ΟΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ανάλυση για την
Γ' Λυκείου

Ρ. Μπόρης

ΟΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ –ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΑΝΑΛΥΣΗ ΓΙΑ ΤΗΝ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΠΟΡΗΣ ΡΟΔΟΛΦΟΣ
ΤΗΛ 2109712610
© Copyright Φλεβάρης 2010
ΕΚΔΟΣΕΙΣ

Επιτρέπεται η αναδημοσίευση και γενικά η αντιγραφή όλου ή μέρους του κειμένου προς χρήση των μαθητών της Γ λυκείου ή προς ενημέρωση των συναδέλφων μαθηματικών. Η γνώση δεν οριοθετείται από τυχόν ιδιοκτήτες.
Η ιδιοκτησία κινδυνεύει να γίνει κλοπή

ΕΞΩΦΥΛΛΟ ΤΙΝΑ ΘΕΡΜΟΥ

ΣΤΟΥΣ
ΑΝΘΡΩΠΟΥΣ ΤΟΥ
MATHEMATICA . GR

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στην παρακάτω συλλογή υπάρχουν ασκήσεις που αφορούν την ανάλυση στο επίπεδο της Γ Λυκείου. Είναι ταξινομημένες κατά κεφάλαιο, περίπου με την σειρά που διδάσκονται στο Λύκειο.

Το επίπεδο μερικών ασκήσεων είναι αρκετά υψηλό ιδίως των Γ,Δ ομάδων και υπερβαίνει τα θέματα των εξετάσεων στα ΑΕΙ, αλλά έτσι εξασφαλίζεται μια σχετική πληρότητα της συλλογής , όχι τόσο ως προς τον όγκο της , αλλά ως προς το περιεχόμενο των θεμάτων που φυσικά αφορούν κατά κύριο λόγο αυτές τις εξετάσεις και που οι ομάδες Α, Β και μερικώς η Γ κρίνονται επαρκείς.

Ένας δεύτερος και ίσως πιο ουσιαστικός λόγος είναι να καταδειχθεί σε πρώτο επίπεδο η ομορφιά που κρύβεται εκεί μέσα. Όχι όμως σαν ένα στείρο αντικείμενο ανταγωνισμού, αλλά έχοντας σαν σκοπό την περαιτέρω ενασχόληση με αυτό που ονομάζεται Μαθηματικά , τον πλούτο της φαντασίας και τελικά μια αναβάθμιση της καθημερινότητάς μας (κάτι που σε μερικούς μπορεί και να φαντάζει σαν λογοτεχνία και ποίηση). Σκεφθείτε ότι **τα Μαθηματικά δεν είναι ασκήσεις** , απλώς οι ασκήσεις είναι ένα μέσον για να προσεγγίσουμε το κάτι παραπάνω. Πιθανώς να προσφέρουν και μια αισθητική απόλαυση σ' αυτό. (Είναι θαυμάσια μια **κομψή λύση**, αλλά πιο όμορφο είναι ένα **βαθύ θεώρημα**) . Η πρωτοτυπία μπορεί να βοηθήσει για να πραγματοποιηθεί αυτός ο σκοπός . Έτσι υπάρχουν και θέματα διεθνών διαγωνισμών που διακρίνονται ακριβώς σε αυτόν τον τομέα ιδίως στις ομάδες Γ, Δ.

Στο τέλος υπάρχει μια σειρά θεμάτων που δίνουν την αναγκαία σφαιρική ματιά στην ανάλυση του Λυκείου . Επίσης υπάρχουν ασκήσεις που ενώνουν διαφορετικά κομμάτια της ύλης

ώστε να μην κατακερματίζεται αυτό που ονομάζουμε μαθηματική σκέψη .

Σύμφωνα με τα παραπάνω η συλλογή μπορεί να χρησιμεύσει κυρίως σε μαθητές (ταξινόμηση, πληρότητα, βοηθητικά ερωτήματα) για τις εξετάσεις τους, αλλά και σε συναδέλφους σαν εργαλείο στην δουλειά τους η ακόμη και σαν ευχάριστη ενασχόληση.

Για την συλλογή χρησιμοποιηθήκαν κατά κύριο λόγο: **το θαυμάσιο forum "mathematica.gr"** και τα παρακάτω βιβλία

- Θέματα Μαθηματικών $1^{ης}$ Δέσμης . Χ.Αχτσαλωτίδη
- Θέματα Μαθηματικών . G Aligniac
- A problem book in mathematical analysis . G N Berman
- Μαθηματική ανάλυση .. L Brand
- Εισαγωγή στην πραγματική ανάλυση . Ε Γαλανή
- Exercise d Analyse . B Calvo
- Συλλογή ασκήσεων . S Denidovich
- Περιοδικό Ευκλείδης . ΕΜΕ
- Βαλκανικές Μαθηματικές ολυμπιάδες . ΕΜΕ
- Περιοδικο . Quantum
- 1000 ασκήσεις ολοκληρωμάτων . Θ Ν Καζαντζή
- Μαθηματικές ολυμπιάδες των ΗΠΑ . Μ Klamkin
- Ολοκληρωτικός λογισμός . Μ Καραμαύρου
- L epreuve de mathematiques au baccalaureat . P Louquet Terminal D . Lycee 83
- Πραγματική ανάλυση Ι . Ζ Μαργέτη Γ Γιατύλη
- Παγκόσμια θεματογραφία ολυμπιάδων μαθηματικής ανάλυσης . Γ.Μπαϊλάκη
- Αλγεβρα Β Λυκείου . Γ.Μπαϊλάκη

- Απειροστικός λογισμός . Σ Νεγρεπόντη-Γιωτόπουλου-Γιαννακούλια
- Μαθηματική ανάλυση . Γ Παντελίδη
- Διαφορικός και Ολοκληρωτικός λογισμός . M Spivac
- Ανισότητες . Π Ε Τσαούσογλου
- Διεθνείς Μαθηματικές ολυμπιάδες . Α.Φελλούρη … (ΕΜΕ)
- Πανενωσιακές Μαθηματικές ολυμπιάδες της ΕΣΣΔ . N.Vasilief A Gegorof

Επίσης χρησιμοποίησα προσωπικές επινοήσεις καθώς και πολυάριθμες ασκήσεις που έφερναν οι μαθητές μου σαν απορίες από τα σχολεία η φροντιστήρια τους και δυστυχώς μου είναι αγνώστου προελεύσεως

Θέλω να ευχαριστήσω όλους όσους βοήθησαν με οποιοδήποτε τρόπο στην παρουσίαση αυτής της συλλογής . Δασκάλους μου , Συνεργάτες , Φίλους και Μαθητές μου που συνεχώς με μάθαιναν κάτι με τις παρατηρήσεις τους , τις ερωτήσεις τους , την συμμετοχή τους στο γράψιμο (και όχι μόνο) , την ενθάρρυνση και τελικά την υπομονή τους . Ιδιαίτερα ευχαριστώ τους συναδέλφους Δ.Λύκκα , Μ.Τριπολιτσιώτη , Κ.Τεμπέλη , Χ Οικονόμου για τις πολύτιμες συμβουλές τους και τις Ε.Μηνά , Χ.Κατσούλη και Ε.Ανδρικοπούλου που μετέφρασαν τα χειρόγραφα μου και έγινε κατορθωτή η παρουσίαση αυτής της συλλογής.

ΑΘήνα
Φλεβάρης 2010
Ροδόλφος . Μπόρης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

- **Α. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ**

(1) ΠΕΔΙΑ ΟΡΙΣΜΟΥ 13

(2) ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ 14

(3) ΣΥΝΘΕΣΗ - ΙΣΟΤΗΤΑ 16

(4) ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ 18

(5) ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ 21

(6) ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 1-1 . ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 23

(7) ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ 26

(8) ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 28

(9) ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΟΙ ΤΥΠΟΙ 31

- **Β. ΟΡΙΑ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ**

(1) ΜΟΡΦΗ 0/0 , Α/0 51

(2) ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ 52

(3) ΘΕΤΩ 53

(4) ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ 54

(5) ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΟΡΙΑ 56

(6) ΟΡΙΑ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ 58

(7) ΣΥΝΕΧΕΙΑ 61

(8) ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ 64

(9) BOLZANO 65

(10) ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΟΙ ΤΥΠΟΙ 72

- **Γ. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ**

(1) ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΟΤΗΤΑ 79
(2) ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΕΙΣ 84
(3) ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ 93
(4) ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΡΥΘΜΟ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ 98
(5) ROLLE , Θ.Μ.Τ 108
(6) ΕΥΡΕΣΗ ΤΥΠΩΝ ΜΕ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ 119
(7) ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ 130
(8) ΑΚΡΟΤΑΤΑ 137
(9) ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ ΑΚΡΟΤΑΤΑ 142
(10) ΡΙΖΕΣ 147
(11) ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ 157
(12) ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ 167
(13) DE L' HOSPITAL 173
(14) ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ 179
(15) ΜΕΛΕΤΗ 181

- **Δ. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ**

(1) ΑΟΡΙΣΤΑ 187
(2) ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ 191
(3) ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ Κ.Λ.Π 196
(4) ΕΥΡΕΣΗ ΤΥΠΩΝ ΜΕ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ 201
(5) ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ 210
(6) ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΥΠΑΡΞΗΣ ΜΕ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ 216
(7) ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ 224
(8) ΟΡΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ 234
(9) ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ 240
(10) ΑΠΟΛΥΤΑ-ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ 243
(11) ΕΜΒΑΔΑ 245
(12) ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 250

