\lambda}{50}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = \frac{60-15\lambda}{50} \Leftrightarrow \quad 60-15\lambda = 50 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{2}{3}$$

Δ3. Εύρεση τιμών $f(1)$, $f'(0)$

$f(x) = x^2 + 4$, άρα $f(1) = 5$

$f'(x) = 2x$, άρα $f'(0) = 0$

Εύρεση μονοτονίας

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

$$0 < \alpha < \beta < \gamma < 1 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow}$$

$$0 < 4 = f(0) < f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(1) = 5$$

Τελική διάταξη

$$f'(0) < f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(1)$$

Εύρεση εύρους

$$R = f(1) - f'(0) = 5 - 0 = 5$$

Εύρεση μέσης τιμής

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} t_i}{5} = \frac{f\,'(0) + f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + f(1)}{5}$$

$$= \frac{0 + \alpha^2 + 4 + \beta^2 + 4 + \gamma^2 + 4 + 5}{5}$$

$$= \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 17}{5} \overset{(*)}{=} \frac{6 + 17}{5} = \frac{23}{5}$$

ΣΧΟΛΙΟ

Είναι λάθος το δεδομένο ότι $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 6$

Αν $0 < \alpha < \beta < \gamma < 1$, τότε $0 < \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 < 3$

άρα $\frac{17}{5} < \bar{x} < 4 < \frac{23}{5}$

Γενικό Λύκειο Νεστορίου
Σχολικό έτος 2013-2014
Βοηθητικό Υλικό της Γ΄ Λυκείου