ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΘΕΜΑ Α

Άσκηση 1

Αν z_1, z_2 μιγαδικοί αριθμοί να αποδείξετε ότι:
$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

<u>Λύση</u>

Έχουμε:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \Leftrightarrow$$

$$\left(|z_1 \cdot z_2|\right)^2 = \left(|z_1| \cdot |z_2|\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot \overline{(z_1 \cdot z_2)} = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \Leftrightarrow$$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = z_1 \cdot \overline{z_1} \cdot z_2 \cdot \overline{z_2} .$$

Το τελευταίο ισχύει, άρα ισχύει και η ισοδύναμη αρχική σχέση.

Άσκηση 2

Να αποδείξετε ότι κάθε εξίσωση δευτέρου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει πάντα λύση στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

Λύση

(όπως στο σχολικό βιβλίο σελ.92)

Έστω η εξίσωση $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ και $\alpha\neq 0$.

Εργαζόμαστε όπως στην αντίστοιχη περίπτωση στο $\mathbb{R}$ και τη μετασχηματίζουμε με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνων, στη μορφή:

$\left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\Delta}{4\alpha^2}$,όπου $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$, η διακρίνουσα της εξίσωσης.

Έτσι έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- $\Delta>0$. Τότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές λύσεις τις $z_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$.
- $\Delta=0$. Τότε η εξίσωση έχει μια διπλή πραγματική λύση: $z=\frac{-\beta}{2\alpha}$.
- $\Delta<0$. Τότε επειδή $\frac{\Delta}{4\alpha^2}=\frac{-(-\Delta)}{4\alpha^2}=\frac{i^2\left(\sqrt{-\Delta}\right)^2}{4\alpha^2}=\left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2$, η εξίσωση γράφεται

  $\left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2$, οπότε οι λύσεις της είναι: $z_{1,2}=\frac{-\beta\pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$, οι οποίες είναι δύο

  συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί.

Άσκηση 3

α) Αν z_1, z_2 μιγαδικοί αριθμοί, να δείξετε ότι: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

β) Τι ονομάζουμε μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού z ;

Λύση

α) Έστω $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$, με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Τότε:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(\alpha + \beta i) + (\gamma + \delta i)} = \overline{(\alpha + \gamma) + (\beta + \delta) i} = (\alpha + \gamma) - (\beta + \delta) i =$$

$$(\alpha - \beta i) + (\gamma - \delta i) = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$$

β) Έστω $M(x, y)$ η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z = x + yi$ στο μιγαδικό επίπεδο. Ορίζουμε ως μέτρο του z την απόσταση του M από την αρχή O, δηλαδή:

$$|z| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Άσκηση 4

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε μιγαδικό αριθμό $z=\alpha+\beta i$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύουν:
$z+\overline{z}=2\alpha$
$z-\overline{z}=2\beta i$

β) Τι παριστάνουν στο μιγαδικό επίπεδο οι εξισώσεις:

i. $\left|z-z_0\right|=\rho, z, z_0\in\mathbb{C}$ με $\rho>0$.

ii. $\left|z-z_1\right|=\left|z-z_2\right|, z, z_1, z_2\in\mathbb{C}$.

<u>Λύση</u>

α) Έστω $z=\alpha+\beta i, \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ τότε ισχύουν:

$z+\overline{z}=\alpha+\beta i+\alpha-\beta i=2\alpha$ και $z-\overline{z}=\alpha+\beta i-\alpha+\beta i=2\beta i$

β) Η εξίσωση $\left|z-z_o\right|=\rho$ παριστάνει κύκλο με κέντρο την εικόνα $K\left(z_0\right)$ του μιγαδικού z_0 στο μιγαδικό επίπεδο και ακτίνα ρ .

Η εξίσωση $\left|z-z_1\right|=\left|z-z_2\right|$ παριστάνει τη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, όπου Α, Β οι εικόνες των μιγαδικών z_1 και z_2 στο μιγαδικό επίπεδο.

Άσκηση 5

Αν $\nu \in \mathbb{N}$ και i η φανταστική μονάδα, να υπολογίσετε το i^{ν} για τις διάφορες τιμές του ν.

<u>Λύση</u>

Έστω $\nu = 4\cdot\rho + \upsilon$ όπου ρ και υ το πηλίκο και το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του ν με το 4. Τότε επειδή $\upsilon = 0,1,2,3$ έχουμε:

$$i^{\nu} = i^{4\rho+\upsilon} = \begin{cases} i^{4\rho} = \left(i^4\right)^{\rho} = 1 \\ \\ i^{4\rho+1} = \left(i^4\right)^{\rho} i = i \\ \\ i^{4\rho+2} = \left(i^4\right)^{\rho} i^2 = -1 \\ \\ i^{4\rho+3} = \left(i^4\right)^{\rho} i^3 = i^3 = -i \end{cases}$$

Άσκηση 6

α) Να φέρετε το πηλίκο $\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$ με $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ και $\gamma+\delta i\neq 0$ στη μορφή $\kappa+\lambda i$ με $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Με τι ισούται γεωμετρικά το μέτρο της διαφοράς $|z_1-z_2|$ δυο μιγαδικών αριθμών z_1,z_2.

<u>Λύση</u>

α) Για να εκφράσουμε το πηλίκο $\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$ στη μορφή $\kappa+\lambda i$ πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος με το συζυγή του παρονομαστή και έχουμε:

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta+\beta\gamma i-\alpha\delta i}{\gamma^2+\delta^2}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i\,.$$

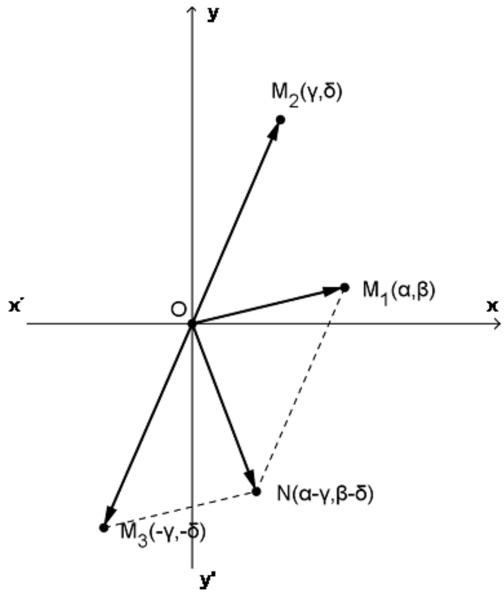
β) Το μέτρο της διαφοράς δυο μιγαδικών αριθμών ισούται με την απόσταση των εικόνων τους στο μιγαδικό επίπεδο.

Άσκηση 7

Να δείξετε ότι η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς δυο μιγαδικών αριθμών ισούται με τη διαφορά των διανυσματικών τους ακτινών.

<u>Λύση</u>

Αν $M_1(\alpha,\beta)$ και $M_2(\gamma,\delta)$ είναι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z_1=\alpha+\beta i$ και $z_2=\gamma+\delta i$ αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο, τότε η διαφορά $z_1-z_2=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i$ παριστάνεται με το σημείο $N(\alpha-\gamma,\beta-\delta)$ για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}$, άρα αποδείχτηκε.



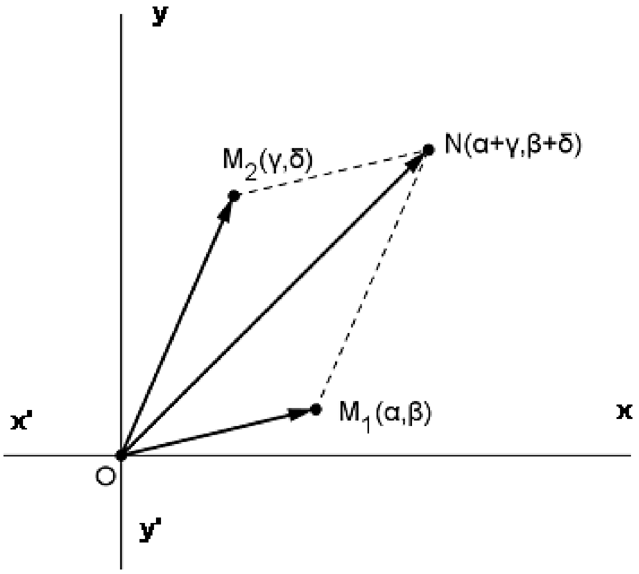
Άσκηση 8

Να δείξετε ότι η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δυο μιγαδικών αριθμών ισούται με το άθροισμα των διανυσματικών τους ακτινών.

<u>Λύση</u>

Αν $M_1(\alpha,\beta)$ και $M_2(\gamma,\delta)$ είναι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z_1=\alpha+\beta i$ και $z_2=\gamma+\delta i$ αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο, τότε το άθροισμα $z_1+z_2=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$ παριστάνεται με το σημείο $N(\alpha+\gamma,\beta+\delta)$, για το οποίο ισχύει:

$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$, άρα αποδείχτηκε.



Άσκηση 9

Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις:

i. $|z-2+3i|=1.$

ii. $|z+2+i|=|z-1-i|.$

<u>Λύση</u>

i. Έστω $M(x,y)$ η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z στο μιγαδικό επίπεδο και $K(2,-3)$ η εικόνα του $2-3i$. Τότε έχουμε: $|z-2+3i|=1 \Leftrightarrow |z-(2-3i)|=1 \Leftrightarrow (KM)=1$.
Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων $M(x,y)$ των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο το $K(2,-3)$ και ακτίνα $\rho=1$.

ii. Έστω Λ η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο και Α, Β οι εικόνες των μιγαδικών $-2-i$ και $1+i$ αντίστοιχα. Τότε έχουμε: $|z+2+i|=|z-1-i| \Leftrightarrow |z-(-2-i)|=|z-(1+i)| \Leftrightarrow (\Lambda A)=(\Lambda B)$.

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού αριθμού z στο μιγαδικό επίπεδο είναι η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία Α(-2,-1) και Β(1,1).

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z \neq 1+0i$ για τους οποίους ισχύει: $\left|\frac{z-4}{z-1}\right| = 2.$

i. Να δείξετε ότι $|z| = 2$.

ii. Αν επιπλέον ισχύει $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$ να υπολογίσετε τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς.

iii. Για τους μιγαδικούς αριθμούς z του παραπάνω ερωτήματος να αποδείξετε ότι $z^2 \in I$.

<u>Λύση</u>

i. Η δοσμένη σχέση μας δίνει:

$$|z-4|^2 = 2^2|z-1|^2 \Leftrightarrow (z-4)(\overline{z}-4) = 4(z-1)(\overline{z}-1) \Leftrightarrow$$

$$z\cdot\overline{z} - 4z - 4\overline{z} + 16 = 4z\cdot\overline{z} - 4z - 4\overline{z} + 4 \Leftrightarrow 3z\cdot\overline{z} = 12 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow |z| = 2.$$

ii. Έστω $z = \alpha + \beta i, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Επειδή $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$, δηλαδή $\alpha = \beta$ και από το προηγούμενο ερώτημα έπεται ότι:

$$|z| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 2 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 4 \Leftrightarrow 2\alpha^2 = 4 \Leftrightarrow \alpha = \pm\sqrt{2}.$$

Άρα, $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ ή $z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

iii. Έστω $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ τότε:

$$z^2 = \left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)^2 = 2 + 2\sqrt{2}^2 i + 2i^2 = 4i \in I.$$

Ομοίως και για την άλλη ρίζα: $z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

Άσκηση 2

Για το μιγαδικό $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι:

i. $\mathrm{Re}(z) \le |\mathrm{Re}(z)| \le |z|$.

ii. $\mathrm{Im}(z) \le |\mathrm{Im}(z)| \le |z|$.

iii. $2|\mathrm{Re}(z) \cdot \mathrm{Im}(z)| \le |z|^2$.

iv. $|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \le \sqrt{2}\,|z|$.

<u>Λύση</u>

i. Έχουμε:
$\mathrm{Re}(z) \le |\mathrm{Re}(z)| \le |z| \Leftrightarrow x \le |x| \le \sqrt{x^2 + y^2}$, η πρώτη ανισότητα $x \le |x|$ ισχύει, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,από τις ιδιότητες των απολύτων τιμών και η δεύτερη γίνεται:
$|x| \le \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow |x|^2 \le \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 \le x^2 + y^2 \Leftrightarrow 0 \le y^2$, η οποία ισχύει, για κάθε $y \in \mathbb{R}$, άρα ισχύει και η αρχική.

ii. Έχουμε:
$\mathrm{Im}(z) \le |\mathrm{Im}(z)| \le |z| \Leftrightarrow y \le |y| \le \sqrt{x^2 + y^2}$, η πρώτη ανισότητα $y \le |y|$ ισχύει, για κάθε $y \in \mathbb{R}$, από τις ιδιότητες των απολύτων τιμών και η δεύτερη ανισότητα γίνεται:

$|y| \le \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow |y|^2 \le \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 \Leftrightarrow y^2 \le x^2 + y^2 \Leftrightarrow 0 \le x^2$, η οποία ισχύει, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii. Έχουμε:
$2|\mathrm{Re}(z) \cdot \mathrm{Im}(z)| \le |z|^2 \Leftrightarrow 2|x \cdot y| \le x^2 + y^2 \Leftrightarrow |x|^2 + |y|^2 - 2|x| \cdot |y| \ge 0 \Leftrightarrow$
$\left(|x| - |y|\right)^2 \ge 0$, το οποίο ισχύει, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, άρα αποδείχτηκε.

iv. Έχουμε:
$|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \le \sqrt{2}\,|z| \Leftrightarrow |x| + |y| \le \sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow$

$\left(|x| + |y|\right)^2 \le \left(\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2$

$|x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \le 2x^2 + 2y^2 \Leftrightarrow \left(|x| - |y|\right)^2 \ge 0$, το οποίο ισχύει, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, άρα αποδείχτηκε.

Άσκηση 3

α) Να υπολογίσετε το γινόμενο:

$$P = i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \ldots \cdot i^{64}.$$

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$S = i - i^2 + i^3 - i^4 + \ldots - i^{2\nu}$, για τις διάφορες τιμές του $\nu \in \mathbb{N}$.

<u>Λύση</u>

α) Χρησιμοποιώντας τον τύπο του αθροίσματος των ν πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου, δηλαδή τον τύπο $S_\nu = \frac{\nu}{2}\left(\alpha_1 + \alpha_\nu\right)$, παίρνουμε:

$$P = i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \ldots \cdot i^{64} = i^{1+2+3+\ldots+64} = i^{\frac{64}{2}(1+64)} = i^{2080} = i^{4\cdot 520+0} = i^0 = 1$$

β) Εδώ έχουμε το άθροισμα των 2ν όρων μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = i$ και λόγο $\lambda = -i$. Οπότε, χρησιμοποιώντας τον τύπο του αθροίσματος των ν πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου, δηλαδή τον τύπο: $S_\nu = \alpha_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$, παίρνουμε:

$$S = i - i^2 + i^3 - i^4 + \ldots - i^{2\nu} = i\frac{(-i)^{2\nu} - 1}{-i-1} = i\frac{(-1)^\nu - 1}{-i-1} =$$

$$\begin{cases} i\dfrac{1-1}{-i-1} = 0, & \text{αν ν: άρτιος} \\ i\dfrac{-1-1}{-i-1} = i\dfrac{2}{1+i} = i\dfrac{2(1-i)}{2} = 1+i, & \text{αν ν: περιττός} \end{cases}$$

Άσκηση 4

Αν για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύει: $z^7 = 16(\overline{z})^3$:

i. Να δείξετε ότι: $z^{10} \in \mathbb{R}$.

ii. Να υπολογίσετε το $|z|$.

<u>Λύση</u>

i. Πολλαπλασιάζουμε και τα δυο μέλη της σχέσης $z^7 = 16(\overline{z})^3$ με z^3 και παίρνουμε:

$z^7 \cdot z^3 = 16(\overline{z})^3 \cdot z^3 \Leftrightarrow z^{10} = 16(\overline{z} \cdot z)^3 \Leftrightarrow z^{10} = 16|z|^6$ και επειδή $|z| \in R$ έπεται ότι και $z^{10} \in \mathbb{R}$.

ii. Παίρνουμε τα μέτρα στην αρχική σχέση και έχουμε:

$|z^7| = |16(\overline{z})^3| \Leftrightarrow |z|^7 = 16|(\overline{z})^3| \Leftrightarrow |z|^7 = 16|\overline{z}|^3$ και επειδή $|z| = |\overline{z}|$, έχουμε ισοδύναμα

$|z|^3\left(|z|^4 - 16\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\left(|z| = 0 \text{ ή } |z|^4 = 16\right) \Leftrightarrow$

$\left(|z| = 0 \text{ ή } |z| = 2\right)$.

Άσκηση 5

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός z, $z \neq \frac{2}{3}i$.

α) Να βρείτε το συζυγή του μιγαδικού αριθμού : $w = \frac{5i|\bar{z}| + 3 + z}{2 - 3 \cdot i \cdot \bar{z}}$, $z \in \mathbb{C} - \left\{\frac{2}{3}i\right\}$.

β) Αν ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z, στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο μοναδιαίος κύκλος, να βρείτε την καμπύλη στην οποία κινούνται οι εικόνες του μιγαδικού αριθμού $u = (12 + 5i)z - i$.

<u>Λύση</u>

α) Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των συζυγών μιγαδικών αριθμών, έχουμε:

$$\bar{w} = \overline{\left(\frac{5i|\bar{z}| + 3 + z}{2 - 3 \cdot i \cdot \bar{z}}\right)} = \frac{\overline{5i|\bar{z}| + 3 + z}}{\overline{2 - 3 \cdot i \cdot \bar{z}}} =$$

$$\frac{\overline{5i|\bar{z}|} + \bar{3} + \bar{z}}{\bar{2} - \overline{3 \cdot i \cdot \bar{z}}} = \frac{5 \cdot \bar{i} \cdot \left(\overline{|\bar{z}|}\right) + 3 + \bar{z}}{2 - 3 \cdot \bar{i} \cdot \bar{\bar{z}}} = \frac{-5i|\bar{z}| + 3 + \bar{z}}{2 + 3 \cdot i \cdot z}.$$

β) Ισχύει $|z| = 1$ και $u = (12 + 5i)z - i \Leftrightarrow u + i = (12 + 5i)z$ επομένως $|u + i| = |(12 + 5i)z| = \sqrt{12^2 + 5^2}\,|z|$ άρα $|u + i| = 13$ επομένως οι εικόνες του μιγαδικού αριθμού u κινούνται σε κύκλο με κέντρο το σημείο $K(0, -1)$ και ακτίνα 13, δηλαδή στον κύκλο $C: x^2 + (y + 1)^2 = 13^2$

Άσκηση 6

Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις:

i. $z-\overline{z}=2i$.

ii. $\overline{z}=1-z$.

iii. $\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Re}(z)$.

iv. $(z+\overline{z})^2=4$.

<u>Λύση</u>

Έστω $z=x+yi$ με $x,y\in\mathbb{R}$ τότε:

i. $z-\overline{z}=2i \Leftrightarrow 2yi=2i \Leftrightarrow y=1$ άρα η εξίσωση περιγράφει γεωμετρικά τους μιγαδικούς αριθμούς που οι εικόνες τους είναι πάνω στην οριζόντια ευθεία $y=1$.

ii. $\overline{z}=1-z \Leftrightarrow z+\overline{z}=1 \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ άρα η εξίσωση περιγράφει γεωμετρικά τους μιγαδικούς αριθμούς που οι εικόνες τους είναι πάνω στην κατακόρυφη ευθεία $x=\dfrac{1}{2}$.

iii. $\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Re}(z) \Leftrightarrow y=x$ άρα η εξίσωση περιγράφει γεωμετρικά τους μιγαδικούς αριθμούς που οι εικόνες τους είναι πάνω στην πρώτη διχοτόμο των αξόνων.

iv. $(z+\overline{z})^2=4 \Leftrightarrow 4x^2=4 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm1$ άρα η εξίσωση περιγράφει γεωμετρικά τους μιγαδικούς αριθμούς που οι εικόνες τους είναι πάνω στις κατακόρυφες ευθείες $x=1$ και $x=-1$.

Άσκηση 7

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις:

i. $|z-2+3i|<1.$

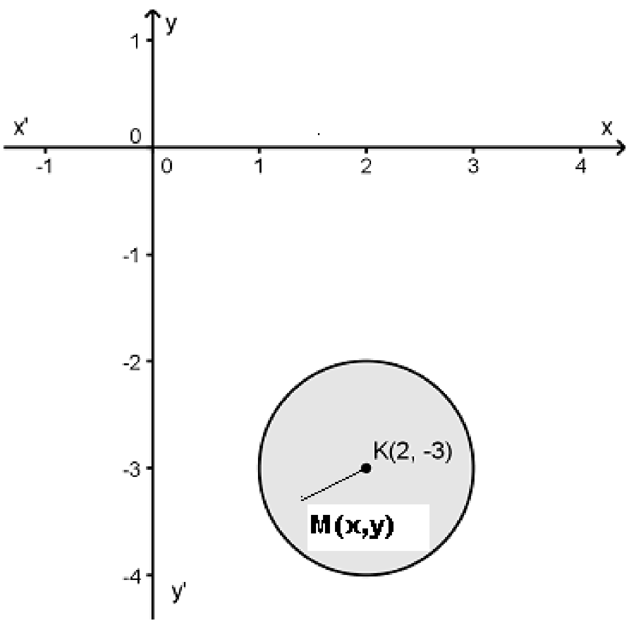
ii. $|z+2+i|\le|z-1-i|$

<u>Λύση</u>

i. Έστω $M(x,y)$ η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z στο μιγαδικό επίπεδο και $K(2,-3)$ η εικόνα του $2-3i$. Τότε έχουμε: $|z-2+3i|<1 \Leftrightarrow |z-(2-3i)|<1 \Leftrightarrow (KM)<1$.

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων $M(x,y)$ των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο είναι τα σημεία του κυκλικού δίσκου με κέντρο το $K(2,-3)$ και ακτίνα $\rho=1$, που έχει εξίσωση:

$(x-2)^2+(y+3)^2<1,$ δηλαδή τα εσωτερικά σημεία του κύκλου με κέντρο το $K(2,-3)$ και ακτίνα $\rho=1$. (Σχήμα 1)



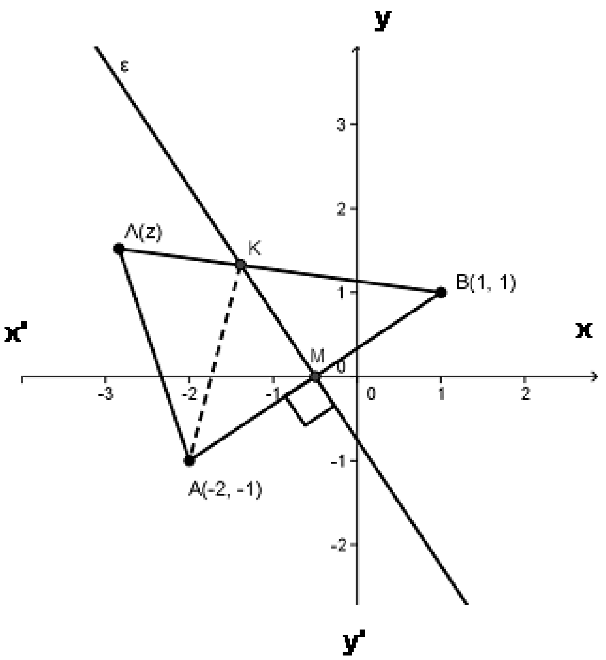
ii. Έστω Λ η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο και Α, Β οι εικόνες των μιγαδικών $-2-i$ και $1+i$ αντίστοιχα. Τότε έχουμε:

$|z+2+i|\le|z-1-i| \Leftrightarrow$

$$\left|z-(-2-i)\right| \le \left|z-(1+i)\right| \Leftrightarrow$$

$$(\Lambda A) \le (\Lambda B).$$

Η τελευταία ανισότητα επαληθεύεται από τα σημεία του ημιεπιπέδου (ϵ, A), δηλαδή του ημιεπιπέδου που περιέχει το σημείο Α και έχει ακμή τη μεσοκάθετο ϵ του ευθύγραμμου τμήματος Α Β . Πράγματι (βλ. Σχήμα 2) έστω ότι το σημείο Λ ανήκει στο ημιεπίπεδο (ϵ, A). Αν δεν ανήκει στην ευθεία ϵ και επίσης δεν ανήκει στην ημιευθεία ΜΑ, τότε από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΑΚΛ έχουμε $(\Lambda A) < (\Lambda K) + (KA) = (\Lambda K) + (KB) = (\Lambda B)$. Αν το σημείο Λ ανήκει στην ευθεία ϵ τότε $(\Lambda A) = (\Lambda B)$. Επίσης αν ανήκει στην ημιευθεία ΜΑ, τότε πάλι προφανώς $(\Lambda A) \le (\Lambda B)$.



Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι το ημιεπίπεδο με εξίσωση: $6x + 4y + 3 \le 0$.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1

Έστω η εξίσωση $z^2-2z+\left(1+\lambda^2\right)=0$ (1) με $\lambda\in\mathbb{R}^*$

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει μιγαδικές ρίζες.

ii. Αν z_1,z_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1) να υπολογίσετε τα z_1+z_2 και $z_1\cdot z_2$.

iii. Αν M και N οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο και $\left(\mathrm{OMN}\right)=3$, όπου O η αρχή των αξόνων, να υπολογίσετε το λ και τις ρίζες z_1 και z_2.

<u>Λύση</u>

i. Υπολογίζουμε τη Διακρίνουσα:

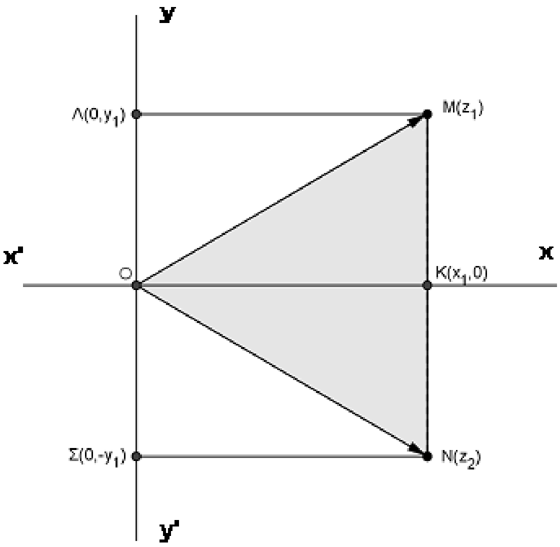
$\Delta=4-4\left(1+\lambda^2\right)=-4\lambda^2<0$ άρα η εξίσωση (1) έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες.

ii. Γνωρίζουμε ότι:

$z_1+z_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ και $z_1\cdot z_2=\dfrac{\gamma}{\alpha},\alpha\neq 0$, άρα,

$z_1+z_2=2$ και $z_1\cdot z_2=1+\lambda^2$.

iii. Οι ρίζες z_1,z_2 της εξίσωσης είναι συζυγείς μιγαδικές, οπότε έστω $z_1=x_1+y_1i$ και $z_2=x_1-y_1i$ με $x_1,y_1\in\mathbb{R}$ και $y_1>0$. Τότε από το προηγούμενο ερώτημα θα ισχύει
$z_1+z_2=2x_1=2\Leftrightarrow x_1=1$ και
$z_1\cdot z_2=x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}=1+\lambda^2\Leftrightarrow 1+y_1^{\ 2}=1+\lambda^2\Leftrightarrow y_1=|\lambda|$.



Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΜΝ είναι:

$\left(\mathrm{OMN}\right)=\dfrac{(\mathrm{MN})\cdot(\mathrm{OK})}{2}=\dfrac{2y_1\cdot 1}{2}=y_1=3$, άρα $|\lambda|=3 \Leftrightarrow \lambda=\pm 3$ και οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$z_1=1+3i$ και $z_2=1-3i$.

Άσκηση 2

i. Αν z_1, z_2 μιγαδικοί αριθμοί, να δείξετε ότι:

$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2})$.

ii. Για τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2, να αποδείξετε τις ισοδυναμίες:

$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \Leftrightarrow z_1 \cdot \overline{z_2} \in I \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{ON}$, όπου $\overrightarrow{OM}$ και $\overrightarrow{ON}$ οι διανυσματικές ακτίνες των μιγαδικών z_1 και z_2 αντίστοιχα.

iii. Να δειχθεί ότι για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ισχύει η ταυτότητα:

$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$.

iv. Αν $|z| = 3, |w| = 5$ και $|z + w| = 6$ να υπολογίσετε το $|z - w|, z, w \in \mathbb{C}$

<u>Λύση</u>

i. Εφαρμόζοντας ιδιότητες του μέτρου μιγαδικών αριθμών, έχουμε:

$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right) =$

$z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + z_2\overline{z_2} =$

$|z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2})$.

ii. Έστω $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$, τότε βάσει του πρώτου ερωτήματος έπεται ότι:

$2\mathrm{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}) = 0 \Leftrightarrow z_1 \cdot \overline{z_2} \in I$ (1).

Αντίστροφα, για $z_1 \cdot \overline{z_2} \in I$ και λόγω της ισοδυναμίας (1) και του (i) ερωτήματος θα έχουμε ότι:

$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

Για $z_1 = x_1 + y_1 i$ και $z_2 = x_2 + y_2 i$, με $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$z_1 \cdot \overline{z_2} = (x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i) = (x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2) + (y_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot y_2)i.$ (2)

Έστω $z_1 \cdot \overline{z_2} \in I$, τότε από τη σχέση (2), παίρνουμε:

$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0$ (3) όμως $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = \left(x_1, y_1\right) \cdot \left(x_2, y_2\right) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0$, άρα $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{ON}$.

Αντίστροφα, για $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{ON}$ συνεπάγεται ισχύει η σχέση (3) και λόγω της σχέσης (2), έχουμε $z_1 \cdot \overline{z_2} \in I$.

iii. Ισχύει:

$$\left|z_1 + z_2\right|^2 + \left|z_1 - z_2\right|^2 = \left(z_1 + z_2\right)\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right) + \left(z_1 - z_2\right)\left(\overline{z_1} - \overline{z_2}\right) =$$

$$\left(z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + z_2\overline{z_2}\right) + \left(z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2 + z_2\overline{z_2}\right) =$$

$2\left(\left|z_1\right|^2 + \left|z_2\right|^2\right)$, άρα αποδείχτηκε.

iv. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε:

$\left|z + w\right|^2 + \left|z - w\right|^2 = 2\left(\left|z\right|^2 + \left|w\right|^2\right)$, για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$

και αντικαθιστώντας τις τιμές, από τα δεδομένα του ερωτήματος, παίρνουμε:

$$6^2 + \left|z - w\right|^2 = 2\left(3^2 + 5^2\right) \Leftrightarrow \left|z - w\right|^2 = 32 \Leftrightarrow \left|z - w\right| = \sqrt{32}.$$

Άσκηση 3

Δίνεται η εξίσωση $z^2 - 4z\cdot ημθ + 4 = 0, \quad (1), \quad z \in \mathbb{C}, θ \in \mathbb{R}$.

i. Να λύσετε την εξίσωση (1).

ii. Να δείξετε ότι οι εικόνες των ριζών της (1), στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται πάνω σε κύκλο.

iii. Αν z_1, z_2 οι ρίζες της (1), να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z_1 - z_2|$.

<u>Λύση</u>

$z^2 - 4z\cdot ημθ + 4 = 0 \quad (1), θ \in \mathbb{R}$

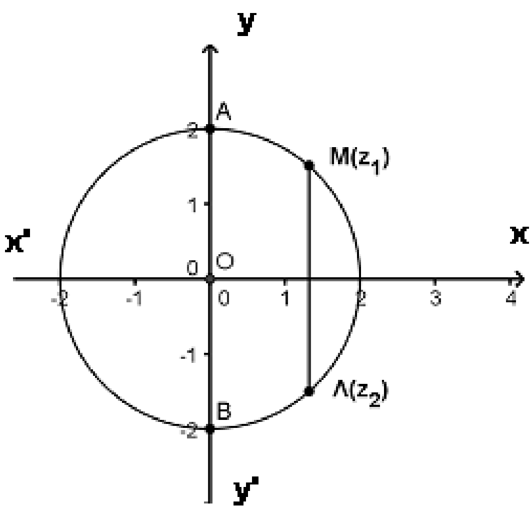
i. $Δ = 16\cdot ημ^2θ - 16 = -16(1 - ημ^2θ) = -16\cdot συν^2θ$ οπότε

$$z_{1,2} = \frac{4\cdot ημθ \pm 4i\cdot συνθ}{2} = 2\cdot ημθ \pm 2i\cdot συνθ = 2\left(ημθ \pm i\cdot συνθ\right)$$

ii. Έστω $x = 2\cdot ημθ$ και $y = \pm 2\cdot συνθ$, τότε: $x^2 + y^2 = 4\cdot ημ^2θ + 4\cdot συν^2θ = 4$.

Οπότε οι ρίζες της εξίσωσης κινούνται πάνω στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 2.

iii. Αν Μ και Λ οι εικόνες των ριζών z_1, z_2 στο μιγαδικό επίπεδο, τότε επειδή αυτές είναι συζυγείς, τα σημεία Μ και Λ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$. Οπότε η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το $|z_1 - z_2|$ είναι το (ΑΒ)=4, για $θ = 2kπ, k \in Z$, (σχήμα 1).



Άσκηση 4

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w για τους οποίους ισχύει:

$\left(\overline{z}\right)^2 \cdot \overline{w} = 4$ και $z^6 \cdot w = 4$.

i. Να υπολογίσετε τα $|z|$ και $|w|$.

ii. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w.

iii. Να δείξετε ότι: $3 \le |z+w| \le 5$. Πότε ισχύουν οι ισότητες;

<u>Λύση</u>

i. Αν πάρουμε μέτρα και στις δυο σχέσεις έχουμε:

$\left|\left(\overline{z}\right)^2 \cdot \overline{w}\right| = 4 \Leftrightarrow \left|\left(\overline{z}\right)^2\right| \cdot |\overline{w}| = 4 \Leftrightarrow |z|^2 \cdot |w| = 4$ (1).

$|z^6 \cdot w| = 4 \Leftrightarrow |z|^6 \cdot |w| = 4$ (2).

Διαιρώντας τις σχέσεις (2):(1), $z, w \in \mathbb{C}^*$ από δεδομένα, παίρνουμε:

$|z|^4 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$ και αντικαθιστώντας στην (1): $|w| = 4$.

ii. $\left(\overline{z}\right)^2 \cdot \overline{w} = 4 \Leftrightarrow \overline{\left(\overline{z}\right)^2 \cdot \overline{w}} = \overline{4} \Leftrightarrow \overline{\left(\overline{z}\right)^2} \cdot \left(\overline{\overline{w}}\right) = 4 \Leftrightarrow \left(\overline{\left(\overline{z}\right)}\right)^2 \cdot w = 4 \Leftrightarrow (z)^2 \cdot w = 4$, οπότε η σχέση $z^6 \cdot w = 4$ γίνεται:

$z^6 \cdot w = 4 \Leftrightarrow z^4 \cdot \left(z^2 \cdot w\right) = 4 \Leftrightarrow z^4 \cdot 4 = 4 \Leftrightarrow z^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\left(z^2 - 1\right)\left(z^2 + 1\right) = 0 \Leftrightarrow z = \pm 1, z = \pm i$.

Αν $z = \pm 1$ τότε $w = 4$, και αν $z = \pm i$, τότε :

$i^6 w = 4 \Leftrightarrow w = -4$.

iii. ισχύει: $|z| = 1$ και $|w| = 4$, οπότε:

$\big||z| - |w|\big| \le |z+w| \le |z| + |w| \Leftrightarrow 3 \le |z+w| \le 5$.

Η $\big||z| - |w|\big| = |z+w|$ ισχύει όταν $z = -1$ και $w = 4$, ενώ η $|z+w| = |z| + |w|$ ισχύει όταν $z = 1$ και $w = 4$.

Άσκηση 5

α) Για τον μιγαδικό αριθμό $z = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε τις ισοδυναμίες:

$\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

$\overline{z} = -z \Leftrightarrow z \in I$

β) Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $|z_1| = |z_2| = \rho, \rho > 0$ και $z_1 \cdot z_2 \neq -\rho^2$, να δείξετε ότι:

i. Ο μιγαδικός αριθμός $w_1 = \dfrac{z_1 + z_2}{\rho^2 + z_1 \cdot z_2} \in \mathbb{R}$.

ii. Ο μιγαδικός αριθμός $w_2 = \dfrac{z_1 - z_2}{\rho^2 + z_1 \cdot z_2} \in I$.

<u>Λύση</u>

α) $\overline{z} = z \Leftrightarrow x - yi = x + yi \Leftrightarrow 2yi = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

Ομοίως,

$\overline{z} = -z \Leftrightarrow x - yi = -x - yi \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow z \in I$.

β) $|z_1| = |z_2| = \rho \Leftrightarrow |z_1|^2 = |z_2|^2 = \rho^2 \Leftrightarrow$

$z_1 \cdot \overline{z_1} = z_2 \cdot \overline{z_2} = \rho^2$ οπότε:

$\overline{z_1} = \dfrac{\rho^2}{z_1}$ και $\overline{z_2} = \dfrac{\rho^2}{z_2}$.

i. Χρησιμοποιώντας το ερώτημα (α) αρκεί να δείξουμε ότι $w_1 = \overline{w_1}$. Είναι:

$$\overline{w_1} = \overline{\left(\frac{z_1 + z_2}{\rho^2 + z_1 \cdot z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1 + z_2}}{\overline{\rho^2 + z_1 \cdot z_2}} =$$

$$\frac{\overline{z_1} + \overline{z_2}}{\rho^2 + \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}} = \frac{\dfrac{\rho^2}{z_1} + \dfrac{\rho^2}{z_2}}{\rho^2 + \dfrac{\rho^2}{z_1} \cdot \dfrac{\rho^2}{z_2}} = \frac{\dfrac{\rho^2 \left(z_1 + z_2\right)}{z_1 \cdot z_2}}{\dfrac{\rho^2 \left(z_1 \cdot z_2 + \rho^2\right)}{z_1 \cdot z_2}} = w_1.$$ άρα αποδείχτηκε.

ii. Χρησιμοποιώντας το ερώτημα (α) αρκεί να δείξουμε ότι $\overline{w_2} = -w_2$. Είναι:

$$\overline{w_2} = \overline{\left(\frac{z_1 - z_2}{\rho^2 + z_1 \cdot z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1 - z_2}}{\overline{\rho^2 + z_1 \cdot z_2}} =$$

$$\frac{\overline{z_1} - \overline{z_2}}{\rho^2 + \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}} = \frac{\frac{\rho^2}{z_1} - \frac{\rho^2}{z_2}}{\rho^2 + \frac{\rho^2}{z_1} \cdot \frac{\rho^2}{z_2}} = \frac{\frac{\rho^2\left(z_2 - z_1\right)}{z_1 \cdot z_2}}{\frac{\rho^2\left(z_1 \cdot z_2 + \rho^2\right)}{z_1 \cdot z_2}} = -w_2$$

. άρα αποδείχτηκε.

Άσκηση 6

Για τους μη μηδενικούς μιγαδικούς αριθμούς z, w, να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} z^8 \cdot w^6 = -1 \\ z^{26} \cdot w^{20} = -1 \\ z^2 + w^2 = -2 \end{cases}$$

<u>Λύση</u>

Έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} z^8 \cdot w^6 = -1 & (1) \\ z^{26} \cdot w^{20} = -1 & (2) \\ z^2 + w^2 = -2 & (3) \end{cases},$$

υψώνουμε την πρώτη στον κύβο: $z^{24} \cdot w^{18} = -1 (4)$ και διαιρούμε την (2) με την (4):

$z^2 \cdot w^2 = 1 \Leftrightarrow z^2 = \dfrac{1}{w^2}$ και αντικαθιστούμε στην (3), οπότε:

$$\frac{1}{w^2} + w^2 = -2 \Leftrightarrow w^4 + 2w^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(w^2 + 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow w^2 = -1 \Leftrightarrow w = \pm i.$$

Αντικαθιστώντας στην (3) βρίσκουμε: $z = \pm i$. Έτσι οι λύσεις του συστήματος είναι:

$\left(z = i, w = i\right)$ ή $\left(z = i, w = -i\right)$ ή $\left(z = -i, w = i\right)$ ή $\left(z = -i, w = -i\right)$.

Άσκηση 7

i. Να λύσετε στο $\mathbb{C}$ την εξίσωση: $z^2 - iz - 1 = 0$

ii. Αν z_1, z_2 οι ρίζες της προηγούμενης εξίσωσης, να αποδείξετε ότι: $z_1^{\,3} = z_2^{\,3}$.

<u>Λύση</u>

i. Έστω $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$, τότε η εξίσωση $z^2 - iz - 1 = 0$ γίνεται:

$$x^2 - y^2 + 2xyi - ix + y - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + y - 1 = 0 \\ x(2y-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + y - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x^2 - y^2 + y - 1 = 0 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$ άρα $z_{1,2} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}$, (για $x = 0$ η εξίσωση $-y^2 + y - 1 = 0$ είναι αδύνατη).

ii. $z_1^{\,3} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{3\sqrt{3}}{8} + 3\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 i\dfrac{1}{2} + 3\dfrac{\sqrt{3}}{2}i^2\dfrac{1}{4} + i^3\dfrac{1}{8} = i$

και $z_2^{\,3} = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right)^3 = -\dfrac{3\sqrt{3}}{8} + 3\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 i\dfrac{1}{2} - 3\dfrac{\sqrt{3}}{2}i^2\dfrac{1}{4} + i^3\dfrac{1}{8} = i$,

επομένως: $z_1^{\,3} = z_2^{\,3}$

Άσκηση 8

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = 3\eta\mu\theta + 4i\sigma\upsilon\nu\theta,\ \theta \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z κινούνται πάνω σε μια έλλειψη.

ii. Αν z_1, z_2 δυο μιγαδικοί αριθμοί της παραπάνω μορφής, να δείξετε ότι $|z_1 - z_2| \leq 8$.

<u>Λύση</u>

i. Έστω $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$, τότε $z = 3\eta\mu\theta + 4i\sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3\eta\mu\theta \\ y = 4\sigma\upsilon\nu\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{3} = \eta\mu\theta \\ \\ \dfrac{y}{4} = \sigma\upsilon\nu\theta \end{cases}$,

υψώνουμε στο τετράγωνο και τις δυο σχέσεις και αθροίζουμε, οπότε λαμβάνουμε:

$\left(\dfrac{x}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{4}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ και η οποία παριστάνει έλλειψη με μήκος μεγάλου άξονα 8 και μήκος μικρού άξονα 6.

ii.Το $|z_1 - z_2|$ παριστάνει την απόσταση των εικόνων των δυο μιγαδικών αριθμών στο μιγαδικό επίπεδο και επειδή οι τελευταίες είναι σημεία της προηγούμενης έλλειψης έπεται έχουν τη μεγαλύτερη απόσταση όταν είναι τα άκρα του μεγάλου άξονα, άρα η μέγιστη τιμή που λαμβάνει το $|z_1 - z_2|$ είναι 8.

Άσκηση 9

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z \neq 0$, και $w = z - \frac{4}{z}$. Να δείξετε ότι αν οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 2$, τότε οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών w κινούνται σε ευθύγραμμο τμήμα.