- **Ε. ΓΕΝΙΚΕΣ**

ΘΕΜΑΤΑ **257**

ΜΕ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ **274**

ΜΕ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ **277**

ΜΕ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ **279**

ΓΕΝΙΚΕΣ **279**

Α. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

(1) ΣΥΝΟΛΑ ΟΡΙΣΜΟΥ

(2) ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ

(3) ΣΥΝΘΕΣΗ ΙΣΟΤΗΤΑ

(4) ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

(5) ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ

(6) ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 1-1 . ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ

(7) ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

(8) ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

(9) ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΟΙ ΤΥΠΟΙ

1 ΣΥΝΟΛΑ ΟΡΙΣΜΟΥ

Α ΟΜΑΔΑ

Να βρείτε τα σύνολα ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων f με τύπους

(Θα ασχοληθείτε περισσότερο με την ύλη της Β Λυκείου παρά με καινούργια πράγματα)

1Α1. $f(x)=\dfrac{1}{2x^3-7x^2+7x-2}$

1Α2. $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-3x}{x^2+5x}}$

1Α3. $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-3x}}{\sqrt{x^2+5x}}$

1Α4. $f(x)=\dfrac{2x}{|x-1|-2}$

1Α5. $f(x)=\dfrac{3}{x^2-16}$

1Α6. $f(x)=\sqrt{x^2+|x|}$

1Α7. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{|x-3|-5}$

1Α8. $f(x)=\sqrt{x^4(x+3)}$

1Α9. $f(x)=\sqrt{x^4(x-3)}$

1Α10. $f(x)=\dfrac{x-4}{|2x-3|-|x|}$

1Α11. $f(x)=\sqrt{9-x^2}$

1Α12. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}}$

1Α13. $f(x)=\sqrt{x^5-x^4}$

1Α14. $f(x)=\sqrt{-\eta\mu^2\pi x}$

1Α15. $f(x)=ln\left(ln(x)\right)$

Β ΟΜΑΔΑ

Να βρείτε τα σύνολα ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων f με τύπους

1Β1. $f(x)=x^x$

1Β2. $f(x)=(\ln x)^{\frac{1}{x}}$

1Β3 Να βρείτε τα m ώστε σύνολο ορισμού της

$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{mx^2-2mx+3}}$ να είναι το R

2 ΣΥΝΟΛΑ ΤΙΜΩΝ

Α ΟΜΑΔΑ

Να βρείτε τα σύνολα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων *f* όπου και να χαρακτηρίσετε ποιες έχουν μέγιστη και ποιες ελάχιστη τιμή.

2Α1. $f(x)=\sqrt{3-x^2}$

2Α2. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$

2Α3. $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$

2Α4. $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+1}$

2Α5. $f(x)=\dfrac{4x^2-1}{x^2+1}$

2Α6. $f(x)=\begin{cases} x^2 & ,1\le x<2 \\ 2+x & ,2\le x<4 \end{cases}$

2Α7. $f(x)=\sqrt{\dfrac{3x}{x+1}}$ **,** $0\le x\le 3$

2Α8. $f(x)=\dfrac{x}{1+x+x^2}$

2Α9. $f(x)=1+\sqrt{x-3}$

2Α10. $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$

2Α11. $f(x)=\dfrac{|x-2|}{1-|x-3|}$

2Α12. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ **,** $2\le x\le 5$

2Α13. $f(x)=2x^2+x-3$ **,** $1\le x\le 9$

2Α14. $f(x)=\begin{cases} x^2 & ,x\ge 0 \\ x-1 & ,x<0 \end{cases}$

<u>Β ΟΜΑΔΑ</u>

Βρείτε τα σύνολα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων f καθώς επίσης να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις έχουν μέγιστη – ελάχιστη τιμή.

(Θα αντιμετωπίσετε τώρα λίγο πιο δύσκολες πράξεις.)

2Β1. $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x^3-3x+2}$

2Β2. $f(x)=\sqrt{4-\sqrt{x-3}}$

2Β3. $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

2Β4. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$

2Β5. $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+2x+\kappa}$, $\kappa>1$

2Β6. $f(x)=\ln\dfrac{2-|x|}{2+|x|}$

2Β7. $f(x)=\dfrac{4e^{|x|}-1}{e^{|x|}+1}$

2Β8. $f(x)=(2+\sqrt{3})^x+(2-\sqrt{3})^x$

2Β9. Βρείτε το $\lambda\in R$ ώστε η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\frac{x^2-\lambda x+1}{x^2+x+1}$$

να έχει για σύνολο τιμών το *[-2,2]*.

3 ΙΣΟΤΗΤΑ – ΣΥΝΘΕΣΗ

Α ΟΜΑΔΑ

Να εξεταστεί αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ίσες

(Τα φαινόμενα απατούν)

3Α1. $f(x)=\sqrt{x^2-2x+1}, g(x)=|x|-1$

3Α2. $f(x)=\ln(\dfrac{1}{x^2}), g(x)=-2\ln(x)$

3Α3 $f(x)=(1+\sqrt{2})^x-(\sqrt{2}-1)^{-x}, g(x)=0$

Να βρείτε την σύνθεση των συναρτήσεων *gof* και *fog* όπου:

3Α4. $f(x)=|x|$, $g(x)=-3x+6$

3Α5. $f(x)=x^2-2$, $g(x)=|x|$

3Α6. $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $g(x)=\sqrt{1-x^2}$

Να εκφράσετε την *f* ως σύνθεση δύο ή και περισσοτέρων συναρτήσεων όταν:

3Α7. $f(x)=\eta\mu(x^2)$

3Α8. $f(x)=\sqrt{\eta\mu^2 x+1}$

3Α9. $f(x)=g(x\cdot g^2(2-x))$

3Α10. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: f(x)=\alpha x+\beta$ και $g(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}: g(x)=\gamma x+\delta$.

Βρείτε την σχέση μεταξύ των $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ώστε $fog=gof$.

3Α11. Έστω $f: f(x)=2x^2+x+1$. Προσδιορίστε δύο συναρτήσεις g: $g(x)=x+\beta$ και $\varphi: \varphi(x)=\gamma x^2+8$ ώστε $f=\varphi og$.

Β ΟΜΑΔΑ

3Β1. Αν $f: R\to R, g: R\to R$ και $\forall x,y: x\neq y \Rightarrow f(x)-g(x)+f(y)-g(y)=0$ να δείξετε ότι f=g

3Β2. Αν $f: R\to R, g: R\to R$ και $f(x)>0, g(x)>0, \forall x,y: x\neq y \Rightarrow f(x).f(y)=g(x).g(y)$ να δείξετε ότι f=g

3Β3. Αν $f: R\to R: f(x-y)=f(2x+3y)$ να δείξετε ότι η *f* είναι σταθερή

Να βρείτε τις συνθέσεις *gof* και *fog* των συναρτήσεων *f, g* όπου:

3Β4. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$, $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}-3}$

3Β5. $f(x)=2\sigma\upsilon\nu 2x$, $g(x)=\sqrt{3-x^2}$

3Β6. $f(x)=\begin{cases} x+1 & ,x\geq 0 \\ 2x-1 & ,x<0 \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} 2x+3 & ,1\leq x \\ x-2 & ,0\leq x<1 \\ x+1 & ,x<0 \end{cases}$

3Β7. $f(x)=\dfrac{|x|+x}{2}$, $g(x)=\begin{cases} x & ,x<0 \\ x^2 & ,x\geq 0 \end{cases}$

3Β8. Έστω $f: f(x)=|x|$. Αν για την συνάρτηση g ισχύει: $fog=g$ δείξτε ότι το σύνολο τιμών της g είναι υποσύνολο του R^+.

Γ ΟΜΑΔΑ

3Γ1. Έστω f: $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$ ορίζουμε $f_1 = f$, $f_2 = f_1 \, o \, f$, *κ.ο.κ.*, $f_{v+1} = f_v \, o \, f$ για κάθε $v \in N^*$. Βρείτε τον τύπο της f_v συναρτήσει των x και v.

4 ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

Α ΟΜΑΔΑ

Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία στα αντίστοιχα διαστήματα οι παρακάτω συναρτήσεις.

(Χρησιμοποιήστε και τον λόγο μεταβολής)

4Α1. $f: f(x)=x^2+4$ στο $\mathbb{R}R_+$

4Α2. $f: f(x)=2x^2-6x$ στο $[-2,1]$

4Α3. $f: f(x)=-\dfrac{2}{x}$ στο R^*

4Α4. $f: f(x)=\dfrac{x^2}{-1-x}$ στο $\mathbb{R}R_+$

4Α5. Έστω *f*: $f(x)=x+\frac{4}{x}$. Να μελετηθεί η μονοτονία της *f* σε καθένα από τα διαστήματα *(0,2]* και *[2,+∞)*.

(Θυμηθείτε τον λόγο μεταβολής)

4Α6. Έστω *f : [-3,3]* $\to$*R* είναι γνωστό ότι *f* $\uparrow$ στο *[1,3]* και επιπλέον *f(-x)=f(x)* για κάθε *x* $\in$*[-3,3]*. Μελετήστε την μονοτονία της *f* στο *[-3,-1]*.

4Α7. Έστω *f* αύξουσα στο *R* και *f(x)*$\neq$*0* για κάθε *x*$\in$*R*. Θέτουμε *g:* $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ για κάθε *x*$\in$ *R*. Εξετάστε την μονοτονία της *g* όταν:

α) *f(x)>0* για κάθε *x* $\in$*R*.

β) *f(x)<0* για κάθε *x* $\in$*R*.

4Α8. Έστω *f: A* $\to$ *B*/*B* και *g:B*$\to$ *Γ*.

α) Αν οι *f, g* έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας δείξτε ότι η συνάρτηση *gof* είναι αύξουσα στο *A*

β) Αν οι *f, g* έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας δείξτε ότι η συνάρτηση *gof* είναι φθίνουσα στο *A*

Β ΟΜΑΔΑ

(εδώ το κλίμα είναι λίγο πιο θεωρητικό)

4Β1. Έστω *f :* $f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$. Αφού δείξετε ότι *f(x)>0* για κάθε *x*$\in$*R* μελετήστε την μονοτονία της *f*.

4Β2. Μελετήστε την μονοτονία της *f* όπου

$f(x)=\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}$.

4Β3. Αν μια συνάρτηση f είναι γνήσια μονότονη δείξτε ότι έχει το πολύ μια ρίζα.

(Αυτή την άσκηση να την προσέξετε σαν θεωρία)

4Β4. Αν τα σημεία : *A(7,5)* και *B(1,4)* ανήκουν στην γραφική παράσταση της συνάρτησης *f*, τότε να λυθεί η ανίσωση : $f(3+f(2x-1))<5$ όταν f γνήσια αύξουσα

4Β5. Αν η συνάρτηση f είναι γνήσια φθίνουσα και είναι : $g(x)=f(x)-x$ τότε να δείξετε ότι γνήσια φθίνουσα είναι και η *g* και στην συνέχεια να λύσετε την εξίσωση : $f(x^2+x) - f(x+1)= x^2 - 1$

4Β6. Έστω f αύξουσα και $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in R$. Θέτουμε *g:* $g(x)=\dfrac{f(x)}{1+f^2(x)}$. Δείξτε ότι $0\leq g(x)\leq f(x)$. Ακόμη αν $f(x)<1$ δείξτε ότι *g* αύξουσα ενώ αν $f(x)>1$ δείξτε ότι *g* φθίνουσα Τέλος αν υπάρχει κάποιο x_0 : $f(x_0)=1$ δείξτε ότι η *g* παίρνει μια μέγιστη τιμή την οποία να υπολογίσετε.

4Β7. Αν $\left(f(x)-x\right)^3+x^2 f(x)=3x^3, \forall x\in R$ βρείτε τον τύπο της f στο R

4Β8. Έστω $f:(0,+\infty)\to R$ τότε αν η $\dfrac{f(x)}{x}$ είναι φθίνουσα να δείξετε ότι $f(x+y)\leq f(x)+f(y), \forall x,y>0$ ενώ αν η $\dfrac{f(x)}{x}$ είναι αύξουσα δείξτε ότι $f(3x+4y)\geq 3f(x)+4f(y)$

Να λύσετε τις εξισώσεις

4Β9. $x\ln x = e$

4Β10. $3^x+4^x=7$

4Β11. $a^x+b^x=2(a+b)^x,\ a>0,b>0$

4Β12. $f(x+a)=f(a)+2x$ όπου f φθίνουσα στο R

4Β13. $f(x+f(1))=1-x$ όπου f αύξουσα στο R

5 ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ

Α ΟΜΑΔΑ

5Α1. Έστω $f:R\to R$ και $g:R\to R$

α) Αν οι f, g και οι δύο άρτιες ή και οι δύο περιττές δείξτε ότι $f\cdot g$ άρτια.

β) Αν η μια είναι άρτια ενώ η άλλη είναι περιττή δείξτε ότι $f\cdot g$ περιττή.

5Α2. Έστω $f:R\to R$ περιττή και $g:R\to R$. Επιπλέον ορίζεται η gof. Εξετάστε αν είναι άρτια ή περιττή συνάρτηση. Ομοίως αν f άρτια.

5Α3. Έστω $f:R\to R$, $g:R\to R$. Ορίζεται η gof και είναι άρτια συνάρτηση. Εξετάστε αν η f είναι άρτια.

5Α4. Έστω f,g συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού. Να εξετάσετε αν η $f+g$ είναι άρτια ή περιττή όταν:

α) f,g άρτιες β) f,g περιττές γ) f άρτια και g περιττή

5Α5. Έστω $f:R\to R$ με $f(x)=-x$.

α) Αν $g:R\to R$ και $fog=gof$ τι συμπεραίνετε για την g;

β) Αν $h:R\to R$ και $hof=f$ τι συμπεραίνετε για την h;

γ) Τέλος αν $\varphi:R\to R$ και $\varphi of=\varphi$ τι συμπεραίνετε για την φ;

5Α6. Έστω $f: f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$. Βρείτε τα α, β, γ ώστε η f να είναι άρτια.

5Α7. Έστω $f: f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, $\alpha\neq 0$. Βρείτε τα α, β, γ, δ ώστε η f να είναι περιττή συνάρτηση.

5Α8. $f: R \to R$ και $g:\ g(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$. Δείξτε ότι η g είναι άρτια.

5Α9. Έστω $f: (-\alpha,\alpha) \to R$ δοσμένη συνάρτηση. Να προσδιοριστούν μία άρτια συνάρτηση g και μία περιττή h ώστε $g+h=f$.

Να εξετάσετε παρακάτω συναρτήσεις f είναι περιοδικές και να βρείτε την περίοδό τους όταν:

(Οι τριγωνομετρικές είναι από τις πιο βασικές περιοδικές συναρτήσεις. Το ξέρετε και από την φυσική. Θυμηθείτε καλά τις τριγωνομετρικές εξισώσεις)

5Α10. $f(x)=4\eta\mu 2x$

5Α11. $f(x)=\sigma\upsilon\nu^2 x$

5Α12. $f(x)=x+\sigma\upsilon\nu x$

<u>Β ΟΜΑΔΑ</u>

5Β1. Να βρεθεί σχέση των $\alpha, \beta \in R$ ώστε η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=|x+a|+|x+b|$ να είναι άρτια.

5Β2. Αν f περιοδική με περίοδο το 2 και $f(x)=|x-1|$ για κάθε x στο $[0,2]$, να εξετάσετε αν η f είναι άρτια.

5Β3. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\eta\mu(x^2)$ δεν είναι περιοδική.

5Β4. Έστω f,g περιοδικές στο A με περιόδους τα T_1 και T_2 όπου το πηλίκο των περιόδων τους είναι ρητός αριθμός , της μορφής μ/ν. Δείξτε ότι η $kf(x)+mg(x)$ είναι περιοδική με περίοδο

το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των μ και ν επί κάποιον αριθμό α

5Β5. Έστω f: $f(x)=\begin{cases}0 & , x\in Q\\ 1 & , x\in R-Q\end{cases}$ δείξτε ότι η f είναι περιοδική, αλλά δεν έχει ελάχιστη θετική περίοδο.

*(Αυτή είναι μια διάσημη συνάρτηση. Ονομάζεται **συνάρτηση Dirichlet** και χρησιμοποιείται σε πολλά αντιπαραδείγματα.)*

5Β6. Έστω $f: R\to R$. Να βρείτε τις συνθήκες που πρέπει να πληροί η συνάρτηση ώστε η γραφική της παράσταση να έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=2a$. Ακόμη βρείτε τις συνθήκες που πρέπει να πληροί η συνάρτηση ώστε η γραφική της παράσταση να έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο $(2a,2b)$

6 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 1-1 . ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Α ΟΜΑΔΑ

Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ένα προς ένα και να βρεθεί τύπος για την f^{-1} όταν:

6Α1. $f(x)=\dfrac{x}{2+x}$

6Α2. $f(x)=3+\sqrt{x-2}$,

6Α3. $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$

6Α4. $f(x)=\begin{cases}2x+1, x\geq 0\\ x+1\ , x<0\end{cases}$

6Α5. $f(x)=\ln(1+e^x)$

6Α6. $f(x)=\ln\dfrac{x}{1-x}$

6Α7. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

6Α8. $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

6Α9. $f(x)=\sqrt{4-\sqrt{x-3}}$

6Α10. $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν αντιστρέφονται

6Α11. $f: f(2)+3f(3)=4,2f(2)-f(3)=1$

6Α12. $f(x)=x^2+4x+5$

Β ΟΜΑΔΑ

Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ένα προς ένα και όπου είναι δυνατόν να βρεθεί τύπος για την f^{-1} όταν:

6Β1. $f: [4,7] \to R$ και $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+x+6}$

6Β2. $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{x-1}}$

6Β3. $f^3(x)+4f(x)=x\ ,\ \forall x\in R=f(R)$

6Β4. $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$

Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν αντιστρέφονται

6Β5. $f(x)=x^2(x^3-8)+11$

6Β6. $f : R \to R : f^2(x) \le f(x) f(3-x)$

6Β7. $f : R \to R : f^2(x) \le 12 f(x^2) - 36$

6Β8. Αν τα σημεία : *A(3,2)* και *B(5,9)* ανήκουν στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τότε να λυθούν: η ανίσωση : $f(-2 + f^{-1}(x^2 - 8x)) < 2$ όταν f γνήσια αύξουσα και η εξίσωση : $f(2 + f^{-1}(x^2 + x)) = 9$ όταν είναι γνήσια φθίνουσα

Γ ΟΜΑΔΑ

6Γ1. Έστω f γνήσια αύξουσα στο R τότε

Α) αν $f(f(x)) = x$, $\forall x \in R \Leftrightarrow f(x) = x, \forall x \in R$

Β) τα σημεία τομής των $C_f, C_{f^{-1}}$ βρίσκονται πάνω στην πρώτη διχοτόμο $y = x$

Γ) δώστε ένα παράδειγμα που να δείχνει ότι αν η συνάρτηση ήταν γνήσια φθίνουσα το Β) δεν ισχύει

(*Η άσκηση αυτή είναι σχεδόν **θεώρημα** και χρησιμεύει αργότερα στην επίλυση άλλων ασκήσεων)*

6Γ2. Αν $f : R \to R$ συνάρτηση ένα προς ένα για την οποία ισχύει $f(x) f(1-x) = f(\alpha x+\beta)$ να δείξετε ότι: α) $\alpha=0$ β) $f(1-\beta)=1$

6Γ3. Έστω $f : R \to R$ ώστε $f(x)=x^5+x-1$

Α) Να δείξετε ότι f ένα προς ένα συνάρτηση.