<u>Λύση</u>

Για τον $z = \alpha + bi$ με $\alpha, b \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|z| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2 + b^2} = 2 \Leftrightarrow \alpha^2 + b^2 = 4 \Leftrightarrow b^2 = 4 - \alpha^2 \geq 0$

απ’ όπου $|\alpha| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq \alpha \leq 2$ και ομοίως συνάγεται $-2 \leq b \leq 2$.

Επίσης $w = z - \frac{4}{z} = \alpha + bi - \frac{4}{\alpha + bi} = \alpha + bi - \frac{4(\alpha - bi)}{\alpha^2 + b^2} = \alpha + bi - \alpha + bi = 0 + 2bi$ οπότε αν

$w = x + yi$ έπεται ότι $x = 0$ και $y = 2b \in [-4, 4]$. Άρα η εικόνα του w κινείται πάνω στον

άξονα των φανταστικών στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $A(0, -4)$ και $B(0, 4)$.

ΘΕΜΑ Δ

Άσκηση 1

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z με $z = 5 + 3\cdot\frac{1+i\cdot t}{1-i\cdot t}$, $t \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι οι εικόνες του μιγαδικού z ανήκουν σε κύκλο του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα.

Λύση

Έστω $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$. Έχουμε:

$$x + yi = 5 + 3\cdot\frac{1+i\cdot t}{1-i\cdot t} \Leftrightarrow x + yi = 5 + 3\cdot\frac{(1+i\cdot t)^2}{1+t^2} \Leftrightarrow$$

$$x + yi = 5 + 3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} + 3\cdot\frac{2ti}{1+t^2}.$$

Άρα, $x - 5 = 3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}$ και $y = 3\cdot\frac{2t}{1+t^2}$.

Υψώνουμε στο τετράγωνο και αθροίζουμε, οπότε:

$$(x-5)^2 + y^2 = 3^2\,\frac{1-2t^2+t^4+4t^2}{\left(1+t^2\right)^2} = 3^2$$

Άρα οι εικόνες του μιγαδικού z ανήκουν σε κύκλο με κέντρο Κ(5,0) και ακτίνα ρ=3.

Άσκηση 2

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 1+2i$ και $z_2 = 3+4i$

i. Για τον μιγαδικό αριθμό $z = x+yi,\ x,y \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε την ισοδυναμία: $\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

ii. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο, για τους οποίους ισχύει: $\dfrac{z-z_1}{z-z_2} \in \mathbb{R}$, όπου $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $z \neq z_2$.

iii. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z να βρείτε ποιος έχει το ελάχιστο μέτρο.

iv. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο μιγαδικό επίπεδο, για τους οποίους ισχύει: $w = t\cdot z_1 + (1-t)\cdot z_2$ όταν το t διατρέχει το $\mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>

i. $\overline{z} = z \Leftrightarrow x - yi = x + yi \Leftrightarrow 2yi = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

ii. Έστω $z = x+yi$, με $x,y \in \mathbb{R}$ και $(x,y) \neq (3,4)$, τότε:

$$\frac{z-z_1}{z-z_2} \in R \Leftrightarrow \frac{z-z_1}{z-z_2} = \overline{\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right)} \Leftrightarrow \frac{z-z_1}{z-z_2} = \frac{\overline{z}-\overline{z_1}}{\overline{z}-\overline{z_2}} \Leftrightarrow$$

$z\overline{z} - z\overline{z_2} - z_1\overline{z} + z_1\overline{z_2} = z\overline{z} - z\overline{z_1} - z_2\overline{z} + z_2\overline{z_1}$ και αντικαθιστώντας τους μιγαδικούς παίρνουμε:

$y = x+1$.

Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η ευθεία $(\epsilon): y = x+1$, χωρίς το σημείο Κ(3,4).

iii. Για να βρούμε ποιος από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z έχει το ελάχιστο μέτρο, θα φέρουμε την κάθετη ευθεία από την αρχή των αξόνων στην $(\epsilon): y = x+1$. Η ευθεία (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1 = 1$, άρα η κάθετη ευθεία (η) της (ε), θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2 = -1$ και επειδή διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα έχει εξίσωση:

$(\eta): y = -x$. Λύνουμε το σύστημα: $\begin{cases} y = x+1 \\ y = -x \end{cases}$

και βρίσκουμε $x = -\dfrac{1}{2}$ και $y = \dfrac{1}{2}$, άρα ο μιγαδικός αριθμός z με το μικρότερο μέτρο είναι ο $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$.

iv. Έστω $w = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$, τότε $x + yi = t\cdot(1+2i) + (1-t)\cdot(3+4i) = (3-2t) + (-2t+4)i$, συνεπώς, $x = 3-2t$, **(1)** και $y = -2t+4$, **(2)** και απαλείφοντας το $t \in \mathbb{R}$ μεταξύ των σχέσεων **(1)** και **(2)**, παίρνουμε: $y = x+1$.

Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η ευθεία $(\epsilon): y = x+1$.

Άσκηση 3

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός w για τον οποίο ισχύει: $1+w+w^2=0$. Να δείξετε ότι:

i. $w\neq 1$.

ii. $w^3=1$.

iii. $w^{3\rho}+w^{3\rho+1}+w^{3\rho+2}=0$.

iv. $w^9+w^8+w^{-2}=0$.

v. $(1+w)^5=-w$.

vi. $\left(3+3w+5w^2\right)^{12}=4096.$

Λύση

i. Προφανώς $w\neq 1$, διότι για $w=1$ από τη σχέση $1+w+w^2=0$ προκύπτει 3=0 άτοπο.

ii.Πολλαπλασιάζουμε τη δοσμένη σχέση με το $(1-w\neq 0)$ οπότε έχουμε:
$1+w+w^2=0\Leftrightarrow (1-w)\left(1+w+w^2\right)=0\Leftrightarrow 1-w^3=0\Leftrightarrow w^3=1$.

Β' τρόπος: Λύνουμε την εξίσωση $1+w+w^2=0\Leftrightarrow w_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, κατόπιν υψώνουμε στην 3η και βρίσκουμε το ζητούμενο.

iii. $w^{3\rho}+w^{3\rho+1}+w^{3\rho+2}=0\Leftrightarrow \left(w^3\right)^{\rho}+\left(w^3\right)^{\rho}w+\left(w^3\right)^{\rho}w^2=0\Leftrightarrow$
$1+w+w^2=0$ που ισχύει, άρα αποδείχτηκε.

iv. $w^9+w^8+w^{-2}=0\Leftrightarrow w^9+w^8+\frac{1}{w^2}=0\Leftrightarrow w^{11}+w^{10}+1=0\Leftrightarrow$
$w^{3\cdot 3+2}+w^{3\cdot 3+1}+1=0\Leftrightarrow \left(w^3\right)^3w^2+\left(w^3\right)^3w^1+1=0\Leftrightarrow w^2+w^1+1=0$, που ισχύει άρα αποδείχτηκε.

v. $(1+w)^5=\left(-w^2\right)^5=-w^{10}=-\left(w^3\right)^3w=-w.$

vi. $\left(3+3w+5w^2\right)^{12}=\left(3+3w+3w^2+2w^2\right)^{12}=\left[3\left(1+w+w^2\right)+2w^2\right]^{12}=$
$2^{12}w^{24}=4096\left(w^3\right)^8=4096$.

Άσκηση 4

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w με $z=(\lambda+1)+(3\lambda+2)i,\ \lambda\in\mathbb{R}$ και $|w-4-i|=2$.

i. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z.

ii. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w.

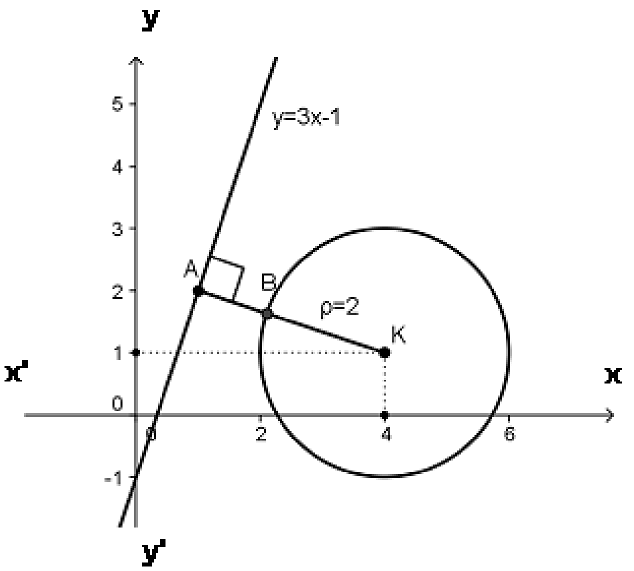
iii. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$.

<u>Λύση</u>

i. Στον μιγαδικό αριθμό $z=(\lambda+1)+(3\lambda+2)i,\ \lambda\in\mathbb{R}$, θέτουμε $x=(\lambda+1)$ και $y=(3\lambda+2)$ και απαλείφοντας το λ παίρνουμε $y=3x-1$. Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η ευθεία (ε) με εξίσωση $y=3x-1$.

ii. Ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με κέντρο το $K(4,1)$ και ακτίνα $\rho=2$.

iii. Όπως φαίνεται στο Σχέδιο 1, η ελάχιστη απόσταση του κύκλου από τη ευθεία είναι το μήκος του τμήματος ΑΒ.



$y=3x-1 \Leftrightarrow 3x-y-1=0$ οπότε:

$(AK)=\dfrac{|3\cdot4-1\cdot1-1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$ άρα $(AB)=\left|\sqrt{10}-2\right|$, επομένως η ελάχιστη τιμή του $|z-w|$

είναι $\sqrt{10}-2$.

Άσκηση 5

Έστω η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu^2\alpha\cdot z^2 - 2\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot z + \left(1+\eta\mu^2\alpha\right) = 0$ (1) με $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

i. Να λύσετε την εξίσωση (1). Για ποια τιμή του α η (1) έχει πραγματικές ρίζες;

ii. Να δείξετε ότι οι εικόνες των ριζών της (1) κινούνται πάνω σε μια υπερβολή.

iii. Να βρεθεί η τιμή του $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ έτσι, ώστε να έχουμε τη λύση της εξίσωσης με το ελάχιστο μέτρο.

Λύση

i. Η διακρίνουσα της εξίσωσης ισούται:

$$\Delta = 4\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 4\left(1+\eta\mu^2\alpha\right)\sigma\upsilon\nu^2\alpha = -4\sigma\upsilon\nu^2\alpha\cdot\eta\mu^2\alpha \le 0 .$$

Όταν $\alpha = 0$ τότε $\Delta = 0$ και η εξίσωση έχει μια διπλή πραγματική ρίζα

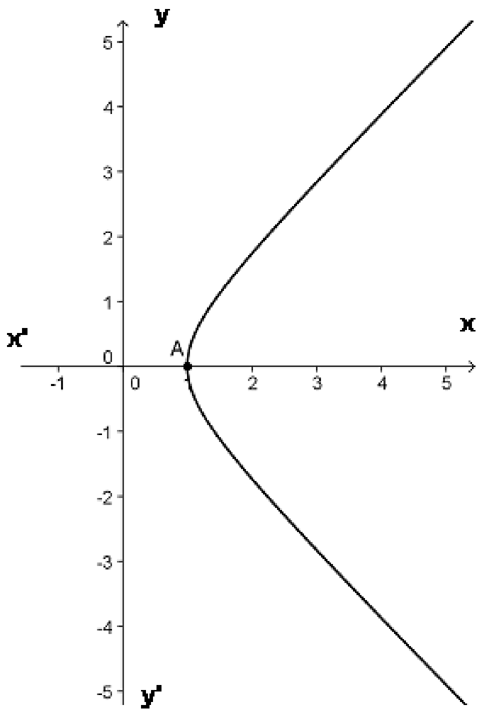
$$z = \frac{2\sigma\upsilon\nu\alpha}{2\sigma\upsilon\nu^2\alpha} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 0} = 1 .$$

Όταν $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τότε $\Delta < 0$ και η εξίσωση έχει δυο συζυγείς μιγαδικές ρίζες

$$z_{1,2} = \frac{2\sigma\upsilon\nu\alpha \pm 2i\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\eta\mu\alpha}{2\sigma\upsilon\nu^2\alpha} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha} \pm i\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} .$$

ii. Έστω $x = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$ και $y = \pm\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$ και από τη γνωστή ταυτότητα $\varepsilon\varphi^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$ έπεται ότι

$y^2 + 1 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 1$ με $x > 0$, αφού $\sigma\upsilon\nu\alpha > 0$. Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι ο ένας κλάδος μιας (ισοσκελούς) υπερβολής.



iii. Η λύση με το ελάχιστο μέτρο αντιστοιχεί στο σημείο της υπερβολής που απέχει την ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων, δηλαδή στην κορυφή Α(1,0), το οποίο είναι η εικόνα της πραγματικής λύσης της εξίσωσης που βρήκαμε στο πρώτο ερώτημα, για $\alpha = 0$.

Άσκηση 6

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 με $z_2 \neq 0$. Αν Α, Β, Γ οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z_1 + i \cdot z_2$, $z_1 - i \cdot z_2$ και $z_1 + \sqrt{3} \cdot z_2$ αντίστοιχα, τότε:

i. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

ii. Αν $|z_2| = 2$, να βρείτε το εμβαδό του ΑΒΓ.

<u>Λύση</u>

i. Έστω Α, Β, Γ οι εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο των $z_1 + i \cdot z_2$, $z_1 - i \cdot z_2$ και $z_1 + \sqrt{3} \cdot z_2$ αντίστοιχα. Για να δείξουμε ότι σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο, αρκεί να δείξουμε ότι $(\mathrm{AB}) = (\mathrm{A\Gamma}) = (\mathrm{B\Gamma})$. Όμως:

$$(\mathrm{AB}) = \left|(z_1 + i \cdot z_2) - (z_1 - i \cdot z_2)\right| =$$

$$|2i \cdot z_2| = 2|z_2|.$$

$$(\mathrm{A\Gamma}) = \left|(z_1 + i \cdot z_2) - \left(z_1 + \sqrt{3} \cdot z_2\right)\right| =$$

$$\left|\left(-\sqrt{3} + i\right) \cdot z_2\right| = \left|-\sqrt{3} + i\right||z_2| = 2|z_2| \text{ και}$$

$$(\mathrm{B\Gamma}) = \left|(z_1 - i \cdot z_2) - \left(z_1 + \sqrt{3} \cdot z_2\right)\right| =$$

$$\left|\left(-\sqrt{3} - i\right) \cdot z_2\right| = \left|-\sqrt{3} - i\right||z_2| = 2|z_2|.$$

Άρα το τρίγωνο είναι ισόπλευρο και οι πλευρές του έχουν μήκος $2|z_2|$.

ii. Γνωρίζουμε ότι το εμβαδό ενός ισόπλευρου τριγώνου πλευράς α δίνεται από τον τύπο $E = \dfrac{\alpha^2 \sqrt{3}}{4}$, επομένως το παραπάνω ισόπλευρο τρίγωνο έχει εμβαδό

$$(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{\left(2|z_2|\right)^2 \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \text{ τ.μ.}$$

Άσκηση 7

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει:

i. $\operatorname{Re}\left(z-\frac{4}{\overline{z}}\right)=-7\operatorname{Re}(z)$.

ii. $\operatorname{Im}\left(z-\frac{4}{\overline{z}}\right)=-2\operatorname{Im}(z)$.

<u>Λύση</u>

Θέτουμε $z=x+yi$ με $x,y\in\mathbb{R}$ και έχουμε:

$$z-\frac{4}{\overline{z}}=x+yi-\frac{4}{x-yi}=x+yi-\frac{4(x+yi)}{x^2+y^2}=$$

$\frac{x\left(x^2+y^2-4\right)}{x^2+y^2}+\frac{y\left(x^2+y^2-4\right)}{x^2+y^2}i$ με $x^2+y^2\neq 0$. Οπότε:

i. $\operatorname{Re}\left(z-\frac{4}{\overline{z}}\right)=-7\operatorname{Re}(z)\Leftrightarrow\frac{x\left(x^2+y^2-4\right)}{x^2+y^2}=-7x\Leftrightarrow x=0$ ή $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο άξονας $y'y$ με εξαίρεση το σημείο $O(0,0)$ και ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

ii. $\operatorname{Im}\left(z-\frac{4}{\overline{z}}\right)=-2\operatorname{Im}(z)\Leftrightarrow\frac{y\left(x^2+y^2-4\right)}{x^2+y^2}=-2y\Leftrightarrow y=0$ ή $x^2+y^2=\frac{4}{3}$ άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο άξονας $x'x$ με εξαίρεση το σημείο $O(0,0)$ και ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Άσκηση 8

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w με $|z+1-i|=2$ και $|w-4-3i|=1$.

i. Να βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των εικόνων των z και w στο μιγαδικό επίπεδο.

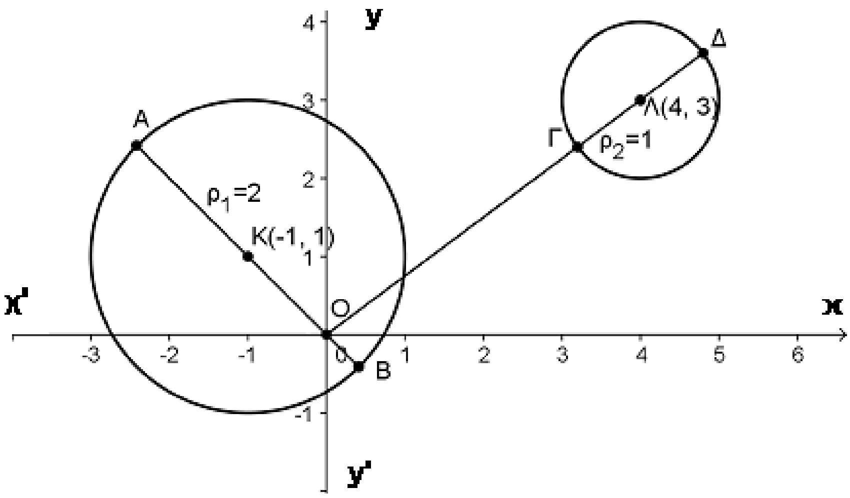
ii. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των $|z|$ και $|w|$.

iii. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$.

Λύση

i. Ισχύει:
$|z+1-i|=2 \Leftrightarrow |z-(-1+i)|=2$
άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με κέντρο το σημείο Κ(-1,1) και ακτίνα $\rho_1=2$, δηλαδή ο $C_1:(x+1)^2+(y-1)^2=2^2$. Επίσης,
$|w-4-3i|=1 \Leftrightarrow |w-(4+3i)|=1,$
άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με κέντρο το σημείο Λ(4,3) και ακτίνα $\rho_2=1$, δηλαδή ο $C_2:(x-4)^2+(y-3)^2=1$

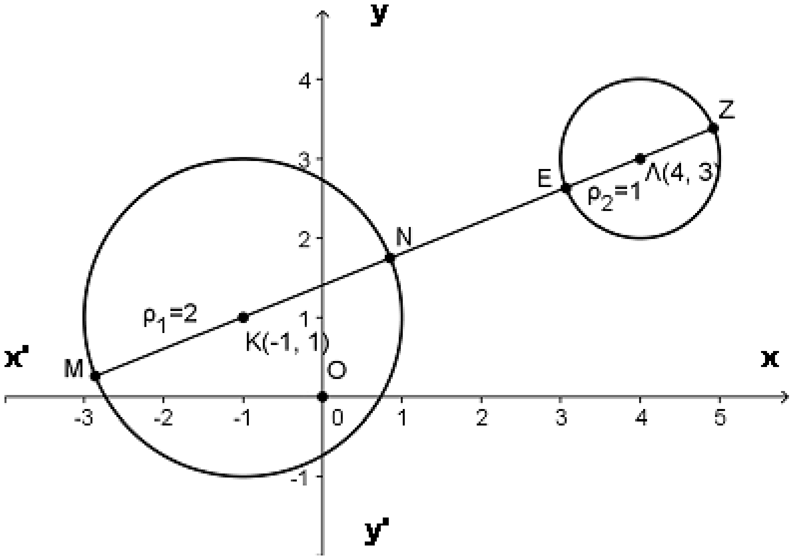
ii.



Στο σχήμα 1 φαίνονται οι δυο γεωμετρικοί τόποι. Από την ευκλείδεια γεωμετρία γνωρίζουμε ότι για τον κύκλο με κέντρο Κ η ελάχιστη απόσταση των σημείων του από την αρχή των αξόνων είναι το
$(OB)=|d(O,K)-\rho_1|$ και η μέγιστη το
$(OA)=d(O,K)+\rho_1$.
Όμως $d(O,K)=(OK)=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$ οπότε $(OB)=|2-\sqrt{2}|$ και $(OA)=2+\sqrt{2}$.
Επομένως η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή του $|z|$ είναι $2-\sqrt{2}$ και $2+\sqrt{2}$ αντίστοιχα.

Για τον κύκλο με κέντρο Λ έχουμε $d(O,\Lambda)=(O\Lambda)=\sqrt{4^2+3^2}=5$, οπότε η ελάχιστη απόσταση των σημείων του από την αρχή των αξόνων είναι το $(O\Gamma)=\left|d(O,\Lambda)-\rho_2\right|=5-1=4$ και η μέγιστη το $(O\Delta)=d(O,\Lambda)+\rho_2=5+1=6$.
Επομένως η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή του $|w|$ είναι 4 και 6 αντίστοιχα.

iii.



Ισχύει $(K\Lambda)=\sqrt{(4+1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{29}$ και $\rho_1+\rho_2=1+2=3$, οπότε $(K\Lambda)>\rho_1+\rho_2$,
άρα ο ένας κύκλος είναι εξωτερικός του άλλου. Σ΄ αυτήν την περίπτωση γνωρίζουμε από την ευκλείδεια γεωμετρία ότι η ελάχιστη απόσταση των σημείων των δυο κύκλων είναι το τμήμα (ΝΕ) και η μέγιστη το τμήμα (ΜΖ).

Άρα $(NE)=(K\Lambda)-\rho_1-\rho_2=\sqrt{29}-3$ και $(NE)=(K\Lambda)+\rho_1+\rho_2=\sqrt{29}+3$, οι οποίες τιμές αντιστοιχούν στην ελάχιστη και στη μέγιστη τιμή του $|z-w|$.

Άσκηση 9

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των $z \in \mathbb{C}$ που επαληθεύουν την: $\left|\operatorname{Im}(z)-1\right| = |z+i|$.

β) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο των $z, w \in \mathbb{C}$ που επαληθεύουν τις: $|z-1| = |z-2i|$ και $|w-2| = |w-4i|$ βρίσκονται πάνω σε παράλληλες ευθείες, και να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$.

<u>Λύση</u>

α) Έστω $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε:

$$\left|\operatorname{Im}(z)-1\right| = |z+i| \Leftrightarrow |y-1| = |x+yi+i| \Leftrightarrow |y-1| = \sqrt{x^2+(y+1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y-1)^2 = x^2+(y+1)^2 \Leftrightarrow y^2-2y+1 = x^2+(y+1)^2 \Leftrightarrow x^2 = -4y\,,$$

άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι παραβολή με κορυφή την αρχή των αξόνων, άξονα συμμετρίας τον $y'y$, παράμετρο $p=-2$, Εστία το $E(0,-1)$ και διευθετούσα την ευθεία $y=1$.

β) Έστω $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε:

$$|z-1| = |z-2i| \Leftrightarrow |x+yi-1| = |x+yi-2i| \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-2)^2} \Leftrightarrow$$

$$-2x+1 = -4y+4 \Leftrightarrow -2x+4y-3 = 0\,,$$

άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1 = -\dfrac{A}{B} = \dfrac{1}{2}$.

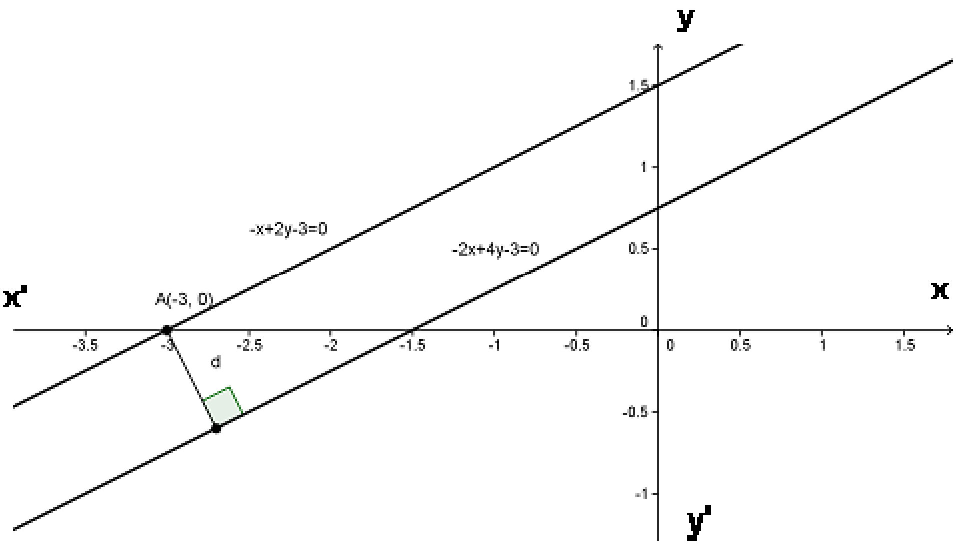
Ομοίως έστω $w = \alpha + bi$, με $\alpha, b \in \mathbb{R}$, τότε:

$$|w-2| = |w-4i| \Leftrightarrow |\alpha+bi-2| = |\alpha+bi-4i| \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(\alpha-2)^2+b^2} = \sqrt{\alpha^2+(b-4)^2} \Leftrightarrow$$

$$-4\alpha+4 = -8b+16 \Leftrightarrow -\alpha+2b-3 = 0\,.$$

Άρα συντεταγμένες του w επαληθεύουν την εξίσωση $-x+2y-3=0$, επομένως και ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2 = \dfrac{1}{2}$ και επειδή $\lambda_1 = \lambda_2$ οι δυο ευθείες είναι παράλληλες.



Η ελάχιστη τιμή του $|z-w|$ είναι η απόσταση των παραλλήλων. Θεωρούμε ένα σημείο της μιας ευθείας π.χ. το $A(-3,0)$ που ανήκει στην $-x+2y-3=0$ και από τον τύπο της απόστασης σημείου από ευθεία βρίσκουμε την απόσταση του Α από την ευθεία $-2x+4y-3=0$, που είναι

$$d=\frac{|-2\cdot(-3)+4\cdot 0-3|}{\sqrt{(-2)^2+4^2}}=\frac{3}{\sqrt{20}}=\frac{3\sqrt{5}}{10}$$

Άρα η ελάχιστη τιμή του $|z-w|$ είναι $\frac{3\sqrt{5}}{10}$.

Άσκηση 10

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση:
$|z-4-3i|=3$ (1).

α) Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων τους είναι κύκλος που εφάπτεται στον άξονα $x'x$.

β) Αν z_1 μιγαδικός αριθμός που ικανοποιεί την (1), τότε να δείξετε ότι:

$\left|z_1-(1+3i)\right|^2+\left|z_1-(7+3i)\right|^2=36$ (2) και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τη σχέση (2)

γ) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $\left|z-(8+3i)\right|$, όπου z μιγαδικός που ικανοποιεί την (1).

<u>Λύση</u>

α) Έχουμε:
$|z-4-3i|=3 \Leftrightarrow \left|z-(4+3i)\right|=3,$
άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος, με κέντρο το σημείο $K(4,3)$ και ακτίνα 3. Επειδή η απόσταση του κέντρου του κύκλου από τον άξονα $x'x$ είναι 3, δηλαδή ισούται με την ακτίνα του κύκλου, έπεται ότι ο κύκλος εφάπτεται στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

β) Έστω $z_1=\alpha+bi$, με $\alpha,b\in\mathbb{R}$. Τότε $\left|z_1-(1+3i)\right|^2+\left|z_1-(7+3i)\right|^2=36 \Leftrightarrow$

$\left|(\alpha-1)+(b-3)i\right|^2+\left|(\alpha-7)+(b-3)i\right|^2=36 \Leftrightarrow$

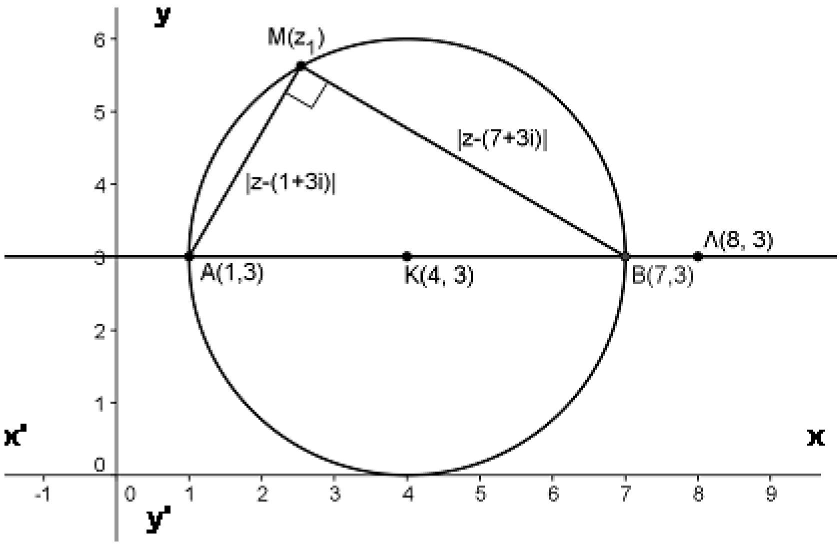
$(\alpha-1)^2+(b-3)^2+(\alpha-7)^2+(b-3)^2=36 \Leftrightarrow$

$2\alpha^2-16\alpha+50+2(b-3)^2=36 \Leftrightarrow$

$\alpha^2-8\alpha+25+(b-3)^2=18 \Leftrightarrow \alpha^2-8\alpha+16+9+(b-3)^2=9+9 \Leftrightarrow$

$\alpha^2-8\alpha+16+(b-3)^2=9 \Leftrightarrow (\alpha-4)^2+(b-3)^2=3^2 \Leftrightarrow \left|z_1-(4+3i)\right|=3$, το οποίο ισχύει, άρα ισχύει και η ισοδύναμη αρχική σχέση.
Γεωμετρική ερμηνεία:
Έστω τα σημεία $A(1,3)$ και $B(7,3)$. Επειδή ο συντελεστής διεύθυνσης του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ είναι μηδέν έχουμε ότι η ΑΒ είναι παράλληλη του άξονα $x'x$. Θεωρούμε τον κύκλο με διάμετρο την ΑΒ και κέντρο το σημείο Κ(4,3). Λόγω του (Β) ερωτήματος αν M η εικόνα του z_1 στο μιγαδικό επίπεδο, το $\left|z_1-(1+3i)\right|$ παριστάνει την απόσταση (MA) και το $\left|z_1-(7+3i)\right|$ την απόσταση (MB) οπότε

$\left|z_1-(1+3i)\right|^2+\left|z_1-(7+3i)\right|^2=36 \Leftrightarrow (MA)^2+(MB)^2=(AB)^2$ το οποίο ισχύει αφού είναι το Πυθαγόρειο Θεώρημα για το ορθογώνιο τρίγωνο MAB.



γ) Αν $\Lambda(8,3)$ η εικόνα του μιγαδικού $8+3i$, η οποία βρίσκεται πάνω στην ευθεία που ορίζουν τα σημεία A και B, τότε από την ευκλείδεια γεωμετρία (βλέπε Σχήμα 1) γνωρίζουμε ότι η ελάχιστη τιμή του $\left|z-(8+3i)\right|$ είναι το μήκος του ΛB που είναι 1 και η μέγιστη τιμή το μήκος του ΛA που είναι 7, δηλαδή $(\Lambda B)=\left|z-(8+3i)\right|_{\min}=1$ και $(\Lambda A)=\left|z-(8+3i)\right|_{\max}=7$

Άσκηση 11

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z=\alpha+\beta i$, $\alpha,\beta\in R$ και $w=2\overline{z}+iz-3$. Να δείξετε ότι:

i. $\mathrm{Re}(w)=2\alpha-\beta-3$ και $\mathrm{Im}(w)=\alpha-2\beta$.

ii. Αν οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται πάνω στην ευθεία $y=2x+1$, τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z.

iii. Αν οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται πάνω στην ευθεία $y=x+1$, τότε οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών w κινούνται πάνω στην ευθεία $y=-x-6$.

<u>Λύση</u>

i. $w=2\overline{z}+iz-3\Leftrightarrow$

$w=2(\alpha-\beta i)+i(\alpha+\beta i)-3=(2\alpha-\beta-3)+(\alpha-2\beta)i\Leftrightarrow$

$\mathrm{Re}(w)=2\alpha-\beta-3$ και $\mathrm{Im}(w)=\alpha-2\beta$.

ii.Η εικόνα του w κινείται πάνω στην ευθεία $y=2x+1$, άρα $\alpha-2\beta=4\alpha-2\beta-6+1\Leftrightarrow\alpha=\frac{5}{3}$

επομένως ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z είναι η κατακόρυφη ευθεία $x=\frac{5}{3}$.

iii. Έστω $\gamma=\mathrm{Re}(w)$ και $\delta=\mathrm{Im}(z)$, τότε έχουμε: $\begin{cases}\gamma=2\alpha-\beta-3\\ \delta=\alpha-2\beta\end{cases}$, οπότε λύνοντας ως προς α

και β παίρνουμε: $\begin{cases}\alpha=\dfrac{2\gamma-\delta+6}{3}\\ \beta=\dfrac{\gamma-2\delta+3}{3}\end{cases}$ και αντικαθιστώντας στην $y=x+1$ βρίσκουμε: $\delta=-\gamma-6$

άρα η εικόνα του w κινείται πάνω στην ευθεία $y=-x-6$.

Άσκηση 12

α)

i. Να δείξετε την ταυτότητα: $\left|1+z\cdot\overline{w}\right|^2-\left|z+w\right|^2=\left(1-\left|z\right|^2\right)\left(1-\left|w\right|^2\right)$.

ii. Αν $\left|z\right|<1$ και $\left|w\right|>1$ να δείξετε ότι: $\left|1+z\cdot\overline{w}\right|<\left|z+w\right|$.

β)

Αν $z,w\in\mathbb{C}$ να δείξετε ότι:

i. $z\cdot\overline{w}+\overline{z}\cdot w\le\left|z\right|^2+\left|w\right|^2$.

ii. $\frac{1}{2}\left(z\cdot\overline{w}+\overline{z}\cdot w\right)\le\left|z\right|\left|w\right|$.

<u>Λύση</u>

α) i. $\left|1+z\cdot\overline{w}\right|^2-\left|z+w\right|^2=\left(1+z\cdot\overline{w}\right)\overline{\left(1+z\cdot\overline{w}\right)}-\left(z+w\right)\overline{\left(z+w\right)}=$

$\left(1+z\cdot\overline{w}\right)\left(1+\overline{z}\cdot w\right)-\left(z+w\right)\left(\overline{z}+\overline{w}\right)=1+\left|z^2\right|\cdot\left|w\right|^2-\left|z^2\right|-\left|w\right|^2=$

$\left(1-\left|z\right|^2\right)\left(1-\left|w\right|^2\right)$ άρα αποδείχτηκε.

ii. αν $\left|z\right|<1$ και $\left|w\right|>1$ τότε $\left(1-\left|z\right|^2\right)\left(1-\left|w\right|^2\right)<0\Leftrightarrow$

$\left|1+z\cdot\overline{w}\right|^2-\left|z+w\right|^2<0\Leftrightarrow\left|1+z\cdot\overline{w}\right|<\left|z+w\right|$.

β) i. $z\cdot\overline{w}+\overline{z}\cdot w\le\left|z\right|^2+\left|w\right|^2\Leftrightarrow z\cdot\overline{z}+w\cdot\overline{w}-z\cdot\overline{w}-\overline{z}\cdot w\ge0\Leftrightarrow$

$\left(z-w\right)\left(\overline{z}-\overline{w}\right)\ge0\Leftrightarrow$

$\left(z-w\right)\overline{\left(z-w\right)}\ge0\Leftrightarrow\left|z-w\right|^2\ge0$ το οποίο ισχύει, άρα αποδείχτηκε.

ii. Ισχύει $\left|z+w\right|^2=\left|z\right|^2+z\cdot\overline{w}+\overline{z}\cdot w+\left|w\right|^2\Leftrightarrow$

$z\cdot\overline{w}+\overline{z}\cdot w=\left|z+w\right|^2-\left|z\right|^2-\left|w\right|^2$ οπότε η ανισότητα γίνεται: $\frac{1}{2}\left(z\cdot\overline{w}+\overline{z}\cdot w\right)\le\left|z\right|\left|w\right|\Leftrightarrow$

$$\left|z+w\right|^2-\left|z\right|^2-\left|w\right|^2 \le 2\left|z\right|\left|w\right| \Leftrightarrow \left|z+w\right|^2 \le \left(\left|z\right|+\left|w\right|\right)^2 \Leftrightarrow$$

$\left|z+w\right| \le \left|z\right|+\left|w\right|$ η τελευταία ισχύει από τη γνωστή τριγωνική ανισότητα, άρα ισχύει και η ισοδύναμη της αρχική.

Ημερομηνία τροποποίησης: 12/1/2012

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Άσκηση 1

α) Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $\left[\alpha,\beta\right]$. Αν η f είναι συνεχής στο $\left[\alpha,\beta\right]$ και $f(\alpha)\neq f(\beta)$, να δείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=\eta$.

β) Έστω Α ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A ;

Λύση

α) Έστω ότι $f(\alpha)<f(\beta)$ και $f(\alpha)<n<f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-n$, $x\in\left[\alpha,\beta\right]$ παρατηρούμε ότι:

Η g είναι συνεχής στο $\left[\alpha,\beta\right]$ και $g(\alpha)g(\beta)<0$, αφού $g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και $g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in\left(\alpha,\beta\right)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$ οπότε $f(x_0)=\eta$.

β) Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο $x\in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$.

Άσκηση 2

i. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

ii. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

iii. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα A και $x_0 \in A$. Πότε λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0;

<u>Λύση</u>

i. Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν: έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

ii. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$.

iii. Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού A. Λέμε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 \in A$, όταν $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Άσκηση 3

α) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

β) Τι ονομάζουμε σύνθεση gof δύο συναρτήσεων f,g με πεδία ορισμού Α,Β αντίστοιχα; Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της gof;

γ) Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

<u>Λύση</u>

α) Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$.

β) Αν f,g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α, Β αντίστοιχα, τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g, και τη συμβολίζουμε με gof, τη συνάρτηση με τύπο $gof : A_1 \to \mathbb{R}$, όπου το πεδίο ορισμού A_1 της gof αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g.

Δηλαδή είναι το σύνολο $A_1 = \{x \in A \mid f(x) \in B\}$. Είναι φανερό ότι η gof ορίζεται αν $A_1 \neq \varnothing$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \varnothing$.

γ) Έστω οι συναρτήσεις f,g,h. Αν $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$ τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Άσκηση 4

i. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$ το $f(x_0)$;

ii. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano

iii. Πότε μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1;

<u>Λύση</u>

i. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι:

παρουσιάζει στο x_0 ολικό ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

ii. Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και επιπλέον, ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. Δηλαδή, υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (α, β).

iii. Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση "1-1", όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

αν $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Άσκηση 5

i. Να διατυπώσετε το θεώρημα της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής.

ii. Πότε μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

<u>Λύση</u>

i. Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

ii. Μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν α) Δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 ή β) Υπάρχει το όριό της στο x_0, αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της $f(x_0)$, στο σημείο x_0.

Άσκηση 6

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β) και πότε σε ένα κλειστό διάστημα [α,β];

<u>Λύση</u>

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β).

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β], όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x) = f(\beta)$.

Άσκηση 7

i. Τι ονομάζεται ακολουθία;

ii. Πότε μπορούμε να αναζητήσουμε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$;

<u>Λύση</u>

i. Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha : N^* \to \mathbb{R}$

ii. Για να έχει νόημα το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ πρέπει η f να είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$. Για να έχει νόημα το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ πρέπει η f να είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής $(-\infty, \beta)$.

Άσκηση 8

i. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano. Ποια είναι η γεωμετρική του ερμηνεία;

ii. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $|\eta\mu x|$ και $|x|$. Πότε ισχύει η ισότητα;

<u>Λύση</u>

i. Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και επιπλέον, ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$. Δηλαδή, υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο ανοικτό διάστημα (α,β).

Η γεωμετρική ερμηνεία του Θ.Bolzano είναι ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.

ii. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ $|\eta\mu x|\le|x|$. Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x=0$.

Άσκηση 9

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$ και $x_0\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$.

<u>Λύση</u>

Έστω το πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$ και $x_0\in\mathbb{R}$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}P(x)=\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_0\right)$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_\nu x^\nu\right)+\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}\right)+\ldots+\lim_{x\to x_0}\alpha_0$$

$$=\alpha_\nu\lim_{x\to x_0}x^\nu+\alpha_{\nu-1}\lim_{x\to x_0}x^{\nu-1}+\ldots+\lim_{x\to x_0}\alpha_0$$

$$=\alpha_\nu x_0{}^\nu+\alpha_{\nu-1}x_0{}^{\nu-1}+\ldots+\alpha_0=P(x_0)$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$

Άσκηση 10

Δίνεται η ρητή συνάρτηση $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0)\neq 0$.

Να αποδείξετε ότι: $\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

Λύση

Είναι: $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\lim_{x\to x_0} P(x)}{\lim_{x\to x_0} Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

Επομένως, $\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$, εφόσον $Q(x_0)\neq 0$.

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$f(x) = -3e^{2x+1} - 5x + 3$.

α) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο $\mathbb{R}$.

Λύση

α) Η συνάρτηση έχει $D_f = \mathbb{R}$. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \Rightarrow 2x_1 + 1 < 2x_2 + 1 \Rightarrow$

$e^{2x_1+1} < e^{2x_2+1} \Rightarrow -3e^{2x_1+1} > -3e^{2x_2+1}$

και $x_1 < x_2 \Rightarrow -5x_1 > -5x_2 \Rightarrow -5x_1 + 3 > -5x_2 + 3$

άρα $-3e^{2x_1+1} - 5x_1 + 3 > -3e^{2x_2+1} - 5x_2 + 3 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα έχει σύνολο τιμών το:

$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right)$.

Είναι:

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-3e^{2x+1} - 5x + 3\right) =$

  $-3\lim_{x\to+\infty} e^{2x+1} - 5\lim_{x\to+\infty} x + 3 = -\infty - \infty + 3 = -\infty$

  (αφού $\lim_{x\to+\infty} e^{2x+1} = e\lim_{x\to+\infty}(e^x)^2 = e(+\infty) = +\infty$).

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-3e^{2x+1}-5x+3)=$

  $-3\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x+1}-5\lim\limits_{x\to-\infty} x+3=0+\infty+3=+\infty$

  (αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x+1}=e\lim\limits_{x\to-\infty}(e^2)^x=e\cdot 0=0$).

Επομένως είναι $f(\mathbb{R})=(-\infty,+\infty)$.