Β) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x)=f(x)$.

6Γ4. Έστω $f : f(x)= x-\eta\mu x$

Α) Να δείξετε ότι $|\eta\mu x| \le |x|$ για κάθε x στο R.

(Θεωρία στο σχολικό βιβλίο!!)

Β) Να δείξετε ότι η f είναι ένα προς ένα.

Γ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x)=f(x)$.

6Γ5. Έστω $f: R \to R$ ώστε $(fof)(x)= -x$ για κάθε x στο R.

Α) Να δείξετε ότι η f είναι ένα προς ένα.

Β) Να δείξετε ότι η f είναι περιττή συνάρτηση.

Γ) Βρείτε την f^{-1} συναρτήσει της f

6Γ6. Έστω f η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\begin{cases} x, x \geq 0 \\ \frac{1}{x}, x<0 \end{cases}$

Α)Να κατασκευάσετε την γραφική της παράσταση

Β)Να μελετήσετε την μονοτονία της f

Γ)Να δείξετε ότι η f είναι *1-1* συνάρτηση

Δ)Να βρείτε την $f^{-1}(x)$

Ε)Να δείξετε και να εξηγήσετε και γραφικά ότι $f(x)=f^{-1}(x)$

ΣΤ)Θεωρούμε την συνάρτηση $\underbrace{fofo...of}_{666}(x)$. Να βρείτε τον τύπο της

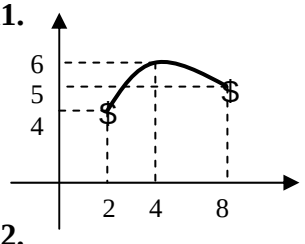
(Η παραπάνω άσκηση είναι μια καλή ευκαιρία να θυμηθείτε όλα τα προηγούμενα)

7 ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

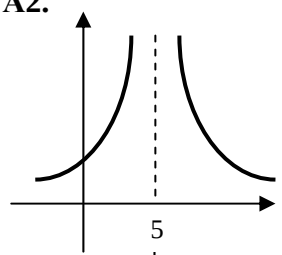
Α ΟΜΑΔΑ

Για τις παρακάτω συναρτήσεις f δίνονται οι γραφικές τους παραστάσεις και ζητούνται το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών, τα μέγιστα – ελάχιστα, οι ρίζες, το κατά πόσον είναι άρτιες – περιττές περιοδικές, και η μονοτονία τους κατά διαστήματα και συνολικά.

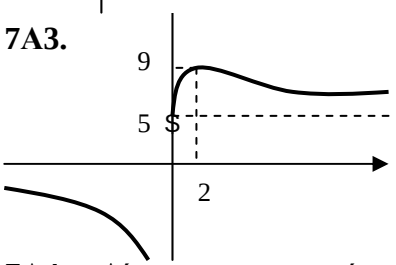
7Α1.



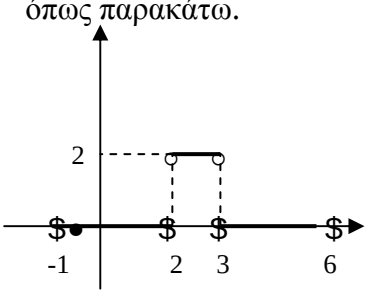
7Α2.

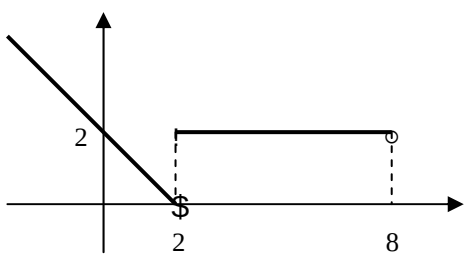


7Α3.



7Α4. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g όπως παρακάτω.





Να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων: $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, $2f+3g$

7Α5. Να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων f όπου:

Α) $f(x)=|x|-x$

Β) $f(x)=\dfrac{|x|(2x+5)}{x}$

Γ) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{1-|x|}$

Δ) $f(x)=|\eta\mu 2x|$

7Α6. Αν $f: R \to R$ ώστε $f(x)=f(\alpha-x)$ δείξτε ότι η ευθεία $x=\alpha/2$ είναι άξονας συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f. Βρείτε έτσι τον τύπο μίας παραβολής που έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=2$ και ρίζα το -1.

Να σχεδιάσετε παραδείγματα γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων f ώστε:

7Α7. $f: R \to R$ να είναι γνήσια αύξουσα και να μην έχει ρίζα.

7Α8. $f: R \to R$ άρτια και αύξουσα στο R.

7Α9. $f: R-\{-1,1\} \to R$ ώστε η εξίσωση $f(x)=\alpha$ να έχει πάντοτε τρεις ακριβώς λύσεις για κάθε $a \in R$ $\mathbb{R}$.

7Α10. $f: R \to R$ ένα προς ένα, αλλά όχι γνήσια μονότονη.

7Α11. $f: (-2,2) \to [-1,1]$ περιττή, όχι μονότονη που δεν έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο.

7Α12. $f: R \to R$ γνήσια φθίνουσα, ώστε $f^{-1}=f$.

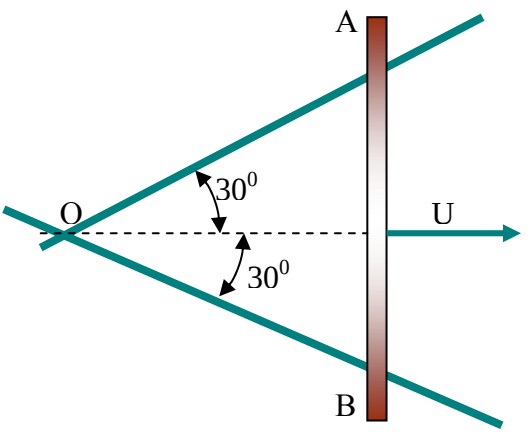
8 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Β ΟΜΑΔΑ

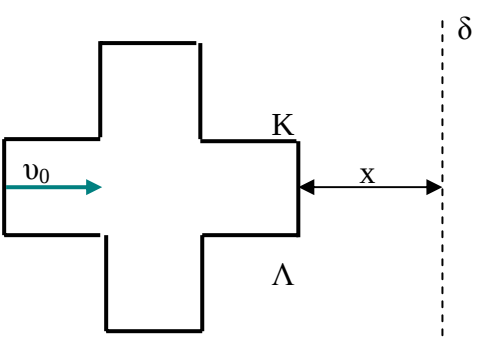
8Β1. Ένας κύλινδρος έχει όγκο V. Να εκφράσετε το εμβαδό της ολικής του επιφάνειας σαν συνάρτηση της ακτίνας της βάσης

του και να βρείτε εκείνη την ακτίνα που καθιστά την επιφάνεια ελάχιστη

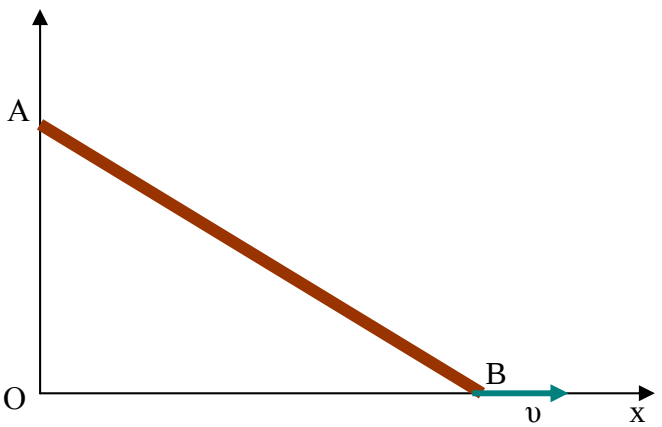
8Β2. Η ράβδος AB κινείται με σταθερή ταχύτητα $\upsilon=2m/sec$, έχει μήκος $6m$ και αρχικά βρισκόταν στο 0. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f που παριστάνει το εμβαδόν του τριγώνου OAB συναρτήσει του χρόνου.