γ) Αφού το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$ που περιέχει το 0, θα υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=0$. Επειδή επιπλέον η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, η x_0 είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = 2x^{2011} + 5x - 7,\ x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

iii. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f.

Λύση

i. Η συνάρτηση f έχει $D_f = \mathbb{R}$. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^{2011} < x_2^{2011} \Rightarrow 2x_1^{2011} < 2x_2^{2011}$$

και $x_1 < x_2 \Rightarrow 5x_1 < 5x_2 \Rightarrow 5x_1 - 7 < 5x_2 - 7$ άρα

$$2x_1^{2011} + 5x_1 - 7 < 2x_2^{2011} + 5x_2 - 7 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Εξάλλου $f(1) = 2 + 5 - 7 = 0$ και επομένως: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

iii. Είναι: $f(1) = 0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε:

- Για κάθε $x < 1$, έχουμε: $f(x) < f(1) \Rightarrow f(x) < 0$
- Για κάθε $x > 1$, έχουμε: $f(x) > f(1) \Rightarrow f(x) > 0$

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=4\sqrt{e^x-2}+3$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να ορίσετε την f^{-1}.

<u>Λύση</u>

i. Πρέπει: $e^x-2\geq 0 \Leftrightarrow e^x\geq 2 \Leftrightarrow x\geq \ln 2$

Άρα $D_f=\left[\ln 2,+\infty\right)$.

ii. Για κάθε $x_1,x_2\in[\ln 2,+\infty)$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1<x_2 \Rightarrow e^{x_1}<e^{x_2} \Rightarrow e^{x_1}-2<e^{x_2}-2 \Rightarrow \sqrt{e^{x_1}-2}<\sqrt{e^{x_2}-2} \Rightarrow$$

$$4\sqrt{e^{x_1}-2}<4\sqrt{e^{x_2}-2} \Rightarrow 4\sqrt{e^{x_1}-2}+3<4\sqrt{e^{x_2}-2}+3 \Rightarrow$$

$$f(x_1)<f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\ln 2,+\infty)$. Οπότε αφού η f είναι και συνεχής (πράξεις συνεχών) το σύνολο τιμών της είναι:

$$f\left(\left[\ln 2,+\infty\right)\right)=\left[f\left(\ln 2\right),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)$$

Έχουμε:

$$f(\ln 2)=4\sqrt{e^{\ln 2}-2}+3=4\cdot 0+3=3$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(4\sqrt{e^x-2}+3)=+\infty$$

Άρα $f\left(\left[\ln 2,+\infty\right)\right)=\left[3,+\infty\right)$

iii. Η f είναι 1-1 ως γνήσια αύξουσα (ii) και επομένως αντιστρέφεται.

Για κάθε $x\in\left[\ln 2,+\infty\right)$ έχουμε: $f(x)=y \Leftrightarrow$

$$4\sqrt{e^x-2}+3=y \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{e^x-2}=\dfrac{y-3}{4} \\ \dfrac{y-3}{4}\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} e^x-2=\left(\dfrac{y-3}{4}\right)^2 \\ y\geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\ln\left[\dfrac{(y-3)^2}{4}+2\right] \\ y\geq 3 \end{cases}.$$

Άρα $f^{-1}(x)=\ln\left(\dfrac{(x-3)^2}{4}+2\right)$ με $D_{f^{-1}}=[3,+\infty)$.

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=2\ln(\sqrt{x-1}+1)+3$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι "1-1".

iii. Να ορίσετε την f^{-1}.

iv. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(1+x)=2$.

Λύση

i. Πρέπει:

$$\left\{\begin{array}{c} x-1\geq 0 \\ \text{και} \\ \sqrt{x-1}+1>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x\geq 1 \text{ άρα } D_f=[1,+\infty)$$

ii. Έστω $x_1,x_2\in[1,+\infty)$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2\ln(\sqrt{x_1-1}+1)+3=2\ln(\sqrt{x_2-1}+1)+3\Rightarrow$$

$$2\ln\sqrt{x_1-1}=2\ln\sqrt{x_2-1}\Rightarrow$$

$$\ln\sqrt{x_1-1}=\ln\sqrt{x_2-1}\Rightarrow x_1-1=x_2-1\Rightarrow x_1=x_2$$

Άρα η f είναι "1-1".

iii. Έχουμε:

$$f(x)=y\Leftrightarrow y=2\ln(\sqrt{x-1}+1)+3\Leftrightarrow \frac{y-3}{2}=\ln(\sqrt{x-1}+1)\Leftrightarrow$$

$e^{\frac{y-3}{2}}=\sqrt{x-1}+1\Leftrightarrow\left(e^{\frac{y-3}{2}}-1\right)^2=x-1$, πρέπει $e^{\frac{y-3}{2}}-1\geq 0$, επομένως

$$x=(e^{\frac{y-3}{2}}-1)^2+1,\ y\geq 3.$$

Άρα $f^{-1}(x)=(e^{\frac{x-3}{2}}-1)^2+1,\ x\in[3,+\infty)$

iv. $f^{-1}(1+x)=2 \Leftrightarrow (e^{\frac{x+1-3}{2}}-1)^2+1=2 \Leftrightarrow (e^{\frac{x-2}{2}}-1)^2=1 \Leftrightarrow$

$(e^{\frac{x-2}{2}}-1=1$ ή $e^{\frac{x-2}{2}}-1=-1) \Leftrightarrow$

$(e^{\frac{x-2}{2}}=2$ ή $e^{\frac{x-2}{2}}=0$ αδύνατον$) \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{2}=\ln 2 \Leftrightarrow x=2\ln 2+2$.

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-3x+2$.

i. Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x\in\mathbb{R}$ για τον οποίο η συνάρτηση παίρνει την τιμή 2011.

iii. Να λύσετε την ανίσωση: $3x2^x+2^x<1$

<u>Λύση</u>

i. Η συνάρτηση έχει $D_f=\mathbb{R}$. Για κάθε x_1,x_2 με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1<x_2\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}>\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}$$

και $x_1<x_2\Rightarrow -3x_1>-3x_2\Rightarrow -3x_1+2>-3x_2+2$

άρα $\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}-3x_1+2>\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}-3x_2+2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x-3x+2\right]=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x-3\lim_{x\to-\infty}x+2=+\infty-(-\infty)-2=+\infty$$, αφού $0<\frac{1}{2}<1$

οπότε $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x-3x+2\right]=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x-3\lim_{x\to+\infty}x+2=0-\infty+2=-\infty$$, αφού $0<\frac{1}{2}<1$ οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, έχει σύνολο τιμών το:

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right) = (-\infty, +\infty)$$

Επειδή $2011 \in f(\mathbb{R})$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα, υπάρχει μοναδικός $x \in \mathbb{R}$ για τον οποίο η συνάρτηση παίρνει την τιμή 2011.

iii. Η ανίσωση γίνεται:

$$3x2^x + 2^x < 1 \Leftrightarrow 3x + 1 < \frac{1}{2^x} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3x > 1 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x - 3x + 2 > 3 \Leftrightarrow f(x) > 3 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow x < 0$$

(αφού $f(0) = 3$) και f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=3x^{2011}+2x-5,\ x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα τη $x=1$.

iii. Να βρείτε το πρόσημο της f.

<u>Λύση</u>

i. Η συνάρτηση έχει $D_f=\mathbb{R}$. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$x_1<x_2 \Rightarrow x_1^{2011}<x_2^{2011} \Rightarrow 3x_1^{2011}<3x_2^{2011}$

και $x_1<x_2 \Rightarrow 2x_1<2x_2 \Rightarrow 2x_1-5<2x_2-5$.

Άρα $3x_1^{2011}+2x_1-5<3x_2^{2011}+2x_2-5 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Έχουμε: $f(1)=0$ άρα $x=1$ ρίζα της $f(x)=0$ και επειδή η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

iii. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική και $x=1$ η μοναδική της ρίζα, τότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα για κάθε $x<1$ ισχύει $f(x)<f(1)=0$, ενώ για κάθε $x>1$ ισχύει $f(x)>f(1)=0$.

Άσκηση 7

Να βρείτε το $\lim_{x\to 1} f(x)$, όταν:

i. $\lim_{x\to 1}\frac{2x-1}{f(x)}=+\infty$

ii. $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{4x+3}=-\infty$

iii. $\lim_{x\to 1}\left[f(x)(3x+4)\right]=+\infty$

<u>Λύση</u>

i. Θέτουμε $\frac{2x-1}{f(x)}=g(x)$ και επειδή $\lim_{x\to 1} g(x)=+\infty$ είναι $g(x)\neq 0$ για τιμές κοντά στο 1.

Επίσης: $\frac{2x-1}{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow f(x)=\frac{2x-1}{g(x)}$

Οπότε: $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{2x-1}{g(x)}=\lim_{x\to 1}\left[(2x-1)\frac{1}{g(x)}\right]=0$

ii. Θέτουμε: $\frac{f(x)}{4x+3}=h(x)$, οπότε $f(x)=(4x+3)h(x)$

Επίσης $\lim_{x\to 1} h(x)=-\infty$

Άρα $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\left[(4x+3)h(x)\right]=7\cdot(-\infty)=-\infty$

iii. Θέτουμε:

$f(x)(3x+4)=\kappa(x)$, οπότε $\lim_{x\to 1}\kappa(x)=+\infty$

Επίσης $3x+4\neq 0$ για τιμές κοντά στο 1, οπότε $f(x)=\frac{k(x)}{3x+4}$

Άρα $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{3x+4}k(x)\right]=\frac{1}{7}(+\infty)=+\infty$.

Άσκηση 8

Δίνεται η συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:[1,5]$ της οποίας η γραφική παράσταση περνάει από τα σημεία $A(1,8)$ και $B(5,12)$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παίρνει την τιμή $\frac{29}{3}$

iii. Υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1,5)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0)=\frac{2f(2)+3f(3)+4f(4)}{9}$$

<u>Λύση</u>

i. Είναι: $f(1)=8$ και $f(5)=12$ και αφού γνησίως μονότονη θα είναι γνησίως αύξουσα ($1<5$ και $f(1)<f(5)$).

ii. Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[1,5]$ άρα έχει σύνολο τιμών το:

$$f([1,5])=[f(1),f(5)]=[8,12]$$

$$\frac{29}{3}\in f([1,5])$$

iii. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x_1,x_2\in D_f$ με $x_1<x_2$ θα είναι $f(x_1)<f(x_2)$. Έτσι έχουμε:

$$1<2<5 \Leftrightarrow f(1)<f(2)<f(5) \Leftrightarrow 8<f(2)<12 \Leftrightarrow 16<2f(2)<24$$

$$1<3<5 \Leftrightarrow f(1)<f(3)<f(5) \Leftrightarrow 8<f(3)<12 \Leftrightarrow 24<3f(3)<36$$

$$1<4<5 \Leftrightarrow f(1)<f(4)<f(5) \Leftrightarrow 8<f(4)<12 \Leftrightarrow 32<4f(4)<48$$

οπότε:

$$72<2f(2)+3f(3)+4f(4)<108 \Leftrightarrow$$

$$8<\frac{2f(2)+3f(3)+4f(4)}{9}<12$$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών θα υπάρχει $x_0\in(1,5)$ τέτοιο ώστε:

$f(x_0)=\dfrac{2f(2)+3f(3)+4f(4)}{9}$ και αφού f γνησίως αύξουσα θα είναι μοναδικό.

Άσκηση 9

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln(3e^x + 1) - 2$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

iii. Να ορίσετε την f^{-1}.

iv. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < f^{-1}(\ln 5 - 2) - 2$.

Λύση

i. Για να ορίζεται η f, πρέπει: $3e^x + 1 > 0$ που αληθεύει για κάθε $x \in R$. Άρα, το πεδίο ορισμού της είναι: $D_f = \mathbb{R}$

ii. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Rightarrow 3e^{x_1} < 3e^{x_2} \Rightarrow 3e^{x_1} + 1 < 3e^{x_2} + 1 \Rightarrow$$

$$\ell n(3e^{x_1} + 1) < \ell n(3e^{x_2} + 1) \Rightarrow \ell n(3e^{x_1} + 1) - 2 < \ell n(3e^{x_2} + 1) - 2 \Rightarrow$$

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα $1-1$ οπότε αντιστρέφεται.

iii. Έχουμε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow y + 2 = \ell n(3e^x + 1) \Leftrightarrow e^{y+2} = 3e^x + 1 \Leftrightarrow$$

$$e^x = \frac{e^{y+2} - 1}{3}, \frac{e^{y+2} - 1}{3} > 0 \text{ οπότε } x = \ell n \frac{1}{3}(e^{y+2} - 1), y > -2.$$

Άρα $f^{-1}(x) = \ln \frac{1}{3}(e^{x+2} - 1), x \in \left(-2, +\infty\right)$

iv. Έχουμε:

$$f(x) < f^{-1}(\ln 5 - 2) - 2 \Leftrightarrow \ln\left(3e^x + 1\right) - 2 < \ln \frac{1}{3}\left(e^{\ln 5} - 1\right) - 2 \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(3e^x + 1\right) < \ln \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3e^x + 1 < \frac{4}{3} \Leftrightarrow 9e^x + 3 < 4 \Leftrightarrow$$

$$e^x < \frac{1}{9} \Leftrightarrow x < \ln \frac{1}{9} \Leftrightarrow x < -\ln 9$$

Άσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = -2x^3 - 3x - 1$

i. Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f.

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

iii. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = 2$

iv. Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(x) \geq x - 1$

Λύση

i. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow -2x_1^3 > -2x_2^3$$

και

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -3x_1 > -3x_2 \Rightarrow -3x_1 - 1 > -3x_2 - 1$$

άρα

$$-2x_1^3 - 3x_1 - 1 > -2x_2^3 - 3x_2 - 1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα.

ii. Η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα και $1-1$ οπότε αντιστρέφεται.

iii. $f^{-1}(x) = 2 \Leftrightarrow f\left(f^{-1}(x)\right) = f(2) \Leftrightarrow x = -23$

iv. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, θα ισχύει:

$$f^{-1}(x) \geq x + 1 \Leftrightarrow f\left(f^{-1}(x)\right) \geq f(x+1) \Leftrightarrow$$

$$x \geq -2\left(x^3 + 3x^2 + 3x + 1\right) - 3(x+1) - 1 \Leftrightarrow$$

$2x^3 + 6x^2 + 10x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow$ (Σχήμα Horner)

$(x+1)\cdot\left(2x^2 + 4x + 6\right) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$ (αφού $2x^2 + 4x + 6 > 0$ διότι $\Delta = 16 - 48 = -32 < 0$)

Άσκηση 11

Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$f(f(x))+f(x)=3x+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(1)=3$

i. Να βρείτε το $f^{-1}(1)$.

ii. Να βρείτε το $f(3)$

iii. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x)=3$

iv. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x+x}{f\left(f\left(x\right)\right)+f(x)-2}$

Λύση

i. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και $1-1$, οπότε αντιστρέφεται. Θέτουμε όπου x το $f^{-1}(1)$ στη δοθείσα σχέση και έχουμε:

$$f\left(f\left(f^{-1}(1)\right)\right)+f\left(f^{-1}(1)\right)=3f^{-1}(1)+2\Leftrightarrow$$

$$f(1)+1=3f^{-1}(1)+2\Leftrightarrow 4-2=3f^{-1}(1)\Leftrightarrow f^{-1}(1)=\frac{2}{3}$$

ii. Για $x=1$ η δοθείσα σχέση γίνεται:

$$f\left(f\left(1\right)\right)+f(1)=3\cdot1+2\Leftrightarrow f(3)+3=5\Leftrightarrow f(3)=2$$

iii. Είναι:

$f^{-1}(x)=3\Leftrightarrow x=f(3)\Leftrightarrow x=2$ (από ii)

iv. Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x+x}{f\left(f(x)\right)+f(x)-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x+x}{3x}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

αφού είναι: $\left|\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right| = \frac{|\sigma\upsilon\nu x|}{|x|} \le \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow$

$-\frac{1}{|x|} \le \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} \le \frac{1}{|x|}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{|x|} = 0$

Οπότε από το κριτήριο παρεμβολής θα είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$. Όμοια και για το $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x}{x}$.

Άσκηση 12

Δίνεται η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-\sqrt{x}+\eta\mu(x-1)}{x^2-1}=2$

i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f περνάει από το σημείο $M(1,1)$

ii. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|3f(x)-2|-1}{x^2-1}$

Λύση

i. Θέτουμε: $g(x)=\dfrac{f(x)-\sqrt{x}+\eta\mu(x-1)}{x^2-1}\Leftrightarrow f(x)=(x^2-1)g(x)+\sqrt{x}-\eta\mu(x-1).$

Έτσι έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\left[g(x)(x^2-1)+\sqrt{x}-\eta\mu(x-1)\right]=1$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα ισχύει: $f(1)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$

Άρα η γραφική της παράσταση περνάει από το σημείο $M(1,1)$

ii. Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\left[3f(x)-2\right]=1>0$, οπότε $3f(x)-2>0$, κοντά στο x_0

Άρα

$$\lim_{x\to 1}\frac{|3f(x)-2|-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3f(x)-3}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3\left(x^2-1\right)g(x)+3\sqrt{x}-3\eta\mu(x-1)-3}{x^2-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[3g(x)\right]+\lim_{x\to 1}\frac{3\left(\sqrt{x}-1\right)}{(x-1)(x+1)}-3\lim_{x\to 1}\frac{\eta\mu(x-1)}{(x-1)(x+1)}=$$

$$=6+\frac{3}{2}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\left(x-1\right)}{\left(x-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}-\frac{3}{2}\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=$$

$$=6+\frac{3}{4}-\frac{3}{2}=\frac{21}{4}$$

Άσκηση 13

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=2\ln\frac{x+1}{1-x}+3$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

iii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να μελετήσετε την f^{-1} ως προς τη συνέχεια.

iv. Να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

Λύση

i. Για να ορίζεται η f, πρέπει:

$$\frac{x+1}{1-x}>0 \Leftrightarrow 1-x^2>0 \Leftrightarrow x^2<1 \Leftrightarrow |x|^2<1 \Leftrightarrow |x|<1 \Leftrightarrow -1<x<1$$

Άρα το πεδίο ορισμού της είναι το: $D_f=(-1,1)$

ii. Η f είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων f_2 και f_1 με $f_1(x)=2\ln x+3$ και $f_2(x)=\frac{x+1}{1-x}$, αφού για κάθε $x\in(-1,1)$, ισχύει:

$$(f_1 o f_2)(x)=f_1(f_2(x))=2\ln f_2(x)+3=2\ln\frac{x+1}{1-x}+3$$

iii. Για κάθε $x_1,x_2\in(-1,1)$ με $f(x_1)=f(x_2)$ έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2\ln\frac{x_1+1}{1-x_1}+3=2\ln\frac{x_2+1}{1-x_2}+3\Rightarrow \frac{x_1+1}{1-x_1}=\frac{x_2+1}{1-x_2}\Rightarrow$$

$$x_1-x_1x_2+1-x_2=x_2+1-x_1x_2-x_1\Rightarrow x_1=x_2.$$

Άρα η f αντιστρέφεται.

- Είναι:

$$f(x)=y\Rightarrow y=2\ln\frac{x+1}{1-x}+3\Rightarrow\frac{x+1}{1-x}=e^{\frac{y-3}{2}}\Rightarrow$$

$$x+1=e^{\frac{y-3}{2}}-x\cdot e^{\frac{y-3}{2}}\Rightarrow(1+e^{\frac{y-3}{2}})\cdot x=e^{\frac{y-3}{2}}-1\Rightarrow x=\frac{e^{\frac{y-3}{2}}-1}{e^{\frac{y-3}{2}}+1}$$

Επειδή:

$$-1<x<1\Rightarrow-1<\frac{e^{\frac{y-3}{2}}-1}{e^{\frac{y-3}{2}}+1}<1\Rightarrow\frac{e^{\frac{y-3}{2}}-1}{e^{\frac{y-3}{2}}+1}<1$$

και $\frac{e^{\frac{y-3}{2}}-1}{e^{\frac{y-3}{2}}+1}>-1$

ή $-1<1$ και $2e^{\frac{y-3}{2}}>0$ που αληθεύουν για κάθε $y\in\mathbb{R}$, παίρνουμε:

$$f^{-1}(x)=\frac{e^{\frac{x-3}{2}}-1}{e^{\frac{x-3}{2}}+1},x\in\mathbb{R}$$

- Η f^{-1} είναι συνεχής ως πηλίκο των συνεχών συναρτήσεων $f_1(x)=e^{\frac{x-3}{2}}-1$ και $f_2(x)=e^{\frac{x-3}{2}}+1$. Η f_1 είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών $g_1(x)=e^x-1$ και $g_2(x)=\frac{x-3}{2}$

  Πράγματι για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει:

  $$\left(g_1og_2\right)(x)=g_1\left(g_2\left(x\right)\right)=e^{\frac{x-3}{2}}-1=f_1(x)$$

  Η f_2 είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών $h_1(x)=e^x+1$ και $h_2(x)=\frac{x-3}{2}$.

  Πράγματι για κάθε $x\in R$, ισχύει:

  $$\left(h_1oh_2\right)(x)=h_1\left(h_2(x)\right)=e^{\frac{x-3}{2}}+1=f_2(x)$$

iv. Είναι:

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1^-}(2\ln\frac{x+1}{1-x}+3)$$

Αν θέσουμε $u=\frac{x+1}{1-x}$ και αφού για $x\to1^-\Leftrightarrow u\to+\infty$, θα έχουμε:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{u\to +\infty} (2\ln u + 3) = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \left(2\ln\frac{x+1}{1-x} + 3 \right)$$

Αν θέσουμε $u = \dfrac{x+1}{1-x}$ και αφού για $x \to -1^+ \Leftrightarrow u \to 0$, έχουμε

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{u\to 0} \left(2\ln u + 3 \right) = -\infty$$

Άσκηση 14

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ και η συνάρτηση g με τύπο $g(x)=\ln\frac{x+2}{2-x}$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της fog.

ii. Να βρείτε συνάρτηση h για την οποία να ισχύει: $(hog)(x)=x$.

iii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι περιττή.

<u>Λύση</u>

i. Για να ορίζεται η g, πρέπει: $\frac{x+2}{2-x}>0 \Leftrightarrow x\in(-2,2)$. Άρα το πεδίο ορισμού της g είναι το:

$D_g=(-2,2)$.

Επίσης έχουμε: $D_f=\mathbb{R}^*$ οπότε το πεδίο ορισμού της fog είναι:

$$D_{fog}=\left\{x\in(-2,2)\,/\,\ell n\frac{x+2}{2-x}\neq 0\right\}=\left\{x\in(-2,2)\,/\,\frac{x+2}{2-x}\neq 1\right\}=$$

$$\{x\in(-2,2)\,/\,x\neq 0\}=(-2,0)\cup(0,2).$$

ii. Ισχύει $(hog)(x)=x \Leftrightarrow h(g(x))=x \Leftrightarrow h\left(\ln\frac{x+2}{2-x}\right)=x$ (1)

Θέτουμε $u=\ln\frac{x+2}{2-x}$, οπότε έχουμε:

$u=\ln\frac{x+2}{2-x} \Leftrightarrow \frac{x+2}{2-x}=e^u \Rightarrow 2e^u-xe^u=x+2 \Rightarrow x=\frac{2e^u-2}{e^u+1}$ αφού $e^u+1\neq 0$, για κάθε $u\in\mathbb{R}$.

Άρα η (1) γίνεται: $h(u)=\frac{2e^u-2}{e^u+1}$ ή $h(x)=\frac{2e^x-2}{e^x+1}$.

iii.

- Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $-x\in\mathbb{R}$.
- Για κάθε $x\neq 0$ έχουμε: $h(-x)=\frac{2e^{-x}-2}{e^{-x}+1}=\frac{\frac{2}{e^x}-2}{\frac{1}{e^x}+1}=\frac{2-2e^x}{1+e^x}=-\frac{2e^x-2}{1+e^x}=-h(x).$

  Άρα η h περιττή.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1

Δίνονται οι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύουν:

- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται στο $A(2,-1)$.
- $\rho_1 = -1$ και $\rho_2 = 5$ είναι δύο διαδοχικές ρίζες της $g(x) = 0$.

Να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

β) $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1,5)$.

γ) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(3)\cdot x^4 + 2x^2 + 1}{g(2)\cdot x^3 + 5} = -\infty$

Λύση

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1)\cdot f(x_2) < 0$.

Τότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$ που είναι άτοπο.

Άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

β) Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $(-1,5)$ και $g(x) \neq 0$ στο $(-1,5)$ αφού -1 και 5 είναι διαδοχικές ρίζες της $g(x) = 0$.

Άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-1,5)$. Επίσης $g(2) = -1 < 0$. Οπότε $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1,5)$.

γ) Είναι: $f(2) = -1 < 0$. Άρα από α) είναι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε $f(3) < 0$. Επίσης από β) $g(2) < 0$.

Άρα $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(3)\cdot x^4 + 2x^2 + 1}{g(2)\cdot x^3 + 5} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{f(3)}{g(2)} \cdot x \right) = -\infty$.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$f(x)=2x^4+3\ln x+1$.

i. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

iii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$, η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει μοναδική ρίζα.

iv. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός $\lambda>0$ για τον οποίο ισχύει:

$$\lambda^4+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\ln\frac{1}{\lambda}$$

Λύση

i. Η συνάρτηση f έχει $D_f=(0,+\infty)$. Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με

$x_1<x_2$ έχουμε: $x_1<x_2\Rightarrow {x_1}^4<{x_2}^4\Rightarrow 2{x_1}^4<2{x_2}^4$ και

$x_1<x_2\Rightarrow \ln x_1<\ln x_2\Rightarrow 3\ln x_1<3\ln x_2\Rightarrow 3\ln x_1+1<3\ln x_2+1$

άρα $2{x_1}^4+3\ln x_1+1<2{x_2}^4+3\ln x_2+1\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

ii. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ άρα έχει σύνολο τιμών το:

$f((0,+\infty))=(\lim\limits_{x\to0^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x))$.

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(2x^4+3\ln x+1)=0-\infty+1=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^4+3\ln x+1)=(+\infty)+(+\infty)+1=+\infty$

Επομένως είναι: $f((0,+\infty))=(-\infty,+\infty)$.

iii. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, άρα η εξίσωση $f(x)=\alpha$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$, έχει μοναδική ρίζα.

iv. Έχουμε:

$$\lambda^4+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\ln\frac{1}{\lambda}\Leftrightarrow 2\lambda^4+1=3(\ln 1-\ln\lambda)\Leftrightarrow$$

$$2\lambda^4+1=-3\ln\lambda\Leftrightarrow 2\lambda^4+3\ln\lambda+1=0\Leftrightarrow f(\lambda)=0$$

Αρκεί να δείξουμε λοιπόν ότι υπάρχει μοναδικό $\lambda>0$ τέτοιο ώστε $f(\lambda)=0$. Αυτό ισχύει αφού $0\in f((0,+\infty))$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση: $2f^3(x)-3=2x-3f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

ii. Αν το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

iv. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}.

<u>Λύση</u>

i. $2f^3(x)-3=2x-3f(x)\Leftrightarrow 2f^3(x)+3f(x)=2x+3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για $x=x_0$ είναι $2f^3(x_0)+3f(x_0)=2x_0+3$.

Αφαιρώντας κατά μέλη, έχουμε:

$$2\left[f^3(x)-f^3(x_0)\right]+3\left[f(x)-f(x_0)\right]=2(x-x_0)\Leftrightarrow$$

$$2\left[f(x)-f(x_0)\right]\left[f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)\right]+3\left[f(x)-f(x_0)\right]=2(x-x_0)\Leftrightarrow$$

$$f(x)-f(x_0)=\frac{2(x-x_0)}{2\left[f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)\right]+3}$$

Αφού $2f^2(x)+2f(x)f(x_0)+2f^2(x_0)+3\neq 0,$ διότι είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς $f(x)$ με διακρίνουσα:

$$\Delta=4f^2(x_0)-4\cdot 2(2f^2(x_0)+3)=4f^2(x_0)-16f^2(x_0)-24=$$

$$-12f^2(x_0)-24=-12\left[f^2(x_o)+2\right]<0$$

Άρα: $\left|f(x)-f(x_0)\right|=\dfrac{2\left|x-x_0\right|}{2f^2(x)+2f(x)f(x_0)+2f^2(x_0)+3}\leq 2\left|x-x_0\right|$.

Οπότε $-2\left|x-x_0\right|\leq f(x)-f(x_0)\leq 2\left|x-x_0\right|$

Αλλά $\lim\limits_{x\to x_0}\left[-2\left|x-x_0\right|\right]=\lim\limits_{x\to x_0}\left[2\left|x-x_0\right|\right]=0$ οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής, θα ισχύει:

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

ii. Έστω $x_1, x_2 \in R$ με $f(x_1)=f(x_2)$ τότε $f^3(x_1)=f^3(x_2) \Rightarrow 2f^3(x_1)=2f^3(x_2)$.

Επίσης $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow 3f(x_1)=3f(x_2)$ και προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε:

$2f^3(x_1)+3f(x_1)=2f^3(x_2)+3f(x_2) \Rightarrow 2x_1+3=2x_2+3 \Rightarrow x_1=x_2$.

Άρα η f είναι 1-1 και επομένως αντιστρέφεται. Η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f που είναι το $\mathbb{R}$.

Είναι: $f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$

Οπότε: $2f^3(x)+3f(x)=2x+3 \Leftrightarrow 2y^3+3y=2f^{-1}(y)+3$

Άρα $f^{-1}(x)=\dfrac{2x^3+3x-3}{2}, x\in\mathbb{R}$

iii. $f(x)=0 \Leftrightarrow x=f^{-1}(0)=\dfrac{2\cdot 0^3+3\cdot 0-3}{2}=-\dfrac{3}{2}$

iv. Η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και η f , οπότε τα κοινά τους σημεία είναι στην $y=x$.

$f^{-1}(x)=f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(x)=x \Leftrightarrow \dfrac{2x^3+3x-3}{2}=x$

$\Leftrightarrow 2x^3+3x-3=2x \Leftrightarrow 2x^3+x-3=0 \Leftrightarrow x=1$

<u>Παρατήρηση</u>: Τις προτάσεις

A) Αν η f είναι γνησίως μονότονη τότε και η f^{-1} είναι γνησίως μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας.

B) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα τότε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$, (αν υπάρχουν), βρίσκονται στην ευθεία $y=x$.

<u>Πρέπει να τις αποδεικνύουμε για να τις χρησιμοποιήσουμε σε μία άσκηση.</u>

Άσκηση 4

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\left[-1,2\right]\to\mathbb{R}$ και ο μιγαδικός αριθμός:

$z=\dfrac{2f(-1)+f(2)i}{1-i}$ για τον οποίο ισχύει ότι $\text{Im}(z)=\dfrac{3}{2}$ και $\text{Re}(z)\neq\dfrac{5}{2}$.

i. Να γράψετε τον z στη μορφή $\kappa+\lambda i,\ \kappa,\lambda\in\mathbb{R}$.

ii. Να αποδείξετε ότι: $2f(-1)+f(2)=3$.

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\alpha\in(-1,2)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(\alpha)+1}{\alpha-2}+\frac{2-f(\alpha)}{\alpha+1}=0$$

<u>Λύση</u>

i. Είναι:

$$z=\frac{\left[2f(-1)+f(2)i\right](1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{\left[2f(-1)-f(2)\right]+\left[2f(-1)+f(2)\right]i}{2}=$$

$$\frac{2f(-1)-f(2)}{2}+\frac{2f(-1)+f(2)}{2}i$$

ii. $\text{Im}(z)=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow\dfrac{2f(-1)+f(2)}{2}=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow 2f(-1)+f(2)=3$

iii. Για $\alpha\neq2$ και $\alpha\neq1$ η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται:

$$\frac{f(\alpha)+1}{\alpha-2}+\frac{2-f(\alpha)}{\alpha+1}=0\Leftrightarrow\left(\alpha+1\right)\left[f(\alpha)+1\right]+(\alpha-2)\left[2-f(\alpha)\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\alpha f(\alpha)+\alpha+f(\alpha)+1+2\alpha-\alpha f(\alpha)-4+2f(\alpha)=0\Leftrightarrow 3f(\alpha)+3\alpha-3=0.$$

Έστω $g(x)=3f(x)+3x-3$. Η g είναι συνεχής στο $\left[-1,2\right]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Επίσης:

$$g(-1)=3f(-1)+3(-1)-3=3\left[f(-1)-2\right]$$

$$g(2)=3f(2)+3\cdot2-3=3f(2)+3=3\left[3-2f(-1)\right]+3=$$

$12-6f(-1)=-6\left[f(-1)-2\right]$

Παρατηρούμε ότι: $g(-1)\cdot g(-2)=-18[f(-1)-2]^2\leq 0$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $g(-1)\cdot g(2)=0 \Leftrightarrow \left(g(-1)=0 \text{ ή } g(2)=0\right)$, τότε $f(-1)=2$ οπότε και $f(2)=-1$ (απο το (ii)). Τότε όμως θα είναι $z=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}i$ ΑΤΟΠΟΝ από την υπόθεση. Άρα θα είναι
- $g(-1)\cdot g(2)<0$ τότε από το θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\alpha\in(-1,2)$ τέτοιο, ώστε

  $g(\alpha)=0 \Leftrightarrow 3f(\alpha)+3\alpha-3=0 \Leftrightarrow$

  $(\alpha+1)\left[f(\alpha)+1\right]+(\alpha-2)\left[2-f(\alpha)\right]=0 \Leftrightarrow$

  $\frac{f(\alpha)+1}{\alpha-2}+\frac{2-f(\alpha)}{\alpha+1}=0$

Δηλαδή το $\alpha\in(-1,2)$ είναι ρίζα και της αρχικής εξίσωσης.

Άσκηση 5

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-1,0)$ και $B(2,3)$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να βρείτε το πρόσημο της f.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(2e^x+1)=3$.

iv. Να λύσετε την ανίσωση $f(3x+5)\le 0$.

<u>Λύση</u>

i. Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη και με $-1<2$ είναι $f(-1)=0<f(2)=3$, η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Είναι: $f(-1)=0$ και επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα (άρα και 1-1) η τιμή που μηδενίζει την f είναι μοναδική. Επομένως για:

$$x<-1\Rightarrow f(x)<f(-1)\Rightarrow f(x)<0$$

$$x>-1\Rightarrow f(x)>f(-1)\Rightarrow f(x)>0.$$

Άρα $f(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,-1)$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$.

iii. Αφού η f είναι 1-1 έχουμε:

$$f(2e^x+1)=3\Leftrightarrow f(2e^x+1)=f(2)\Leftrightarrow 2e^x+1=2\Leftrightarrow$$

$$2e^x=1\Leftrightarrow e^x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\ln\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=-\ln 2$$

iv. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε:

$$f(3x+5)\le 0\Leftrightarrow f(3x+5)\le f(-1)\Leftrightarrow 3x+5\le -1\Leftrightarrow 3x\le -6\Leftrightarrow x\le -2.$$

Άσκηση 6

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί: $z_1 = 2+2i,\ z_2 = 2-2i$ και $z = ημx \cdot z_1 - xz_2,\ x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$

Αν $f(x) = \dfrac{|z|^2}{z_1 z_2 x^2}$ να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

ii. $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

iii. $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

<u>Λύση</u>

i. Είναι: $z = ημx(2+2i) - x(2-2i) = (2ημx - 2x) + (2ημx + 2x)i$, οπότε

$|z|^2 = (2ημx - 2x)^2 + (2ημx + 2x)^2 =$

$4ημ^2x + 4x^2 - 8xημx + 4ημ^2x + 4x^2 + 8xημx = 8ημ^2x + 8x^2$

$z_1 z_2 = (2+2i)(2-2i) = 4+4 = 8$

Επομένως $f(x) = \dfrac{8ημ^2x + 8x^2}{8x^2} = \left(\dfrac{ημx}{x}\right)^2 + 1$

Άρα $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{8ημ^2x + 8x^2}{8x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(\dfrac{ημx}{x}\right)^2 + 1\right] = 0 + 1 = 1$

αφού $\left|\dfrac{ημx}{x}\right| = \dfrac{|ημx|}{|x|} \leq \dfrac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{|x|} \leq \dfrac{ημx}{x} \leq \dfrac{1}{|x|}$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{|x|} = 0,\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{|x|} = 0$ οπότε, λόγω του κριτηρίου παρεμβολής, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ημx}{x} = 0$.

ii. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left[\left(\dfrac{ημx}{x}\right)^2 + 1\right] = 1^2 + 1 = 2$

iii. $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(\dfrac{ημ\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)^2 + 1\right] = \lim\limits_{\frac{1}{x} = y \to 0} \left[\left(\dfrac{ημy}{y}\right)^2 + 1\right] = 2$

Άσκηση 7

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = 2x + \frac{2i}{x+i}, x \in \mathbb{R}$.

i. Να γραφεί ο μιγαδικός αριθμός z στη μορφή $\alpha + \beta i$.

ii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to -\infty} Re(z)$.

iii. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{1}{2} Im(z) \eta\mu x \right]$

<u>Λύση</u>

i. Είναι: $z = 2x + \frac{2i}{x+i} = 2x + \frac{2i(x-i)}{x^2+1} = 2x + \frac{2xi+2}{x^2+1} =$

$\left(2x + \frac{2}{x^2+1} \right) + \frac{2x}{x^2+1} i$

ii. $\lim\limits_{x \to -\infty} Re(z) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(2x + \frac{2}{x^2+1} \right) = -\infty + 0 = -\infty$

iii. Για $x > 0$, έχουμε: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{1}{2} Im(z) \eta\mu x \right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+1} \eta\mu x \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x \eta\mu x}{x^2+1} =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x \eta\mu x}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \right) = 0 \cdot 1 = 0$

Αφού $\left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| = \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \le \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \le \frac{\eta\mu x}{x} \le \frac{1}{|x|}$ και

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{|x|} \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{|x|} \right) = 0$

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε και $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$.

Άσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $[-3,3]$ για την οποία ισχύει $3x^2+4f^2(x)=27$ για κάθε $x\in[-3,3]$.

i. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $(-3,3)$.

iii. Να βρεθεί ο τύπος της f.

iv. Αν επιπλέον $f(1)=\sqrt{6}$ να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}{x}$.

<u>Λύση</u>

i. Αν ρ ρίζα της $f(x)=0$, τότε έχουμε:
$3\rho^2+4f^2(\rho)=27 \Leftrightarrow \rho^2=9 \Leftrightarrow \rho=3$ ή $\rho=-3$.

ii. Επειδή η συνάρτηση f, ως συνεχής στο $[-3,3]$, είναι συνεχής στο $(-3,3)$ και δεν μηδενίζεται στο διάστημα αυτό, διατηρεί πρόσημο στο $(-3,3)$.

iii.

- Αν $f(x)<0$, τότε από τη σχέση $3x^2+4f^2(x)=27$ έχουμε:

$$f(x)=-\frac{\sqrt{27-3x^2}}{2},\ x\in[-3,3]$$

- Αν $f(x)>0$, τότε από τη σχέση $3x^2+4f^2(x)=27$ έχουμε:

$$f(x)=\frac{\sqrt{27-3x^2}}{2},\ x\in[-3,3]$$

iv. $f(1)=\sqrt{6}>0$ άρα από το ερώτημα (Γ3) έχουμε:

$$f(x)=\frac{\sqrt{27-3x^2}}{2},\ x\in[-3,3].$$

Οπότε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sqrt{27-3x^2}}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{27-3x^2}-3\sqrt{3}}{2x}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{27-3x^2-27}{2x(\sqrt{27-3x^2}+3\sqrt{3})}=\lim_{x\to 0}\frac{-3x}{2(\sqrt{27-3x^2}+3\sqrt{3})}=0$$

Άσκηση 9

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$\sqrt{x^2+2x+9}\le 3+xf(x)\le x^8\eta\mu\dfrac{2}{x}+\dfrac{x}{3}+3$ για κάθε $x>0$. Να βρείτε:

i. Το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+9}-3}{2x}$.

ii. Το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}x^7\eta\mu\dfrac{2}{x}$.

iii. Το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

iv. Το $f(0)$.

<u>Λύση</u>

i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+9}-3}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2x+9-9}{2x\left(\sqrt{x^2+2x+9}+3\right)}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x+2)}{2x\left(\sqrt{x^2+2x+9}+3\right)}=\dfrac{1}{6}$

ii. Επειδή $\left|\eta\mu\dfrac{2}{x}\right|\le 1$ για κάθε $x\neq 0$, έχουμε:

$\left|x^7\eta\mu\dfrac{2}{x}\right|=\left|x^7\right|\cdot\left|\eta\mu\dfrac{2}{x}\right|\le\left|x^7\right|\Leftrightarrow -\left|x^7\right|\le x^7\eta\mu\dfrac{2}{x}\le\left|x^7\right|$

Αλλά $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\left|x^7\right|\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left|x^7\right|=0$

Οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^7\eta\mu\dfrac{2}{x}\right)=0$

iii. Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$\sqrt{x^2+2x+9}\le 3+xf(x)\le x^8\eta\mu\dfrac{2}{x}+\dfrac{x}{3}+3\Leftrightarrow$

$$\frac{\sqrt{x^2+2x+9}-3}{x} \le f(x) \le \frac{x^8 \eta\mu\frac{2}{x}+\frac{x}{3}}{x}$$

Αλλά $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+2x+9}-3}{x} = 2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+2x+9}-3}{2x} = \frac{1}{3}$ (από i ερώτημα).

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^8 \eta\mu\frac{2}{x}+\frac{x}{3}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^7 \eta\mu\frac{2}{x}+\frac{1}{3}\right) = 0+\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ (από ii ερώτημα)

Άρα σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{3}$

iv. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[0,+\infty\right)$, είναι συνεχής και στο $x=0$. Άρα $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{3}$.

Άσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $(fof)(x)+2f(x)=2x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(2)=5$.

i. Να βρείτε το $f(5)$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

iii. Να βρείτε το $f^{-1}(2)$.

iv. Να λύσετε την εξίσωση: $f\left(f^{-1}(2x^2+7x)-1\right)=2$.

<u>Λύση</u>

i. Η σχέση $(fof)(x)+2f(x)=2x+1$ ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε για $x=2$ έχουμε:

$f(f(2))+2f(2)=2\cdot2+1\Leftrightarrow f(5)+10=5\Leftrightarrow f(5)=-5$

ii. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε έχουμε:

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow f(f(x_1))=f(f(x_2))$ (επειδή η f είναι συνάρτηση) και

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2f(x_1)=2f(x_2)$

άρα $f(f(x_1))+2f(x_1)=f(f(x_2))+2f(x_2)\Rightarrow 2x_1+1=2x_2+1\Rightarrow x_1=x_2$

οπότε η f είναι $1-1$, άρα αντιστρέφεται.

iii. Θέτουμε όπου x το $f^{-1}(2)$ και έχουμε:

$f(f(f^{-1}(2)))+2f(f^{-1}(2))=2f^{-1}(2)+1\Rightarrow f(2)+4=2f^{-1}(2)+1\Rightarrow$

$5+4-1=2f^{-1}(2)\Rightarrow f^{-1}(2)=4$.

iv. Έχουμε:

$f(f^{-1}(2x^2+7x)-1)=2\Leftrightarrow f^{-1}(2x^2+7x)-1=f^{-1}(2)\Leftrightarrow$

$f^{-1}(2x^2+7x)=5\Leftrightarrow 2x^2+7x=f(5)\Leftrightarrow 2x^2+7x+5=0\Leftrightarrow$

$x_1=-1$ ή $x_2=-\frac{5}{2}$.