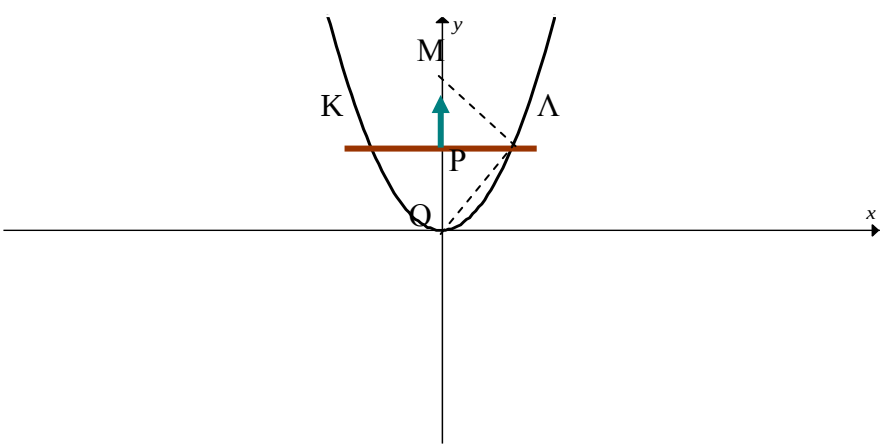
8Β3. Όλες οι ακμές του σταυρού είναι ίσες με α. Με x συμβολίζουμε την απόσταση της $K\Lambda$ από την ευθεία δ .Την χρονική στιγμή $t=0$ είναι $x=0$ και ο σταυρός κινείται με σταθερή ταχύτητα υ_0. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f που παριστάνει το εμβαδόν του σταυρού που έχει εισέλθει δεξιά της ευθείας δ, συναρτήσει του χρόνου.



8Β4. Η ράβδος *ΑΒ* έχει μήκος *10m* και το άκρο της *Β* γλιστρά στην *Οx* με ταχύτητα *υ=2m/sec* την χρονική στιγμή *t=0* το *Β≡0*. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης *f* που δίνει το μήκος του *ΟΑ* συναρτήσει του χρόνου καθώς και τον τύπο της *g* που δίνει το εμβαδόν του τριγώνου συναρτήσει του χρόνου.



8Β5. Η ράβδος *ΚΛ* αρχικά βρισκόταν στον άξονα *xx΄* και κινείται με σταθερή ταχύτητα *4m/sec*. Η παραβολή *(c)* έχει εξίσωση $y = x^2$. Να βρείτε το μήκος της ράβδου *(ΚΛ)* ως συνάρτηση του χρόνου *t*. Αν ακόμη *ΟΛ ⊥ ΛΜ* και *Ρ* το μέσον της *ΚΛ*, δείξτε ότι το μήκος *ΡΜ* παραμένει σταθερό. *Κ,Λ* είναι τα σημεία στα οποία η , απείρου μήκους ράβδος τέμνει την παραβολή.



9 ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΟΙ ΤΥΠΟΙ

*Οι ασκήσεις αυτές **είναι ιδιαίτερα όμορφες** και καλλιεργούν την φαντασία. Κάποιες είναι και **πολύ δύσκολες**, άλλες θέματα διαγωνισμών, γι αυτό πολλές τις συνοδεύουμε με σύντομες υποδείξεις.*

Α ΟΜΑΔΑ

9Α1. Έστω ότι $f(x)-2f(-x)=x^2$ για κάθε x στο R Να βρείτε την f.

9Α2. Έστω ότι $xf(x)+f(1-x)=x^2$ για κάθε x στο R. Να βρείτε την f.

9Α3. Έστω ότι $f(x)+2xf(\frac{1}{x})=x^4$ για κάθε x στο R^* . Να βρείτε την f.

9Α4. Έστω ότι $f(\frac{3+x}{x-1})+4f(\frac{x-1}{3+x})=x$ για κάθε x στο $R\{-3,1\}$.

Να βρείτε την f.

9Α5. Έστω ότι $f^2(x)f(\frac{1-x}{1+x})=64x$ για κάθε x στο $R\{-1,0,1\}$. Να βρείτε τον τύπο της f.

(Σε όλες τις προηγούμενες ασκήσεις ονομάστε ψ την «άλλη» παράσταση και θα καταλήξετε σε εύκολα συστήματα)

9Α6. Έστω f πολυωνυμική συνάρτηση $ν$ βαθμού , τότε

α. Να βρεθεί ο βαθμός του πολυωνύμου : $f(x+1)-f(x)$

β. Να βρεθούν όλα τα πολυώνυμα f : $f(x+1)-f(x)=x$ για κάθε x στο R

9Α7. Έστω ότι $f(x)=f(2x)$ για κάθε x στο R . Τότε να δείξετε ότι $f(x)=f(2^kx)$ για κάθε ακέραια τιμή του k και x στο R

9Α8. Έστω συνάρτηση g με $A_g=R$ και $g(g(x))=x$ για κάθε x στο R. Αν η συνάρτηση h έχει πεδίο ορισμού το R, να δείξετε ότι υπάρχει μόνο μια συνάρτηση f, ώστε $2f(x)+f(g(x))=h(x)$ γιά κάθε x στο R. Προσπαθήστε να εκμεταλλευτείτε το δεδομένο $g(g(x))=x$. Θα φτάσετε έτσι σε ένα εύκολο σύστημα.

9Α9. Έστω $f: R \to R$ ώστε $f(f(x))=-x$ για κάθε x στο R . Να δείξετε ότι :

α. Η f είναι *1-1*.

β. Η f είναι περιττή συνάρτηση.

9Α10. Έστω ότι η f είναι *1-1* συνάρτηση με πεδίο ορισμού το R ώστε να ισχύει : $f(x) \quad f(1-x)=f(ax+b)$ για κάθε x στο R . Τότε δείξτε ότι :

α. $a=0$

β. $f(1-b)=1$

(Είναι εύκολο να βρείτε ειδικές τιμές που θα σας δώσουν τη λύση εξ άλλου τις δυο τελευταίες τις έχετε ξαναδεί)

9Α11. Έστω ότι $f(x-y)=f(x)+f(y) \quad \forall\, x,y$ στο R .Να βρείτε τον τύπο της f.

9Α12. Έστω ότι $f(x-y)=f(x+y)$ για κάθε x,y στο R και $f(0)=1$. Να βρείτε τον τύπο της f.

9Α13. Έστω ότι $f(xy)=f(x)-f(y) \quad \forall\, x,y \in (0,+\infty)$.Να βρείτε τον τύπο της f.

9Α14. Έστω ότι $f(xy)=\dfrac{f(x)}{f(y)} \quad \forall x,y \in (0,+\infty)$ και $f(x) \neq 0$ Να βρείτε τον τύπο της f.

9Α15. Έστω $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε x,y στο R. Να δείξετε ότι

α. $f(0)=0$

β. $f(-x)=-f(x)$ για κάθε x στο R

γ. $f(x-y)=f(x)-f(y)$ για κάθε x,y στο R

9Α16. Έστω $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε x,y στο R . Να δείξετε ότι

α. $f(nx)=nf(x)$ για κάθε n στο N^*

β. $f(\dfrac{1}{n}x)=\dfrac{1}{n}f(x)$ για κάθε n στο N^*

γ. $f(\frac{m}{n}x)=\frac{m}{n}f(x)$ για κάθε m,n στο N^*

δ. $f(rx)=rf(x)$ για κάθε r στο Q

(Για το γ. αρκεί να δείξετε ότι $nf(x/n)=f(x)$)

9Α17. Έστω ότι $f(xy)=f(x)+f(y)$ x,y στο R τότε $f(x)=0$.Αν τώρα x,y στο R^*.Να δείξετε ότι

α. $f(1)=f(-1)=0$

β. f άρτια συνάρτηση

γ. $f(\frac{1}{x})=-f(x)$ για κάθε x στο R^*

δ. $f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$ για κάθε x,y στο R^*

9Α18. Έστω ότι $f(xy)=f(x)+f(y)$ για κάθε x,y στο R^* .Να δείξετε ότι

α. $f(x^n)=nf(x)$ για κάθε η στο N^*

β. $f(x^k)=kf(x)$ για κάθε k στο Z^*

γ. $f(x^r)=rf(x)$ για κάθε r στο Q^*

9Α19. Έστω $f(xy)=f(x)+f(y)$ για κάθε x,y στο R^*_+. Δείξτε ότι το σύνολο τιμών της f δεν είναι ούτε άνω ούτε κάτω φραγμένο υποσύνολο του R.

(Είναι άμεσο συμπέρασμα του προηγούμενου)

9Α20. Έστω $f(xy)=f(x)+f(y)$ για κάθε x,y στο R^*_+ και επιπλέον $(x-1)f(x)>0$.Να δείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα

(Θέτοντας $\chi=\alpha/\beta$ μπορείτε να δημιουργήσετε τον λόγο μεταβολής)

9Α21. Αν $f(x+y)=f(x)f(y)$ για κάθε x,y στο R να δείξετε ότι

α. Αν η f έχει μία ρίζα τότε $f(x)=0$ για κάθε x στο R

β. Αν η f δεν είναι σταθερή τότε $f(0)=1$

9Α22. Έστω $f(x+y)=f(x)f(y)$ για κάθε x,y στο R και f όχι σταθερή.