Άσκηση 11

Δίνονται η συνάρτηση $f:[2,5]\to\mathbb{R}$, ο μιγαδικός αριθμός $z=\dfrac{f(2)-i}{2+f(5)i}$ και η συνάρτηση g με $g(x)=2f(2x+1)+f(x+1)$.

i. Να γράψετε τον z στη μορφή $\alpha+\beta i$.

ii. Αν ο z είναι φανταστικός να αποδείξετε ότι $f(5)=2f(2)$.

iii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g.

<u>Λύση</u>

i. Είναι:

$$z=\frac{f(2)-i}{2+f(5)i}=\frac{[f(2)-i][2-f(5)i]}{4+f^2(5)}=\frac{2f(2)-f(5)}{4+f^2(5)}-\frac{f(2)f(5)+2}{4+f^2(5)}i$$

ii. z φανταστικός άρα $\mathrm{Re}(z)=0\Leftrightarrow\dfrac{2f(2)-f(5)}{4+f^2(5)}=0\Leftrightarrow f(5)=2f(2)$.

iii. Πρέπει:

$$\left\{\begin{matrix}2\le 2x+1\le 5\\ \text{και}\\ 2\le x+1\le 5\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}1\le 2x\le 4\\ \text{και}\\ 1\le x\le 4\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\dfrac{1}{2}\le x\le 2\\ \text{και}\\ 1\le x\le 4\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow 1\le x\le 2.$$

Άρα $D_g=[1,2]$.

Άσκηση 12

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=2|z-xi|+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όπου z μιγαδικός με $|z|=2$ και $-2<\mathrm{Im}(z)<2$. Να αποδείξετε ότι:

i. $f(x)=2\sqrt{x^2-2\,\mathrm{Im}(z)\cdot x+4}+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii. Η f είναι συνεχής.

iii. Υπάρχει $x_0\in(0,5)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=6$

<u>Λύση</u>

i. Είναι: $|z-xi|^2=(z-xi)(\overline{z}+xi)=|z|^2+zxi-x\overline{z}i+x^2 \Leftrightarrow$

$|z-xi|^2=x^2+(z-\overline{z})xi+4 \Leftrightarrow$

$|z-xi|=\sqrt{x^2-2\,\mathrm{Im}(z)x+4.}$

Άρα $f(x)=2\sqrt{x^2-2\,\mathrm{Im}(z)x+4}+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (Αφού Δ<0,από υπόθεση, επειδή $-2<\mathrm{Im}(z)<2$)

ii. Η f είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $f_1(x)=x^2-2\,\mathrm{Im}(z)x+4$ και $f_2(x)=2\sqrt{x}+1$

Γιατί για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει: $(f_2 o f_1)(x)=f_2(f_1(x))=2\sqrt{x^2-2\,\mathrm{Im}(z)x+4}+1=f(x)$

iii. Είναι: $f(0)=5$ και $f(5)=2|z-5i|+1\geq 2\big||z|-|5i|\big|+1=7$

Επίσης η f είναι συνεχής στο $[0,5]$ (από ii), άρα σύμφωνα με το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών η f παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(0)=5$ και 7 (αφού $f(5)\geq 7$). Επομένως υπάρχει $x_0\in(0,5)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=6$

Άσκηση 13

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x)=\alpha^{2x}+2\alpha^x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}, \alpha\in\mathbb{R}^*$.

i. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

ii. Αν $f(0)=-2$ να βρείτε τον τύπο της f.

iii. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2f(x)-3^x}{3\cdot 2^x+4\cdot 3^x}$, $\alpha<2$.

iv. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2f(x)-3^x}{3\cdot 2^x+4\cdot 3^x}$, $\alpha>3$

<u>Λύση</u>

i. Είναι $f^2(x)=\alpha^{2x}+2\alpha^x+1=\left(\alpha^x+1\right)^2\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα, η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

ii. Επειδή $f(0)=-2$ είναι $f(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Άρα $f(x)=-\left(\alpha^x+1\right)=-\alpha^x-1$

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2f(x)-3^x}{3\cdot 2^x+4\cdot 3^x}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2\alpha^x-2-3^x}{3\cdot 2^x+4\cdot 3^x}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x\cdot\left[-2\left(\dfrac{\alpha}{3}\right)^x-2\left(\dfrac{1}{3}\right)^x-1\right]}{3^x\cdot\left[3\left(\dfrac{2}{3}\right)^x+4\right]}=\dfrac{-1}{4}$, αφού $0<\dfrac{\alpha}{3}<1, 0<\dfrac{1}{3}<1$ και $0<\dfrac{2}{3}<1$ άρα

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\alpha}{3}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=0$

iv. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2f(x)-3^x}{3\cdot 2^x+4\cdot 3^x}=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2\alpha^x-2-3^x}{3\cdot 2^x+4\cdot 3^x}=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^x\cdot\left[-2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^x-2\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-\left(\dfrac{3}{2}\right)^x\right]}{2^x\left[3+4\left(\dfrac{3}{2}\right)^x\right]}=-\infty$, αφού $\dfrac{\alpha}{2}>1,\dfrac{3}{2}>1$ και $0<\dfrac{1}{2}<1$ άρα

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)^x=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=+\infty$

Άσκηση 14

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $x^4+1\le 4f(x)\le x^4+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{4}\le f(0)\le\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{2}\le f(1)\le\frac{3}{4}$.

ii. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\left[x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)\right]$.

iii. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^5 f\left(\frac{1}{x}\right)+4\eta\mu 3x}{2x^2+3\eta\mu x}$.

iv. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[0,1]$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)-\xi=0$.

Λύση

i. Η σχέση $x^4+1\le 4f(x)\le x^4+2$ ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Για $x=0$, έχουμε:

$$1\le 4f(0)\le 2\Leftrightarrow\frac{1}{4}\le f(0)\le\frac{1}{2}$$

Για $x=1$, έχουμε:

$$2\le 4f(1)\le 3\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le f(1)\le\frac{3}{4}$$

ii. Για $x\ne 0$, θέτουμε όπου x το $\frac{1}{x}$ στη δοσμένη σχέση και έχουμε:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^4+1\le 4f\left(\frac{1}{x}\right)\le\left(\frac{1}{x}\right)^4+2\Leftrightarrow\frac{1}{4}+\frac{1}{4}x^4\le x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)\le\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x^4$$

Είναι: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}x^4\right)=\frac{1}{4}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x^4\right)=\frac{1}{4}$

Άρα από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0}x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{4}$

iii. Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^5 f\left(\frac{1}{x}\right)+4ημ3x}{2x^2+3ημx}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)+4\frac{ημ3x}{x}}{2x+3\frac{ημx}{x}}=\frac{\frac{1}{4}+4\cdot 3}{0+3}=\frac{49}{12}$$

αφού $\lim\limits_{x\to 0} x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{4}$ (από ii), $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ημ3x}{x}=3\lim\limits_{x\to 0}\frac{ημ3x}{3x}=3\lim\limits_{u\to 0}\frac{ημu}{u}=3\cdot 1=3$

iv. Έστω $g(x)=f(x)-x$

Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$. Επίσης ισχύει:

$g(0)\cdot g(1)=f(0)\cdot[f(1)-1]<0$ αφού $\frac{1}{4}\le f(0)\le\frac{1}{2}\Rightarrow f(0)>0$ και $\frac{1}{2}\le f(1)\le\frac{3}{4}\Rightarrow f(1)<1$.

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε
$g(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)-\xi=0$

Άσκηση 15

i.Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f(x)-4}{x}=2,$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

ii. Δίνεται η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$xg(x)+2\le 2\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+x,$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$, αν είναι γνωστό ότι υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

iii. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f^2(x)+\eta\mu^2(2x)}{\varepsilon\varphi^2x+x^2g(x)}$

<u>Λύση</u>

i. Θέτουμε: $h(x)=\dfrac{2f(x)-4}{x}\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{xh(x)+4}{2}$

Έτσι, έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xh(x)+4}{2}=2$$

ii. Είναι:

$xg(x)+2\le 2\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε έχουμε: $xg(x)\le 2\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+x-2$

- Αν $x>0$, τότε: $g(x)\le\dfrac{2\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+x-2}{x}\Leftrightarrow g(x)\le\dfrac{2(\sigma\upsilon\nu x-1)}{x}-\dfrac{\eta\mu x}{x}+1$ και

  επομένως $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)\le 2\cdot 0-1+1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)\le 0.$

- Αν $x<0$, τότε: $g(x)\ge\dfrac{2\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+x-2}{x}\Leftrightarrow g(x)\ge\dfrac{2(\sigma\upsilon\nu x-1)}{x}-\dfrac{\eta\mu x}{x}+1$ και επομένως

  $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)\ge 2\cdot 0-1+1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)\ge 0.$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$

iii. Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2f^2(x)+\eta\mu^2(2x)}{\epsilon\phi^2x+x^2g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\left[f^2(x)+\dfrac{\eta\mu^2(2x)}{x^2}\right]}{x^2\left[\left(\dfrac{\epsilon\phi x}{x}\right)^2+g(x)\right]}=\frac{4+4}{1+0}=8.$$

Αφού $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu^2(2x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}4\dfrac{\eta\mu^2(2x)}{(2x)^2}=4\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu(2x)}{(2x)}\right)^2=4\lim\limits_{u\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu u}{u}\right)^2=4$ και

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\epsilon\phi x}{x}\right)^2=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2=1$$

Άσκηση 16

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $3f(x)+2f^3(x)=4x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την f^{-1}.

ii. Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

iii. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}, αν γνωρίζετε ότι αυτά βρίσκονται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $y=x$.

iv. Να λυθεί η εξίσωση: $f\left(2e^{x-1}\right)=f\left(3-x\right)$.

<u>Λύση</u>

i. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow f^3(x_1)=f^3(x_2)\Rightarrow 2f^3(x_1)=2f^3(x_2)$$

και $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 3f(x_1)=3f(x_2)$

άρα $2f^3(x_1)+3f(x_1)=2f^3(x_2)+3f(x_2)\Rightarrow 4x_1+1=4x_2+1$

οπότε η f είναι $1-1$, άρα αντιστρέφεται.

Θέτουμε όπου x το $f^{-1}(x)$ στη δοθείσα σχέση και έχουμε:

$$3f\left(f^{-1}(x)\right)+2\left[f\left(f^{-1}(x)\right)\right]^3=4f^{-1}(x)+1\Rightarrow$$

$$3x+2x^3=4f^{-1}(x)+1\Rightarrow$$

$$f^{-1}(x)=\frac{2x^3+3x-1}{4}.$$

ii. Για κάθε $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1<x_2\Rightarrow x_1^3<x_2^3\Rightarrow 2x_1^3<2x_2^3$$

και $x_1<x_2\Rightarrow 3x_1<3x_2\Rightarrow 3x_1-1<3x_2-1$

άρα

$$2x_1^3+3x_1-1<2x_2^3+3x_2-1\Rightarrow\frac{2x_1^3+3x_1-1}{4}<\frac{2x_2^3+3x_2-1}{4}\Rightarrow$$

$f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)$,

οπότε f^{-1} γνησίως αύξουσα.

iii. Έχουμε:

$f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow$

$\frac{2x^3 + 3x - 1}{4} = x \Leftrightarrow 2x^3 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

iv. Η f είναι $1-1$, οπότε έχουμε:

$f(2e^{x-1}) = f(3-x) \Leftrightarrow 2e^{x-1} = 3 - x \Leftrightarrow 2e^{x-1} + x - 3 = 0$ (1)

Η (1) έχει προφανή ρίζα την $x = 1$.

Έστω $g(x) = 2e^{x-1} + x - 3$. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \Rightarrow e^{x_1 - 1} < e^{x_2 - 1} \Rightarrow 2e^{x_1 - 1} < 2e^{x_2 - 1}$

και $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 3 < x_2 - 3$

άρα $2e^{x_1 - 1} + x_1 - 3 < 2e^{x_2 - 1} + x_2 - 3 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2)$

Οπότε g γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επομένως η ρίζα $x = 1$ είναι μοναδική.

Άσκηση 17

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ και ο μιγαδικός αριθμός $z = f(x) + 2(\eta\mu x)i$, τέτοιος ώστε: $|z|^2 - 2\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z) + 3x = x^2 + 10$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - 2\eta\mu x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

ii. Να βρείτε τη συνάρτηση f αν $f(0) = \sqrt{10}$.

iii. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x) + \sigma\upsilon\nu x - 1 - \sqrt{10}}{x}$

<u>Λύση</u>

i. Είναι:

$$|z|^2 = x^2 - 3x + 2\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z) + 10 \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) + 4\eta\mu^2 x = x^2 - 3x + 4f(x)\eta\mu x + 10 \Leftrightarrow$$

$$\left[f(x) - 2\eta\mu x\right]^2 = x^2 - 3x + 10 \quad (1)$$

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση g δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο, τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in R$ τέτοια ώστε: $g(x_1)g(x_2) < 0$

Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(x_1, x_2\right)$ ώστε $g(x_0) = 0$.

Οπότε: $g(x_0) = 0 \Rightarrow g^2(x_0) = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} {x_0}^2 - 3x_0 + 10 = 0$ που είναι άτοπο ($\Delta = -31 < 0$)

ii. Είναι: $f(0) = \sqrt{10} > 0$, άρα από (i) έχουμε: $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 10} + 2\eta\mu x$

iii. Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) + \sigma\upsilon\nu x - \sqrt{10} - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2 - 3x + 10} + 2\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - \sqrt{10} - 1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2 - 3x + 10} - \sqrt{10}}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{2\eta\mu x}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 3x}{x\left(\sqrt{x^2 - 3x + 10} + \sqrt{10}\right)} + 2 \cdot 1 + 0 = \frac{-3}{2\sqrt{10}} + 2$$

Άσκηση 18

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x+1}-1$ και $g(x)=2-x$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g.

ii. Να ορισθεί η συνάρτηση fog.

iii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

iv. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης fofog.

Λύση

i. Για να ορίζεται η f, πρέπει: $x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$

Άρα το πεδίο ορισμού της είναι το: $D_f=[-1,+\infty)$.

Το πεδίο ορισμού της g είναι το: $D_g=\mathbb{R}$ (πολυωνυμική)

ii. Το πεδίο ορισμού της fog είναι:

$$D_{fog}=\{x\in\mathbb{R} / 2-x\geq -1\}=\{x\in\mathbb{R} / x\leq 3\}=(-\infty,3]\neq\varnothing$$

Άρα για κάθε $x\in(-\infty,3]$ έχουμε:

$$(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{2-x+1}-1=\sqrt{3-x}-1$$

iii. Για κάθε $x_1,x_2\in[-1,+\infty)$ έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\sqrt{x_1+1}-1=\sqrt{x_2+1}-1\Rightarrow x_1=x_2.$$

Άρα, η f αντιστρέφεται.

Έστω $f(x)=y\Leftrightarrow y=\sqrt{x+1}-1\Leftrightarrow y+1=\sqrt{x+1}$, (πρέπει $y\geq -1$) $\Leftrightarrow x=(y+1)^2-1$ οπότε $f^{-1}(x)=(x+1)^2-1$ με $x\geq -1$

iv. Για κάθε $x_1,x_2\in[-1,+\infty)$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1<x_2\Rightarrow x_1+1<x_2+1\Rightarrow\sqrt{x_1+1}-1<\sqrt{x_2+1}-1\Rightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$x_1 < x_2 \Rightarrow 2 - x_1 > 2 - x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$.

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα.

$D_{fofog} = D_{fo(fog)} = \left\{ x \in (-\infty, 3] / \sqrt{3-x} - 1 \geq -1 \right\} = (-\infty, 3] \neq \varnothing$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty, 3]$ με

$x_1 < x_2 \overset{g \text{ γν. φθίνουσα}}{\Rightarrow} g(x_1) > g(x_2) \overset{f \text{ γν. αύξουσα}}{\Rightarrow} f(g(x_1)) > f(g(x_2)) \Rightarrow$

$f\left(f\left(g\left(x_1\right)\right)\right) > f\left(f\left(g\left(x_2\right)\right)\right)$.

Άρα η συνάρτηση fofog είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 3]$.

Άσκηση 19

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+\kappa\eta\mu x}{x-x^2}, & x<0 \\ \lambda, & x=0 \\ \sqrt{8x^2+x+16}-3x, & x>0 \end{cases}$

i. Να βρείτε τα κ,λ.

ii. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

iii. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2\ln(8x+1)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

<u>Λύση</u>

i. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_0=0$

f : συνεχής στο $x=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=f(0)$

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2x+\kappa\eta\mu x}{x-x^2}\right)=\lim_{x\to0^-}\frac{2+\kappa\cdot\dfrac{\eta\mu x}{x}}{1-x}=\frac{2+\kappa\cdot1}{1}=2+\kappa$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\sqrt{8x^2+x+16}-3x\right)=4$$

$f(0)=\lambda$

Άρα: $\lambda=4$ και $2+\kappa=4\Leftrightarrow\kappa=2$

ii. Για $\kappa=2$ και $\lambda=4$ έχουμε: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+2\eta\mu x}{x-x^2}, & x<0 \\ 4, & x=0 \\ \sqrt{8x^2+x+16}-3x, & x>0 \end{cases}$ οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{8x^2+x+16}-3x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{8x^2+x+16-9x^2}{\sqrt{8x^2+x+16}+3x} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(-1+\frac{1}{x}+\frac{16}{x^2}\right)}{x\left(\sqrt{8+\frac{1}{x}+\frac{16}{x^2}}+3\right)} = (+\infty)\left(\frac{-1}{\sqrt{8}+3}\right) = -\infty$$

iii. Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+2\eta\mu x}{x-x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2+2\frac{\eta\mu x}{x}}{1-x} = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{1-x}\left(2+2\frac{\eta\mu x}{x}\right)\right] = 0,$$

αφού: $\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| = \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \le \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow \frac{-1}{|x|} \le \frac{\eta\mu x}{x} \le \frac{1}{|x|}$

και $\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{|x|} = 0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε: $\lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x}{x} = 0$

iv. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - 2\ln(8x+1),\ x\in[0,1]$

Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ (ως σύνθεση και αποτέλεσμα πράξεων συνεχών)

Επίσης:

$g(0) = f(0) = 4 > 0$

$g(1) = f(1) - 2\ln 9 = 2 - 2\ln 9 = 2\ln\frac{e}{9} < 0$

Άρα από το θεώρημα Bolzano έχουμε ότι η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2\ln(8x+1)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

Άσκηση 20

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{4(x^3-2x^2)}, & x\in(-\infty,0)\cup(0,2)\\[2ex] \dfrac{\kappa x+1}{2(x^2-4)}, & x\in(2,+\infty)\end{cases}$ και η $g:\mathbb{R}-\{0,1\}\to\mathbb{R}$

για την οποία ισχύει:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x\cdot g(x)+2x}{3x}=5$ και $g(x+3)=g(x)+f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Να βρείτε:

i. Το κ αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

ii. Το όριο $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

iii. Το όριο $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$.

iv. Το όριο $\lim\limits_{x\to 3}g(x)$.

<u>Λύση</u>

i. Είναι: $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-5x+6}{4(x^3-2x^2)}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x-2)(x-3)}{4x^2(x-2)}=-\dfrac{1}{16}$

$\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\kappa x+1}{2(x-2)(x+2)}$

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to 2^+}(\kappa x+1)=2\kappa+1$

και $\lim\limits_{x\to 2^+}2(x-2)(x+2)=0$

Αν $2\kappa+1\neq 0\Leftrightarrow \kappa\neq-\dfrac{1}{2}$ τότε το $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=+\infty$ ή $-\infty$.

Αν $2\kappa+1=0\Leftrightarrow \kappa=-\dfrac{1}{2}$ τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{-\frac{1}{2}x+1}{2(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-(x-2)}{4(x-2)(x+2)} = -\frac{1}{16}.$$

Δηλαδή υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ αν και μόνο αν $\kappa = -\frac{1}{2}$

ii. Είναι: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-5x+6}{4\left(x^3-2x^2\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(x-2)(x-3)}{4x^2(x-2)} = -\infty$

iii. Θέτουμε:

$h(x) = \frac{\eta\mu x g(x)+2x}{3x} \Leftrightarrow \eta\mu x g(x) = 3xh(x) - 2x$ και για $x \neq 0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{3xh(x)-2x}{\eta\mu x} = 3\cdot 5 \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\eta\mu x}{x}} - 2\lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\eta\mu x}{x}} = 15 - 2 = 13$$

iv. Είναι: $\lim\limits_{x\to 3} g(x) \overset{x=u+3}{=} \lim\limits_{u\to 0} g(u+3) = \lim\limits_{u\to 0}\left[g(u)+f(u)\right] = 13 + (-\infty) = -\infty$

ΘΕΜΑ Δ

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$f(x) = -2x^5 - |z|x^3 + 2|z|^5$, $x \in \mathbb{R}, z \in C^*$

α) Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0, |z|)$.

δ) Αν $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-f(x) + 2|z|^5}{ημ^3 x} = 1$, να βρείτε την καμπύλη του μιγαδικού επιπέδου, στην οποία ανήκουν οι εικόνες του μιγαδικού αριθμού z.

<u>Λύση</u>

α) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^5 < x_2^5 \Rightarrow -2x_1^5 > -2x_2^5$ και

$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow -|z|x_1^3 > -|z|x_2^3 \Rightarrow$

$-|z|x_1^3 + 2|z|^5 > -|z|x_2^3 + 2|z|^5$.

Άρα $-2x_1^5 - |z|x_1^3 + 2|z|^5 > -2x_2^5 - |z|x_2^3 + 2|z|^5 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα έχει σύνολο τιμών το:

$f(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)$. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-2x^5 - |z|x^3 + 2|z|^5\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-2x^5\right) = -2(+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-2x^5 - |z|x^3 + 2|z|^5\right) =$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-2x^5\right)=-2\left(-\infty\right)=+\infty$$

Επομένως είναι: $f(R)=\left(-\infty,+\infty\right)$

γ) Για τη συνεχή συνάρτηση f στο $\left[0,|z|\right]$, ισχύουν:

- $f(0)=2|z|^5>0$
- $f\left(|z|\right)=-2|z|^5-|z|^4+2|z|^5=-|z|^4<0$

Άρα από το θεώρημα Bolzano η $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\left(0,|z|\right)$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,|z|\right)$ η ρίζα είναι μοναδική.

δ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-f(x)+2|z|^5}{\eta\mu^3x}=$

$$\lim_{x\to0}\frac{2x^5+|z|x^3-2|z|^5+2|z|^5}{\eta\mu^3x}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x^3\left(2x^2+|z|\right)}{\eta\mu^3x}=\lim_{x\to0}\frac{2x^2+|z|}{\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^3}=\frac{|z|}{1}=1$$

Άρα οι εικόνες του z στο μιγαδικό επίπεδο, ανήκουν στο μοναδιαίο κύκλο.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=3\ln 2x+e^{3x}+4x-2$.

i. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία την f.

ii. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

iii. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=e^{\frac{3}{2}}$

iv. Να βρείτε τον πραγματικό θετικό αριθμό μ για το οποίο ισχύει:

$$3\ln 4\mu-3\ln(2\mu^2+2)-4(\mu^2+1)=e^{3(\mu^2+1)}-e^{6\mu}-8\mu$$

<u>Λύση</u>

i. Η συνάρτηση f έχει $D_f=(0,+\infty)$. Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$x_1<x_2 \Rightarrow 2x_1<2x_2 \Rightarrow \ln 2x_1<\ln 2x_2 \Rightarrow 3\ln 2x_1<3\ln 2x_2$

και $x_1<x_2 \Rightarrow 3x_1<3x_2 \Rightarrow e^{3x_1}<e^{3x_2}$

και

$x_1<x_2 \Rightarrow 4x_1<4x_2 \Rightarrow 4x_1-2<4x_2-2.$

Άρα $3\ln 2x_1+e^{3x_1}+4x_1-2<3\ln 2x_2+e^{3x_2}+4x_2-2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2).$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

ii. Είναι:

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(3\ln 2x+e^{3x}+4x-2)=-\infty+1+0-2=-\infty$

αφού $\lim\limits_{x\to 0}\ln 2x=\lim\limits_{u\to 0}\ln u=-\infty$, και $\lim\limits_{x\to 0} e^{3x}=\lim\limits_{u\to 0} e^{u}=1$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}(3\ln 2x+e^{3x}+4x-2)=+\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln 2x=\lim\limits_{u\to +\infty}\ln u=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to +\infty} e^{3x}=\lim\limits_{u\to +\infty} e^{u}=+\infty$

iii. $f(x)=e^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$, (αφού η f γνησίως αύξουσα άρα και 1-1) και η ρίζα είναι μοναδική.

iv. Είναι:

$$3\ln 4\mu - 3\ln(2\mu^2+2) - 4(\mu^2+1) = e^{3(\mu^2+1)} - e^{6\mu} - 8\mu \Leftrightarrow$$

$$3\ln 4\mu + e^{6\mu} + 8\mu = 3\ln 2(\mu^2+1) + e^{3(\mu^2+1)} + 4(\mu^2+1) \Leftrightarrow$$

$$3\ln 2\cdot(2\mu) + e^{3(2\mu)} + 4\cdot(2\mu) - 2 = 3\ln 2(\mu^2+1) + e^{3(\mu^2+1)} + 4(\mu^2+1) - 2 \Leftrightarrow$$

$f(2\mu)=f(\mu^2+1) \Leftrightarrow \mu^2+1=2\mu \Leftrightarrow \mu=1$ (Διπλή ρίζα).

Άσκηση 3

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι συνθήκες:

- $|3\eta\mu x-2xf(x)|\le\frac{1}{2}x^2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- $4f(x)+3f(x+1)=2x^2-2013$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

ii. Να βρείτε το $f(1)$.

iii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=x-1$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,1)$.

<u>Λύση</u>

i. Ισχύει: $|3\eta\mu x-2xf(x)|\le\frac{1}{2}x^2,\ x\in\mathbb{R}$

- Για $x>0$, έχουμε: $|3\eta\mu x-2xf(x)|\le\frac{1}{2}x^2\Leftrightarrow-\frac{1}{2}x^2\le 3\eta\mu x-2xf(x)\le\frac{1}{2}x^2\Leftrightarrow$

  $$-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\frac{\eta\mu x}{x}\le f(x)\le\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}$$

  αλλά: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\frac{3}{2}$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\frac{3}{2}$

- Για $x<0$, έχουμε: $\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\le f(x)\le-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}$ αλλά $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\frac{3}{2}$

  και $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\frac{3}{2}$

  οπότε λόγω του κριτηρίου παρεμβολής έχουμε:

  $$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\frac{3}{2}$$

  Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\frac{3}{2}$ και επομένως $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\frac{3}{2}$.

ii. Η σχέση $4f(x)+3f(x+1)=2x^2-2013$ ισχύει για κάθε $x \in R$ άρα και για $x=0$ οπότε έχουμε: $4f(0)+3f(1)=-2013$. Αλλά f συνεχής οπότε:

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{3}{2}.$$

Άρα $4\cdot\frac{3}{2}+3f(1)=-2013 \Leftrightarrow f(1)=-673$.

iii. Αρκεί να υπάρχει $x_o \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=g(x_0) \Leftrightarrow f(x_0)-g(x_0)=0$
Έστω $h(x)=f(x)-g(x),\ x\in[0,1]$. Είναι:

$$h(0)=f(0)-g(0)=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}>0$$

$$h(1)=f(1)-g(1)=-673<0$$

Οπότε: $h(0)h(1)=-\frac{673}{2}<0$

Επειδή η h είναι συνεχής στο [0,1], ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων, από το θεώρημα Bolzano συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=g(x_0)$.

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = -2|z| + \sqrt{2x - 3|z|}$, $z \in C$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

iii. Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} έχουν μόνο ένα κοινό σημείο πάνω στην ευθεία με εξίσωση $y = x$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z.

iv. Αν οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 ανήκουν στον προηγούμενο γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι $7|z_1 - z_2| \le 2$.

Λύση

i. Πρέπει:

$$2x - 3|z| \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \frac{3}{2}|z|.$$

Άρα $D_f = \left[\frac{3}{2}|z|, +\infty\right)$

ii. Για κάθε $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \Rightarrow 2x_1 - 3|z| < 2x_2 - 3|z| \Rightarrow$$

$$\sqrt{2x_1 - 3|z|} < \sqrt{2x_2 - 3|z|} \Rightarrow -2|z| + \sqrt{2x_1 - 3|z|} = -2|z| + \sqrt{2x_2 - 3|z|} \Rightarrow$$

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

iii. Η f είναι γνησίως αύξουσα άρα για κάθε $x \in D_f$ έχουμε:

$$f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow -2|z| + \sqrt{2x - 3|z|} = x \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{2x - 3|z|} = 2|z| + x \Leftrightarrow 2x - 3|z| = 4|z|^2 + x^2 + 4|z|x \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 2\left(2|z| - 1\right)x + 4|z|^2 + 3|z| = 0$$

Πρέπει: $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ (αφού οι $C_f, C_{f^{-1}}$ έχουν μόνο ένα κοινό σημείο)

$$4\left(4|z|^2-4|z|+1\right)-16|z|^2-12|z|=0 \Leftrightarrow |z|=\frac{1}{7}$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με κέντρο $0(0,0)$ και ακτίνα $\rho=\frac{1}{7}$

iv. Αφού οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 ανήκουν στον προηγούμενο γεωμετρικό τόπο ισχύει:

$$|z_1-z_2| \le 2\cdot\frac{1}{7} \Leftrightarrow 7|z_1-z_2| \le 2$$

Άσκηση 5

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και ο μιγαδικός αριθμός $z=1+f(2)i$ για τον οποίο ισχύει $|z+9i|=3|z+i|$.

Να αποδείξετε ότι:

i. $|z|=3$

ii. $f^2(2)=8$

iii. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε: $3x_0f^2(x_0)+9=8^{x_0}$.

<u>Λύση</u>

i. Είναι:

$$|z+9i|=3|z+i|\Leftrightarrow|z+9i|^2=9|z+i|^2\Leftrightarrow(z+9i)(\overline{z}-9i)=9(z+i)(\overline{z}-i)\Leftrightarrow$$

$$|z|^2-9zi+9\overline{z}i+81=9|z|^2-9zi+9\overline{z}i+9\Leftrightarrow$$

$$8|z|^2=72\Leftrightarrow|z|=3$$

ii. Είναι: $|z|=3\Leftrightarrow|1+f(2)i|^2=9\Leftrightarrow1+f^2(2)=9\Leftrightarrow f^2(2)=8$

iii. Έστω $g(x)=3xf^2(x)-8^x+9$

Η g είναι συνεχής στο $[0,2]$. Επίσης $g(0)=8>0$ και $g(2)=6f^2(2)-64+9=-7<0$.

Άρα $g(0)\cdot g(2)<0$, οπότε λόγω του θεωρήματος του Bolzano, υπάρχει $x_0\in(0,2)$ ώστε $g(x_0)=0\Leftrightarrow3x_0f^2(x_0)+9=8^{x_0}$

Άσκηση 6

Δίνεται συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}+|z+3i|, & \text{αν } x<1 \\ \dfrac{1}{4}\eta\mu\dfrac{(x-1)}{x-1}+|z-1+4i|, & \text{αν } x>1 \end{cases}$

Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ τότε:

i. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z.

ii. Να βρείτε το σημείο του γεωμετρικού τόπου που απέχει την ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\alpha\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $4e^{\alpha+1}=15\alpha|z|+1$.

Λύση

i. Αφού υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ θα ισχύει: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

Είναι: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}+|z+3i|\right)=$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)}+|z+3i|=\frac{1}{4}+|z+3i|$$

και

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\dfrac{1}{4}\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1}+|z-1+4i|\right]=\dfrac{1}{4}+|z-1+4i|$ διότι $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$

Άρα

$$\frac{1}{4}+|z+3i|=\frac{1}{4}+|z-1+4i|\Leftrightarrow |z+3i|^2=|z-1+4i|^2\Leftrightarrow$$

$$(z+3i)(\overline{z}-3i)=(z-1+4i)(\overline{z}-1-4i)\Leftrightarrow$$

$$|z|^2-3zi+3\overline{z}i+9=|z|^2-z-4zi-\overline{z}+1+4i+4\overline{z}i-4i+16\Leftrightarrow$$

$$zi-\overline{z}i=-z-\overline{z}+8\Leftrightarrow$$

$$(z-\overline{z})i+z+\overline{z}=8\Leftrightarrow$$

$-2y+2x=8 \Leftrightarrow x-y-4=0$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι η ευθεία με εξίσωση: $x-y-4=0$

ii. Έστω $M(x_0,y_0)$ το ζητούμενο σημείο του γεωμετρικού τόπου. Το σημείο M είναι το σημείο τομής των ευθειών $\varepsilon_1: x-y-4=0$ και της ε_2, κάθετης προς την ευθεία από την αρχή των αξόνων. Έχουμε:

$\lambda\varepsilon_1\lambda\varepsilon_2=-1 \Leftrightarrow \lambda\varepsilon_2=-1$, οπότε $\varepsilon_2: y=-x$.

$\left.\begin{cases} x-y-4=0 \\ y=-x \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left(x=2 \text{ και } y=-2\right)$

Άρα $M(2,-2)$

iii. Έστω $g(x)=4e^{x+1}-15x|z|-1$.

Είναι: $g(0)=4e-1>0$

$|z| \geq d(0,\varepsilon_1)=2\sqrt{2} \Rightarrow$

$-15|z| \leq -30\sqrt{2} \Rightarrow 4e^2-15|z| \leq 4e^2-30\sqrt{2} \Rightarrow$

$4e^2-15|z|-1 \leq 4e^2-30\sqrt{2}-1 \Rightarrow g(1)<0.$

Άρα λόγω του θεωρήματος του Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\alpha \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $g(\alpha)=0 \Leftrightarrow 4e^{\alpha+1}=15\alpha|z|+1$

Άσκηση 7

Δίνεται η συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση και οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 3f(2) + 2i$ και $z_2 = 2f(4) + 3i$.

i. Να βρεθεί το $\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2)$.

ii. Να βρεθεί το $\mathrm{Im}(z_1\overline{z}_2)$

iii. Αν ο $z_1\overline{z}_2$ είναι φανταστικός αριθμός να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια μόνο ρίζα στο $(2,4)$

iv. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2) > 0$ αν είναι γνωστό ότι ο $z_1\overline{z}_2$ είναι πραγματικός.

<u>Λύση</u>

i. Είναι:

$$z_1\overline{z}_2 = \left[3f(2) + 2i\right]\left[2f(4) - 3i\right] = \left[6f(2)f(4) + 6\right] + \left[-9f(2) + 4f(4)\right]i$$

Άρα $\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2) = 6f(2)f(4) + 6$

ii. Από (i) έχουμε: $\mathrm{Im}(z_1\overline{z}_2) = -9f(2) + 4f(4)$

iii.Επειδή $z_1\overline{z}_2$ φανταστικός θα ισχύει: $\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2) = 0 \Leftrightarrow f(2)\cdot f(4) = -1$ (από (i))
Η f είναι συνεχής στο $[2,4]$.

Άρα λόγω του θεωρήματος Bolzano η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(2,4)$
και επειδή είναι γνησίως αύξουσα, η ρίζα είναι μοναδική.

iv. Αφού $z_1\overline{z}_2$ πραγματικός, θα ισχύει $\mathrm{Im}(z_1\overline{z}_2) = 0 \Leftrightarrow f(2) = \dfrac{4}{9}f(4)$ (από (ii)).

Άρα $\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2) = 6f(2)f(4) + 6 = \dfrac{8}{3}f^2(4) + 6 > 0$

Άσκηση 8

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:R \to R$ τέτοια ώστε: $\kappa\eta\mu^2 x = x^2 f(x) + \sqrt{1+\eta\mu^2 x} - \lambda$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1) και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$

i. Να βρείτε τα κ και λ

ii. Αν $\kappa = 1$ και $\lambda = 1$ να βρείτε την f.

iii. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}$.

<u>Λύση</u>

i. $A \in C_f$, άρα $f(0) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda = 1$

Η σχέση (1) για $\lambda = 1$ γίνεται: $\kappa\eta\mu^2 x = x^2 f(x) + \sqrt{1+\eta\mu^2 x} - 1$ και για $x \neq 0$ έχουμε:

$f(x) = \frac{\kappa\eta\mu^2 x + 1 - \sqrt{1+\eta\mu^2 x}}{x^2}$ οπότε:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left[\kappa \cdot \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2\right] + \lim_{x\to 0}\frac{-\eta\mu^2 x}{x^2\left(1+\sqrt{1+\eta\mu^2 x}\right)} = \kappa - \frac{1}{2}$$

Αλλά η f είναι συνεχής στο 0, οπότε:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \kappa - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \kappa = 1$$

ii. Η σχέση (1) για $\kappa = \lambda = 1$ γίνεται: $\eta\mu^2 x = x^2 f(x) + \sqrt{1+\eta\mu^2 x} - 1$.

Για $x \neq 0$ η τελευταία γίνεται: $f(x) = \frac{\eta\mu^2 x + 1 - \sqrt{1+\eta\mu^2 x}}{x^2}$.

Επίσης έχουμε: $f(0) = \frac{1}{2}$

Άρα $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu^2 x + 1 - \sqrt{1+\eta\mu^2 x}}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$

iii. Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu^2 x+1-\sqrt{1+\eta\mu^2 x}}{x^2\sigma\upsilon\nu x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2\right]+\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+\eta\mu^2 x}}{x^2\sigma\upsilon\nu x}=$$

$$1+\lim_{x\to 0}\frac{-\eta\mu^2 x}{x^2\sigma\upsilon\nu x(1+\sqrt{1+\eta\mu^2 x})}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Άσκηση 9

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{x^3\cdot 2^x+3\cdot 2^x-4}{2^x}$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

iii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\kappa$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $\mathbb{R}$ για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>

i. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$, αφού $2^x\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Είναι:

$$f(x)=\frac{x^3\cdot 2^x+3\cdot 2^x-4}{2^x}=x^3+3-4\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ έχουμε: $x_1<x_2\Rightarrow {x_1}^3<{x_2}^3\Rightarrow {x_1}^3+3<{x_2}^3+3$

και $x_1<x_2\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}>\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}\Rightarrow -4\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}<-4\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}$,

αφού η συνάρτηση $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα

$$ {x_1}^3+3-4\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}<{x_2}^3+3-4\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x^3+3-4\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]=(-\infty)+3-4(+\infty)=-\infty\ ,$$

αφού $0<\frac{1}{2}<1$ οπότε: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=+\infty$.

iii. Είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^3+3-4\left(\frac{1}{2}\right)^x\right] = (+\infty)+3-4\cdot 0 = +\infty$,

αφού $0<\frac{1}{2}<1$ οπότε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0.$

iv. H f είναι συνεχής (πράξεις συνεχών), είναι και γνησίως αύξουσα άρα
$f(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-\infty,+\infty)$.

Το $\kappa\in\mathbb{R}$ περιλαμβάνεται στο σύνολο τιμών της f , οπότε η εξίσωση $f(x)=\kappa$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, η ρίζα είναι μοναδική.

Ημερομηνία τροποποίησης: 05/04/2012

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΘΕΜΑ Α

Άσκηση 1

Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

<u>Λύση</u>

Για $x \neq x_0$ έχουμε $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$, οπότε

$$\lim_{x \to x_0}\left[f(x) - f(x_0)\right] = \lim_{x \to x_0}\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)\right]$$

$$= \lim_{x \to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\lim_{x \to x_0}(x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0,$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

Άσκηση 2

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- f συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι σταθερή στο Δ.

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$.

Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1)=f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

  $$f'(\xi)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \qquad \textbf{(1)}$$

  Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi)=0$, οπότε, λόγω της **(1)**, είναι

  $f(x_1)=f(x_2)$.

- Αν $x_1 > x_2$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1)=f(x_2)$.

Σε όλες τις περιπτώσεις λοιπόν είναι $f(x_1)=f(x_2)$.

Άσκηση 3

i. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ

ii. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

<u>Λύση</u>

i. Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$.

Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο,

ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, οπότε έχουμε

$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$.

Επειδή $f'(\xi)>0$ και $x_2-x_1>0$, έχουμε $f(x_2)-f(x_1)>0$,

οπότε $f(x_1)<f(x_2)$.

ii. Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αν

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(\lambda x+\beta)\right]=0.$$

Άσκηση 4

i. Έστω δυο συναρτήσεις f,g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν

- οι f,g είναι συνεχείς στο Δ
- $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε να δείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x\in\Delta$ να ισχύει

$$f(x)=g(x)+c$$

ii. Ποια η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος μέσης τιμής;

<u>Λύση</u>

i. Η συνάρτηση $f-g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x\in\Delta$ ισχύει

$$(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)=0$$

Επομένως σύμφωνα με γνωστό θεώρημα, η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή στο Δ. Άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x\in\Delta$ να ισχύει $f(x)-g(x)=c$, οπότε $f(x)=g(x)+c$.

ii. Γεωμετρικά το Θ.Μ.Τ. για μια συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(\alpha, f(\beta))$ και $B(\beta, f(\beta))$.

Άσκηση 5

i. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ.

Αν η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να δείξετε ότι $f'(x_0)=0$.

ii. Πότε μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Λύση

i. Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο.

Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει ένα $\delta>0$ τέτοιο, ώστε $(x_0-\delta, x_0+\delta)\subseteq\Delta$ και $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ **(1)**

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Επομένως,

- αν $x\in(x_0-\delta, x_0)$, τότε λόγω της **(1)**, θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$,

  οπότε θα έχουμε $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$ **(2)**

- αν $x\in(x_0, x_0+\delta)$, τότε λόγω της **(1)**, θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$,

  οπότε θα έχουμε $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$ **(3)**

Έτσι από τις **(2)** και **(3)** έχουμε $f'(x_0)=0$.

Η απόδειξη για το τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

ii. Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός.

Άσκηση 6

i. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ με $f'(x)=-\eta\mu x$

ii. Ποια η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Rolle;

<u>Λύση</u>

i. Πράγματι, για κάθε $x\in\mathbf{R}$ και $h\neq 0$ ισχύει:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sigma\upsilon\nu(x+h)-\sigma\upsilon\nu(x)}{h}=\frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu h-\eta\mu x\cdot\eta\mu h-\sigma\upsilon\nu x}{h}=$$

$$\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}-\eta\mu x\cdot\frac{\eta\mu h}{h},$$

οπότε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}\right)-\lim_{h\to 0}\left(\eta\mu x\cdot\frac{\eta\mu h}{h}\right)=$$

$$\sigma\upsilon\nu x\cdot 0-\eta\mu x\cdot 1=-\eta\mu x.$$

Δηλαδή $(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$.

ii. Γεωμετρικά το θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.