Τότε δείξτε ότι

α. $f(x)>0$ για κάθε x στο R

β. $f(-x)f(x)=1$ για κάθε x στο R

γ. $f(x-y)=\dfrac{f(x)}{f(y)}$ για κάθε x,y στο R

9Α23. Έστω $f(xy)=f(x)f(y)$ για κάθε x,y στο $(0,+\infty)$ Τότε

α. Αν $f(1)=0$ βρείτε τον τύπο της f

β. Αν $f(a)=0$ με $a>0$ δείξτε ότι $f(x)=0$ στο R^*_+

γ. Αν $f(1)\neq 1$ δείξτε ότι f σταθερή

9Α24. Έστω ότι $f(xy)=f(x)f(y)$ για κάθε x,y στο R^*_+ και f όχι σταθερή. Τότε δείξτε ότι

α. $f(x)f(\dfrac{1}{x})=1$ για κάθε x στο R^*_+

β. $f(\dfrac{x}{y})=\dfrac{f(x)}{f(y)}$ για κάθε x,y στο R^*_+

γ. $f(x)>0$ για κάθε x στο R^*_+

9Α25. Έστω $f(xy)=f(x)f(y)$ για κάθε x,y στο R^*_+ και f όχι σταθερή .

Τότε

α. $f(x^n)=[f(x)]^n$ για κάθε η στο N^* και x στο R^*_+

β. $f(x^k)=[f(x)]^k$ για κάθε κ στο Z^* και x στο R^*_+

γ. $f(x^r)=[f(x)]^r$ για κάθε r στο Q^* και x στο R^*_+

δ. Αν η εξίσωση $f(x)=1$ έχει μοναδική λύση η f είναι *1-1*

9Α26. Αν $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$ τότε

α. Αν υπάρχει $x_0 : f(x_0)=1$ δείξτε ότι f σταθερή

β. Αν $f(x)\neq \pm 1$ για κάθε x στο R και θέσουμε :

$g(x)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$ δείξτε ότι $g(x+y)=g(x)g(y)$ για κάθε x,y στο R

9Α27. Έστω f άρτια , $f(0)\neq 0$ και $f(x+y)=f(x)f(y)$ για κάθε x,y στο R. Να βρείτε τον τύπο της f.

(Δείξτε πρώτα ότι $f(x)>0$ και μετά χρησιμοποιείστε κάποιες ειδικές τιμές)

9Α28. Αν $f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)$, $f(x)=g(x)+g(-x)$ για κάθε x,y στο R τότε η g μπορεί να ικανοποιεί την σχέση $g(x+y)=g(x)g(y)$

9Α29. Αν $f(x)+x\leq x^2\leq f(x+1)-x$,$\forall x\in R$ Να βρείτε τον τύπο της f.

9Α30. Να βρείτε τον τύπο της f στο $(0,+\infty)$ αν

$$f(\frac{x}{e})\leq \ell nx\leq f(x)-1$$

9Α31. Έστω ότι $|f(x)-f(y)|\leq |x-y|$ $\forall x,y\in R$. Δείξτε ότι η $f(x)-x$ είναι φθίνουσα στο R.

Β ΟΜΑΔΑ

9Β1. Έστω ότι η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το R και για κάθε x στο R ισχύει $f(f(x))=x^2-x+1$. Να δείξετε ότι :

α. $f(1)=1$

β. Η συνάρτηση με τύπο $x^2-xf(x)+1$ δεν μπορεί να είναι *1-1*

(Άλλη μια φορά το f(x)?)

9Β2. Έστω f συνάρτηση με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το R για την οποία ισχύει $f(f(x))=x+f(x)$ για κάθε x στο R . Τότε να δείξετε ότι :

α. Η f είναι *1-1* συνάρτηση

β. $f(0)=0$

γ. $f^{-1}(x)+x=f(x)$ για κάθε x στο R

δ. $f(f(x)-x)=x$ για κάθε x στο R

9Β3. Έστω ότι για τη συνάρτηση f ισχύει $f(f(x)-2)=1+x$ για κάθε x στο R. Τότε να δείξετε ότι :

α. Η f είναι *1-1* συνάρτηση

β. Η εξίσωση $f(x)=y$ έχει τουλάχιστον μια λύση για οποιαδήποτε τιμή του y

γ. Ισχύει : $f^{-1}(x)=f(x-2)-1$ για κάθε x στο R

(Βάλτε όπου x το f(y-2)-1)

9Β4. Έστω f συνάρτηση με πεδίο ορισμού το R ώστε $f(f(x))=2x+1$ για κάθε τιμή του x στο R . Τότε

α. Να δείξετε ότι η f είναι *1-1* συνάρτηση

β. Δείξτε ότι $f(2x+1)=2f(x)+1$ για κάθε x στο R

γ. Αν f πολυωνυμική να βρείτε τον τύπο της

(Τι πρέπει να θέσετε στην θέση του χ στα δεδομένα για να προκύψει το β μέλος του β ερωτήματος?)

9Β5. Έστω $f: R \to R$ ώστε $f(f(x))=x$ και f αύξουσα Τότε

α. Να δείξετε ότι η f είναι *1-1* συνάρτηση

β. Να δείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα στο R

γ. Να δείξετε ότι : $f(x)=x$ για κάθε x στο R

δ. Χρησιμοποιείστε τα προηγούμενα ώστε να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$ ii) $(x^2+100)^2=(x^3-100)^3$

(το γ ερώτημα το έχουμε ξαναδεί στην μονοτονία. Το δ είναι εφαρμογή των προηγουμένων)

9Β6. Αν $f(\frac{x+f(x)}{2})=x$, $\forall x \in R$ και f γνήσια αύξουσα συνάρτηση να δείξετε ότι $f(x)=x$ για κάθε x στο R

(Είναι παρόμοια με την προηγούμενη)

9Β7. Έστω $A \subseteq R$: $0 \notin A$ και συνάρτηση

$f : A \to A$: $f(f(x)) = \dfrac{f(x)}{x}$ τότε

α. Αν $x \in A$ να δείξετε ότι $\dfrac{1}{x} \in A$

β. Δείξτε ότι $f(x)f(\dfrac{1}{x}) = 1$ για κάθε x στο R

γ. Δείξτε ότι η f είναι 1-1 συνάρτηση

δ. Αν 2 και 4 είναι δυο στοιχεία του συνόλου A και $f(2)=4$, τότε να λύσετε την εξίσωση : $f(x)=4$

(Τριπλό και τετραπλό f χρειάζονται τα δυό πρώτα)

9Β8. Έστω ότι $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε x,y στο R. Να δείξετε ότι αν $f(a)=ka$ όπου k,a ακέραιοι αριθμοί $\alpha \neq 0$, τότε δείξτε ότι για κάθε ακέραιο αριθμό b, ο αριθμός $f(b)$ είναι επίσης ακέραιος.

9Β9. Έστω ότι $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε x,y στο R. Να δείξετε ότι

α. Αν μοναδική ρίζα της f είναι το 0 τότε η f είναι 1-1 συνάρτηση.

β. Αν ισχύει το προηγούμενο τότε $f^{-1}(a+b)=f^{-1}(a)+f^{-1}(b)$ για κάθε a,b στο R. (Θεωρείστε ότι $f(R)=R$)

(Βρείτε πρώτα πόσο κάνει το f(x-y))

9Β10. Έστω $f(xy)=f(x)+f(y)$ για κάθε x στο R^*_+ . Τότε

α. Αν η f έχει ρίζα $\rho \neq 1$ δείξτε ότι έχει άπειρες ρίζες*.

β. Αν η f έχει μοναδική ρίζα το 1 να δείξετε ότι είναι 1-1 συνάρτηση.

γ. Αν η f είναι 1-1 και a,b θετικοί αριθμοί τότε $f^{-1}(a+b)=f^{-1}(a)f^{-1}(b)$.

9Β11. Έστω ότι $f(x+y)=f(x)f(y)$ για κάθε x,y στο R . Να δείξετε ότι

α. $f(nx)=[f(x)]^n$ για κάθε n στο N και x στο R

β. $f(kx)=[f(x)]^k$ για κάθε k στο Z και x στο R

γ. $f(rx)=[f(x)]^r$ για κάθε r στο Q και x στο R

δ. Αν $f(1)=2$ τότε $f(x)=2^x$ για κάθε ρητό αριθμό x.

ε. Αν μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x)=1$ είναι το 0 τότε η f δεν είναι σταθερή.

στ. Αν ισχύει το προηγούμενο τότε η f είναι 1-1

ζ. Αν η f είναι 1-1 τότε $f^{-1}(ab)=f^{-1}(a)+f^{-1}(b)$ για κάθε a,b στο R_+^*

9Β12. Έστω ότι $f(\frac{x+y}{2})=\frac{f(x)+f(y)}{2}$ για κάθε x,y στο R και $g(x)=f(x)-f(0)$

α. Δείξτε ότι $g(x+y)=g(x)+g(y)$ για κάθε x,y στο R

β. Αν $f(1)=f(0)$ δείξτε ότι $f(x)=f(0)$ για κάθε ρητό αριθμό x

*(Δείξτε για το β΄ότι αν $g(1)=0$ τότε $g(x)=0$,**Τύπος Jensen**)*

9Β13. Έστω $(x+y)f(x+y)=(1+f(x))(1+f(y))$ για κάθε x,y στο R και f περιττή συνάρτηση. Να εξετάσετε αν υπάρχει τέτοια συνάρτηση f.

9Β14. Έστω $f(x+y)=f(x)f(a-y)+f(y)f(a-x)$ για κάθε x,y στο R.με $f(a)=1$ $a\neq 0$. Τότε

α. $f(0)=0$

β. $f(2a)=0$

γ. $f(x+2a)=f(x)f(-a)$ για κάθε x στο R

δ. $f(x+4na)=f(x)$ για κάθε η στο N και x στο R

(Μπορείτε να δημιουργήσετε τα ζητούμενα από το πρώτο μέλος της δοσμένης σχέσης για τα α,β,γ και για το δ να κάνετε επαγωγή.)

9Β15. Αν $f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$ $\forall x\in R$ δείξτε ότι η f είναι περιοδική.

9Β16. Αν $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$ για κάθε x,y στο R τότε :

α. Να βρείτε όλες τις σταθερές f που ικανοποιούν την προηγούμενη σχέση.

β. Αν f όχι σταθερή τότε $f(0)\neq 0$ και f άρτια συνάρτηση

γ. Αν $f(a)=0$ με $a>0$, θα είναι : $f(x+4a)=f(x)$

δ. Κέντρο συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f είναι το $(a,0)$

9Β17. Αν $f(x^2+y^2)=f(x)+f(y)$ γιά κάθε x,y στο R τότε δείξτε ότι :

α. $f(0)=0$

β. $f(x^2)=f(x)$ για κάθε x στο R

γ. $f(-x)=f(x)$ για κάθε x στο R

δ. $f(x)=0$ για κάθε x στο R

(Για το 4 αφού δείξετε ότι $f(y^2)=f(x^2)+f(y^2-x^2)$ λάβετε υπ όψιν σας το 3, ώστε να καταλήξετε σε $f(x^2)=f(y^2)$ οπότε και πάλι με τη βοήθεια του 3, καταλήγετε στο ζητούμενο)

9Β18. Έστω ότι $f(x+y)\leq y+f(x)$ $\forall x,y\in R$ και $f(5)=1$. Δείξτε ότι $f(x)=x-4$ $\forall x\in R$.

(Προσπαθήστε να δείξετε ότι $f(x-y)=-y+f(x)$)

9Β19. Αν $f:R_+^*\to R_+^*$ ώστε $2xf(y)\leq xf(x)+yf(y)$ $\forall x,y\in(0,+\infty)$ τότε δείξτε ότι

α. $\frac{2y-x}{y}f(x)\leq f(y)\leq\frac{x}{2x-y}f(x)$ όταν $2x>y$

β. $\frac{f(x)}{y}\leq\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\leq\frac{f(y)}{x}$ όταν $x>y$

9Β20. Έστω ότι $f(x)\le x$ *και* $f(x+y)\le f(x)+f(y)$ για κάθε x,y στο R.
Να βρείτε τον τύπο της f.
(Βρείτε πρώτα το f(0) και δείξτε ότι η f είναι περιττή)

Γ ΟΜΑΔΑ

9Γ1. Έστω ότι $f(x+y)=f(x)+f(y)\ \ \forall\ x,y$ στο R και $xf(x)\ge 0\ \ \forall x\in R$
Βρείτε όλες τις f

9Γ2. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το διάστημα $[0,1]$. Αν ισχύει :
$|f(x)-f(y)|\ge|x-y|\ \ \forall x,y\in[0,1]$ τότε να δείξετε ότι
α. $|f(0)-f(1)|=1$
β. $f(0)=0$ και $f(1)=1$ ή $f(0)=1$ και $f(1)=0$
γ. $f(x)=x$ ή $f(x)=1-x\quad \forall x\in[0,1]$
(Για το α προσέξτε το σύνολο τιμών .Το β είναι εύκολο και για το γ διακρίνετε περιπτώσεις)

9Γ3. Έστω $f:[a,b]\to R$ ώστε $f(kx+(1-k)y)\le kf(x)+(1-k)f(y)$ $,k\in[0,1]$
α. Δείξτε ότι αν $x_0\in[a,b]$ τότε υπάρχει $r\in[0,1]$:
$x_0=ra+(1-r)b$
β. Δείξτε ότι $f(x_0)\le rf(a)+(1-r)f(b)$
γ. Αν $m,n\in[0,1]: m+n=1$ *τότε* $f(mx+ny)\le mf(x)+nf(y)$
$\forall x,y\in[a,b]$
δ. Αν $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in[0,1]$ με $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$ να δείξετε ότι ισχύει :
$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3)\le\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\lambda_3f(x_3)\quad \forall x_1, x_2, x_3\in[a,b]$
(να χρησιμοποιήσετε την κα+λβ=(κ/(κ+λ))α+(λ/(κ+λ))β)

9Γ4. Έστω $f(x+y)=2^x f(y)+2^y f(x)$ για κάθε x,y στο R .

α. Να δείξετε ότι $f(0)=0$

β. Να βρείτε το $f(nx)$ συναρτήσει των η και $f(x)$ $\forall n \in N$

γ. Να γενικεύσετε για n στο Z.

9Γ5. Βρείτε όλες τις μονότονες συναρτήσεις f :

$|f(x)-f(y)|=|x-y| \quad \forall x,y \in R$

9Γ6. Βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x)f(y)$

$\forall x,y \in R$ και αν $f(0)=0$ τότε $f(x)=0 \forall x \in R$

(Θα καταλήξετε σε μια δίκλαδη και την μηδενική)

9Γ7. Έστω ότι $f(x+y)=f(x)+f(y)$ $\forall x,y$ στο R και υπάρχει φ :

$|f(x)| \le \phi \ , \forall x \in [a,b]$

α. Να δείξετε ότι f φραγμένη στο $[0,b-a]$

β. Αν $g(x)=f(x)-kx, k=\dfrac{f(b-a)}{b-a}$ τότε $g(x+y)=g(x)+g(y)$

γ. Δείξτε ότι $g(x+T)=g(x)$ για κάθε x στο $[a,b]$ με $T=b-a$

δ. Δείξτε ότι $g(nx)=ng(x)$ για κάθε η στο N^* και x στο R

ε. Δείξτε ότι g φραγμένη στο $[a,b]$

στ. Βρείτε τον τύπο της f.

(Για το γ θα χρειαστείτε το f(b-a) . Όσο για το ε χρησιμοποιείστε τριγωνική και για το στ εκμεταλλευτείτε το δ ερώτημα)

9Γ8. Έστω ότι

$f: R \to R^* \ , \quad f(x+\dfrac{1}{n})=f(x) \quad \forall n \in N^*, \forall x \in R$. Να

δείξετε ότι

α. $f(x+1)=f(x)$ για κάθε x στο R

β. $f(n)=f(0)$ για καθε η στο N^*

γ. $f(k)=f(0)$ για κάθε κ στο Z

δ. $f(r)=f(0)$ για κάθε r στο Q

(Ειδικές τιμές όχι μόνον στο x)

9Γ9. Έστω ότι $f(x+f(y))=y+f(x)$ για κάθε x,y στο R. Να δείξετε ότι

α. Η f είναι *1-1*

β. $f(0)=0$

γ.Βρείτε την f στο Q

9Γ10. Έστω ότι $f: R^*_+ \to R^*_+$ με $f(xf(y))=yf(x)$ $\forall x,y \in R^*_+$. Να δείξετε ότι

α Η f είναι *1-1* συνάρτηση

β. Η εξίσωση $f(x)=a>0$ έχει λύση την a $f(\frac{a}{f(a)})$ $\forall a>0$

γ. $f(1)=1$

δ. $f^{-1}(x)=f(x)$

ε. $f(xy)=f(x)f(y)$ για κάθε x,y στο R^*_+

στ. $f(\frac{x}{y})=\frac{f(x)}{f(y)}$ για κάθε x,y στο R^*_+

ζ. $f(x^r)=[f(x)]^r$ για κάθε x,y στο R^*_+ και r στο Q

9Γ11. Να βρείτε τον τύπο της f αν ισχύουν τα παρακάτω:

$f:(0,+\infty)\to R$

$f(x)>\frac{1}{2x}, \forall x>0$

$f(x).f(f(x)+\frac{1}{x})=1$

f γνήσια φθίνουσα

9Γ12. Αν $f(xf(y))=\frac{f(x)}{y}$ $\forall x,y \in Q^*_+$, $f(x)\in Q^*_+$ δείξτε ότι

α. f *: 1-1*

β. $f(1)=1$

γ. $f(f(x))=\frac{1}{x}$

δ. $f(x.y)=f(x).f(y)$

9Γ13. Έστω

$$f(x+y)=f(x)+f(y), f(1)=1, x^2 f(\frac{1}{x})=f(x) \forall x \in R^*$$

α.Δείξτε ότι $f(x-y)=f(x)-f(y)$

β.Δείξτε ότι $f(\frac{1}{1-x})=\frac{1-f(x)}{(1-x)^2} \quad \forall x \in R-\{0,1\}$

γ.Δείξτε ότι $f(1+\frac{x}{1-x})=\frac{1-2x+f(x)}{(1-x)^2} \quad \forall x \in R-\{0,1\}$

δ. Βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

9Γ14. Έστω $f(x^3+x) \le x \le (f(x))^3 + f(x)$ για όλους τους πραγματικούς x

α. Δείξτε ότι η $g(x)=x^3+x$ είναι αντιστρέψιμη στο R.

β. Δείξτε ότι $f=g^{-1}$.

(Για το β εισάγετε την g στο α)

9Γ15. Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν συναρτήσεις

$f: R \to R, g: R \to R$ έτσι ώστε

$f(g(x))=x^2$, $g(f(x))=x^3$, $\forall x \in R$

(Για x=-1,0,1 πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $x^2=a$?)