Άσκηση 7

i. Έστω η συνάρτηση $f\left(x\right)=x^{\nu},\nu\in\mathbf{N}-\left\{0,1\right\}$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και ότι ισχύει $f'\left(x\right)=\nu x^{\nu-1}$.

ii. Πότε μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στα εσωτερικά σημεία του Δ, λέγεται κυρτή στο Δ;

Λύση

i. Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbf{R}$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f\left(x\right)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^{\nu}-{x_0}^{\nu}}{x-x_0}=$$

$$\frac{\left(x-x_0\right)\left(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ldots+{x_0}^{\nu-1}\right)}{x-x_0}=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ldots+{x_0}^{\nu-1},$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f\left(x\right)-f(x_0)}{x-x_0}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ldots+{x_0}^{\nu-1}\right)={x_0}^{\nu-1}+{x_0}^{\nu-1}+\ldots+{x_0}^{\nu-1}=\nu {x_0}^{\nu-1},$$

δηλαδή $\left(x^{\nu}\right)'=\nu x^{\nu-1}$.

ii. Η συνάρτηση f λέγεται κυρτή στο Δ, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.

Άσκηση 8

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x\in\mathbf{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}^*$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{x}$.

<u>Λύση</u>

Αν $x>0$, τότε $(\ln|x|)'=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$, ενώ αν $x<0$, τότε $\ln|x|=\ln(-x)$, οπότε αν θέσουμε $y=\ln(-x)$ και $u=-x$, έχουμε $y=\ln u$. Επομένως,

$$y'=(\ln u)'=\frac{1}{u}u'=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}$$

και άρα $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$.

Άσκηση 9

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε να δείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

<u>Λύση</u>

Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0,

η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$. Έτσι έχουμε

$$f(x)\le f(x_0) \text{ για κάθε } x\in(\alpha,x_0] \qquad \textbf{(1)}$$

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0,

η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε

$$f(x)\le f(x_0) \text{ για κάθε } x\in[x_0,\beta) \qquad \textbf{(2)}$$

Επομένως λόγω των **(1)** και **(2)**, ισχύει

$$f(x)\le f(x_0) \text{ για κάθε } x\in(\alpha,\beta),$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

Άσκηση 10

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$ με $\alpha\in\mathbf{R}-\mathbf{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει: $f'(x)=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$.

ii. Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Να δώσετε τον ορισμό του τοπικού μεγίστου για την f.

<u>Λύση</u>

i. Πράγματι, αν $y=x^{\alpha}=e^{\alpha\ln x}$ και θέσουμε $u=\alpha\ln x$, τότε $y=e^{u}$. Επομένως,

$$y'=\left(e^{u}\right)'=e^{u}\cdot u'=e^{\alpha\ln x}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}=x^{\alpha}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}=\alpha\cdot x^{\alpha-1}.$$

ii. Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0\in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε

$$f(x)\le f(x_0) \text{ για κάθε } x\in A\cap(x_0-\delta,x_0+\delta).$$

Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μέγιστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο.

Άσκηση 11

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\alpha^{x}, \alpha>0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και ισχύει:

$f'(x)=\alpha^{x}\cdot\ln\alpha$.

<u>Λύση</u>

Πράγματι, αν $y=\alpha^{x}=e^{x\ln\alpha}$ και θέσουμε $u=x\ln\alpha$, τότε $y=e^{u}$. Επομένως,

$$y'=\left(e^{u}\right)'=e^{u}\cdot u'=e^{x\ln\alpha}\cdot\ln\alpha=\alpha^{x}\cdot\ln\alpha \ .$$

Άσκηση 12

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως είναι συνεχής. Αν η $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε να δείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

<u>Λύση</u>

Έχουμε ότι

$$f'(x)>0, \text{ για κάθε } x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta).$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta)$. Επομένως, για $x_1<x_0<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β). Πράγματι, έστω $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1<x_2$.

- αν $x_1,x_2\in(\alpha,x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

- αν $x_1,x_2\in[x_0,\beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,\beta)$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

- Τέλος αν $x_1<x_0<x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$.

Επομένως σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

Άσκηση 13

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ είναι παραγωγίσιμη $\mathbf{R}$ και ισχύει $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$.

<u>Λύση</u>

Για κάθε $x\in\mathbf{R}$ και $h\neq 0$ ισχύει

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\eta\mu(x+h)-\eta\mu x}{h}=\frac{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu h+\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu h-\eta\mu x}{h}=$$

$$\eta\mu x\cdot\frac{(\sigma\upsilon\nu h-1)}{h}+\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\eta\mu h}{h}.$$

Επειδή

$$\lim_{h\to 0}\frac{\eta\mu h}{h}=1 \text{ και } \lim_{h\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}=0\ ,$$

έχουμε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\eta\mu x\cdot 0+\sigma\upsilon\nu x\cdot 1=\sigma\upsilon\nu x.$$

Δηλαδή $(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$

Άσκηση 14

Να αποδείξετε ότι η αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε και η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

<u>Λύση</u>

Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0),$$

δηλαδή

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

Άσκηση 15

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,+\infty\right)$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f\left(x\right)=\varepsilon\varphi x,\ x\in\mathbf{R}_1=\left\{x\in\mathbf{R}\,/\,\sigma\upsilon\nu x\neq 0\right\}$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}_1$ και ισχύει $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

<u>Λύση</u>

i. Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\left(0,+\infty\right)$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}=$$

$$\frac{x-x_0}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}},$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

δηλαδή $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

ii. Πράγματι, για κάθε $x\in\mathbf{R_1}$ έχουμε:

$$\left(\varepsilon\varphi x\right)'=\left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=\frac{\left(\eta\mu x\right)'\cdot\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x\cdot\left(\sigma\upsilon\nu x\right)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\cdot\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=e^{x-2}+x-3$.

1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

2. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$ και το σύνολο τιμών της f.

<u>Λύση</u>

i. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbf{R}$. Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση και έχουμε:

   $f'\left(x\right)=e^{x-2}+1>0$, για κάθε $x\in\mathbf{R}$,

   οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbf{R}$.

ii. Μία προφανής ρίζα της συνάρτησης είναι το $x=2$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα αυτή η ρίζα είναι μοναδική. Για το σύνολο τιμών υπολογίζουμε τα παρακάτω όρια:

   $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x-2}+x-3\right)=-\infty$,

   αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-2}=0, \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-3\right)=-\infty$ και

   $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x-2}+x-3\right)=+\infty$,

   αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-2}=+\infty, \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-3\right)=+\infty$.

   Και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbf{R}$, το σύνολο τιμών της f είναι όλο το $\mathbf{R}$.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=4x^3+2\left(\lambda-1\right)x-\lambda$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα $\left(0,1\right)$.

<u>Λύση</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F\left(x\right)=x^4+\left(\lambda-1\right)x^2-\lambda x\,,$$

η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως πολυωνυμική. Επιπλέον ισχύει $F\left(0\right)=F\left(1\right)=0$,

επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f , αφού η f :

- είναι συνεχής στο $\left[0,1\right]$
- είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,1\right)$

και $F\left(0\right)=F\left(1\right)$,

άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(0,1\right)$ τέτοιο, ώστε $F'\left(\xi\right)=0$. Όμως $f\left(\xi\right)=F'\left(\xi\right)=0$, οπότε αποδείχτηκε το ζητούμενο.

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(x^2\right)$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της f.

ii. Να βρείτε τα σημεία της C_f στα οποία η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

iii. Να τη μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

<u>Λύση</u>

i. Πρέπει $x^2>0 \Leftrightarrow x\neq 0$, άρα το πεδίο ορισμού είναι το $\mathbf{R}^*$. Είναι

$$f(x)=\ln\left(x^2\right)=\ln\left(|x|^2\right)=2\ln|x|$$

οπότε

$$f'(x)=\left(2\ln|x|\right)'=2\frac{1}{x}.$$

ii. Έστω $A\left(x_0,2\ln|x_0|\right)$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης της C_f. Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y-2\ln|x_0|=\frac{2}{x_0}\left(x-x_0\right) \qquad \textbf{(1)}$$

και για να διέρχεται από την αρχή των αξόνων πρέπει οι συντεταγμένες του $O(0,0)$ να επαληθεύουν την **(1)**, οπότε η **(1)** γίνεται:

$$-2\ln|x_0|=\frac{2}{x_0}\left(-x_0\right)\Leftrightarrow \ln|x_0|=1=\ln e\Leftrightarrow x_0=\pm e \text{ , και } f\left(x_0\right)=2\ln e=2$$

άρα τα σημεία της C_f είναι τα $A(e,2)$ και $B(-e,2)$

iii. Η συνάρτηση f ορίζεται στο $\mathbf{R}^*=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και είναι συνεχής.

Επειδή $f'(x)=2\frac{1}{x}$, έχουμε ότι:

$f'(x)<0$ για $x\in(-\infty,0)$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$ και

$f'(x)>0$ για $x\in(0,+\infty)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Επίσης έχουμε ότι:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$.

Από τα προηγούμενα έπεται ότι για $x\in(-\infty,0)$, το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty,+\infty)$ και για $x\in(0,+\infty)$, το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty,+\infty)$. Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbf{R}$.

Επίσης η f δεν έχει ακρότατα, αφού είναι γνησίως αύξουσα σε δυο ανοιχτά διαστήματα.

iv. Από τα όρια $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$, έπεται ότι η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=0$, δηλαδή τον άξονα y'y.

Πλάγια ασύμπτωτη δεν έχει, αφού

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0\,,$$

όμως

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-0\cdot x\right]=\lim_{x\to+\infty}2\ln x=+\infty\,.$$

Ομοίως και στο $-\infty$.

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\frac{4}{x}, x\neq 0$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ με $x_0\neq 0$.

ii. Να δείξετε ότι το τρίγωνο το οποίο σχηματίζει η προηγούμενη εφαπτομένη με τους άξονες έχει σταθερό εμβαδό.

iii. Αν Α και Β τα σημεία που η εφαπτομένη στο Μ τέμνει τους άξονες, να δείξετε ότι το Μ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ.

Λύση

i. Ισχύει: $f'\left(x\right)=-\frac{4}{x^2}$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ είναι: $y-\frac{4}{x_0}=-\frac{4}{{x_0}^2}\left(x-x_0\right)$ **(1)**

ii. Θα βρούμε σε ποια σημεία τέμνει η εφαπτομένη τους άξονες:

για $x=0$ η **(1)** γίνεται $y-\frac{4}{x_0}=-\frac{4}{{x_0}^2}\left(-x_0\right)\Leftrightarrow y=\frac{8}{x_0}$

και για $y=0$ η **(1)** γίνεται $-\frac{4}{x_0}=-\frac{4}{{x_0}^2}\left(x-x_0\right)\Leftrightarrow x=2x_0$.

Άρα η **(1)** τέμνει τους άξονες στα σημεία $A\left(0,\frac{8}{x_0}\right)$ και $B\left(2x_0,0\right)$.

Το εμβαδό του ορθογωνίου τριγώνου ΟΑΒ ισούται με

$\left(OAB\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(OA\right)\cdot\left(OB\right)=\frac{1}{2}\left|\frac{8}{x_0}\right|\left|2x_0\right|=8$ τ.μ,

άρα είναι σταθερό.

iii. Το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ έχει συντεταγμένες:

$\left(\frac{2x_0+0}{2},\frac{\frac{8}{x_0}+0}{2}\right)$ δηλαδή $\left(x_0,\frac{4}{x_0}\right)$, άρα είναι το σημείο Μ.

Άσκηση 5

Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης

$$f(x)=\begin{cases} x^4+5x, \ x\geq 0 \\ 5\cdot\eta\mu x, \ x<0 \end{cases}.$$

<u>Λύση</u>

Η πρώτη παράγωγος στα ανοιχτά διαστήματα είναι:

$$f'(x)=\begin{cases} 4x^3+5, x>0 \\ 5\cdot\sigma\upsilon\nu x, x<0 \end{cases}$$

Θα εξετάσουμε αν είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ με τον ορισμό της παραγώγου:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4+5x-0}{x}=\lim_{x\to 0}\left(x^3+5\right)=5$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot\eta\mu x-0}{x}=5\ .$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ και $f'(0)=5$.

Η δεύτερη παράγωγος στα ανοιχτά διαστήματα είναι:

$$f''(x)=\begin{cases} 12x^2, x>0 \\ -5\cdot\eta\mu x, x<0 \end{cases}$$

Στο $x=0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^3+5-5}{x}=\lim_{x\to 0}\left(4x^2\right)=0\ ,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot\sigma\upsilon\nu x-5}{x}=5\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0\ .$$

Άρα $f''(0)=0$, οπότε έχουμε:

$$f''(x)=\begin{cases} 12x^2, x\geq 0 \\ -5\cdot\eta\mu x, x<0 \end{cases}$$

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-3x+1$. Να βρείτε αν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f στα οποία η εφαπτομένη:

i. να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x$.

ii. να σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα x'x.

iii. να είναι παράλληλη στον άξονα x'x.

iv. να είναι κάθετη στην ευθεία $y=\frac{1}{2}x$.

<u>Λύση</u>

Ισχύει $f'(x)=\left(x^2-3x+1\right)'=2x-3$.

i. Η ευθεία $y=x$ έχει συντελεστή διεύθυνσης 1, άρα πρέπει $f'(x)=1\Leftrightarrow 2x-3=1\Leftrightarrow x=2$ και $f(2)=-1$, άρα υπάρχει ένα σημείο, το $A(2,-1)$ στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x$.

ii. Επειδή $\varepsilon\varphi 135^\circ=-1$, πρέπει $f'(x)=-1\Leftrightarrow 2x-3=-1\Leftrightarrow x=1$. Επίσης $f(1)=-1$, άρα υπάρχει ένα σημείο, το $B(1,-1)$ στο οποίο η εφαπτομένη να σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα x'x.

iii. Πρέπει $f'(x)=0\Leftrightarrow 2x-3=0\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$ και $f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{5}{4}$, άρα υπάρχει ένα σημείο, το $\Gamma\left(\frac{3}{2},-\frac{5}{4}\right)$ στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

iv. Επειδή ο συντελεστής διεύθυνσης είναι $\frac{1}{2}$, πρέπει ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης να είναι -2, οπότε $f'(x)=-2\Leftrightarrow 2x-3=-2\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ και $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$, άρα υπάρχει ένα σημείο, το $\Delta\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ στο οποίο η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ευθεία $y=\frac{1}{2}x$.

Άσκηση 7

Να παραγωγίσετε τις παρακάτω συναρτήσεις

i. $x^{\eta\mu x}$, $x>0$

ii. $2^{x\cdot\ln x}$, $x>0$

iii. $\sqrt{5x^8+1}$

<u>Λύση</u>

i. $x^{\eta\mu x}=\left(e^{\ln x}\right)^{\eta\mu x}=e^{\ln x\cdot\eta\mu x}$, οπότε θέτοντας

$u=\ln x\cdot\eta\mu x$ έχουμε

$\left(x^{\eta\mu x}\right)'=\left(e^{\ln x\cdot\eta\mu x}\right)'=\left(e^{u}\right)'=$

$e^{u}\cdot u'=e^{\ln x\cdot\eta\mu x}\cdot\left(\ln x\cdot\eta\mu x\right)'=x^{\eta\mu x}\cdot\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}+\ln x\cdot\sigma\upsilon\nu x\right).$

ii. Έστω $u=x\cdot\ln x$, οπότε

$\left(2^{x\cdot\ln x}\right)'=\left(2^{u}\right)'=2^{u}\cdot\ln 2\cdot u'=2^{x\cdot\ln x}\cdot\ln 2\cdot\left(x\cdot\ln x\right)'=2^{x\cdot\ln x}\cdot\ln 2\cdot\left(\ln x+1\right).$

iii. Έστω $u=5x^8+1$, οπότε $\left(\sqrt{5x^8+1}\right)'=\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}u'=\dfrac{\left(5x^8+1\right)'}{2\sqrt{5x^8+1}}=\dfrac{20x^7}{\sqrt{5x^8+1}}$

Άσκηση 8

Αν για τη συνάρτηση f ισχύει:

$$-2x+1 \le f(x) \le x^4-2x+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbf{R}, \qquad \textbf{(1)}$$

τότε

i. να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x=0$

ii. να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ και ισχύει $f'(0)=-2$.

Λύση

i. Για $x=0$ η **(1)** γίνεται $1\le f(0)\le 1$, άρα $f(0)=1$. Επίσης

$\lim\limits_{x\to 0}(-2x+1)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^4-2x+1\right)=1$, οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα είναι και $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

Επομένως η f είναι συνεχής στο $x=0$, αφού $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=1$.

ii. Η σχέση **(1)** γίνεται:

$-2x+1-1\le f(x)-f(0)\le x^4-2x+1-1 \Leftrightarrow -2x\le f(x)-f(0)\le x^4-2x$,
οπότε διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

- αν $x>0$, τότε
$\dfrac{-2x}{x}\le \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\le \dfrac{x^4-2x}{x} \Leftrightarrow -2\le \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\le x^3-2$ και επειδή
$\lim\limits_{x\to 0^+}(-2)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^3-2\right)=-2$, έπεται από το κριτήριο παρεμβολής ότι
$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=-2$.
- αν $x<0$, τότε
$\dfrac{-2x}{x}\ge \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\ge \dfrac{x^4-2x}{x} \Leftrightarrow -2\ge \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\ge x^3-2$ και επειδή
$\lim\limits_{x\to 0^-}(-2)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^3-2\right)=-2$, έπεται από το κριτήριο παρεμβολής ότι
$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=-2$.

Από τα δυο προηγούμενα προκύπτει ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ και $f'(0)=-2$.

Άσκηση 9

Έστω $f:\mathbf{R}\to(0,+\infty)$ μια συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0>0$. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(x_0)}}{x^2-x_0^{\,2}}$

ii. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f^3(x)-f^3(x_0)}{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}$

<u>Λύση</u>

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Οπότε

i. $$\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(x_0)}}{x^2-x_0^{\,2}}=\lim_{x\to x_0}\frac{\left(\sqrt{f(x)}\right)^2-\left(\sqrt{f(x_0)}\right)^2}{(x-x_0)(x+x_0)\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(x_0)}\right)}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{1}{(x+x_0)\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(x_0)}\right)}=\frac{f'(x_0)}{4\cdot x_0\cdot\sqrt{f(x_0)}}.$$

(Αφού η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο x_0, οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{f(x_0)}$.)

ii. $$\lim_{x\to x_0}\frac{f^3(x)-f^3(x_0)}{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\left[f(x)-f(x_0)\right]\left[f^2(x)+f(x)\cdot f(x_0)+f^2(x_0)\right]\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{x_0}\right)^2}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}\left[\left[f^2(x)+f(x)\cdot f(x_0)+f^2(x_0)\right]\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)\right]=$$

$$6\cdot f'(x_0)\cdot f^2(x_0)\cdot\sqrt{x_0}.$$

(Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ και $\lim\limits_{x\to x_0}f^2(x)=f^2(x_0)$)

Άσκηση 10

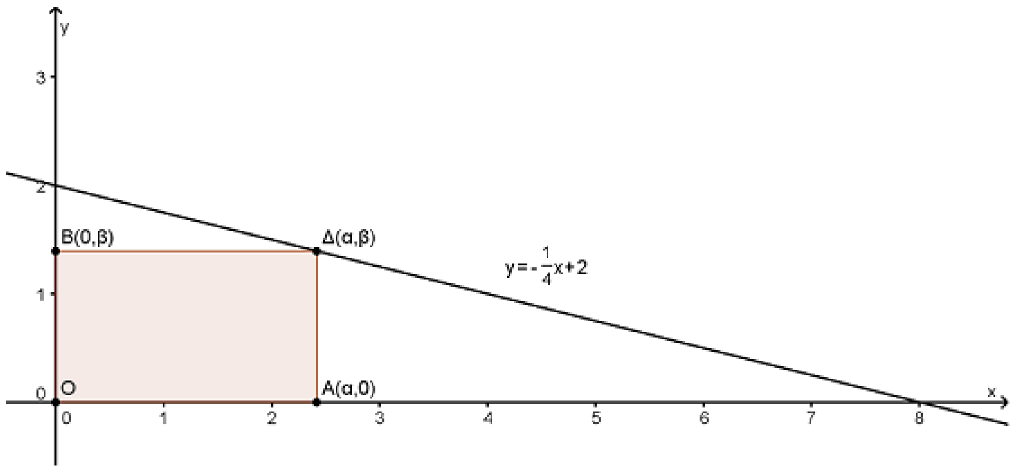
Θεωρούμε ορθογώνιο, του οποίου η μια κορυφή είναι το σημείο $O(0,0)$, δυο πλευρές βρίσκονται πάνω στους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy και η τέταρτη κορυφή κινείται πάνω στην ευθεία $y=-\frac{1}{4}x+2$.

Να βρείτε τις διαστάσεις του α,β ώστε να έχει μέγιστο εμβαδό.

<u>Λύση</u>

Το εμβαδό του ορθογωνίου ισούται με $E=\alpha\cdot\beta$, όπου α,β θετικοί πραγματικοί. Η τέταρτη κορυφή (βλέπε σχήμα) είναι η $\Delta(\alpha,\beta)$,

η οποία ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $y=-\frac{1}{4}x+2$, οπότε ισχύει $\beta=-\frac{1}{4}\alpha+2$.



Έτσι το εμβαδό του ορθογωνίου γίνεται

$E(\alpha)=\alpha\cdot\left(-\frac{1}{4}\alpha+2\right)=-\frac{1}{4}\alpha^2+2\cdot\alpha$ με $\alpha\in(0,8)$, αφού από την ανισότητα $\beta>0$ έχουμε

$-\frac{1}{4}\alpha+2>0\Leftrightarrow\alpha<8$.

Παραγωγίζοντας τη συνάρτηση του εμβαδού παίρνουμε:

$E'(\alpha)=\left(-\frac{1}{4}\alpha^2+2\cdot\alpha\right)'=-\frac{1}{2}\alpha+2$, οπότε $E'(\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha=4$ και

$E'(\alpha)>0\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\alpha+2>0\Leftrightarrow\alpha<4$.

Από τα προηγούμενα προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

α	0		4		8
$E'(\alpha)$		+	0	-	
$E(\alpha)$		$\nearrow$	$E(4)$	$\searrow$	

Άρα η συνάρτηση του Εμβαδού είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,4]$, γνησίως φθίνουσα στο $[4,8)$ και είναι συνεχής στο 4, άρα παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $\alpha = 4$. Οπότε $\beta = -\frac{1}{4}4 + 2 = 1$.

Άσκηση 11

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0=0$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-5}{x}=2 .$$

Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και $f'(0)=2$.

<u>Λύση</u>

Αρχικά θα δείξουμε ότι $f(0)=5$.

Θέτουμε $g(x)=\dfrac{f(x)-5}{x}$, με $x\neq 0$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=2$.

Λύνουμε επίσης ως προς $f(x)$ και έχουμε:

$f(x)=x\cdot g(x)+5$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[x\cdot g(x)+5\right]=0\cdot 2+5=5$.

Όμως η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ που σημαίνει $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=5$.

Έτσι

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-5}{x}=2 .$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και $f'(0)=2$.

Άσκηση 12

Δίνεται συνάρτηση $f(x)=e^x\cdot\eta\mu x$. Να δείξετε ότι:

$f^{(3)}(x)+2\cdot f'(x)=2f''(x)$

Λύση

Έχουμε

$f'(x)=\left(e^x\cdot\eta\mu x\right)'=e^x\cdot\eta\mu x+e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x$,

$f''(x)=\left(e^x\cdot\eta\mu x+e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)'=2e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x$ και

$f^{(3)}(x)=\left(2e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)'=2e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x-2e^x\cdot\eta\mu x$.

Οπότε

$f^{(3)}(x)+2\cdot f'(x)=2e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x-2e^x\cdot\eta\mu x+2\left(e^x\cdot\eta\mu x+e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)=$

$4e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x=2f''(x)$.

Άρα

$f^{(3)}(x)+2\cdot f'(x)=2f''(x)$.

Άσκηση 13

Να δείξετε ότι:

$2\ln(x-1) \leq x-3+\ln 4$ για κάθε $x>1$.

<u>Λύση</u>

Επειδή

$$2\ln(x-1) \leq x-3+\ln 4 \Leftrightarrow 2\ln(x-1)-x+3-\ln 4 \leq 0$$

αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση $f(x)=2\ln(x-1)-x+3-\ln 4$ με $x>1$, έχει ολικό μέγιστο το 0.

Πράγματι

$$f'(x)=\frac{2}{x-1}-1=\frac{3-x}{x-1},$$

επίσης $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=3$ και $f'(x)>0 \Leftrightarrow x<3$, οπότε σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών

x	1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(3)=0$	$\searrow$	

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,3]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[3,+\infty)$ και επειδή είναι συνεχής στο $x=3$ παρουσιάζει στο σημείο αυτό ολικό μέγιστο το $f(3)=0$, άρα $f(x) \leq 0$ για κάθε $x>1$.

Άσκηση 14

Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x^3$ στο σημείο της $A(1,1)$ εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=2x^2+7x$.

<u>Λύση</u>

Οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες στο $\mathbf{R}$ ως πολυωνυμικές.

Έχουμε $f'(x)=3x^2$, οπότε $f'(1)=3$.

Έτσι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(1,1)$ είναι:

$$y-f(1)=f'(1)(x-1) \text{ ή}$$

$$\varepsilon: y=3x-2 .$$

Για να εφάπτεται η ε και στη C_g , θα πρέπει να υπάρχει ένα x_0 τέτοιο, ώστε

$$g'(x_0)=3 \qquad \textbf{(1)}$$

$$\text{και } g(x_0)=3x_0-2 . \quad \textbf{(2)}$$

Η **(1)** μας δίνει:

$g'(x_0)=3 \Leftrightarrow 4x_0+7=3 \Leftrightarrow x_0=-1$

και $g(-1)=2\cdot(-1)^2+7(-1)=-5$, οπότε η **(2)** γίνεται

$-5=3(-1)-2$ το οποίο ισχύει.

Άρα η ευθεία $\varepsilon: y=3x-2$ εφάπτεται στη C_f στο $A(1,1)$ και στη C_g στο $B(-1,-5)$.

Άσκηση 15

Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4+24x^2+4x-40=0$ έχει το πολύ δυο πραγματικές ρίζες.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^4+24x^2+4x-40, x\in\mathbf{R}$.

Υποθέτουμε ότι η f έχει τρεις ρίζες $\rho_1,\rho_2,\rho_3\in\mathbf{R}$ με $\rho_1<\rho_2<\rho_3$. Επειδή η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως πολυωνυμική και επιπλέον $f(\rho_1)=f(\rho_2)=f(\rho_3)=0$, εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στα διαστήματα $[\rho_1,\rho_2]$ και $[\rho_2,\rho_3]$.

Έτσι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1)=0$ και επίσης

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2\in(\rho_2,\rho_3)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_2)=0$.

Όμως $f'(x)=4x^3+48x+4$, η οποία είναι επίσης συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως πολυωνυμική και επιπλέον $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$, οπότε εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f' στο διάστημα $[\xi_1,\xi_2]$, που σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma\in(\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\gamma)=0$, το οποίο είναι άτοπο, αφού

$$f''(x)=12x^2+48>0 \text{ για κάθε } x\in\mathbf{R}.$$

Άρα η συνάρτηση f, οπότε και η εξίσωση $x^4+24x^2+4x-40=0$ έχει το πολύ δυο πραγματικές ρίζες.

Άσκηση 16

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

i. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon : y = -\frac{1}{2}x + 7$.

ii. Να βρεθούν τα σημεία επαφής των εφαπτόμενων της C_f που διέρχονται από το $O(0,0)$.

iii. Υπάρχουν εφαπτόμενες που διέρχονται από σημείο $A(2,0)$;

Λύση

Έχουμε $f'(x) = 2x - 4$.

i. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ε είναι $\lambda_\varepsilon = -\frac{1}{2}$, οπότε αν λ ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης θα ισχύει $\lambda \cdot \lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda = 2$.

Αν $B(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της C_f με την εφαπτομένη, τότε

$$f'(x_0) = 2 \Leftrightarrow 2x_0 - 4 = 2 \Leftrightarrow x_0 = 3 \text{ και } f(3) = 0,$$

άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon : y = -\frac{1}{2}x + 7$ είναι η παρακάτω:

$$y - 0 = 2(x - 3) \text{ ή}$$

$$y = 2x - 6.$$

ii. Έστω $\Gamma(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της C_f με την εφαπτομένη, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης δίνεται:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Επειδή η εφαπτομένη αυτή διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$, θα ισχύει:

$$-f(x_0) = f'(x_0) \cdot (-x_0) \Leftrightarrow -x_0^2 + 4x_0 - 3 = -2x_0^2 + 4x_0 \Leftrightarrow$$

$$x_0^2 = 3 \Leftrightarrow x_0 = \pm\sqrt{3}$$

και $f\left(\sqrt{3}\right)=6-4\sqrt{3},\ f\left(-\sqrt{3}\right)=6+4\sqrt{3}$.

Άρα τα σημεία επαφής είναι τα $\Gamma\left(\sqrt{3},6-4\sqrt{3}\right)$ και $\Delta\left(-\sqrt{3},6+4\sqrt{3}\right)$.

iii. Έστω ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από σημείο $A(2,0)$ και $E\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$ το σημείο επαφής της C_f με αυτήν, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης δίνεται:

$$y-f\left(x_1\right)=f'\left(x_1\right)\cdot\left(x-x_1\right).$$

Επειδή η εφαπτομένη αυτή διέρχεται από το σημείο $A(2,0)$, θα ισχύει:

$$-f\left(x_1\right)=f'\left(x_1\right)\cdot\left(2-x_1\right)\Leftrightarrow -x_1^2+4x_1-3=-2x_1^2+8x_1-8\Leftrightarrow$$

$$x_1^2-4x_1+5=0,$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού η τελευταία δευτεροβάθμια εξίσωση έχει αρνητική διακρίνουσα ($\Delta=-4<0$), άρα είναι αδύνατη, που σημαίνει ότι δεν υπάρχει εφαπτομένη της C_f που να διέρχεται από σημείο $A(2,0)$.

Άσκηση 17

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+k\cdot x-1$, όπου $k\in\mathbf{R}$.

i. Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y=3x+5$, να βρείτε την τιμή του k.

ii. Αν $k=2$ να δείξετε ότι η ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y=2x-1$.

<u>Λύση</u>

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbf{R}$.

i. Έχουμε $f'(x)=e^x+k$.

   Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας με εξίσωση $y=3x+5$, είναι $\lambda=3$.

   Για να είναι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$ παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y=3x+5$, θα πρέπει

$$f'(0)=\lambda=3 \Leftrightarrow e^0+k=3 \Leftrightarrow k=2.$$

ii. Για $k=2$ έχουμε $f(x)=e^x+2x-1$.

   Για να είναι η ευθεία με εξίσωση $y=2x-1$ ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(2x-1)\right]=0.$$

   Έχουμε $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(2x-1)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[e^x+2x-1-(2x-1)\right]=\lim_{x\to-\infty}e^x=0$.

   Άρα η ευθεία με εξίσωση $y=2x-1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Άσκηση 18

i. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 2\alpha x^3 + 24x^2 + 5x - 7$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό διάστημα των τιμών του α, ώστε η συνάρτηση να είναι κυρτή στο $\mathbf{R}$

ii. Για ποια τιμή του $\alpha \in \mathbf{R}$ η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος έχει σημείο καμπής το $A(1, f(1))$

<u>Λύση</u>

1. Έχουμε

$$f'(x) = 4x^3 + 6\alpha x^2 + 48x + 5,$$

$$f''(x) = 12x^2 + 12\alpha x + 48 = 12(x^2 + \alpha x + 4).$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = \alpha^2 - 16$.

Όταν $\Delta < 0$ τότε $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$, άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbf{R}$.

Όταν $\Delta = 0$ τότε $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$, όπου η ισότητα ισχύει για ένα μεμονωμένο σημείο, άρα η f είναι πάλι κυρτή στο $\mathbf{R}$.

Άρα πρέπει

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 16 \leq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 \leq 16 \Leftrightarrow |\alpha| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq \alpha \leq 4.$$

2. Πρέπει

$f''(1) = 0 \Leftrightarrow 12 + 12\alpha + 48 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -5$.

Επίσης θα πρέπει να ελέγξουμε αν αλλάζει η κυρτότητα δεξιά και αριστερά του $x = 1$.

Για $\alpha = -5$, $f''(x) = 12(x^2 - 5x + 4)$ και

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12(x^2 - 5x + 4) = 0 \Leftrightarrow (x = 1$ ή $x = 4)$. Οπότε έχουμε τον πίνακα προσήμου:

X	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	-	0	+	

Άρα η f είναι κυρτή στο $\left(-\infty,1\right]$ και κοίλη στο $\left[1,4\right]$. Επίσης επειδή είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση έχει εφαπτομένη στο σημείο $A\left(1, f\left(1\right)\right)$, συνεπώς το $A\left(1, f\left(1\right)\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f .

Άρα για $\alpha=-5$ το $A\left(1, f\left(1\right)\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f .

Άσκηση 19

1. Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

    i. $e^{x-1} \geq x$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

    ii. $e^{x^2} \geq 1-x$, για κάθε $x \geq 0$.

2. Να δείξετε ότι $e^x + x \geq \dfrac{x^2}{2} + 1$, για κάθε $x \geq 0$.

<u>Λύση</u>

1. i. Έχουμε

    $e^{x-1} \geq x \Leftrightarrow e^{x-1} - x \geq 0$.

    Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} - x$, $x \in \mathbf{R}$.

    Θα αποδείξουμε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο το 0.

    Ισχύει

    $f'(x) = e^{x-1} - 1$,

    οπότε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{x-1} = e^0 \Leftrightarrow x = 1$

    και $f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{x-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{x-1} > e^0 \Leftrightarrow x > 1$,

    οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	$f(1)=0$	$\nearrow$	

    Έτσι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και συνεχής στο $x = 1$, άρα στο σημείο αυτό παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(1) = 0$.

    Οπότε ισχύει

$$f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{x-1} \geq x \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}.$$

ii. Έχουμε

$$e^{x^2} \geq 1 - x \Leftrightarrow e^{x^2} - 1 + x \geq 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^{x^2} - 1 + x$, $x \in [0, +\infty)$.

Θα αποδείξουμε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο το 0.

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$.

Ισχύει

$$f'(x) = \left(e^{x^2} - 1 + x\right)' = 2x \cdot e^{x^2} + 1,$$

οπότε $f'(x) > 0$, για κάθε $x > 0$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Έτσι

$$f(x) \geq f(0) = 0, \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty),$$

που σημαίνει:

$$e^{x^2} \geq 1 - x, \text{ για κάθε } x \geq 0.$$

2. Έχουμε

$$e^x + x \geq \frac{x^2}{2} + 1 \Leftrightarrow e^x + x - \frac{x^2}{2} - 1 \geq 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x + x - \dfrac{x^2}{2} - 1$, $x \in [0, +\infty)$.

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$.

Ισχύει:

$$f'(x) = \left(e^x + x - \frac{x^2}{2} - 1\right)' = e^x + 1 - x$$

και

$$f''(x) = \left(e^x + 1 - x\right)' = e^x - 1.$$

Επίσης

$f''(x)=0 \Leftrightarrow e^x-1=0 \Leftrightarrow x=0$ και

$x>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow f''(x)>0$,

άρα η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Οπότε για $x>0 \Leftrightarrow f'(x)>f'(0)=2>0$, άρα και η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Επομένως έχει ολικό ελάχιστο στο $x=0$, το $f(0)=0$.

Ισχύει λοιπόν:

$$f(x)\geq f(0)=0, \text{ για κάθε } x\in[0,+\infty), \text{ άρα}$$

$$e^x+x\geq \frac{x^2}{2}+1, \text{ για κάθε } x\in[0,+\infty).$$

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=e^{2x}+5x$.

1. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

2. Να λύσετε την εξίσωση: $e^{2x^2}-e^{4x-2}=-5x^2+10x-5$.

<u>Λύση</u>

i. Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$. Για να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση αντιστρέφεται αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι γνησίως μονότονη. Πράγματι:

$$f'\left(x\right)=2e^{2x}+5>0\,,$$

άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$, συνεπώς είναι και «1-1», άρα αντιστρέφεται.

ii. Η εξίσωση γίνεται ισοδύναμα:

$$e^{2x^2}-e^{4x-2}=-5x^2+10x-5 \Leftrightarrow e^{2x^2}+5x^2=e^{2(2x-1)}+5\left(2x-1\right) \Leftrightarrow$$

$$f\left(x^2\right)=f\left(2x-1\right)$$

και επειδή η f είναι «1-1» έπεται ότι

$$x^2=2x-1 \Leftrightarrow \left(x-1\right)^2=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Άσκηση 2

Δίνεται μια συνάρτηση $f(x):\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ με $f'(0)=1$ και για την οποία ισχύει:

$$f(x+y)=f(x)\cdot e^{y}+f(y)\cdot e^{x} \text{ για κάθε } x,y\in\mathbf{R}.$$

i. Να υπολογίσετε το $f(0)$ και το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

ii. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της με $f'(x_0)=f(x_0)+e^{x_0}$.

Λύση

i. Για $x=y=0$ η σχέση

$$f(x+y)=f(x)\cdot e^{y}+f(y)\cdot e^{x} \qquad \textbf{(1)}$$

γίνεται:

$f(0)=f(0)\cdot 1+f(0)\cdot 1\Leftrightarrow f(0)=0$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1$, όπου χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό της παραγώγου.

ii. Από τη σχέση **(1)** παίρνουμε $f(x_0+h)=f(x_0)\cdot e^{h}+f(h)\cdot e^{x_0}$ οπότε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[f(x_0)\cdot\frac{e^{h}-1}{h}+\frac{f(h)}{h}\cdot e^{x_0}\right]=$$

$$f(x_0)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{e^{h}-1}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}\cdot e^{x_0}=f(x_0)\cdot e^{0}+1\cdot e^{x_0}=f(x_0)+e^{x_0},$$

αφού το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{h}-1}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{h}-e^{0}}{h-0}=g'(0)=e^{0}$ με $g(x)=e^{x}$.

Άρα $f'(x_0)=f(x_0)+e^{x_0}$.

Άσκηση 3

Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει:

$$\alpha^x + \beta^x \geq 5e^x - 3 \text{, για κάθε } x \in \mathbf{R} \text{,}$$

να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = e^5$.

<u>Λύση</u>

Έχουμε $\alpha^x + \beta^x \geq 5e^x - 3 \Leftrightarrow \alpha^x + \beta^x - 5e^x + 3 \geq 0$ και θέτοντας

$f(x) = \alpha^x + \beta^x - 5e^x + 3$ παίρνουμε: $f(x) \geq 0 = f(0)$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Άρα το 0 είναι ολικό ελάχιστο της f στο 0 και επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, (εσωτερικό σημείο του $\mathbf{R}$) έπεται από το θεώρημα Fermat ότι $f'(0) = 0$.

Όμως $f'(x) = \alpha^x \cdot \ln \alpha + \beta^x \cdot \ln \beta - 5e^x$, οπότε

$f'(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha^0 \ln \alpha + \beta^0 \ln \beta - 5e^0 = 0 \Leftrightarrow \ln(\alpha \cdot \beta) = 5 \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta = e^5$.

Άσκηση 4

Έστω f,g συνεχείς συναρτήσεις στο $\left[0,1\right]$ και παραγωγίσιμες στο $\left(0,1\right)$ με

$f\left(0\right)=f\left(1\right)=0$ και $f\left(x\right)\neq 0$ για κάθε $x\in\left(0,1\right)$.

i. Να δείξετε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle για τη συνάρτηση $h\left(x\right)=f^{2}\left(x\right)\cdot e^{g(x)}$ στο διάστημα $\left[0,1\right]$.
ii. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(0,1\right)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=-\frac{g'(\xi)}{2}.$$

Λύση

i. Οι συναρτήσεις $f^{2}\left(x\right),e^{g(x)}$ είναι συνεχείς στο $\left[0,1\right]$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Οπότε και η h είναι συνεχής στο $\left[0,1\right]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

   Ομοίως οι συναρτήσεις $f^{2}\left(x\right),e^{g(x)}$ είναι παραγωγίσιμες στο $\left(0,1\right)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Οπότε και η h είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,1\right)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

   Επίσης $h\left(0\right)=h\left(1\right)=0$, άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle για τη συνάρτηση h στο διάστημα $\left[0,1\right]$.

ii. Είναι $h'\left(x\right)=2f\left(x\right)\cdot f'\left(x\right)\cdot e^{g(x)}+f^{2}\left(x\right)\cdot e^{g(x)}\cdot g'\left(x\right)$ και από το θεώρημα Rolle έχουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(0,1\right)$ τέτοιο, ώστε

$$h'\left(\xi\right)=0\Leftrightarrow 2f\left(\xi\right)\cdot f'\left(\xi\right)\cdot e^{g(\xi)}+f^{2}\left(\xi\right)\cdot e^{g(\xi)}\cdot g'\left(\xi\right)=0\Leftrightarrow$$

$$f\left(\xi\right)\cdot e^{g(\xi)}\left[2f'\left(\xi\right)+f\left(\xi\right)\cdot g'\left(\xi\right)\right]=0\Leftrightarrow 2f'\left(\xi\right)+f\left(\xi\right)\cdot g'\left(\xi\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=-\frac{g'(\xi)}{2}.$$

Άσκηση 5

Αν η ευθεία $y=3x-1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, τότε

i. να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x)$

ii. να βρείτε το $\lambda\in\mathbf{R}$ ώστε:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot f(x)-3x^2-\lambda^2x+2}{f(x)+\lambda x+1}=-1$$

Λύση

Αφού η ευθεία $y=3x-1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=3$ και $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-3x\right]=-1$. Οπότε έχουμε

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot f(x)-3x^2-\lambda^2x+2}{f(x)+\lambda x+1}=-1\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\left[\left(f(x)-3x\right)-\lambda^2+\frac{2}{x}\right]}{x\cdot\left[\frac{f(x)}{x}+\lambda+\frac{1}{x}\right]}=-1\Leftrightarrow$$

$$\frac{-1-\lambda^2}{3+\lambda}=-1\Leftrightarrow\lambda^2-\lambda-2=0\Leftrightarrow\left(\lambda=2\ \text{ή}\ \lambda=-1\right).$$

Άσκηση 6

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0,1]$ με $f(0)<0$ και $f'(x)\neq 2$ για κάθε $x\in(0,1)$.

Δίνονται επίσης οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 με $z_1 = f(1)+f(0)\cdot i$ και

$z_2 = -3+f(0)\cdot i$.

Αν $z_1\cdot z_2\in\mathbf{R}$ να δείξετε ότι υπάρχει ένα μοναδικό $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=2\xi$.

Λύση

Ισχύει

$z_1\cdot z_2 = \left[f(1)+f(0)\cdot i\right]\cdot\left[-3+f(0)\cdot i\right] = \left[-3f(1)-f^2(0)\right]+\left[f(1)\cdot f(0)-3f(0)\right]i$.

Για να ισχύει $z_1\cdot z_2\in\mathbf{R}$ πρέπει

$\mathrm{Im}(z_1\cdot z_2)=0$, άρα $f(1)\cdot f(0)-3f(0)=0 \Leftrightarrow f(1)\cdot f(0)=3f(0)$ **(1)**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-2x$, η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, επίσης ισχύει

$g(0)\cdot g(1)=f(0)\left[f(1)-2\right]=f(0)\cdot f(1)-2f(0)$, το οποίο λόγω της **(1)** γίνεται $g(0)\cdot g(1)=f(0)<0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα ξ της g στο $(0,1)$.

Επιπλέον ισχύει ότι $g'(x)=f'(x)-2\neq 0$ στο $(0,1)$.

Έστω ότι η g έχει δύο ρίζες ρ_1,ρ_2 στο $(0,1)$ με $0<\rho_1<\rho_2<1$. Τότε για τη g θα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle, αφού:

- η g είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2)
- $g(\rho_1)=g(\rho_2)$

άρα θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi)=0$, το οποίο είναι άτοπο.

Άρα η g έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Άσκηση 7

Δίνεται συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ για την οποία ισχύουν: $f(0)=f'(0)=0$ και $f''(0)=2011$.

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{e^x\cdot \eta\mu x - x}$$

<u>Λύση</u>

Επειδή η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, συμπεραίνουμε ότι η f' υπάρχει και είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$.

Ομοίως και η f είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$.

Επίσης

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0 \text{ και } \lim_{x\to 0}\left(e^x\cdot \eta\mu x - x\right) = 0,$$

οπότε για να βρούμε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{e^x\cdot \eta\mu x - x}$ εφαρμόζουμε μια φορά τον κανόνα De L' Hospital και παίρνουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{e^x\cdot \eta\mu x - x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{\left(e^x\cdot \eta\mu x - x\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{e^x\cdot \eta\mu x + e^x\cdot \sigma\upsilon\nu x - 1}$$

Ισχύει:

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0) = 0 \text{ και } \lim_{x\to 0}\left(e^x\cdot \eta\mu x + e^x\cdot \sigma\upsilon\nu x - 1\right) = 0,$$

άρα το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{e^x\cdot \eta\mu x + e^x\cdot \sigma\upsilon\nu x - 1}$ είναι πάλι της μορφής $\left(\dfrac{0}{0}\right)$,

όμως δε θα εφαρμόσουμε ακόμα μια φορά τον κανόνα De L' Hospital, αφού θα προκύψει στον αριθμητή η $f''(x)$ για την οποία δε γνωρίζουμε αν είναι συνεχής.

Για να συνεχίσουμε με τον υπολογισμό του ορίου θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της $f''(0)$.

Είναι $f''(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x} = 2011$, οπότε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{e^x\cdot \eta\mu x+e^x\cdot \sigma\upsilon\nu x-1}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f'(x)}{x}}{e^x\cdot\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x-1}{x}}=\frac{2011}{1+1}=\frac{2011}{2}\ ,$$

αφού $\lim_{x\to 0}\left(e^x\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}e^x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=e^0\cdot 1=1$ και

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x-1\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x-e^x\cdot\eta\mu x}{1}=1$. (κανόνας De L' Hospital)

Άρα $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{e^x\cdot\eta\mu x-x}=\frac{2011}{2}$.

Άσκηση 8

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της γραφικής παράστασης της $f(x)=x^2$ που διέρχονται από το σημείο $A\left(\frac{1}{2},-2\right)$.

<u>Λύση</u>

Έστω $B\left(x_0, f(x_0)\right)$ το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτομένης με τη C_f .

Η παράγωγος της f ισούται με $f'(x)=2x$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι:

$$y-x_0{}^2=2x_0(x-x_0) \qquad \textbf{(1)}$$

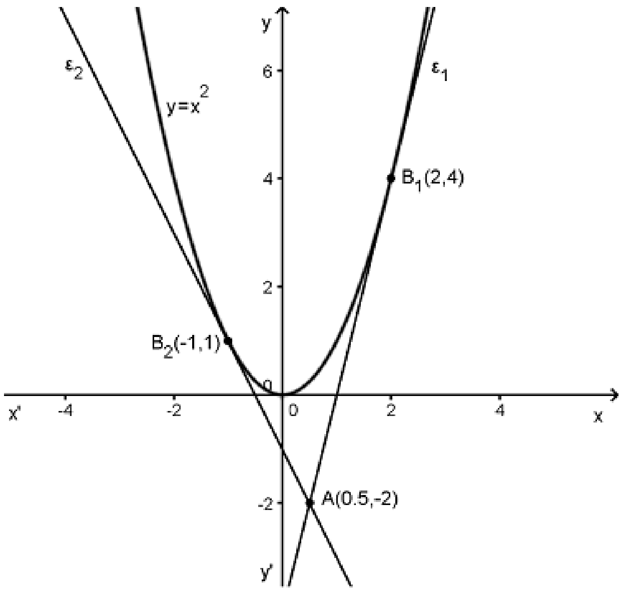
Επειδή η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{1}{2},-2\right)$ οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την **(1)** οπότε:

$$-2-x_0{}^2=2x_0\left(\frac{1}{2}-x_0\right)\Leftrightarrow x_0{}^2-x_0-2=0\Leftrightarrow\left(x_0=2 \text{ ή } x_0=-1\right),$$

και αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην **(1)** παίρνουμε δυο εφαπτόμενες (Σχήμα 1) με εξισώσεις

$\varepsilon_1: y=4x-4$ και σημείο επαφής το $B_1(2,4)$ και

$\varepsilon_2: y=-2x-1$ και σημείο επαφής το $B_2(-1,1)$.



Σχήμα 1

Άσκηση 9

Δίνεται ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και κοίλη στο $[0,3]$. Να δείξετε ότι

$$f(1)+f(2)>f(0)+f(3).$$

<u>Λύση</u>

Αφού η f είναι κοίλη στο $[0,3]$, έπεται ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,3)$.

Επίσης

$$f(1)+f(2)>f(0)+f(3) \Leftrightarrow \frac{f(1)-f(0)}{1-0}>\frac{f(3)-f(2)}{3-2}, \qquad \textbf{(1)}$$

και επειδή εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση f στα διαστήματα $[0,1]$ και $[2,3]$ υπάρχουν $\xi_1 \in (0,1)$ και $\xi_2 \in (2,3)$ τέτοια, ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0} \text{ και } f'(\xi_2)=\frac{f(3)-f(2)}{3-2}$$

Με βάση τα τελευταία η **(1)** γίνεται $f'(\xi_1)>f'(\xi_2)$, το οποίο ισχύει, αφού f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,3)$ και $\xi_1<\xi_2$.

Άσκηση 10

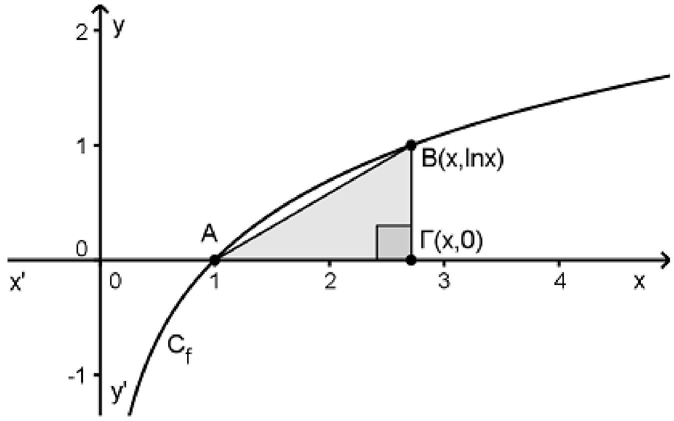
Να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $A(1,0)$, $B(x,\ln x)$ και

$\Gamma(x,0)$, $x>1$, τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το $x=2cm$.

Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής του x είναι σταθερός και ίσος με $0,5cm/\sec$.

Λύση

Έστω $f(x)=\ln x$.



Σχήμα 1

Το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $A(1,0)$, $B(x,\ln x)$ και $\Gamma(x,0), x>1$, ισούται με $E=\frac{1}{2}(A\Gamma)\cdot(B\Gamma)=\frac{1}{2}(x-1)\cdot\ln x$ (βλέπε Σχήμα 1) και επειδή η τετμημένη x είναι συνάρτηση του χρόνου t, έχουμε ότι και το εμβαδό είναι συνάρτηση του χρόνου t με $E(t)=\frac{1}{2}\left[x(t)-1\right]\cdot\ln x(t)$. Παραγωγίζοντας βρίσκουμε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού τη χρονική στιγμή t_0 :

$$E'(t_0)=\frac{1}{2}x'(t_0)\cdot\ln x(t_0)+\frac{1}{2}\left[x(t_0)-1\right]\cdot\frac{x'(t_0)}{x(t_0)}$$

(όπου $\left(\ln x(t)\right)'=(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'=\frac{x'(t)}{x(t)}$, με $u=x(t)$)

και αντικαθιστώντας το $x(t_0)=2cm$ και $x'(t_0)=0,5cm/\sec$ βρίσκουμε

$$E'(t_0)=\frac{1}{4}\cdot\ln 2+\frac{1}{2}[2-1]\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\cdot\left(\ln 2+\frac{1}{2}\right)cm^2/\sec$$

Άσκηση 11

i. Να δείξετε ότι μια πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-\rho)^2$ αν και μόνο αν $P(\rho)=P'(\rho)=0$.

ii. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ ώστε το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2-3x-1$ να έχει παράγοντα το $(x-1)^2$.

Λύση

i. Έστω ότι η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-\rho)^2$. Τότε υπάρχει πολυώνυμο $\Pi(x)$ τέτοιο, ώστε $P(x)=(x-\rho)^2\cdot\Pi(x)$, οπότε $P(\rho)=(\rho-\rho)^2\cdot\Pi(\rho)=0$.
Επίσης $P'(x)=2(x-\rho)\cdot\Pi(x)+(x-\rho)^2\cdot\Pi'(x)$, οπότε

$$P'(\rho)=2(\rho-\rho)\cdot\Pi(\rho)+(\rho-\rho)^2\cdot\Pi'(\rho)=0.$$

Αντιστρόφως έστω $P(\rho)=P'(\rho)=0$. Αφού $P(\rho)=0$, υπάρχει πολυώνυμο $Q(x)$ τέτοιο, ώστε

$$P(x)=(x-\rho)\cdot Q(x) \qquad \textbf{(1)}$$

Παραγωγίζοντας έχουμε $P'(x)=Q(x)+(x-\rho)\cdot Q'(x)$, οπότε

$P'(\rho)=Q(\rho)+(\rho-\rho)\cdot Q'(\rho)=0$ άρα $Q(\rho)=0$, άρα υπάρχει πολυώνυμο

$\Pi(x)$ τέτοιο, ώστε $Q(x)=(x-\rho)\cdot\Pi(x)$. Αντικαθιστώντας το $Q(x)$ στην **(1)** παίρνουμε $P(x)=(x-\rho)^2\cdot\Pi(x)$, άρα το $(x-\rho)^2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$.

ii. Βάσει του προηγούμενου ερωτήματος θα ισχύει $P(1)=P'(1)=0$.

Είναι $P(1)=\alpha+\beta-3-1=0$, άρα $\alpha+\beta=4$. Επίσης $P'(x)=3\alpha x^2+2\beta x-3$, οπότε $P'(1)=3\alpha+2\beta-3=0$. Λύνουμε το σύστημα

$\begin{cases}\alpha+\beta=4\\3\alpha+2\beta=3\end{cases}$ και βρίσκουμε $\begin{cases}\alpha=-5\\\beta=9\end{cases}$

Άσκηση 12

Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f(x)\geq e^{x-1}+\ln x+x^2 \text{ για κάθε } x>0 \text{ και } f(1)=2 .$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1,2)$.

<u>Λύση</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-e^{x-1}-\ln x-x^2$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων και επιπλέον

$$g(x)\geq 0=g(1) \text{ για κάθε } x>0 .$$

Άρα η g έχει ελάχιστο το 0 για $x=1$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει $g'(1)=0$. Όμως $g'(x)=f'(x)-e^{x-1}-\dfrac{1}{x}-2x$, άρα

$g'(1)=f'(1)-e^{0}-\dfrac{1}{1}-2=0\Leftrightarrow f'(1)=4$.

Συνεπώς η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1,2)$ θα είναι

$$y-2=4(x-1)\Leftrightarrow y=4x-2$$

Άσκηση 13

Θεωρούμε συνάρτηση f ορισμένη και δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(-3,3)$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^2(x)+4f(x)+x^2-5=0 \text{ για κάθε } x\in(-3,3) \qquad \textbf{(1)}$$

Να δείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

Λύση

Παραγωγίζουμε δυο φορές τη σχέση **(1)**, η οποία γίνεται

$$f^2(x)+4f(x)+x^2-5=0 \Rightarrow 2f(x)\cdot f'(x)+4f'(x)+2x=0 \Rightarrow$$

$$2\left[f'(x)\right]^2+2f(x)\cdot f''(x)+4f''(x)+2=0 \qquad \textbf{(2)}$$

Έστω ότι το $A\left(x_0, f(x_0)\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f, τότε επειδή η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(-3,3)$, θα ισχύει $f''(x_0)=0$ και αντικαθιστώντας στην **(2)** παίρνουμε

$$2\left[f'(x_0)\right]^2+2f(x_0)\cdot f''(x_0)+4f''(x_0)+2=0 \Leftrightarrow$$

$$2\left[f'(x_0)\right]^2+2=0 \text{ το οποίο είναι άτοπο.}$$

Άρα η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

Άσκηση 14

Δίνεται η συνεχής και πραγωγίσιμη συνάρτηση f, για την οποία ισχύει:

$f\left(e^x \cdot \eta\mu x\right) = 2 \cdot e^x$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

i. Να δείξετε ότι $f'(0) = 2$.

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A\left(0, f(0)\right)$ είναι η $y = 2x + 2$.

iii. Αν ένα σημείο κινείται πάνω στην προηγούμενη ευθεία και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό $2cm/\sec$ να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου.

<u>Λύση</u>

1. Παραγωγίζουμε τη σχέση $f\left(e^x \cdot \eta\mu x\right) = 2 \cdot e^x$ και παίρνουμε

$$f'\left(e^x \cdot \eta\mu x\right) \cdot \left(e^x \cdot \eta\mu x\right)' = \left(2 \cdot e^x\right)' \Leftrightarrow$$

$$f'\left(e^x \cdot \eta\mu x\right) \cdot \left(e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x\right) = 2 \cdot e^x \qquad \textbf{(4)}$$

Για $x = 0$ η σχέση **(4)** μας δίνει $f'(0) = 2$.

2. Για $x = 0$ η σχέση $f\left(e^x \cdot \eta\mu x\right) = 2 \cdot e^x$ μας δίνει $f(0) = 2$. Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y - 2 = 2(x - 0) \Leftrightarrow y = 2x + 2.$$

3. Η τετμημένη x του σημείου είναι συνάρτηση του χρόνου t και $x'(t) = 2cm/\sec$, οπότε και η τεταγμένη του y του σημείου θα είναι συνάρτηση του χρόνου t και θα ισχύει

$$y(t) = 2x(t) + 2,$$

οπότε παραγωγίζουμε και έχουμε

$$y'(t) = 2x'(t) = 4cm/\sec.$$

Άσκηση 15

1. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$. Να δείξετε ότι:

   i. αν η f είναι άρτια, τότε η f' είναι περιττή.

   ii. αν η f είναι περιττή, τότε η f' είναι άρτια.

2. Έστω $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ μια άρτια και παραγωγίσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=\left(x^5+\sigma\upsilon\nu x\right)\cdot e^{f(x)}+\eta\mu x+x\ .$$

   i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$.

   ii. Να υπολογίσετε την τιμή $g'(0)$.

<u>Λύση</u>

1. i. Έστω ότι η f είναι άρτια, τότε ισχύει:

$f(-x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη της σχέσης έχουμε:

$\left(f(-x)\right)'=f'(x)$ **(1)**

Θέτοντας $y=f(-x)$ και $u=-x$, έχουμε $y=f(u)$. Επομένως,

$$y'=\left(f(u)\right)'=f'(u)\cdot u'=f'(-x)\cdot(-1)=-f'(-x),$$

άρα η **(1)** γίνεται $f'(-x)=-f'(x)$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

Συνεπώς η f' είναι περιττή.

ii. Έστω ότι η f είναι περιττή, τότε ισχύει:

$f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη της σχέσης έχουμε:

$\left(f(-x)\right)'=-f'(x)$ **(2)**

Θέτοντας $y=f(-x)$ και $u=-x$, έχουμε $y=f(u)$. Επομένως,

$$y'=\left(f(u)\right)'=f'(u)\cdot u'=f'(-x)\cdot(-1)=-f'(-x),$$

άρα η **(2)** γίνεται $f'(-x)=f'(x)$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

Συνεπώς η f' είναι άρτια.

2. i. Η συνάρτηση $e^{f(x)}$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Οι $x^5+\sigma\upsilon\nu x$ και $\eta\mu x+x$ είναι παραγωγίσιμες ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Οπότε η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

   ii. Έχουμε:

$$g'(x)=\left(x^5+\sigma\upsilon\nu x\right)'\cdot e^{f(x)}+\left(x^5+\sigma\upsilon\nu x\right)\cdot\left(e^{f(x)}\right)'+\left(\eta\mu x+x\right)'=$$

$$\left(5x^4-\eta\mu x\right)\cdot e^{f(x)}+\left(x^5+\sigma\upsilon\nu x\right)\cdot e^{f(x)}\cdot f'(x)+\sigma\upsilon\nu x+1.$$

Οπότε $g'(0)=e^{f(0)}\cdot f'(0)+\sigma\upsilon\nu 0+1=2$.

Στον προηγούμενο υπολογισμό χρησιμοποιήσαμε $f'(0)=0$.

Πράγματι από το προηγούμενο ερώτημα η συνάρτηση f' είναι περιττή, οπότε για $x=0$ έχουμε $f'(-0)=-f'(0)\Leftrightarrow 2f'(0)=0\Leftrightarrow f'(0)=0$.

Άσκηση 16

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

i. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

ii. Να δείξετε ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα $\left[\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$

iii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\sigma\varphi \frac{1}{x} = 3x$, έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $\left(\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right)$.

Λύση

i. Για $x \neq 0$ έχουμε

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^3 \eta\mu \frac{1}{x}}{x} = x^2 \eta\mu \frac{1}{x}.$$

Επίσης $\left|x^2 \eta\mu \frac{1}{x}\right| \leq x^2 \Leftrightarrow -x^2 \leq x^2 \eta\mu \frac{1}{x} \leq x^2$ και επειδή $\lim\limits_{x \to 0}\left(-x^2\right) = \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$, έπεται από το κριτήριο παρεμβολής ότι

$$\lim_{x \to 0} x^2 \eta\mu \frac{1}{x} = 0,$$

άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$.

ii. Η συνάρτηση $\eta\mu \frac{1}{x}$ είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, οπότε και η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

Η συνάρτηση $\eta\mu\frac{1}{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2\pi},\frac{1}{\pi}\right)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε και η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2\pi},\frac{1}{\pi}\right)$, ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Επίσης $f\left(\frac{1}{2\pi}\right)=\frac{1}{8\pi^3}\cdot\eta\mu(2\pi)=0$ και $f\left(\frac{1}{\pi}\right)=\frac{1}{\pi^3}\cdot\eta\mu(\pi)=0$.

Από τα προηγούμενα έπεται ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα $\left[\frac{1}{2\pi},\frac{1}{\pi}\right]$.

iii. Από το **ii)** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(\frac{1}{2\pi},\frac{1}{\pi}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$.

Έτσι

$$f'(\xi)=0\Leftrightarrow 3\xi^2\cdot\eta\mu\frac{1}{\xi}+\xi^3\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\xi}\cdot\left(-\frac{1}{\xi^2}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$3\xi\cdot\eta\mu\frac{1}{\xi}=\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\xi}\Leftrightarrow\sigma\varphi\frac{1}{\xi}=3\xi$$

Άρα η εξίσωση $\sigma\varphi\frac{1}{x}=3x$, έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $\left(\frac{1}{2\pi},\frac{1}{\pi}\right)$.

Άσκηση 17

Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

ii. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

<u>Λύση</u>

i. Έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot\ln x} \overset{u=x\cdot\ln x}{=} \lim_{u\to 0} e^u = 1\text{, αφού}$$

$$\lim_{x\to 0^+} u = \lim_{x\to 0^+}\left(x\cdot\ln x\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\ln x\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} =$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}\left(-x\right) = 0\,.$$

ii. $$\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \overset{u=x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{=} \lim_{u\to 0} e^u = 1\text{, αφού}$$

$$\lim_{x\to 0^+} u = \lim_{x\to 0^+}\left(x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} =$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x}{x+1}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0\,.$$

Άσκηση 18

Δίνεται η άρτια συνάρτηση $f:\mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f(1)=2 \text{ και}$$

$$x\cdot f'(x) = -3\cdot f(x) \text{ για κάθε } x \neq 0 .$$

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=x^3\cdot f(x)$ είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

ii. Να βρείτε τον τύπο της f.

iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

<u>Λύση</u>

i. Έχουμε

$$g'(x)=\left(x^3\cdot f(x)\right)' = 3x^2\cdot f(x)+x^3\cdot f'(x) = 3x^2\cdot f(x)+x^2\cdot\left(-3f(x)\right)=0$$

άρα $g'(x)=0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$, δηλαδή υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ τέτοιες, ώστε

$$g(x)=\begin{cases} c_1, & x>0 \\ c_2, & x<0 \end{cases}$$

Επειδή η f είναι άρτια έχουμε $f(1)=2 \Leftrightarrow f(-1)=2$ οπότε

$g(1)=1^3\cdot 2=2=c_1$ και $g(-1)=(-1)^3\cdot 2=-2=c_2$.

Από τα προηγούμενα έπεται ότι

$$g(x)=\begin{cases} 2, & x>0 \\ -2, & x<0 \end{cases}$$

ii. Για $x>0$, $g(x)=2 \Leftrightarrow x^3\cdot f(x)=2 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{2}{x^3}$.

Για $x<0$, $g(x)=-2 \Leftrightarrow x^3\cdot f(x)=-2 \Leftrightarrow f(x)=-\dfrac{2}{x^3}$.

Άρα $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x^3}, & x>0 \\ -\dfrac{2}{x^3}, & x<0 \end{cases}$

iii. Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$, έπεται ότι η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Επίσης ισχύει $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$, άρα η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Επειδή έχουμε οριζόντιες ασύμπτωτες της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$, έτσι δεν έχουμε πλάγιες ασύμπτωτες.

Άσκηση 19

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=2x^3-15x^2+24x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f\left(x\right)=\lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbf{R}$.

iv. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της αν υπάρχουν.

<u>Λύση</u>

Το πεδίο ορισμού της $f\left(x\right)=2x^3-15x^2+24x$ είναι το $\mathbf{R}$.

i. $f'\left(x\right)=6x^2-30x+24$ και

$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 6x^2-30x+24=0\Leftrightarrow (x=1$ ή $x=4)$

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα

x	-∞		1		4		+∞
f′(x)		+		-		+	
f(x)		↗	11	↘	-16	↗	

Η f είναι λοιπόν γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(-\infty,1\right]$ και $\left[4,+\infty\right)$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[1,4\right]$. Επειδή είναι επίσης συνεχής στα σημεία 1 και 4, παρουσιάζει στη θέση $x=1$ τοπικό μέγιστο το $f\left(1\right)=11$ και στη θέση $x=4$ τοπικό ελάχιστο το $f\left(4\right)=-16$.

ii. Ισχύει

$\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=+\infty$, και επειδή η f είναι συνεχής στο R τότε το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbf{R}$.

iii. Τα επιμέρους σύνολα τιμών είναι

$f\left(\left(-\infty,1\right]\right)=\left(-\infty,11\right]$,

$f\left([1,4]\right)=[-16,11]$ και

$f\left([4,+\infty)\right)=[-16,+\infty)$ και από τη μονοτονία της συνάρτησης προκύπτει ότι

- Αν $\lambda<-16$ τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει μια μοναδική λύση στο $(-\infty,1)$.

- Αν $\lambda=-16$ τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει δυο ακριβώς λύσεις, την $x=4$ και μια δεύτερη στο $(-\infty,1)$.

- Αν $-16<\lambda<11$ τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει τρεις ακριβώς λύσεις, μια σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty,1)$, $(1,4)$ και $(4,+\infty)$.

- Αν $\lambda=11$ τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει δυο ακριβώς λύσεις, την $x=1$ και μια δεύτερη στο $(4,+\infty)$.

- Αν $\lambda>11$ τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει μια μοναδική λύση στο $(4,+\infty)$.

iv. $f''(x)=12x-30$ και $f''(x)>0 \Leftrightarrow x>\frac{5}{2}$. Οπότε έχουμε

x	$-\infty$		$5/2$		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	

Άρα η f είναι κοίλη στο διάστημα $\left(-\infty,\frac{5}{2}\right]$ και κυρτή στο $\left[\frac{5}{2},+\infty\right)$.

Επειδή η f'' μηδενίζεται στο σημείο $x_0=\frac{5}{2}$ και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημα το σημείο $A\left(\frac{5}{2},f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f.

Άσκηση 20

Δίνεται πολυωνυμική συνάρτηση P για την οποία ισχύει:

$$\left[P'(x)\right]^2 = P(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R} \text{ και } P'(1) = 2 .$$

Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

Λύση

Πρώτα θα προσδιορίσουμε το βαθμό του πολυωνύμου P.

Έστω ότι ο βαθμός του $P(x)$ είναι ν, τότε ο βαθμός του $P'(x)$ είναι $\nu - 1$ και του $\left[P'(x)\right]^2$ είναι $2(\nu - 1)$. Λόγω της ισότητας $\left[P'(x)\right]^2 = P(x)$, πρέπει να ισχύει:

$$2(\nu - 1) = \nu \Leftrightarrow \nu = 2 .$$

Άρα το πολυώνυμο είναι δευτέρου βαθμού και θα είναι της μορφής:

$$P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \text{ με } \alpha \neq 0 ,$$

$$P'(x) = 2\alpha x + \beta ,$$

οπότε

$$\left[P'(x)\right]^2 = P(x) \Leftrightarrow (2\alpha x + \beta)^2 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \Leftrightarrow$$

$$4\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x + \beta^2 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4\alpha^2 = \alpha & \mathbf{(1)} \\ 4\alpha\beta = \beta & \mathbf{(2)} \\ \beta^2 = \gamma & \mathbf{(3)} \end{cases}$$

Η **(1)** μας δίνει

$$4\alpha^2 = \alpha \overset{\alpha \neq 0}{\Leftrightarrow} \alpha = \frac{1}{4}$$

και από τη σχέση $P'(1) = 2$ παίρνουμε

$$2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 + \beta = 2 \Leftrightarrow \beta = \frac{3}{2} .$$

Τέλος αντικαθιστούμε το $\beta = \frac{3}{2}$ στη σχέση **(3)** και έχουμε:

$$\gamma = \beta^2 = \frac{9}{4}.$$

Επίσης η σχέση **(2)** ισχύει αν αντικαταστήσουμε τους αριθμούς α και β.

Έτσι $P(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$.

Άσκηση 21

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο. Αν για τους αριθμούς $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}$ με $\alpha<\beta<\gamma$ ισχύει $f(\alpha)<f(\beta)>f(\gamma)$, να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\alpha,\gamma)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

Λύση

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την f στα διαστήματα $[\alpha,\beta]$ και $[\beta,\gamma]$.

Έτσι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$

Όμως $f(\alpha)<f(\beta)$ άρα

$$f'(\xi_1)>0 \qquad \textbf{(1)}$$

Ομοίως υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2\in(\beta,\gamma)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$$

Όμως $f(\beta)>f(\gamma)$ άρα

$$f'(\xi_2)<0 \qquad \textbf{(2)}$$

Η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$ και από τις **(1)** και **(2)** έχουμε $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)<0$, οπότε από το θεώρημα Bolzano έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\xi_1,\xi_2)\subseteq(\alpha,\gamma)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

Άσκηση 22

Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0^+} \eta\mu x\cdot e^{\frac{1}{x}}$

ii. $\lim\limits_{x\to 0^-} x\cdot e^{\frac{1}{x}}$

<u>Λύση</u>

i. $\lim\limits_{x\to 0^+} \eta\mu x\cdot e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot x\cdot e^{\frac{1}{x}} = +\infty$.

γιατί

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$

και

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \overset{u=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{u\to +\infty} \dfrac{e^u}{u} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim\limits_{u\to +\infty} \dfrac{\left(e^u\right)'}{\left(u\right)'} = \lim\limits_{u\to +\infty} \dfrac{e^u}{1} = +\infty$.

ii. $\lim\limits_{x\to 0^-} x\cdot e^{\frac{1}{x}} = 0\cdot 0 = 0$,

αφού

$\lim\limits_{x\to 0^-} x = 0$

και

$\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} \overset{u=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{u\to -\infty} e^u = 0$.

Άσκηση 23

Δίνεται η συνάρτηση $f:[1,6]\to \mathbf{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[1,6]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,6)$ με $f(1)=f(6)$.

i. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,6)$ τέτοιο, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να έχει στο σημείο

   $A(x_0, f(x_0))$ οριζόντια εφαπτομένη.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,6)$ με $\xi_1\neq\xi_2$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1)+4f'(\xi_2)=0$.

<u>Λύση</u>

i. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,6]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,6)$ και επίσης $f(1)=f(6)$, ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle, άρα:

   υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,6)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

   Επομένως στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ η C_f έχει οριζόντια εφαπτομένη.

ii. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής για τη συνάρτηση f στα διαστήματα $[1,2]$ και $[2,6]$.

<u>Σχόλιο</u>: Η επιλογή των διαστημάτων $[1,2]$ και $[2,6]$ έγινε, έτσι ώστε τα μήκη τους να είναι ανάλογα των συντελεστών της σχέσης $f'(\xi_1)+4f'(\xi_2)=0$, δηλαδή τους αριθμούς 1 και 4.

- η f είναι συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=f(2)-f(1). \qquad \textbf{(1)}$$

  ομοίως η f είναι συνεχής στο $[2,6]$ και παραγωγίσιμη στο $(2,6)$,

  άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2\in(2,4)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_2)=\frac{f(6)-f(2)}{6-2}=\frac{f(6)-f(2)}{4}\,. \qquad \textbf{(2)}$$

Οπότε από τις **(1)** και **(2)** έχουμε:

$$f'(\xi_1)+4f'(\xi_2)=f(2)-f(1)+4\cdot\frac{f(6)-f(2)}{4}=f(6)-f(1)=0\,.$$

Άρα αποδείχτηκε.

Άσκηση 24

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=x^2-\eta\mu x$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbf{R}$.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'\left(x_0\right)=0$.

iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbf{R}$.

i. Έχουμε

$$f'\left(x\right)=2x-\sigma\upsilon\nu x$$

και

$$f''\left(x\right)=2+\eta\mu x.$$

Ισχύει

$$-1\le\eta\mu x\le 1\Leftrightarrow 2-1\le 2+\eta\mu x\le 2+1\Leftrightarrow$$

$$1\le 2+\eta\mu x\le 3\Leftrightarrow 1\le f''\left(x\right)\le 3,$$

άρα $f''\left(x\right)>0$, για κάθε $x\in\mathbf{R}$, το οποίο συνεπάγεται ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbf{R}$.

ii. Έχουμε

$f'\left(0\right)=-\sigma\upsilon\nu 0=-1<0$,

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cdot\frac{\pi}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=\pi>0$

και επειδή η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, έπεται από το θεώρημα Bolzano ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'\left(x_0\right)=0$.

Όμως όπως δείξαμε στο προηγούμενο ερώτημα, $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$, που σημαίνει ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.

iii. Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$ και υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$, οπότε:

για $x < x_0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0$ και

για $x > x_0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, x_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$.

Άσκηση 25

Δίνεται δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, για την οποία ισχύουν: $f(2)=5$, $f(1)=3$ και $f(x)\le 2x+1$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

<u>Λύση</u>

Αφού η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$, σημαίνει ότι είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$.

Έχουμε $f(x)\le 2x+1 \Leftrightarrow f(x)-2x-1\le 0$, οπότε αν θέσουμε

$g(x)=f(x)-2x-1$, τότε η συνάρτηση g είναι επίσης συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbf{R}$, ως άθροισα συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Επίσης $g(x)\le 0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$ και επειδή $g(2)=f(2)-4-1=0$ και $g(1)=f(1)-2-1=0$, έπεται ότι η g παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το 0 στα σημεία $x=1$ και $x=2$.

Έτσι σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει:

$g'(1)=f'(1)-2=0 \Leftrightarrow f'(1)=2$ και

$g'(2)=f'(2)-2=0 \Leftrightarrow f'(2)=2$.

Τέλος επειδή η f' είναι συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ και $f'(1)=f'(2)$, εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f' στο $[1,2]$ και μας δίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

ΘΕΜΑ Δ

Άσκηση 1

Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbf{R}$ για την οποία ισχύει: $f'(x) < x^2$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Να δείξετε ότι:

1. η $g(x) = 3f(x) - x^3$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$
2. $f(2) - f(1) < 3$
3. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) < 3$.

<u>Λύση</u>

1. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $\mathbf{R}$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε για να τη μελετήσουμε ως προς τη μονοτονία αρκεί να βρούμε το πρόσημο της g'. Ισχύει

$$g'(x) = 3f'(x) - 3x^2 = 3\left[f'(x) - x^2\right] < 0$$

   άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$.

2. Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$, οπότε

$$g(2) < g(1) \Leftrightarrow 3f(2) - 8 < 3f(1) - 1 \Leftrightarrow f(2) - f(1) < \frac{7}{3} < 3.$$

3. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ επομένως και συνεχής, άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο $[1,2]$, αφού

   i. η f είναι συνεχής στο $[1,2]$

   ii. η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,2)$,

   οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(2) - f(1)}{2-1} = f(2) - f(1) < 3.$$

Άσκηση 2

i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g(x) = x - \ln x$.

ii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \ln x$.

iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

<u>Λύση</u>

i. Το πεδίο ορισμού της g είναι το $(0,+\infty)$ και είναι συνεχής σε αυτό.

Είναι $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$. Οπότε έχουμε τον επόμενο πίνακα πρόσημου για την g'

x	0		1		$+\infty$
g'(x)		-	0	+	

το οποίο σημαίνει ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$,

άρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=1$, το οποίο είναι το $g(1)=1$, άρα $g(x) \geq 1$ για κάθε $x>0$.

Για το σύνολο τιμών βρίσκουμε τα εξής όρια:

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x - \ln x) = +\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x - \ln x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$,

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ και

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = 1 - \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} 1 - \lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'} = 1 - \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 1.$$

Από τα προηγούμενα έπεται ότι το σύνολο τιμών είναι το $[1,+\infty)$.

Σχόλιο: μπορούμε να απαντήσουμε βρίσκοντας και το ένα από τα δύο όρια

ii. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\left(0,+\infty\right)$.

Θεωρούμε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{\frac{1}{x}}\cdot\ln x\right)=-\infty$, αφού

$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} \overset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{y\to+\infty} e^y=+\infty$.

Άρα η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=0$.

Πλάγιες ασύμπτωτες:

Θεωρούμε το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}\cdot\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{\ln x}{x}=0$$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln x\right)'}{\left(x\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}\overset{y=\frac{1}{x}}{=}\lim\limits_{y\to 0} e^y=1$,

όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f\left(x\right)-0\cdot x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}\cdot\ln x=+\infty$,

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

Άρα η γραφική παράσταση της f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

iii. Η παράγωγος της f ισούται με:

$$f'\left(x\right)=\left(e^{\frac{1}{x}}\cdot\ln x\right)'=e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\ln x+e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x}=$$

$$e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\left(x-\ln x\right)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot g\left(x\right)$$

και από το ερώτημα **i)** έπεται ότι $f'\left(x\right)>0$ για κάθε $x\in\left(0,+\infty\right)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,+\infty\right)$.

Στο **ii)** βρήκαμε επίσης ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}\cdot\ln x=+\infty$, άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbf{R}$.

Άσκηση 3

1. Να δείξετε ότι:

$$\ln x+\frac{1}{x}\geq 1 \text{ για κάθε } x>0 .$$

2. Να δείξετε ότι η $g(x)=\ln x+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{e},1\right)$.

3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x)=e^x\cdot\ln x$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

4. Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της συνάρτησης f του προηγούμενου ερωτήματος.

<u>Λύση</u>

1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1,\ x>0$. Έχουμε

   $h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$, οπότε σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

x	0		1		$+\infty$
h'(x)		-	0	+	

   Συνεπώς η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, άρα έχει ολικό ελάχιστο το 0 για $x=1$, δηλαδή ισχύει:

   $h(x)\geq h(1)\Leftrightarrow \ln x+\frac{1}{x}-1\geq 0$ άρα αποδείχτηκε ότι

   $\ln x+\frac{1}{x}\geq 1$ για κάθε $x>0$.

2. Η $g(x)=\ln x+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}$ είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e},1\right]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και

- $g\left(\frac{1}{e}\right)=\ln\frac{1}{e}+2e-e^2=-1+2e-e^2=-(1-e)^2<0$,

- $g(1)=1>0$.

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα x_0 της g στο $\left(\frac{1}{e},1\right)$. Επίσης $g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}=\frac{x^2-2x+2}{x^3}>0$, αφού $x>0$ και $x^2-2x+2>0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$ επειδή έχει διακρίνουσα $\Delta=-4<0$.

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, το οποίο συνεπάγεται ότι η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική.

3. Έχουμε

$$f'(x)=\left(e^x\cdot\ln x\right)'=e^x\cdot\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}=e^x\cdot\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)$$

και από το ερώτημα 1 έπεται ότι $f'(x)>0$, συνεπώς η συνεχής συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα σε ανοιχτό διάστημα, έπεται ότι δεν έχει ακρότατα.

Για το σύνολο τιμών βρίσκουμε τα όρια:

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^x\cdot\ln x\right)=-\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}e^x=1>0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(e^x\cdot\ln x\right)=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to +\infty}e^x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln x=+\infty$.

Οπότε το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbf{R}$.

4. Βρίσκουμε τη δεύτερη παράγωγο της f:

$$f''(x)=\left(e^x\cdot\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}\right)'=e^x\cdot\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}+e^x\cdot\frac{1}{x}-e^x\cdot\frac{1}{x^2}=$$
$$e^x\cdot\left(\ln x+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=e^x\cdot g(x)$$

5. Από το ερώτημα 2 η g έχει μια ρίζα $x_0\in\left(\frac{1}{e},1\right)$ και είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε:

για $x<x_0\Rightarrow g(x)<g(x_0)=0$ και για $x>x_0\Rightarrow g(x)>g(x_0)=0$ και έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών

x	0		x_0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

Από τα προηγούμενα η f είναι κοίλη στο $(0, x_0]$ και κυρτή στο $[x_0, +\infty)$ και το σημείο $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f , αφού αφ' ενός αλλάζει η κυρτότητα και αφ' ετέρου στο σημείο αυτό η f είναι παραγωγίσιμη άρα υπάρχει εφαπτομένη της C_f .

Άσκηση 4

Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν:

f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ με $f(0)=2$ και

$f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x = f(x)(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$ για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,

τότε να βρείτε τον τύπο της.

<u>Λύση</u>

Ισχύει

$$f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x = f(x)(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)\Leftrightarrow$$

$$f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x - f(x)\cdot\eta\mu x = f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow$$

$$f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x + f(x)\cdot(\sigma\upsilon\nu x)' = f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow\left(f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)' = f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x\,,$$

οπότε σύμφωνα με γνωστή εφαρμογή του βιβλίου σελίδα 252, υπάρχει μια σταθερά c τέτοια, ώστε

$$f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x = c\cdot e^x\,.$$

Επίσης $f(0)=2$, οπότε έχουμε: $f(0)\cdot\sigma\upsilon\nu 0 = c\cdot e^0 \Leftrightarrow c=2$.

Άρα $f(x)=\dfrac{2\cdot e^x}{\sigma\upsilon\nu x}$.

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^{\lambda x}}{x+1}, x>-1$ και $\lambda>0$.

i. Να δείξετε ότι η f έχει ένα ελάχιστο.

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του λ το προηγούμενο ελάχιστο παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

Λύση

i. Θα μελετήσουμε την f ως προς τη μονοτονία.

$f'(x)=\left(\dfrac{e^{\lambda x}}{x+1}\right)'=\dfrac{e^{\lambda x}(\lambda x+\lambda-1)}{(x+1)^2}$ και $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1-\lambda}{\lambda}>-1$, οπότε σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου

x	-1	$\frac{1-\lambda}{\lambda}$	$+\infty$
f′(x)	-	0	+

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-1,\dfrac{1-\lambda}{\lambda}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\dfrac{1-\lambda}{\lambda},+\infty\right)$, επομένως παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=\dfrac{1-\lambda}{\lambda}$, το οποίο είναι το $f\left(\dfrac{1-\lambda}{\lambda}\right)=\lambda\cdot e^{1-\lambda}$.

ii. Έστω $g(\lambda)=\lambda\cdot e^{1-\lambda}$ με $\lambda>0$. Θα μελετήσουμε τη g ως προς τη μονοτονία.

$g'(\lambda)=\left(\lambda\cdot e^{1-\lambda}\right)'=e^{1-\lambda}-\lambda\cdot e^{1-\lambda}=e^{1-\lambda}\cdot(1-\lambda)$ η οποία έχει ρίζα το $\lambda=1$ και για το πρόσημό της ισχύει

λ	0	1	$+\infty$
g′(λ)	+	0	-

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$, επομένως παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $\lambda=1$.

Άσκηση 6

Δίνεται ο μιγαδικός $z = e^x + \left(1 + xe^x\right) \cdot i, x \in \mathbf{R}$.

i. Να δείξετε ότι: $\mathrm{Re}(z) \leq \mathrm{Im}(z)$.

ii. Να βρείτε τα $x \in \mathbf{R}$ για τα οποία η εικόνα του z βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y = x$.

iii. Να βρείτε το σύνολο των τιμών που μπορεί να πάρει το $|z - \bar{z}|$.

<u>Λύση</u>

i. Ισχύει

$\mathrm{Re}(z) \leq \mathrm{Im}(z) \Leftrightarrow e^x \leq 1 + xe^x \Leftrightarrow 1 + xe^x - e^x \geq 0$.

Θέτουμε $f(x) = 1 + xe^x - e^x$ και έχουμε

$f'(x) = \left(1 + xe^x - e^x\right)' = xe^x$ και σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, οπότε έχει ολικό ελάχιστο στο $x = 0$, δηλαδή $f(x) \geq f(0) = 0 \Leftrightarrow 1 + xe^x - e^x \geq 0$.

ii. Ισχύει $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) \Leftrightarrow f(x) = 0$ και η τελευταία ισχύει για τη θέση του ελάχιστου, δηλαδή για $x = 0$.

iii. Είναι: $|z - \bar{z}| = 2\left|1 + xe^x\right|$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 1 + xe^x$, ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$
Θα βρούμε το σύνολο τιμών της:

$g'(x) = xe^x + e^x = e^x(x+1)$ και έχουμε

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[-1,+\infty)$, οπότε έχει ολικό ελάχιστο στο $x=-1$, δηλαδή

$g(x)\geq g(-1)=\dfrac{e-1}{e}>0$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+xe^{x}\right)=1+\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{x}\right)=1$, αφού

$$\lim_{x\to-\infty}\left(xe^{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{(x)'}{\left(e^{-x}\right)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0$$

και $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+xe^{x}\right)=+\infty$, άρα το σύνολο τιμών της g είναι το $\left[\dfrac{e-1}{e},+\infty\right)$.

Επομένως $|z-\overline{z}|\in\left[2\dfrac{e-1}{e},+\infty\right)$.

Άσκηση 7

1. Να λύσετε την εξίσωση $3^x+2^x=5^x$.

2. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ με $f'(x)=-2f(x)$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

   i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=e^{2x}\cdot f(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbf{R}$.

   ii. Να βρείτε τον τύπο της f αν $f(0)=1$.

   iii. Αν h,φ παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbf{R}$, με

   $$h'(x)+2h(x)=\varphi'(x)+2\varphi(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbf{R}$$

   και $h(0)=\varphi(0)$, τότε να δείξετε ότι $h=\varphi$.

<u>Λύση</u>

1. Έχουμε $3^x+2^x=5^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{2}{5}\right)^x-1=0$ **(1)**.

   Μια προφανής λύση της προηγούμενης εξίσωσης είναι η $x=1$. Θα δείξουμε ότι είναι μοναδική.

   Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{2}{5}\right)^x-1$, η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$.

   Ισχύει:

   $$f'(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x\cdot\ln\frac{3}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^x\cdot\ln\frac{2}{5}<0,$$

   αφού $\frac{3}{5}<1\Leftrightarrow\ln\frac{3}{5}<\ln 1=0$ και $\frac{2}{5}<1\Leftrightarrow\ln\frac{2}{5}<\ln 1=0$.

   Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$, οπότε η $x=1$ είναι μοναδική ρίζα της f, άρα και μοναδική ρίζα της εξίσωσης **(1)**.

   i. Η g είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$ ως σύνθεση και γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

   Έχουμε

$g'(x)=\left(e^{2x}\cdot f(x)\right)'=2e^{2x}\cdot f(x)+e^{2x}\cdot f'(x)=2e^{2x}\cdot f(x)-2e^{2x}\cdot f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$

Άρα η g είναι σταθερή στο $\mathbf{R}$.

ii. Από το προηγούμενο ερώτημα, έχουμε ότι:

υπάρχει $c\in\mathbf{R}$ τέτοιο, ώστε $g(x)=c$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$, άρα

$e^{2x}\cdot f(x)=c \Leftrightarrow f(x)=c\cdot e^{-2x}$.

Για $x=0$ παίρνουμε:

$f(0)=c\cdot e^{0} \Leftrightarrow c=1$.

Άρα $f(x)=e^{-2x}$.

iii. Ισχύει:

$h'(x)+2h(x)=\varphi'(x)+2\varphi(x) \Leftrightarrow \left(h(x)-\varphi(x)\right)'=-2\left(h(x)-\varphi(x)\right)$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$,

οπότε από το **i)** ερώτημα έπεται ότι:

$h(x)-\varphi(x)=c\cdot e^{-2x}$, και για $x=0$ παίρνουμε

$$h(0)-\varphi(0)=c\cdot e^{0} \overset{h(0)=\varphi(0)}{\Leftrightarrow} c=0.$$

Άρα $h=\varphi$.

Άσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι έχει ένα ολικό ακρότατο.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f, αν υπάρχουν.

iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

iv. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A\left(0, f(0)\right)$.

v. Να αποδείξετε την ανισότητα:

$$\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x \geq 7x+3 \text{ για κάθε } x\geq -4+\sqrt{3}.$$

<u>Λύση</u>

Η συνάρτηση $f(x)=\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$.

i. Παραγωγίζουμε την f,

$$f'(x)=(2x+4)\cdot e^x+\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x=\left(x^2+6x+7\right)\cdot e^x.$$

Έχουμε $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left(x^2+6x+7\right)\cdot e^x=0 \Leftrightarrow x=-3\pm\sqrt{2}$, επίσης

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4x+3}{e^{-x}}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+4}{-e^{-x}}\overset{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{=}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x+4)'}{\left(-e^{-x}\right)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}2e^x=0 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x=(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty,$$

οπότε σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		$-3-\sqrt{2}$		$-3+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	0	↗	Τ.Μ.	↘	Τ.Ε.	↗	$+\infty$

Έτσι η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(-\infty,-3-\sqrt{2}\right]$ και $\left[-3+\sqrt{2},+\infty\right)$, γνησίως φθίνουσα στο $\left[-3-\sqrt{2},-3+\sqrt{2}\right]$ και συνεχής στο $\mathbf{R}$, οπότε στο $-3-\sqrt{2}$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και στο $-3+\sqrt{2}$ τοπικό ελάχιστο.

Επίσης

$f\left(\left(-\infty,-3-\sqrt{2}\right]\right)=\left(0,f\left(-3-\sqrt{2}\right)\right]$,

$f\left(\left[-3-\sqrt{2},-3+\sqrt{2}\right]\right)=\left[f\left(-3+\sqrt{2}\right),f\left(-3-\sqrt{2}\right)\right]$ και

$f\left(\left[-3+\sqrt{2},+\infty\right)\right)=\left[f\left(-3+\sqrt{2}\right),+\infty\right)$.

Το $f\left(-3+\sqrt{2}\right)$ είναι ολικό ελάχιστο γιατί $f\left(-3+\sqrt{2}\right)<0$.

Πράγματι το τριώνυμο $g(x)=x^2+4x+3$ έχει ρίζες τους αριθμούς

-3 και -1 και $-3<-3+\sqrt{2}<-1$, άρα $g\left(-3+\sqrt{2}\right)<0$ γιατί ανάμεσα στις ρίζες το τριώνυμο είναι αρνητικό, και κατά συνέπεια και $f\left(-3+\sqrt{2}\right)<0$.

Επειδή το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $\left[f\left(-3+\sqrt{2}\right),+\infty\right)$ είναι φανερό ότι η f δεν έχει ολικό μέγιστο.

ii. $f''(x)=(2x+6)\cdot e^x+\left(x^2+6x+7\right)\cdot e^x=\left(x^2+8x+13\right)\cdot e^x$ και

$f''(x)=0 \Leftrightarrow \left(x^2+8x+13\right)\cdot e^x=0 \Leftrightarrow x=-4\pm\sqrt{3}$.

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου

x	$-\infty$		$-4-\sqrt{3}$		$-4+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	-	0	+	

Άρα η f είναι κυρτή στα διαστήματα $\left(-\infty,-4-\sqrt{3}\right]$ και $\left[-4+\sqrt{3},+\infty\right)$ και κοίλη στο διάστημα $\left[-4-\sqrt{3},-4+\sqrt{3}\right]$.

Επειδή επίσης η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbf{R}$, που σημαίνει ότι έχει εφαπτομένη σε κάθε σημείο της γραφικής της παράστασης, έπεται ότι η C_f έχει δυο σημεία καμπής τα $A\left(-4-\sqrt{3},\, f\left(-4-\sqrt{3}\right)\right)$ και $B\left(-4+\sqrt{3},\, f\left(-4+\sqrt{3}\right)\right)$.

iii. Στο ερώτημα ii) βρήκαμε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, άρα η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y=0$.

Επίσης

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x\right)'}{(x)'}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+6x+7\right)\cdot e^x=+\infty$, άρα η f δεν έχει ούτε πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$ δεν έχει επίσης κατακόρυφες ασύμπτωτες.

iv. $f'(x)=\left(x^2+6x+7\right)\cdot e^x \Rightarrow f'(0)=7$ και $f(0)=3$.

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A\left(0, f(0)\right)$ είναι:

$$y-3=7\cdot(x-0) \text{ ή}$$

$$\varepsilon: y=7x+3.$$

v. Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\left[-4+\sqrt{3},+\infty\right)$ και $0\in\left[-4+\sqrt{3},+\infty\right)$, οπότε στο διάστημα αυτό η C_f είναι «πάνω» από την εφαπτομένη στο $A\left(0, f(0)\right)$, άρα

$$\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x \geq 7x+3 \text{ για κάθε } x\geq -4+\sqrt{3}.$$

Άσκηση 9

Δίνεται συνάρτηση $f\left(x\right)=e^{x}-\ln\left(x+1\right)-1$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f\left(x\right)=0$.

iv. Αν για τους αριθμούς $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ με $2\alpha+\beta>0$ και $\alpha+2\beta-1>0$, ισχύει:

$$e^{2\alpha+\beta-1}-\ln\left(2\alpha+\beta\right)+e^{\alpha+2\beta-2}-\ln\left(\alpha+2\beta-1\right)\leq 2$$

να υπολογίσετε τους α,β.

<u>Λύση</u>

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $\left(-1,+\infty\right)$.

i. Έχουμε

$$f'\left(x\right)=e^{x}-\frac{1}{x+1}$$ και

$$f''\left(x\right)=e^{x}+\frac{1}{\left(x+1\right)^{2}}.$$

Επειδή $f''\left(x\right)>0$ για κάθε $x>-1$, έπεται ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-1,+\infty\right)$.

Επίσης $f'\left(0\right)=0$, άρα

για $-1<x<0 \overset{f'\ \text{γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'\left(x\right)<f'\left(0\right)=0$ και

για $x>0 \overset{f'\ \text{γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} f'\left(x\right)>f'\left(0\right)=0$.

Επιπλέον $f\left(0\right)=0$ και έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα

x	-1		0		$+\infty$
f′(x)		-	0	+	
f(x)	$\searrow$		0	$\nearrow$	

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, οπότε παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=0$ το $f(0)=0$.

ii. Έχουμε

$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^+}\left[e^x-\ln(x+1)-1\right]=+\infty \text{, αφού}$$

$$\lim_{x\to-1^+}\ln(x+1)\overset{u=x+1}{=}\lim_{u\to0^+}\ln(u)=-\infty \text{ και } \lim_{x\to-1^+}\left[e^x-1\right]=\frac{1}{e}-1.$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $[0,+\infty)$.

iii. Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει στο πεδίο ορισμού της $(-1,+\infty)$, μοναδική λύση την $x=0$, αφού

για $x<0 \overset{f\text{ί}\gamma\nu.\varphi\theta.}{\Leftrightarrow} f(x)>f(0)=0$ και

για $x>0 \overset{f\text{ύ}\gamma\nu.\alpha\ \xi.}{\Leftrightarrow} f(x)>f(0)=0$.

iv. Η δοσμένη σχέση γίνεται ισοδύναμα

$$e^{2\alpha+\beta-1}-\ln(2\alpha+\beta)+e^{\alpha+2\beta-2}-\ln(\alpha+2\beta-1)\le 2\Leftrightarrow$$

$$e^{2\alpha+\beta-1}-\ln((2\alpha+\beta-1)+1)-1+e^{\alpha+2\beta-2}-\ln((\alpha+2\beta-2)+1)-1\le 0\Leftrightarrow$$

$$f(2\alpha+\beta-1)+f(\alpha+2\beta-2)\le 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Από την τελευταία σχέση έπεται ότι

$$f(2\alpha+\beta-1)=f(\alpha+2\beta-2)=0, \qquad \textbf{(2)}$$

γιατί αν υποθέσουμε ότι π.χ. $f(2\alpha+\beta-1)\neq 0$ τότε, επειδή $f(x)\ge 0$ για κάθε $x>-1$, θα πρέπει $f(2\alpha+\beta-1)>0$ και η **(1)** μας δίνει $f(\alpha+2\beta-2)\le -f(2\alpha+\beta-1)<0$ δηλαδή $f(\alpha+2\beta-2)<0$, το οποίο είναι άτοπο. Επομένως $f\left(2\alpha+\beta-1\right)=0$ οπότε από την **(1)** και $f\left(\alpha+2\beta-2\right)=0$.

Από την **(2)** και από το ερώτημα **iii)** έχουμε ότι

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta-1=0 \\ \alpha+2\beta-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=1 \end{cases}.$$

Άσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=x^{\frac{1}{2x}},\, x>0$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να δείξετε ότι:

$$\sqrt[12]{6}<\sqrt[10]{5}<\sqrt[6]{3}$$

<u>Λύση</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=x^{\frac{1}{2x}},\, x>0$.

i. Βρίσκουμε πρώτα την παράγωγο της f.

Αν $y=x^{\frac{1}{2x}}=\left(e^{\ln x}\right)^{\frac{1}{2x}}=e^{\frac{\ln x}{2x}}$ και θέσουμε $u=\dfrac{\ln x}{2x}$, τότε $y=e^{u}$. Επομένως,

$$y'=\left(e^{u}\right)'=e^{u}\cdot u'=e^{\frac{\ln x}{2x}}\cdot\left(\frac{\ln x}{2x}\right)'=x^{\frac{1}{2x}}\cdot\frac{1-\ln x}{2x^{2}}.$$

Έχουμε $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow \ln x=1\Leftrightarrow x=e$,

και $f'\left(x\right)>0\Leftrightarrow \ln x<1\Leftrightarrow x<e$.

Οπότε σχηματίζουμε τον πίνακα

x	0	e	$+\infty$
f′(x)	+	0	-
f(x)	↗	f(e)	↘

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(0,e\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[e,+\infty\right)$ και επειδή είναι συνεχής στο e,

έχει στη θέση αυτή ολικό μέγιστο το $f\left(e\right)$

ii. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[e,+\infty\right)$, οπότε ισχύει:

$$e<3<5<6\Leftrightarrow f\left(3\right)>f\left(5\right)>f\left(6\right)\Leftrightarrow 3^{\frac{1}{6}}>5^{\frac{1}{10}}>6^{\frac{1}{12}}\Leftrightarrow$$

$$\sqrt[12]{6}<\sqrt[10]{5}<\sqrt[6]{3}$$

Άσκηση 11

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(x^2+1\right)\cdot\ln x$, $x>0$.

i. Να δείξετε ότι $2x\cdot\ln x+\dfrac{1}{x}>0$ για κάθε $x>0$.

ii. Να μελετήσετε την f ως τη μονοτονία και να λύσετε την εξίσωση $f\left(x\right)=0$.

iii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in\left(\dfrac{1}{e},1\right)$ τέτοιο, ώστε το σημείο $A\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ να είναι σημείο καμπής της C_f .

iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

<u>Λύση</u>

i. Έχουμε $2x\cdot\ln x+\dfrac{1}{x}>0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}2x^2\cdot\ln x+1>0$,

οπότε θεωρούμε τη συνάρτηση $g\left(x\right)=2x^2\cdot\ln x+1$, $x>0$.

Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\left(0,+\infty\right)$ και

$g'\left(x\right)=4x\cdot\ln x+2x=2x\cdot\left(2\ln x+1\right)$

και έχουμε

$$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 2x\cdot\left(2\ln x+1\right)=0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\ln x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}\text{ και}$$

$$g'\left(x\right)>0\Leftrightarrow 2x\cdot\left(2\ln x+1\right)>0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\ln x>-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x>\frac{1}{\sqrt{e}}\ ,$$

$$g'\left(x\right)<0\Leftrightarrow 2x\cdot\left(2\ln x+1\right)<0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\ln x<-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 0<x<\frac{1}{\sqrt{e}}$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\dfrac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right)$, και επειδή είναι συνεχής στο $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ παρουσιάζει στο σημείο αυτό ολικό ελάχιστο το

$$g(\frac{1}{\sqrt{e}}) = \frac{e-1}{e} > 0 .$$

Επομένως $g(x) \geq g(\frac{1}{\sqrt{e}}) > 0$ για κάθε $x > 0$, άρα αποδείξαμε ότι

$$2x \cdot \ln x + \frac{1}{x} > 0 \text{ για κάθε } x > 0 .$$

ii. Έχουμε $f'(x) = \left[\left(x^2+1\right) \cdot \ln x\right]' = 2x\ln x + x + \frac{1}{x} = x + \left(2x\ln x + \frac{1}{x}\right) > 0$, αφού $x > 0$ και $2x \cdot \ln x + \frac{1}{x} > 0$ από το προηγούμενο ερώτημα.

Άρα η συνεχής συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Επίσης το $x=1$ είναι προφανής λύση της εξίσωσης $f(x)=0$, η οποία λόγω της μονοτονίας είναι και μοναδική.

iii. Έχουμε $f''(x) = \left(2x\ln x + x + \frac{1}{x}\right)' = 2\ln x + 2 + 1 - \frac{1}{x^2} = 2\ln x + 3 - \frac{1}{x^2}$ και

$$f^{(3)}(x) = \left(2\ln x + 3 - \frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x} + \frac{2}{x^3} > 0 \text{ για κάθε } x > 0 .$$

Αφού $f^{(3)}(x) > 0$ στο $(0,+\infty)$, έπεται ότι η συνεχής συνάρτηση f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Επίσης $f''\left(\frac{1}{e}\right) = 1 - e^2 < 0$ και $f''(1) = 2 > 0$ και επειδή η f'' είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e},1\right]$, υπάρχει σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(\frac{1}{e},1\right)$ τέτοιο, ώστε $f''(x_0) = 0$, το οποίο λόγω της μονοτονίας της f'' είναι μοναδικό.

Επίσης έχουμε

$$0 < x < x_0 \overset{f'' \text{ γν.α ξ.}}{\Leftrightarrow} f''(x) < f''(x_0) = 0 \text{ και}$$

$$x > x_0 \overset{f'' \text{ γν.α ξ.}}{\Leftrightarrow} f''(x) > f''(x_0) = 0 .$$

Επειδή η f'' μηδενίζεται στο σημείο x_0 και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημα το σημείο $A\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f .

iv. Έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot\ln x=\left(+\infty\right)\cdot\left(+\infty\right)=+\infty$$

άρα η C_f δεν έχει ούτε πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$$\lim_{x\to0^+} f\left(x\right)=\lim_{x\to0^+}\left(x^2+1\right)\cdot\ln x=-\infty\ ,$$

αφού $\lim_{x\to0^+}\left(x^2+1\right)=1$ και $\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty$. Άρα η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x=0$.

Άσκηση 12

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln\left(x^2+1\right)$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση: $x - 4 = \ln 17 - \ln\left(x^2+1\right)$.

iii. Να λύσετε την ανίσωση: $x^3 - x^2 > \ln\dfrac{x^4+1}{x^6+1}$.

<u>Λύση</u>

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbf{R}$.

i. Έχουμε

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^2+1+2x}{x^2+1} = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}.$$

Επειδή $f'(x) > 0$ στο $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ και η f είναι συνεχής στο -1, έπεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$.

ii. Ισχύει

$$x - 4 = \ln 17 - \ln\left(x^2+1\right) \Leftrightarrow x + \ln\left(x^2+1\right) = 4 + \ln\left(4^2+1\right) \Leftrightarrow$$

$$f(x) = f(4)$$

και η f είναι «1-1» αφού είναι γνησίως αύξουσα, άρα η τελευταία σχέση μας δίνει:

$$x = 4.$$

iii. Έχουμε:

$$x^3 - x^2 > \ln\frac{x^4+1}{x^6+1} \Leftrightarrow x^3 - x^2 > \ln\left(x^4+1\right) - \ln\left(x^6+1\right) \Leftrightarrow$$

$$x^3 + \ln\left(\left(x^3\right)^2+1\right) > x^2 + \ln\left(\left(x^2\right)^2+1\right) \Leftrightarrow$$

$$f\left(x^3\right) > f\left(x^2\right) \overset{\text{fύγν.α ξ.}}{\Leftrightarrow} x^3 > x^2 \Leftrightarrow x^2\cdot(x-1) > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

Άσκηση 13

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2\cdot e^x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

ii. Να αποδείξετε ότι:

$$f'(x+1)>f(x+1)-f(x) \text{ για κάθε } x>0.$$

<u>Λύση</u>

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbf{R}$.

i. Έχουμε

$f'(x)=2x\cdot e^x+x^2\cdot e^x$,

$f''(x)=2e^x+2x\cdot e^x+2x\cdot e^x+x^2\cdot e^x=\left(x^2+4x+2\right)e^x$.

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=-2\pm\sqrt{2}$.

Σχηματίζουμε τον πίνακα προσήμου της f'' :

X	$-\infty$		$-2-\sqrt{2}$		$-2+\sqrt{2}$		$+\infty$
f''(x)		+	0	-	0	+	

Έτσι συμπεραίνουμε ότι η f είναι κυρτή στα $\left(-\infty,-2-\sqrt{2}\right]$ και $\left[-2+\sqrt{2},+\infty\right)$ και κοίλη στο $\left[-2-\sqrt{2},-2+\sqrt{2}\right]$.

ii. Επειδή $-2+\sqrt{2}<0$, έπεται ότι για $x>0$ ισχύει $[x,x+1]\subseteq\left[-2+\sqrt{2},+\infty\right)$ και αφού $f''(x)>0$ στο $\left(-2+\sqrt{2},+\infty\right)$ έπεται ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα $\left[-2+\sqrt{2},+\infty\right)$, άρα και στο $[x,x+1]$.

Η f είναι συνεχής στο $[x,x+1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x,x+1)$, οπότε εφαρμόζεται το θεώρημα μέσης τιμής για την f στο $[x,x+1]$ οπότε:

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(x,x+1)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}\Leftrightarrow f'(\xi)=f(x+1)-f(x).$$

Έτσι έχουμε

$$f'(x+1)>f(x+1)-f(x)\Leftrightarrow f'(x+1)>f'(\xi)\overset{f'\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi.}{\Leftrightarrow}x+1>\xi,$$

το οποίο ισχύει, άρα αποδείχτηκε η ζητούμενη σχέση.

Άσκηση 14

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},3\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2},3\right)$ με $f\left(\frac{1}{2}\right)=2$ και $f(3)=12$.

i. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(\frac{1}{2},3\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y=4x+2$.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma\in\left(\frac{1}{2},3\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $B(\gamma, f(\gamma))$ να διέρχεται από το $O(0,0)$.

Λύση

i. Η συνάρτηση f συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},3\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2},3\right)$, οπότε εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής και έχουμε:

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(\frac{1}{2},3\right)$ τέτοιο, ώστε

$f'(\xi)=\dfrac{f(3)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{3-\frac{1}{2}}=\dfrac{12-2}{\frac{5}{2}}=4$.

Επομένως η εφαπτομένη της C_f στο $A(\xi, f(\xi))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=f'(\xi)=4$, άρα είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y=4x+2$.

ii. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $B(\gamma, f(\gamma))$ έχει εξίσωση:

$$y-f(\gamma)=f'(\gamma)\cdot(x-\gamma)$$

και αφού διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$, πρέπει

$$-f(\gamma)=f'(\gamma)\cdot(-\gamma)\Leftrightarrow f(\gamma)=\gamma\cdot f'(\gamma). \qquad \textbf{(1)}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{x}$, $x\in\left[\frac{1}{2},3\right]$.

Η g είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},3\right]$, ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και

παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2},3\right)$, ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Επίσης:

$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4$ και

$g(3)=\frac{12}{3}=4$,

άρα $g\left(\frac{1}{2}\right)=g(3)$, που σημαίνει ότι εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για τη g

στο $\left[\frac{1}{2},3\right]$. Έτσι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma\in\left(\frac{1}{2},3\right)$ τέτοιο, ώστε

$$g'(\gamma)=0\Leftrightarrow\frac{f'(\gamma)\cdot\gamma-f(\gamma)\cdot 1}{\gamma^2}=0\Leftrightarrow f(\gamma)=\gamma\cdot f'(\gamma).$$

Άρα αποδείχτηκε η **(1)**, συνεπώς υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma\in\left(\frac{1}{2},3\right)$

τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $(\gamma, f(\gamma))$ να διέρχεται από το

$O(0,0)$.

Άσκηση 15

1. Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή σε ένα διάστημα Δ. Να δείξετε ότι:

$$f(\alpha)+f(\beta)\geq 2\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \text{ για κάθε } \alpha,\beta\in\Delta.$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{2-x^2}{x+1},\ x>-1$.

    i. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

    ii. Αν $\alpha>\frac{1}{e},\beta>\frac{1}{e}$ να δείξετε ότι:

$$\frac{2-\ln^2\alpha}{\ln\alpha+1}+\frac{2-\ln^2\beta}{\ln\beta+1}\geq 2\cdot\frac{2-\ln^2\left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)}{\ln\left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)+1}$$

<u>Λύση</u>

1. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο διάστημα Δ, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

    - Αν $\alpha=\beta$, τότε η σχέση

$$f(\alpha)+f(\beta)\geq 2\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

γίνεται

$$2\cdot f(\alpha)\geq 2\cdot f(\alpha)$$

το οποίο ισχύει.

    - Έστω τώρα ότι $\alpha<\beta$. Τότε έχουμε

$$f(\alpha)+f(\beta)\geq 2\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\geq f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha) \qquad \textbf{(1)}$$

Επίσης $\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha=\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\beta-\alpha}{2}>0$, οπότε η **(1)** γίνεται

$$\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}} \geq \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha} \qquad \textbf{(2)}$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την f στα διαστήματα $\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$, οπότε:

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in \left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha}$$ και

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Έτσι η **(2)** γίνεται $f'(\xi_2)\geq f'(\xi_1)$, το οποίο ισχύει αφού f' γνησίως αύξουσα και $\xi_2 \geq \xi_1$.

Επομένως αποδείχτηκε.

- Ομοίως αποδεικνύεται και για $\alpha>\beta$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{2-x^2}{x+1}$, $x>-1$.

Ισχύει

$$f'(x)=\frac{\left(2-x^2\right)'(x+1)-\left(2-x^2\right)(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{-x^2-2x-2}{(x+1)^2}$$ και

$$f''(x)=\frac{\left(-x^2-2x-2\right)'(x+1)^2-\left(-x^2-2x-2\right)\left((x+1)^2\right)'}{(x+1)^4}=\frac{2}{(x+1)^3}.$$

Άρα $f''(x)>0$ για κάθε $x>-1$, συνεπώς f κυρτή στο $(-1,+\infty)$.

i. Έχουμε $\alpha > \frac{1}{e}, \beta > \frac{1}{e}$, άρα $\ln\alpha > -1$ και $\ln\beta > -1$. Επίσης

$$\frac{2-\ln^2\alpha}{\ln\alpha+1}+\frac{2-\ln^2\beta}{\ln\beta+1}\geq 2\cdot\frac{2-\ln^2\left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)}{\ln\left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)+1}\Leftrightarrow$$

$$\frac{2-(\ln\alpha)^2}{\ln\alpha+1}+\frac{2-(\ln\beta)^2}{\ln\beta+1}\geq 2\cdot\frac{2-\left(\frac{\ln\alpha+\ln\beta}{2}\right)^2}{\frac{\ln\alpha+\ln\beta}{2}+1}\Leftrightarrow$$

$$f(\ln\alpha)+f(\ln\beta)\geq 2\cdot f\left(\frac{\ln\alpha+\ln\beta}{2}\right)$$

η οποία ανισότητα ισχύει, όπως αποδείχτηκε στο ερώτημα 1) για τη συνάρτηση f η οποία είναι κυρτή στο $(-1,+\infty)$ και για τους $\ln\alpha > -1$ και $\ln\beta > -1$.

Ημερομηνία τροποποίησης: 16/12/11

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο: ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΘΕΜΑ Α

Άσκηση 1

i. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c, c\in\mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c, c\in\mathbb{R}$

ii. Αν $c>0$, τότε ποιο εμβαδόν εκφράζει το $\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx$;

Λύση

i. Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x)=F(x)+c$, όπου $c\in\mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού $G'(x)=(F(x)+c)'=F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x\in\Delta$ ισχύουν $F'(x)=f(x)$ και $G'(x)=f(x)$, οπότε $G'(x)=F'(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

Άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε $G(x)=F(x)+c$, για κάθε $x\in\Delta$.

ii. Αν $c>0$, τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx$ εκφράζει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου με βάση β-α και ύψος c.

Άσκηση 2

i. Έστω μία συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

ii. Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις C_f, C_g, και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$.

Να ορίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω, αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

<u>Λύση</u>

i. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $G(x) = F(x) + c$. **(1)**

Από την (1), για $x=\alpha$, έχουμε
$G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt + c = c$, οπότε $c = G(\alpha)$.

Επομένως, $G(x) = F(x) + G(\alpha)$, οπότε, για $x=\beta$, έχουμε

$G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt + G(\alpha)$ και άρα $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

ii. $E = \int_{\alpha}^{\beta} [f(x) - g(x)]dx$

Άσκηση 3

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$. Ποια σχέση δίνει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha, x=\beta$;

<u>Λύση</u>

Η σχέση είναι: $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|dx$.

Άσκηση 4

i. Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

ii. Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$. Να ορίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω, αν η διαφορά $f(x) - g(x)$ δεν έχει σταθερό πρόσημο στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

<u>Λύση</u>

i. Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

ii. $E = \int_a^\beta |f(x) - g(x)| dx$.

Άσκηση 5

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$. Να ορίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω.

- αν $f(x)\geq 0$
- αν $f(x)\leq 0$
- αν η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$.

<u>Λύση</u>

- Αν $f(x)\geq 0$ το εμβαδόν Ω του επιπέδου χωρίου που ορίζεται από τη C_f και τις ευθείες $x=\alpha, x=\beta$ και τον άξονα xx' είναι $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta f(x)dx$.
- Αν $f(x)\leq 0$ το εμβαδόν Ω του επιπέδου χωρίου που ορίζεται από τη C_f και τις ευθείες $x=\alpha, x=\beta$ και τον άξονα xx' είναι $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta (-f(x))dx$.
- Αν η f δε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\left[\alpha,\beta\right]$ το εμβαδόν Ω του επιπέδου χωρίου που ορίζεται από τη C_f και τις ευθείες $x=\alpha, x=\beta$ και τον άξονα xx' είναι $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta \left|f(x)\right|dx$.

Άσκηση 6

i. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού.

ii. Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα Δ ποια είναι η παράγωγος της συνάρτησης: $F(x) = \int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt$ με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

<u>Λύση</u>

i. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha).$

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$ θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $G(x) = F(x) + c$. **(1)**

Από την **(1)**, για $x = \alpha$, έχουμε $G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt + c = c$, οπότε $c = G(\alpha)$. Επομένως, $G(x) = F(x) + G(\alpha)$, οπότε, για $x = \beta$, έχουμε $G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt + G(\alpha)$ και άρα $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

ii. $\left(\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt\right)' = f(g(x)) \cdot g'(x)$

Άσκηση 7

Θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και έστω $\alpha \in \Delta$. Ποια είναι η παράγωγος της συνάρτησης $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt,\ x \in \Delta$;

<u>Λύση</u>

$F'(x) = f(x)$.

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=\int_3^x \ell n(t^2-8)dt$ και $F(x)=\int_3^x f(u)du$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και της F.

ii. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση F είναι κυρτή ή κοίλη και να βρεθούν τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

iii. Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x>2\sqrt{2}$

iv. Να αποδείξετε ότι η F είναι γνησίως αύξουσα.

<u>Λύση</u>

i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Phi(t)=\ell n(t^2-8)$.

Είναι: $t^2-8>0 \Leftrightarrow t^2>8 \Leftrightarrow |t|>2\sqrt{2} \Leftrightarrow t\in(-\infty,-2\sqrt{2})\cup(2\sqrt{2},+\infty)$ άρα η φ έχει πεδίο ορισμού το $A=(-\infty,-2\sqrt{2})\cup(2\sqrt{2},+\infty)$ στο οποίο είναι και συνεχής. Οπότε για την f έχουμε: $x\in(2\sqrt{2},+\infty)$, αφού $3\in(2\sqrt{2},+\infty)$.

Για την F είναι: Η f ορίζεται στο διάστημα $(2\sqrt{2},+\infty)$ και επειδή $3\in(2\sqrt{2},+\infty)$ είναι: $x>2\sqrt{2}$.

Άρα $D_F=(2\sqrt{2},+\infty)$.

ii. Οι συναρτήσεις f, F είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο $(2\sqrt{2},+\infty)$ με $F'(x)=f(x)$ και $F''(X)=f'(x)=\ell n(x^2-8)$ για κάθε $x>2\sqrt{2}$.

Είναι:

- $F''(x)=0 \Leftrightarrow \ell n(x^2-8)=0 \Leftrightarrow \ell n(x^2-8)=\ell n1 \Leftrightarrow x^2-8=1 \Leftrightarrow x=3$, αφού $x>2\sqrt{2}$.
  (Η συνάρτηση ln ειναι1-1)

  $F''(x)<0 \Leftrightarrow \ell n(x^2-8)<0 \Leftrightarrow x^2-8<1 \Leftrightarrow x^2<9 \Leftrightarrow |x|<3 \Leftrightarrow 2\sqrt{2}<x<3$.

  Αφού $x>2\sqrt{2}$ (η συνάρτηση ln είναι γνησίως αύξουσα).

  Άρα η F είναι κοίλη για κάθε $x\in(2\sqrt{2},3)$.

- Όμοια:

  $F''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 3$

Άρα η F είναι κυρτή για κάθε $x > 3$. Επομένως, το σημείο $M(3, F(3)) = (3, 0)$ είναι το μοναδικό σημείο καμπής της C_F.

iii. Είναι:

$F''(x) = f'(x)$ για κάθε $x \in (2\sqrt{2}, +\infty)$. Άρα, οι ρίζες και το πρόσημο της f' ταυτίζονται με τις ρίζες και το πρόσημο της F'' δηλαδή: $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} < x < 3$ από ii) και $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 3$ από ii). Επομένως η f παρουσιάζει στο $x = 3$ ολικό ελάχιστο, οπότε: $f(x) \geq f(3) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (2\sqrt{2}, +\infty)$.

iv. Είναι:
$F'(x) = f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (2\sqrt{2}, +\infty)$ (από iii.) και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 3$.
Επομένως, η F είναι γνησίως αύξουσα.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με: $f(x)=\dfrac{2x^3+3x}{x^2+1}$

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f αν $x\to-\infty$.

iv. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt\right)$.

Λύση

i. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=\left(\frac{2x^3+3x}{x^2+1}\right)'=\frac{(6x^2+3)(x^2+1)-(2x^3+3x)2x}{(x^2+1)^2}=\frac{6x^4+3x^2+\cancel{6x^2}+3-4x^4-\cancel{6x^2}}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{2x^4+3x^2+3}{(x^2+1)^2}>0$$

Αφού $2x^4+3x^2+3>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι και 1-1, επομένως αντιστρέφεται.

ii. Έπειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ το σύνολο τιμών της θα είναι

$$\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)$$

Είναι: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+3x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3}{x^2}=2\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+3x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty$.

Άρα $f(\mathbb{R})=(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x))=(-\infty,+\infty)$.

iii. Η συνάρτηση f είναι συνεχής, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων, στο $\mathbb{R}$ άρα δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη. Θα μελετήσουμε τη συνάρτηση αν έχει πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη.

Είναι:

- $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{2x^3+3x}{x^2+1}}{x}=$$

  $$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+3x}{x^3+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{x^3}=2$$

- $$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-2x]=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3+3x}{x^2+1}-2x\right)=$$

  $$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+3x-2x^3-2x}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+1}=$$

  $$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0\,.$$

Άρα η ευθεία $y=2x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

iv. Έχουμε: $\int_0^x f(t)dt=\int_0^x\left(\dfrac{2t^3+3t}{t^2+1}\right)dt=\int_0^x\dfrac{2t^3+2t+t}{t^2+1}dt=$

$$=\int_0^x\left(\frac{2t(t^2+1)+t}{t^2+1}\right)dt=\int_0^x\left(2t+\frac{t}{t^2+1}\right)dt=\int_0^x 2tdt+\int_0^x\frac{t}{t^2+1}dt=$$

$$=\left[t^2\right]_0^x+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{(t^2+1)'}{t^2+1}dt=x^2+\frac{1}{2}\left[\ln(t^2+1)\right]_0^x=x^2+\frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)-\ln1\right]=x^2+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

Άρα $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)}{x^2}=$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[1+\frac{1}{2}\frac{\ln(x^2+1)}{x^2}\right]=1+\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x^2}=1+\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln(x^2+1))'}{(x^2)'}$$

$$=1+\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x^2+1}(x^2+1)'}{2x}=1+\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+1}=1+\frac{1}{2}\cdot 0=1\,.$$

Άσκηση 3

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\int_0^1 \ln2\cdot xf(xt)dt+1$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.

ii. Να αποδείξετε ότι η $g(x)=\dfrac{f(x)}{2^x}$ είναι σταθερή και να βρείτε την f.

iii. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{5^x}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{5^x}$

<u>Λύση</u>

i. Έχουμε: $f(x)=\ln2\int_0^1 xf(xt)dt+1$ **(1).** Θέτουμε $xt=u$,οπότε $xdt=du$ και

- για $t=0\Rightarrow u=0$
- για $t=1\Rightarrow u=x$

Οπότε η **(1)** γράφεται: $f(x)=\ln2\int_0^x f(u)du+1$ **(2)**.

Η $f(u)$ είναι συνεχής άρα η $\int_0^x f(u)du$ είναι παραγωγίσιμη οπότε και f παραγωγίσιμη με $f'(x)=(\ln2\int_0^x f(u)du+1)'=\ln2f(x)$ **(3)**

ii. Θα δείξουμε ότι $g'(x)=0$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$g'(x)=\left(\frac{f(x)}{2^x}\right)'=\frac{f'(x)\cdot2^x-f(x)(2^x)'}{(2^x)^2}=\frac{f'(x)\cdot2^x-f(x)\cdot2^x\cdot\ln2}{(2^x)^2}=\frac{f'(x)-f(x)\ln2}{2^x}\overset{(3)}{=}0$$ οπότε

$g(x)=c$ άρα $\dfrac{f(x)}{2^x}=c$.

$\dfrac{f(x)}{2^x}=c\Leftrightarrow f(x)=c\,2^x$

αλλά $f(0)=1$ (από **(2)**), άρα $c=1$ οπότε $f(x)=2^x$.

iii. Είναι:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{5^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x}{5^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^x=0$, αφού $0<\dfrac{2}{5}<1$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{5^x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^x}{5^x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^x=+\infty$.

Άσκηση 4

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x)=2e^x-2+\int_x^{2x} f(t-x)dt$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.

ii. Να βρείτε τη συνάρτηση f.

iii. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f.

Λύση

i. Έστω $g(x)=\int_x^{2x} f(t-x)dt$. Θέτουμε $t-x=u \Leftrightarrow t=x+u$, οπότε είναι $dt=du$.
Επίσης:

- για $t=x$ είναι $u=0$
- για $t=2x$ είναι $u=x$

Έχουμε: $g(x)=\int_0^{x} f(u)du$

Επομένως, η σχέση της υπόθεσης γίνεται: $f(x)=2e^x-2+\int_0^x f(u)du$ **(1)**

Η f είναι συνεχής άρα η $f_1(x)=\int_0^x f(u)du$ είναι παραγωγίσιμη ως αρχική της f. Επίσης η $f_2(x)=2e^x-2$ παραγωγίσιμη, οπότε η f παραγωγίσιμη, ως άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων.

ii. Από τη σχέση **(1)** του i) με παραγώγιση και των δύο μελών έχουμε:

$$f'(x)=2e^x+f(x)\Leftrightarrow f'(x)-f(x)=2e^x \Leftrightarrow e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)=2\Leftrightarrow$$

$$(e^{-x}f(x))'=(2x)'\Leftrightarrow e^{-x}f(x)=2x+c\Leftrightarrow f(x)=2xe^x+c\cdot e^x \quad \textbf{(2)}$$

Αλλά η **(1)** για $x=0$ γίνεται: $f(0)=0$ **(3)**

Η **(2)** για $x=0$ δίνει: $f(0)=c\overset{(3)}{\Leftrightarrow}c=0$. Άρα: $f(x)=2xe^x$.

iii. Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(2x\cdot e^x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{e^{-x}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{-e^{-x}}=0$$, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^x=+\infty$.

iv. Από iii) έχουμε: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$, επομένως η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Επίσης: $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\cdot e^x}{x}=\lim_{x\to+\infty}(2e^x)=+\infty$.

Επομένως η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Και τέλος επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων, η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\int_{2}^{x-2}\ln(16-t^2)dt$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε την παράγωγό της.

iii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(4,f(4))$.

iv. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρεθούν τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης

Λύση

i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(t)=\ln(16-t^2)$.

Είναι: $16-t^2\geq 0 \Leftrightarrow t\in(-4,4)$ άρα η φ ορίζεται στο διάστημα $A=(-4,4)$, οπότε πρέπει:

$$\begin{cases} 2\in(-4,4) \\ \text{και} \\ x-2\in(-4,4) \end{cases} \Leftrightarrow -4<x-2<4 \Leftrightarrow -2<x<6$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι το $D_f=(-2,6)$.

ii. Η συνάρτηση $\varphi(t)=\ln(16-t^2)$ είναι συνεχής στο $(-4,4)$ και η $K(x)=x-2$ παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-2,6)$ άρα και η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-2,6)$ ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=\left(\int_{2}^{x-2}\ln(16-t^2)dt\right)'=\ln[16-(x-2)^2]\cdot(x-2)'=\ln(-x^2+4x+12) .$$

iii. Έχουμε: $f(4)=\int_{2}^{2}\ln(16-t^2)dt=0$ και $f'(4)=\ln(-16+16+12)=\ln 12$ οπότε η εξίσωση της C_f στο $A(4,f(4))$ είναι:

$\varepsilon: y-f(4)=f'(4)(x-4)$ ή

$\varepsilon: y-0=\ln 12(x-4)$ ή

$\varepsilon: y=\ln(12)x-4\ln 12$

iv. Για κάθε $x \in (-2,6)$ έχουμε:

$$f''(x) = (\ln(-x^2+4x+12))' = \frac{(-x^2+4x+12)'}{-x^2+4x+12} =$$

$$= \frac{-2x+4}{-x^2+4x+12} = \frac{2(x-4)}{x^2-4x-12}.$$

Είναι:

$f''(x) \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{2(x-4)}{x^2-4x-12} \le 0 \Leftrightarrow 2(x-4) \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 4$ αφού $x^2-4x-12<0$ στο $(-2,6)$.

Άρα η f είναι κοίλη στο διάστημα $[4,6)$.

Όμοια $f''(x) \ge 0 \Leftrightarrow x \le 4$. Άρα η f είναι κυρτή στο διάστημα $(-2,4]$.

Η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του 4 και επίσης ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(4,f(4))$, οπότε το $A(4,f(4))=(4,0)$ είναι σημείο καμπής.

Άσκηση 6

Δίνεται η συνεχής και άρτια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$3xf(x)=3\int_{2}^{x}f(t)dt-24x^5$ **(1)**

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$.

ii. Να βρείτε τη συνάρτηση f.

iii. Να βρείτε τον τύπο της f.

iv. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I=\int_{-2}^{2}f(x)dx$.

<u>Λύση</u>

i. Για $x\neq 0$ έχουμε: $f(x)=\frac{1}{x}\int_{2}^{x}f(t)dt-8x^4$ **(2)** η οποία είναι παραγωγίσιμη διότι:

Η f είναι συνεχής οπότε η $\int_{2}^{x}f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη και επειδή $\frac{1}{x}$ παραγωγίσιμη και $\frac{1}{x}\int_{2}^{x}f(t)dt$ παραγωγίσιμη. Επίσης $-8x^4$ παραγωγίσιμο οπότε $f(x)=\frac{1}{x}\int_{2}^{x}f(t)dt-8x^4$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$.

ii. Από τη σχέση **(1)** για $x\neq 0$ παραγωγίζοντας έχουμε:

$3f(x)+3xf'(x)=3f(x)-120x^4\Leftrightarrow f'(x)=-40x^3$

iii. Από ii) έχουμε: $f'(x)=-40x^3$ για κάθε $x\neq 0$.

- Αν $x>0$, τότε: $f(x)=-10x^4+C_1$ **(3)**

  Για $x=2$ η **(1)** δίνει: $6f(2)=-768\Leftrightarrow f(2)=-128$

  Για $x=2$ η **(3)** δίνει: $f(2)=-160+C_1$ οπότε: $-160+C_1=-128\Leftrightarrow C_1=32$.

  Άρα $f(x)=-10x^4+32$ για κάθε $x>0$.

- Αν $x<0$, τότε: $f(x)=-10x^4+C_2$ **(4)**

  Για $x=-2$ έχουμε: $f(-2)=-160+C_2$ και επειδή f άρτια

$f(-2)=f(2) \Leftrightarrow -160+C_2=-128 \Leftrightarrow C_2=32$

Άρα $f(x)=-10x^4+32$ για κάθε $x<0$

- Αν $x=0$, τότε επειδή f συνεχής έχουμε: $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(-10x^4+32)=32$

  Άρα $f(x)=-10x^4+32$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iv. Είναι: $I=\int_{-2}^{2} f(x)dx=\int_{-2}^{2}(-10x^4+32)dx=$

$=[-2x^5+32x]_{-2}^{2}=$

$=-2\cdot 2^5+32\cdot 2-[-2\cdot(-2)^5+32\cdot(-2)]=$

$=-64+64-(64-64)=0$.

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=3x^2+\int_0^{-x}t\eta\mu(x+t)dt$, με $x\in\mathbb{R}$ **(1)**.

i. Να βρείτε την $f'(x)$.

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $M(0,f(0))$.

iii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

<u>Λύση</u>

i. Θέτουμε: $x+t=u\Leftrightarrow dt=du$.

- Για $t=0$ έχουμε: $u=x$
- Για $t=-x$ έχουμε: $u=0$.

  Οπότε η **(1)** γράφεται:

  $$f(x)=3x^2+\int_x^0(u-x)\eta\mu u du\Leftrightarrow f(x)=3x^2-\int_0^x u\eta\mu u du+x\int_0^x\eta\mu u du \quad \textbf{(2)}$$

  Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

  $$f'(x)=6x-x\eta\mu x+\int_0^x\eta\mu u du+x\eta\mu x\Leftrightarrow f'(x)=6x+\int_0^x\eta\mu u du \quad \textbf{(3)}$$

ii. Η **(2)** για $x=0$ δίνει: $f(0)=0$ Επίσης η **(3)** για $x=0$ δίνει:

$f'(0)=0$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $M(0,f(0))$ έχει εξίσωση:

$y-f(0)=f'(0)(x-0)$ ή $y-0=0(x-0)$ ή $y=0$.

iii. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$f''(x)=(6x+\int_0^x\eta\mu u du)'=6+\eta\mu x>0$, αφού $-1\le\eta\mu x\le 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 3x\ln x - 3x$ και $g(x) = \int_x^1 f(t)dt$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g

ii. Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii. Να αποδείξετε ότι: $g(x) \le \frac{3e^2}{4} - \frac{9}{4}$.

iv. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $K(x) = g(3x^2)$ ως προς τη μονοτονία, αν $x > 0$

Λύση

i. Το πεδίο ορισμού της f είναι:

$D_f = (0, +\infty)$ στο οποίο είναι και συνεχής. Επειδή $1 \in (0, +\infty)$ το πεδίο ορισμού της g είναι: $D_g = (0, +\infty)$.

ii. Η συνάρτηση f είναι συνεχής, άρα η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη, με

$g'(x) = \left(-\int_1^x f(t)dt\right)' = -f(x) = -3x\ln x + 3x$.

Έχουμε: $g'(x) > 0 \Leftrightarrow -3x\ln x + 3x > 0 \Leftrightarrow -3x(\ln x - 1) > 0 \Leftrightarrow$

$\ln x < 1 \Leftrightarrow x < e$, αφού $x \in (0, +\infty)$.

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο (0,e], όμοια g γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$ οπότε η g παρουσιάζει στο $x = e$ ολικό μέγιστο.

iii. Έχουμε:

$g(x) \le g(e)$ **(1)**, αφού η g παρουσιάζει στο $x = e$ ολικό μέγιστο

αλλά $g(e) = \int_e^1 (3x\ln x - 3x)dx = 3\cdot\int_e^1 x\ln x dx - 3\int_e^1 x dx =$

$= 3\cdot\int_e^1 \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x dx - 3\left[\frac{x^2}{2}\right]_e^1 =$

$$=3\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_e^1-3\int_e^1\frac{x^2}{2}\cdot(\ln x)'\,dx-\frac{3}{2}+\frac{3e^2}{2}=$$

$$=3\left(\frac{1}{2}\ln 1-\frac{e^2}{2}\ln e\right)-\frac{3}{2}\int_e^1 x\,dx-\frac{3}{2}+\frac{3e^2}{2}=$$

$$=-\frac{3}{2}e^2\cdot\ln e-\frac{3}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_e^1-\frac{3}{2}+\frac{3e^2}{2}=$$

$$=\frac{3e^2}{4}-\frac{9}{4}.$$ **(2)**

Από **(1)**,**(2)** έχουμε: $g(x)\le\frac{3e^2-9}{4}$.

iv. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη οπότε και η συνάρτηση K είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$K'(x)=\left(\int_{3x^2}^1 f(t)dt\right)'=\left(-\int_1^{3x^2} f(t)dt\right)'=-f(3x^2)(3x^2)'=$$

$$=-6xf(3x^2)=-6x\cdot[9x^2\ln 3x^2-9x^2]=-54x^3(\ln 3x^2-1).$$

Είναι: $K'(x)=0\Leftrightarrow -54x^3(\ln 3x^2-1)=0\Leftrightarrow \ln 3x^2-1=0$, αφού $x\in(0,+\infty)$,

$$\Leftrightarrow \ln 3x^2=\ln e\Leftrightarrow x^2=\frac{e}{3}\Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{e}{3}}.$$

Επίσης:

$$K'(x)>0\Leftrightarrow -54x^3(\ln 3x^2-1)>0\Leftrightarrow \ln 3x^2<1\Leftrightarrow$$

$\ln 3x^2<\ln e \overset{\ln\text{γν. αύξ.}}{\Leftrightarrow} 3x^2<e \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 0<x<\sqrt{\frac{e}{3}}$, άρα K γνησίως αύξουσα στο $(0,\sqrt{\frac{e}{3}}]$.

Όμοια K γνησίως φθίνουσα στο $[\sqrt{\frac{e}{3}},+\infty)$.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$f(x)=x+1+\int_1^x \frac{1}{x}f(t)dt$ **(1)**.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$.

ii. Να βρείτε τον τύπο της f.

iii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

iv. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1,f(1))$ και να αποδείξετε ότι:

$2x+\ln x\le 3x-1$

Λύση

i. Εχουμε: $f(x)=x+1+\frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt$ **(1)**

Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, οπότε η $\int_1^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ άρα και $\frac{1}{x}\cdot\int_1^x f(t)dt$ παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$. Επομένως f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.

ii. Η **(1)** γράφεται: $xf(x)=x^2+x+\int_1^x f(t)dt$ και παραγωγίζοντας έχουμε

$f(x)+xf'(x)=2x+1+f(x)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow xf'(x)=2x+1\Leftrightarrow f'(x)=2+\frac{1}{x}\Leftrightarrow f'(x)=\left(2x+\ln x\right)'$

Άρα $f(x)=2x+\ln x+c$ **(2)**

Η **(1)** για $x=1$ δίνει: $f(1)=2$ ενώ η **(2)** για $x=1$ δίνει: $f(1)=2+c$.

Επομένως: $2+c=2\Leftrightarrow c=0$. Άρα $f(x)=2x+\ln x, x>0$.

iii. Για κάθε $x>0$ έχουμε: $f'(x)=\left(2x+\ln x\right)'=2+\frac{1}{x}>0$ και $f''(x)=\left(2+\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}<0$, για κάθε $x>0$. Άρα η f είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$.

iv. Είναι:

- $f(1) = 2 + \ln 1 = 2$
- $f'(1) = 2 + 1 = 3$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο Α είναι: $y - 2 = 3(x - 1)$ ή $y = 3x - 1$ και επειδή η $f(x) = 2x + \ln x$ κοίλη (από iii.) έχουμε: $2x + \ln x \le 3x - 1$. Η ισότητα ισχύει για $x = 1$.

Άσκηση 3

Εκφώνηση

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\frac{2e}{x}+2\ln x,\ x>0$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να αποδείξετε ότι $\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq e^{x-e}$ για κάθε $x>0$.

iii. Αν ισχύει $\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq \lambda^{x-e}$ για κάθε $x>0$ και $\lambda>0$ τότε να αποδείξετε ότι $\lambda=e$.

iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=e^2$.

<u>Λύση</u>

i. Για κάθε $x>0$ έχουμε: $f'(x)=\left(\frac{2e}{x}+2\ln x\right)'=\frac{-2e}{x^2}+\frac{2}{x}=\frac{2(x-e)}{x^2}$

Είναι:

- $f'(x)<0 \Leftrightarrow x<e$, άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(0,e]$.
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow x>e$, άρα f γνησίως αύξουσα στο $[e,+\infty)$.

Η f για $x=e$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Δηλαδή $f(x)\geq f(e)$ με τιμή $f(e)=2+2=4$.

ii. Θέλουμε να δείξουμε ότι για κάθε $x>0$. Ισχύει:

$$\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq e^{x-e} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq \ln e^{x-e} \Leftrightarrow$$

$$x\ln\frac{x}{e} \geq x-e \Leftrightarrow x(\ln x-\ln e)\geq x-e \Leftrightarrow x\ln x - x \geq x-e \Leftrightarrow$$

$$x\ln x-2x+e\geq 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x-2+\frac{e}{x}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$2\ln x+\frac{2e}{x}\geq 4 \Leftrightarrow f(x)\geq 4$ που ισχύει από i). (Η συνάρτηση ln είναι γνησίως αύξουσα)

iii. Για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq \lambda^{x-e} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq \ln\lambda^{x-e} \Leftrightarrow x(\ln x - \ln e) \geq (x-e)\ln\lambda \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x\ln x - x - x\ln\lambda + e\ln\lambda \geq 0$ **(1)**

Έστω η συνάρτηση $g(x) = x\ln x - x - x\ln\lambda + e\ln\lambda, x>0$ και $\lambda>0$, τότε:

$$g'(x) = \ln x + 1 - 1 - \ln\lambda = \ln x - \ln\lambda$$

Από **(1)** έχουμε: $g(x)\geq 0$, για κάθε $x>0$. Αλλά $g(e)=0$. Άρα $g(x)\geq g(e)$ για κάθε $x>0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη και στο $x=e$ εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της παρουσιάζει ακρότατο οπότε από το θεώρημα Fermat έχουμε:

$$g'(e)=0 \Leftrightarrow \ln e - \ln\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = e.$$

iv. Είναι: $f(x) = \dfrac{2e}{x} + 2\ln x, x>0$

Παρατηρούμε ότι:

$1\leq x\leq e^2 \Leftrightarrow \ln x\geq 0$ και $\dfrac{2e}{x}>0$, οπότε: $f(x)>0$ στο $[0,e^2]$, άρα

$$E = \int_1^{e^2}\left(\frac{2e}{x}+2\ln x\right)dx = 2e\left[\ln x\right]_1^{e^2} + 2\int_1^{e^2}\ln x dx =$$

$$= 2\cdot e\ln e^2 + 2\int_1^{e^2}(x)'\ln x dx = 4e + 2\left[x\ln x\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} x\cdot\frac{1}{x}dx =$$

$$= 4e + 2e^2\ln e^2 - (e^2-1) = 4e + 4e^2 - e^2 + 1 = 3e^2 + 4e + 1.$$

Άσκηση 4

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = 1 + 2xi,\ x \in \mathbb{R}$, και η συνάρτηση με τύπο $f(x) = |z| - \mathrm{Im}(z)$ ορισμένη στο $\mathbb{R}$.

i. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο.

ii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

iii. Να αποδείξετε ότι $f'(x)|z| + 2f(x) = 0$.

Λύση

i. Έστω $z = \alpha + \beta i,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τότε $\alpha = 1$ και $\beta = 2x,\ x \in \mathbb{R}$.
Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι η ευθεία $x = 1$.

ii. Είναι: $|z| = \sqrt{1+4x^2}$ και $\mathrm{Im}(z) = 2x$. Άρα $f(x) = \sqrt{1+4x^2} - 2x$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Επίσης: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{1+4x^2} - 2x) \overset{+\infty-(+\infty)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+4x^2-4x^2}{\sqrt{1+4x^2}+2x} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+4x^2}+2x} = 0$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{1+4x^2} + 2x) = +\infty$.

Άρα $y = 0$ οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+4x^2}-2x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+4}+2\right)}{x} = -4 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left[f(x) - (-4x)\right] = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{1+4x^2} - 2x + 4x\right) =$$

$$\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{1+4x^2} + 2x) \overset{(+\infty)+(-\infty)}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{1+4x^2-4x^2}{\sqrt{1+4x^2}-2x} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-x\left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+4}+2\right)} = 0.$$

Άρα $y = -4x$ πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

iii. Είναι: $f'(x)=\left(\sqrt{1+4x^2}-2x\right)'=\dfrac{8x}{2\sqrt{1+4x^2}}-2=\dfrac{4x}{\sqrt{1+4x^2}}-2$ οπότε:

$$f'(x)|z|+2f(x)=\left(\frac{4x}{\sqrt{1+4x^2}}-2\right)\sqrt{1+4x^2}+2\sqrt{1+4x^2}-4x=0.$$

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\ln x-1$.

i. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f του άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=e$ και $x=\lambda>0$.

ii. Να βρείτε το $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}E(\lambda)$.

iii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(e^2,f(e^2))$.

iv. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την παραπάνω εφαπτομένη, την C_f και τον άξονα xx'.

<u>Λύση</u>

i. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν $\lambda>e$ τότε: $E(\lambda)=\int_e^{\lambda}f(x)dx=\int_e^{\lambda}(\ln x-1)dx=\int_e^{\lambda}(x)'\ln x dx-(\lambda-e)=$

$$=\left[x\ln x\right]_e^{\lambda}-\int_e^{\lambda}x\cdot\frac{1}{x}dx-\lambda+e=\lambda\ln\lambda-e-(\lambda-e)-\lambda+e=$$

$$=\lambda\ln\lambda-e-\lambda+e-\lambda+e=\lambda\ln\lambda-2\lambda+e$$ (Αφού $e<x<\lambda$ το $\ln x>1$)

- Αν $0<\lambda<e$, τότε

$$E(\lambda)=\int_{\lambda}^{e}(-f(x))dx=\int_{\lambda}^{e}(1-\ln x)dx=(e-\lambda)-\int_{\lambda}^{e}(x)'\ln x dx=$$

$$=e-\lambda-\left[x\ln x\right]_{\lambda}^{e}+\int_{\lambda}^{e}x(\ln x)'dx=$$

$$=e-\lambda-e+\lambda\ln\lambda+(e-\lambda)=\lambda\ln\lambda-2\lambda+e.$$

ii.Έχουμε: $\lim\limits_{\lambda\to0^+}E(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to0^+}(\lambda\ln\lambda-2\lambda+e)=\lim\limits_{\lambda\to0^+}\lambda\ln\lambda-0+e=\lim\limits_{\lambda\to0^+}\dfrac{\ln\lambda}{\frac{1}{\lambda}}+e=$

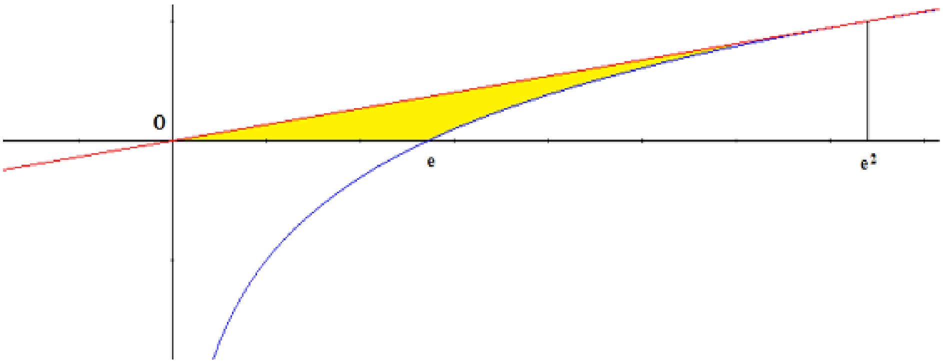
$$=\lim_{\lambda\to0^+}\frac{(\ln\lambda)'}{\left(\frac{1}{\lambda}\right)'}+e=\lim_{\lambda\to0^+}\left(\frac{\frac{1}{\lambda}}{-\frac{1}{\lambda^2}}\right)+e=\lim_{\lambda\to0^+}(-\lambda)+e=e.$$

iii. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(e^2, f(e^2))$ είναι: $y - f(e^2) = f'(e^2)(x - e^2)$

Αλλά $f(e^2) = \ln e^2 - 1 = 1$ και $f'(e^2) = \frac{1}{e^2}$. Αφού $f'(x) = \frac{1}{x}$

Άρα η εξίσωση είναι: $y - 1 = \frac{1}{e^2}(x - e^2)$ ή $y = \frac{1}{e^2}x$.

iv. Για κάθε $x > 0$ έχουμε: $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, άρα f κοίλη, οπότε η γραφική παράσταση της εφαπτομένης στο Μ βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f.



Επομένως:

$$E = \int_0^{e^2} \frac{1}{e^2} x\,dx - \int_e^{e^2} (\ln x - 1)dx =$$

$$= \frac{1}{e^2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{e^2} - \int_e^{e^2} \ln x\,dx + (e^2 - e) = \frac{1}{e^2}\cdot\frac{e^4}{2} - \int_e^{e^2} (x)'\ln x\,dx + e^2 - e =$$

$$= \frac{e^2}{2} - [x\ln x]_e^{e^2} + \int_e^{e^2} x\frac{1}{x}dx + e^2 - e = \frac{e^2}{2} - e^2\ln e^2 + e\ln e + e^2 - e + e^2 - e =$$

$$= \frac{e^2}{2} - 2\cancel{e^2} + \cancel{e} + \cancel{e^2} - \cancel{e} + \cancel{e^2} - e = (\frac{e^2}{2} - e) \text{ τ.μ.}$$

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x)=-3\int_2^x\left(\int_2^u 3^{f(t)}dt\right)du+3x-3$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη.

iii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g με $g(x)=\frac{1}{2}\left(f'(x)\right)^2+\frac{3}{\ln 3}3^{f(x)}$ είναι σταθερή.

iv. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $M(2,f(2))$.

<u>Λύση</u>

i. Έστω: $\varphi(t)=3^{f(t)}$ και $h(u)=\int_2^u 3^{f(t)}dt$

Η φ είναι συνεχής, άρα η h είναι παραγωγίσιμη οπότε και συνεχής οπότε $g(x)=\int_0^x h(u)du$ παραγωγίσιμη. Επομένως f παραγωγίσιμη.

ii.Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε: $f'(x)=-3\int_2^x 3^{f(t)}dt+3$. αφού $f(x)=-3\int_2^x h(u)dt+3x-3$ άρα για κάθε $x>0$ $f'(x)=-3h(x)+3=-3\int_2^x 3^{f(t)}dt+3$ οπότε $f''(x)=-3\cdot 3^{f(x)}<0$ για κάθε $x>0$. Άρα f κοίλη.

iii. Για κάθε $x>0$ έχουμε: $g'(x)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot f'(x)\cdot f''(x)+\frac{3}{\cancel{\ln 3}}\cdot 3^{f(x)}\cdot\cancel{\ln 3}\cdot f'(x)=$

$=f'(x)\left[f''(x)+3\cdot 3^{f(x)}\right]=0$ αφού $f''(x)=-3\cdot 3^{f(x)}$.

iv. Είναι: $f'(2)=3$ και $f(2)=3$.

Άρα η εφαπτομένη στο M έχει εξίσωση $y-3=3(x-2)$ ή $y=3x-3$

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x^3+x-2$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

iii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

iv. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I=\int_{-1}^{e} f^{-1}(x)dx$

Λύση

i. Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με $f'(x)=e^x+3x^2+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Από i) έχουμε ότι f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

iii. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα το σύνολο τιμών της είναι:

$f(R)=(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x))$.

Είναι: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+x^3+x-2)=0-\infty-\infty-2=-\infty$

και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+x^3+x-2)=+\infty$.

Άρα $f(\mathbb{R})=(-\infty,+\infty)$. Επομένως το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι: $D_{f^{-1}}=f(\mathbb{R})=(-\infty,+\infty)$.

iv. Είναι: $I=\int_{-1}^{e} f^{-1}(x)dx$. Θέτουμε $x=f(y)$, οπότε είναι: $dx=f'(y)dy$. Επίσης: $f(0)=-1$ και $f(1)=e$. Άρα τα νέα άκρα ολοκλήρωσης είναι 0 και 1.

Επομένως:

$$I=\int_{-1}^{e} f^{-1}(x)dx=\int_{0}^{1} f^{-1}(f(y))f'(y)dy=\int_{0}^{1} yf'(y)dy=[yf(y)]_0^1-\int_0^1 (y)'f(y)dy=$$

$$=1\cdot f(1)-0-\int_0^1 f(y)dy=f(1)-\int_0^1(e^y+y^3+y-2)dy=e-[e^y+\frac{y^4}{4}+\frac{y^2}{2}-2y]_0^1=$$

$$e-[e+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-2-(e^0+0+0-0)]=\cancel{e}-\cancel{e}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+2+1=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+3=\frac{9}{4}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Άσκηση 1

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=3e^{2x}-3$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$f(x)\geq 3\int_0^2 xg(2x+t)dt$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

i. $\int_0^2 g(t)dt=2$.

ii. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,2)$, τέτοιο ώστε $\int_0^{x_0} g(t)dt=1$.

iii. Η συνάρτηση $F(x)=x\int_0^x g(t)dt-x$ είναι παραγωγίσιμη με $F'(x)=\int_0^x g(t)dt+xg(x)-1$.

iv. Η εξίσωση $xg(x)-1+\int_0^x g(t)dt=0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(0,x_0)$.

Λύση

i. Έστω $h(x)=\int_0^2 xg(2x+t)dt$. Θέτουμε $u=2x+t$ έτσι $du=dt$. Αν $t=0$, τότε: $u=2x$.

Αν $t=2$, τότε:

$u=2x+2$. Άρα $h(x)=x\cdot\int_{2x}^{2x+2} g(u)du$

Οπότε έχουμε: $f(x)\geq 3x\int_{2x}^{2x+2} g(u)du \Leftrightarrow 3e^{2x}-3-3x\int_{2x}^{2x+2} g(u)du\geq 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$K(x)=3e^{2x}-3-3x\int_{2x}^{2x+2} g(u)du$, τότε:

$K(x)\geq K(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Η Κ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Fermat δηλαδή είναι παραγωγίσιμη και έχει ακρότατο στο $x_0=0$ άρα $K'(0)=0$ (1). Όμως

$$K'(x)=6e^{2x}-3\int_{2x}^{2x+2} g(u)du-3x\left(\int_{2x}^{\alpha} g(u)du+\int_{\alpha}^{2x+2} g(u)du\right)'=$$

$6e^{2x} - 3\int_{2x}^{2x+2} g(u)du - 3x\left(-2g(2x) + 2g(2x+2)\right)$ **(2)**

Οπότε από **(1)**,**(2)** έχουμε: $6 - 3\int_0^2 g(u)du = 0 \Leftrightarrow \int_0^2 g(u)du = 2$

Δηλαδή το ζητούμενο.

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $\varphi(x) = \int_0^x g(t)dt - 1$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής άρα η $\int_0^x g(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη οπότε και συνεχής. Επομένως η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο [0,2].

Επίσης: $\varphi(0)\cdot\varphi(2) = (-1)\cdot\left[\int_0^2 g(t)dt - 1\right] = (-1)(2-1) = -1 < 0$.

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,2)$, τέτοιο ώστε:

$\varphi(x_0) = 0 \Leftrightarrow \int_0^{x_0} g(t)dt - 1 = 0 \Leftrightarrow \int_0^{x_0} g(t)dt = 1$.

iii. Είναι:

- g συνεχής άρα $\int_0^x g(t)dt$ παραγωγίσιμη ως αρχική της g.

Άρα F παραγωγίσιμη με $F'(x) = \left(x\int_0^x g(t)dt - x\right)' = \int_0^x g(t)dt + xg(x) - 1$.

iv. Είναι:

- συνεχής ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $[0, x_0]$.
- F παραγωγίσιμη στο $(0, x_0)$ (από iii) με $F'(x) = \int_0^x g(t)dt + xg(x) - 1$.
- $F(0) = F(x_0)$, αφού:

  $F(0) = 0$

  $F(x_0) = x_0\int_0^{x_0} g(t)dt - x_0 = 0$

  Άρα από το θεώρημα του Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, x_0) \subseteq (0,2)$ τέτοιο ώστε:
  $F'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \int_0^{\xi} g(t)dt + \xi g(\xi) - 1 = 0$.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\frac{e}{x}+\ln x+1,\ x>0$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της f.

ii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,4)$, τέτοιο ώστε $f(\xi)=3^{\xi-1}$.

iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=e^2$.

<u>Λύση</u>

i. Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$ με $f'(x)=\left(\frac{e}{x}+\ln x+1\right)'=\frac{-e}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-e}{x^2}$

και επειδή $f'(x)>0\Leftrightarrow x>e$ και $f'(x)<0\Leftrightarrow x<e$

η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[e,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0,e]$ και για $x=e$ παρουσιάζει ακρότατο το $f(e)=\frac{e}{e}+\ln e+1=3$.

ii. Είναι:

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{e}{x}+\ln x+1\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{e+x\ln x+x}{x}\right)=+\infty$$

αφού $\lim_{x\to0^+}(x\ln x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0$.

Άρα $x=0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Επίσης ισχύει: $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e}{x^2}+\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}\right)=0+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}+0=0$

αφού $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ και $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e}{x}+\ln x+1\right)=+\infty$

αφού $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

Άρα η C_f δεν έχει ασύμπτωτες στο $+\infty$.

iii. Έστω $g(x)=f(x)-3^{x-1}$ η οποία είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων στο [1,4] και για την οποία ισχύει: $g(1)\cdot g(4)<0$ αφού

- $g(1)=f(1)-3^0=e+\ln 1+1-1=e>0$
- $g(4)=f(4)-3^3=\frac{e}{4}+\ln 4+1-3^3<0$.

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,4)$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)=3^{\xi-1}$.

iv. Είναι:

$1\le x\le e^2\Leftrightarrow \ln x\ge 0$ και $\frac{e}{x}>0$. Άρα $f(x)=\frac{e}{x}+\ln x+1>0$ για κάθε $x\in[1,e^2]$. Επομένως έχουμε:

$$E=\int_1^{e^2}\left(\frac{e}{x}+\ln x+1\right)dx=\int_1^{e^2}\frac{e}{x}dx+\int_1^{e^2}\ln x dx+1\cdot(e^2-1)=$$

$$=e\left[\ln x\right]_1^{e^2}+\int_1^{e^2}(x)'\cdot\ln x dx+e^2-1=$$

$$=e\cdot(\ln e^2-\ln 1)+\left[x\ln x\right]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}x\cdot\frac{1}{x}dx+e^2-1=$$

$$=2e+e^2\ln e^2-1\cdot(e^2-1)+e^2-1=2e+2e^2 \text{ τ.μ}$$

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{2\ln x}{x}+\lambda x+3, x>0$ και $\lambda\in\mathbb{R}$.

i. Αν η εφαπτομένη της C_f στο $A(1,f(1))$ είναι παράλληλη προς την ευθεία (ε) με εξίσωση $\varepsilon: y=3x$ να υπολογίσετε το λ.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και τις ευθείες με εξισώσεις: $x=1$ και $x=e$.

Λύση

i. Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$f'(x)=\left(\frac{2\ln x}{x}+\lambda x+3\right)'=2\left(\frac{\ln x}{x}\right)'+\lambda=2\frac{(\ln x)'\cdot x-\ln x\cdot(x)'}{x^2}+\lambda=$$

$$=2\frac{1-\ln x}{x^2}+\lambda\Leftrightarrow f'(x)=\frac{2-2\ln x}{x^2}+\lambda.$$

Ο συντελεστής της εφαπτομένης της C_f στο $A(1,f(1))$ είναι:

$f'(1)=\dfrac{2-0}{1}+\lambda=2+\lambda$ και επειδή είναι παράλληλη προς την ευθεία ε ισχύει:

$2+\lambda=3\Leftrightarrow\lambda=1$. Άρα $f(x)=\dfrac{2\ln x}{x}+x+3, x>0$ και $f'(x)=\dfrac{2-2\ln x}{x^2}+1$.

ii. Για κάθε $x>0$ είναι: $f'(x)=\dfrac{2-2\ln x}{x^2}+1=\dfrac{2-2\ln x+x^2}{x^2}$.

Έστω $g(x)=x^2-2\ln x+2, x>0$.

Είναι: $g'(x)=2x-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2x^2-2}{x}$

$g'(x)=0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x=1$.

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-2}{x} > 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x^2-1>0 \Leftrightarrow |x|>1 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x>1 .$$

Άρα g γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

Όμοια g γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$. Δηλαδή η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

Επομένως: $g(x) \geq g(1) \Leftrightarrow g(x) \geq 3 > 0$, άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, οπότε η f δεν έχει ακρότατα και είναι γνησίως αύξουσα.

iii. Είναι:

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2\ln x}{x}+x+3}{x} =$$

  $$\lim_{x\to+\infty}\left(2\frac{\ln x}{x^2}+1+\frac{3}{x}\right) = 2\cdot 0+1+0=1,$$

  αφού $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=0.$$

- $$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to+\infty}\left(2\frac{\ln x}{x}+x+3-x\right) =$$

  $$\lim_{x\to+\infty}\left(2\frac{\ln x}{x}+3\right) = 2\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}+3 =$$

  $= 2\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+3=3$. Άρα η ασύμπτωτη της f στο $+\infty$ είναι η ευθεία $y=x+3$.

iv. $$E=\int_1^e |f(x)-x-3|dx = \int_1^e \left|2\frac{\ln x}{x}+\cancel{x}+\cancel{3}-\cancel{x}-\cancel{3}\right|dx =$$

$$\int_1^e 2\left|\frac{\ln x}{x}\right|dx \overset{*}{=} 2\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx =$$

$$=\left[\ell n^2 x\right]_1^e = \ell n^2 e - \ell n^2 1 = 1.$$

*($1<x<e \Leftrightarrow \ln x > 0$ άρα $\frac{\ln x}{x}$ θετικός)

Άσκηση 4

Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με $f(x) = -2 + \frac{2}{x}$ και $g(x) = 3\ln x$, όπου $x \in (0, +\infty)$.

i. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης h με $h(x) = f(x) - g(x)$.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g και τις ευθείες με εξισώσεις: $x = 1$ και $x = \lambda$, όπου $\lambda > 0$.

iii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} E(\lambda)$.

iv. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} E(\lambda)$.

<u>Λύση</u>

i. Είναι:

$h(x) = f(x) - g(x) = -2 + \frac{2}{x} - 3\ln x = \frac{2}{x} - 3\ln x - 2$ για κάθε $x > 0$.

Άρα $h'(x) = \frac{-2}{x^2} - \frac{3}{x} < 0$, οπότε h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$. Ακόμα $h(1) = 0$.

Επομένως:
Για κάθε $x > 1$ είναι $h(x) < h(1) \Leftrightarrow h(x) < 0$ και για κάθε $0 < x < 1$ είναι $h(x) > h(1) \Leftrightarrow h(x) > 0$.

ii. Για να προσδιορίσουμε το ζητούμενο εμβαδόν πρέπει να γνωρίζουμε αν $\lambda > 1$ ή $\lambda < 1$.
Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\lambda > 1$ τότε:

$$E(\lambda) = \int_1^{\lambda} |f(x) - g(x)|\,dx = \int_1^{\lambda} |h(x)|\,dx \Leftrightarrow$$

$$E(\lambda) = -\int_1^{\lambda} h(x)dx = -\int_1^{\lambda} \left(\frac{2}{x} - 3\ln x - 2\right)dx =$$

$$= -2\left[\ln x\right]_1^{\lambda} + 3\int_1^{\lambda} (x)'\ln x dx + 2(\lambda - 1) =$$

$$= -2(\ln\lambda - \ln 1) + 3[x\ln x]_1^{\lambda} - 3\int_1^{\lambda} x\frac{1}{x}dx + 2\lambda - 2 =$$

$$= -2\ln\lambda + 3\lambda\ln\lambda - 3(\lambda - 1) + 2\lambda - 2 = -2\ln\lambda + 3\lambda\ln\lambda - 3\lambda + 3 + 2\lambda - 2 =$$

$= (3\lambda - 2)\ln\lambda - \lambda + 1$.

- Αν $0 < \lambda < 1$ τότε:

  $E(\lambda) = \int_\lambda^1 |h(x)|\,dx = \int_\lambda^1 h(x)dx = -\int_1^\lambda h(x)dx$,

  $E(\lambda) = (3\lambda - 2)\ln\lambda + 1 - \lambda$.

- Αν $\lambda = 1$ τότε προφανώς $E(1) = 0$. Επομένως $E(\lambda) = (3\lambda - 2)\ln\lambda + 1 - \lambda$.

iii. Είναι:

$$\lim_{\lambda \to +\infty} E(\lambda) = \lim_{\lambda \to +\infty} [(3\lambda - 2)\ln\lambda + 1 - \lambda] = \lim_{\lambda \to +\infty} (3\lambda\ln\lambda - 2\ln\lambda - \lambda + 1) =$$

$$= \lim_{\lambda \to +\infty} [\lambda(3\ln\lambda - 2\frac{\ln\lambda}{\lambda} - 1 + \frac{1}{\lambda})] = (+\infty)(+\infty - 2\cdot 0 - 1 + 0) = +\infty .$$

Αφού $\lim_{\lambda \to +\infty} \ln\lambda = +\infty$ και $\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\ln\lambda}{\lambda} = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{(\ln\lambda)'}{(\lambda)'} = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\lambda} = 0$.

iv. Είναι: $\lim_{\lambda \to 0^+} E(\lambda) = \lim_{\lambda \to 0^+} \left[\left(3\lambda - 2\right)\ln\lambda + 1 - \lambda\right] = \left[(0 - 2)\cdot(-\infty) + 1 - 0\right] = +\infty$.

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$. Αν $F(x)=\int_2^x f(t)dt+\int_2^{2010-x} f(t)dt$, τότε:

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g με $g(x)=\int_2^x f(t)dt$.

ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $F(x)=\int_2^x f(t)dt+\int_2^{2010-x} f(t)dt.$

iii. Να μελετήσετε την F ως προς τη μονοτονία.

iv. Να αποδείξετε ότι $F(x)\geq 2\int_2^{1005} f(t)dt$ για κάθε $x\in(0,2010)$.

Λύση

i. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της $D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και ο αριθμός 2 ανήκει στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Άρα η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού το $D_g=(0,+\infty)$.

ii. Είναι: $F(x)=g(x)+g(2010-x)$

Η συνάρτηση $h(x)=g(2010-x)$ ορίζεται σε εκείνα τα x για τα οποία ισχύει

$2010-x>0 \Leftrightarrow x<2010$. Άρα $D_h=(-\infty,2010)$.

Επομένως το πεδίο ορισμού της F αποτελείται από εκείνα τα x για τα οποία ισχύει $x\in D_g$ και $x\in D_h$ δηλαδή $x>0$ και $x<2010$.

Άρα $D_F=(0,2010)$.

iii. Για κάθε $x\in(0,2010)$ έχουμε:

$$F'(x)=\left(\int_2^x f(t)dt+\int_2^{2010-x} f(t)dt\right)'=$$

$$=\left(\int_2^x f(t)dt\right)'+\left(\int_2^{2010-x} f(t)dt\right)'=$$

$$=f(x)+f(2010-x)(2010-x)'=f(x)-f(2010-x).$$

Οπότε: $F'(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=f(2010-x) \Leftrightarrow x=2010-x \Leftrightarrow x=1005$ αφού f γνησίως αύξουσα άρα και 1-1.

Επίσης:

$F'(x)<0 \Leftrightarrow f(x)-f(2010-x)<0 \Leftrightarrow$

$f(x)<f(2010-x) \Leftrightarrow x<2010-x \Leftrightarrow 0<x<1005$, αφού f γνησίως αύξουσα.

$F'(x)>0 \Leftrightarrow f(x)-f(2010-x)>0 \Leftrightarrow$

$f(x)>f(2010-x) \Leftrightarrow x>2010-x \Leftrightarrow x \in (1005, 2010)$.

Άρα F γνησίως φθίνουσα στο $(0,1005]$ και F γνησίως αύξουσα στο [1005,2010]

iv. Η F στο $x=1005$, παρουσιάζει ολικό ελάχιστο άρα για κάθε $x \in (0, 2010)$ ισχύει:

$$F(x) \geq F(1005) \Leftrightarrow F(x) \geq \int_2^{1005} f(t)dt + \int_2^{1005} f(t)dt \Leftrightarrow F(x) \geq 2\int_2^{1005} f(t)dt.$$

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=3\ln(x\cdot e^{1-x})+2, x>0$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

iii. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $3f(x)+2011=0$.

iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

<u>Λύση</u>

i. Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$f'(x)=(3\cdot\ln xe^{1-x}+2)'=3\frac{1}{xe^{1-x}}(xe^{1-x})'=$$

$$=\frac{3}{x\cdot e^{1-x}}\cdot(e^{1-x}+x(e^{1-x})')=\frac{3}{x\cdot e^{1-x}}(e^{1-x}+x\cdot e^{1-x}(1-x)')=$$

$$=\frac{3}{x\cdot e^{1-x}}\cdot e^{1-x}\cdot(1-x)=\frac{3(1-x)}{x}$$

Έχουμε:

- $f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{3(1-x)}{x}>0\Leftrightarrow x<1$ αφού $x>0$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$
- $f'(x)<0\Leftrightarrow\frac{3(1-x)}{x}<0\Leftrightarrow x>1$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x\geq 1$.
Άρα η f για $x=1$ παρουσιάζει ακρότατο με τιμή $f(1)=3\ln 1+2=2$ που είναι η μέγιστη

ii. Το σύνολο τιμών θα είναι: $f((0,+\infty))=(\lim\limits_{x\to 0^+}f(x),f(1)]\cup(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),f(1)]$

- $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}[3\ln(x\cdot e^{1-x})+2]=3\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x\cdot e^{1-x})+2=-\infty$ αφού

  $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\cdot e^{1-x})=0$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[3\ln(x\cdot e^{1-x})+2]=-\infty$ αφού

$$\lim_{x\to+\infty}(x\cdot e^{1-x}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x-1}} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{(e^{x-1})'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x-1}} = 0 .$$

- $f(1)=2$

Άρα $f((0,+\infty))=(-\infty,2]$.

iii. Είναι: $3f(x)+2011=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{-2011}{3}$

Έστω $g(x)=f(x)+\frac{2011}{3}$ τότε $g'(x)=f'(x)$, οπότε η g έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f

$g((0,1])=(-\infty,2+\frac{2011}{3}]$ και επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο (0,1] έχει μοναδική ρίζα σε αυτό.

Άρα και η $f(x)+\frac{2011}{3}=0$ έχει μοναδική ρίζα στο (0,1].

$g([1,+\infty))=(-\infty,2+\frac{2011}{3}]$ και επειδή η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$ έχει μοναδική ρίζα.

Άρα και η $f(x)+\frac{2011}{3}=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $[1,+\infty)$.

Άρα η εξίσωση $3f(x)+2011=0$ έχει δύο λύσεις, μία στο (0,1] και μία στο $[1,+\infty)$.

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u>: Το iii) μπορεί να λυθεί και με το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών.

iv. Είναι:

- $f(1)=2$

- $f(2)=3\ln\left(\frac{2}{e}\right)+2=3\ln2-3\ln e+2=3\ln2-1>0$ και επειδή f γνησίως φθίνουσα

  $f([1,2])=[3\ln2+1,2]$ δηλαδή $f(x)>0$ στο [1,2].

  Επίσης $f(x)=3\ln x+3\ln e^{1-x}+2=3\ln x+3(1-x)+2=3\ln x+5-3x$.

  Άρα $E=\int_1^2 f(x)dx = 3\int_1^2 \ln x dx+\int_1^2(5-3x)dx = 3\int_1^2 (x)'\ln x dx+[5x-\frac{3}{2}x^2]_1^2 =$

  $=3[x\ln x]_1^2-3\int_1^2 x\cdot(\ln x)'dx+10-\frac{3}{2}\cdot4-5+\frac{3}{2}=$

  $=3\cdot(2\ln2-0)-3\int_1^2 1dx+10-6-5+\frac{3}{2}=6\ln2-3(2-1)+\frac{3}{2}-1=$

  $=6\ln2-\frac{5}{2}$ τ.μ.

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με $f(x)=2x^4+3\ln x+2$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $\lambda^4=\frac{3}{2}\ln\frac{1}{\lambda}-1$ έχει μοναδική λύση για κάθε $\lambda>0$.

iv. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I=\int_0^4 f^{-1}(t)dt$.

<u>Λύση</u>

i. Για κάθε $x>0$ έχουμε: $f'(x)=8x^3+\frac{3}{x}>0$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε δεν έχει ακρότατα.

ii. Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2x^4+3\ln x+2)=0-\infty+2=-\infty$.
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}(2x^4+3\ln x+2)=+\infty+\infty+2=+\infty$.

Επίσης η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, από i), άρα το σύνολο τιμών της είναι: $f((0,+\infty))=(-\infty,+\infty)$.

iii. Για κάθε $\lambda>0$ έχουμε:

$$\lambda^4=\frac{3}{2}\ln\frac{1}{\lambda}-1\Leftrightarrow 2\lambda^4=3(\ln 1-\ln\lambda)-2\Leftrightarrow 2\lambda^4=-3\ln\lambda-2\Leftrightarrow$$

$$2\lambda^4+3\ln\lambda+2=0\Leftrightarrow f(\lambda)=0.$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $\lambda>0$, τέτοιο ώστε $f(\lambda)=0$.

Αυτό ισχύει αφού το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$

(ΑΠΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ) και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

iv.Η συνάρτηση f επειδή είναι γνησίως αύξουσα είναι και 1-1 άρα αντιστρέφεται. Θέτουμε $t=f(x)\Leftrightarrow dt=f'(x)dx$. Για $t=0$ είναι $0=f(x)\Leftrightarrow x=\lambda$.

Για $t=4$ είναι $4=f(x)\Leftrightarrow f(1)=f(x)\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} x=1$.

Επομένως:

$$\int_0^4 f^{-1}(t)dt=\int_\lambda^1 f^{-1}(f(x))f'(x)dx=\int_\lambda^1 xf'(x)dx=\int_\lambda^1 x\cdot\left(8x^3+\frac{3}{x}\right)dx=$$

$$\int_\lambda^1 (8x^4+3)dx=\left[8\frac{x^5}{5}+3x\right]_\lambda^1=\frac{8}{5}+3-\left(\frac{8}{5}\lambda^5+3\lambda\right)=-\frac{8}{5}\lambda^5-3\lambda+\frac{23}{5}.$$

Ημερομηνία τροποποίησης:15/11/2011