9Γ16. Βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: R \to R$ ώστε

$f(x+y)=3^x f(y)+2^y f(x)$

(ανταλλάξτε και ξεχωρίστε τα x από τα y)

9Γ17. Βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: R \to R$ ώστε

$f(x^3+y^3)=x^2 f(x)+y f(y^2)$

(υπολογίστε τελικά το $f((x+1)^2)$ με δυο τρόπους)

9Γ18. Αν $f(x+19)\le 19+f(x), f(x+94)\ge 94+f(x)$

τότε αν $f(0)=0$ να βρεθεί το $f(n)$, $n\in N$ συναρτήσει του n

9Γ19. Έστω ότι $f(x+y)=f(y)f(xf(y))$ για κάθε x,y στο $[0,+\infty)$, $f(2)=0$ και επιπλέον $f(x)\neq 0$ για κάθε x στο $[0,2)$. Τότε να δείξετε ότι

α. $f(x)=0\ \forall x\in[2,+\infty)$

β. $f((2-x)f(x))=0$ για κάθε x στο $[0,2)$

γ. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{2-x}, & 0\le x<2\\ 0, & x\ge 2\end{cases}$

(Από το β βρείτε που ανήκει το (2-x)f(x), ξαναγυρίστε στην αρχική και βάλτε όπου y το 2/f(x).)

9Γ20. Έστω $f(x+y)=f(x)f(a-y)+f(y)f(a-x)$ για κάθε x,y στο R και $f(0)=\dfrac{1}{2}$ Δείξτε ότι

α. $f(a)=\dfrac{1}{2}$

β. $f(a-x)=f(x)$ για κάθε x στο R

γ. $f(x+a)=f(x)$ για κάθε x στο R

δ. Η f είναι σταθερή συνάρτηση

(Για τα β,γ ερωτήματα θα βοηθήσει ένα άθροισμα τετραγώνων και χρησιμοποιείστε τα για το 4.)

9Γ21. Έστω

$$S=(-1,+\infty),\ f:S\to S,\ \frac{f(x)}{x}\ 1-1\quad \forall x\in S-\{0\}$$

$$f(x+f(y)+xf(y))=y+f(x)+yf(x)\qquad \forall x,y\in S$$

α.Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in S: f(x_0)=x_0$

β.Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

9Γ22. Έστω $f(x-f(y))=f(f(y))+xf(y)+f(x)-1$ x,y στο R

α.Δείξτε ότι $f(x)=\frac{f(0)+1}{2}-\frac{x^2}{2}$ $\forall x \in f(R)$

β.Δείξτε ότι $f(0)\neq 0$

γ.Δείξτε ότι ο οποιοσδήποτε πραγματικός γράφεται σαν διαφορά δύο αριθμών του $f(R)$

δ.Δείξτε ότι $f(0)=1$

ε.Βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

(Για το γ βρείτε ότι f(0)x+f(f(0))-1 γράφεται σαν διαφορά δύο τιμών της f και ασχοληθείτε με τα σύνολα τιμών τους. Για το δ βάλτε όπου x το y_1 και όπου f(y) το y_2 με y_1 , y_2 στο f(R) και εκμεταλλευτείτε στην συνέχεια το α)

9Γ23 Βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f, όταν

$f(x^2-y^2)=xf(x)-yf(y)$ $\forall x,y \in R$, $f(1)=A$

Δ ΟΜΑΔΑ

9Δ1. Έστω ότι $f(x+y)+2f(xy)=2+f(x)f(y)$ για κάθε x,y στο Q και $f(1)=3$. Να δείξετε ότι

α. $f(0)=1$

β. $f(x+1)=2+f(x)$

γ. $f(x+n)=2n+f(x)$ για κάθε η στο N

δ. $f(x)=2x+1$ για κάθε x στο Q

9Δ2. Έστω $f(x+f(y))=f(x)f(y)$ για κάθε x,y στο Q . Δείξτε ότι

α.Αν η f έχει ρίζα τότε είναι η μηδενική συνάρτηση

Έστω τώρα ότι η f δεν είναι η μηδενική συνάρτηση

β. $f(y-f(y))=1$ και $f(x+1)=f(x)$

γ. $f(nf(y))=f(0)[f(y)]^n$ για κάθε η στο N

δ. $f(x)=1$ $\forall x \in Q$

9Δ3. Έστω $f(x^2+f(y))=y+f^2(x)$ για όλους τους πραγματικούς x,y

α. Δείξτε ότι $f(\kappa)=\kappa^2$, $f(x^2+k)=f^2(x)$, $f(f(x))=x+k^2$ όπου $f(0)=k$

β. Εκφράστε το $f(k^2+f^2(1))$ με δύο τρόπους συναρτήσει του k και έτσι δείξτε ότι $k=0$

γ. Δείξτε ότι $f(f(x))=x$, $f(x^2)=f^2(x)$

δ. Δείξτε ότι $f(x+y)=f(x)+f(y)$,$x>0$

ε. Δείξτε ότι f περιττή

στ. Δείξτε ότι $f(x)=x$

(Για το δ δείξτε ότι $f(x^2+y)=f(y)+f(x^2$ενώ για το ε σκεφθείτε ότι όταν έχετε $f(x-x)$ τότε ένας από τους $x,-x$ θα είναι θετικός. Τώρα γενικεύστε το δ σε όλους τους πραγματικούς. Τελικά να υποθέσετε ότι $y=f(x)>x$,$w=y-x$ καταλήξτε ότι $f(w)=-w$.Όμοια και αν υποθέσετε ότι $w<0$.Το γ θα σας εξασφαλίσει το επιθυμητό άτοπο)

9Δ4. Έστω $(f(a)+f(b))(f(c)+f(d))=f(ac-bd)+f(ad+bc)$ a,b,c,d στο R

α.Να βρείτε όλες τις σταθερές συναρτήσεις f.

β.Δείξτε ότι :$f(ab)=f(a)f(b)$ a,b στο R

γ. Δείξτε ότι: f άρτια

δ. Δείξτε ότι: $f(\alpha)\in[0,+\infty)$

ε. Δείξτε ότι: $f(x^2+y^2)\geq f(x^2)$ $\forall x,y\in R$

στ. Να συμπεράνετε ότι η f είναι αύξουσα στο R_+

ζ. Δείξτε ότι $f(x-1)+f(x+1)=2[f(x)+1]$ $\forall x\in R$

η. Δείξτε ότι $f(n)=n^2$ $\forall n\in N$

θ. Γενικεύστε την προηγούμενη σχέση για ακεραίους και κατόπιν για ρητούς.

ι. Σκεφθείτε ότι πάντα υπάρχει ρητός ανάμεσα σε δυό πραγματικούς και με την βοήθεια του στ) και της απαγωγής σε άτοπο δείξτε ότι $f(x)=x^2 \quad \forall x \in R$.

9Δ5. Βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f : N \to N$:

$(x+y)f(x^2+y^2)=xf(y)+yf(x)$

(δείξτε ότι $f(x)<f(x^2+y^2)<f(y)$ με $f(x)$ το ελάχιστο στοιχείο της όχι σταθερής f και $f(y)$ το διαδοχικό στοιχείο του συνόλου τιμών άτοπο)

9Δ6. Βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f : N^* \to N^*$ που είναι 1-1 και

$$f(f(n)) \le \frac{n+f(n)}{2}, \forall n \in N^*$$

9Δ7. Βρείτε όλες τις γνήσια μονότονες συναρτήσεις $f : R \to R$ ώστε $f(f(y)+x))=y+f(x)$ και αποδείξτε ότι για κάθε φυσικό $n>1$ δεν υπάρχουν γνήσια μονότονες συναρτήσεις $f : R \to R$ ώστε $f(f(y)+x))=y^n+f(x)$

(Για το α αν $f(y)=a$ τότε $f(a)=y$ και ανάγεστε σε γνωστό συναρτησιακό τύπο. Για το β διακρίνετε περιπτώσεις αν n άρτιος ή περιττός)

Β. ΟΡΙΑ-ΣΥΝΕΧΕΙΑ

(1) ΜΟΡΦΗ 0/0 , Α/0

(2) ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

(3) ΘΕΤΩ

(4) ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ

(5) ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΟΡΙΑ

(6) ΟΡΙΑ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

(7) ΣΥΝΕΧΕΙΑ

(8) ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

(9) BOLZANO

(10) ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΟΙ ΤΥΠΟΙ

1 ΜΟΡΦΗ 0/0 , Α/0

Α ΟΜΑΔΑ

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

1Α1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$

1Α2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{x}$ $(a>0)$

1Α3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ $m, n \in N^*$

1Α4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$ $m, n \in N^*$

1Α5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$

1Α6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left|x^3-x+1\right|}{x^2-1}$

1Α7. $\lim\limits_{x\to +2}\dfrac{\left|x^2-5x+6\right|}{x^2-4}$

1Α8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5}{x^2-4x+4}$

1Α9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-3}{x^2-3x+2}$

1Α10.. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^\nu-1-\nu(x-1)}{(x-1)^2}$

Β ΟΜΑΔΑ

1Β1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^3-3x+2}}{2x^2-x-1}$

1Β2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x}-1}$

1Β3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x^3-5x^2+4x}}$

1Β4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}-\sqrt{2x-4}}{\sqrt{x^3-6x^2+9x}}$

1Β5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x+8}+x}{x-1}$

2 ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

Α ΟΜΑΔΑ

2Α1. $\lim\limits_{x\to 0} x\eta\mu\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(Προσέξτε το αποτέλεσμα δεν είναι 1)

2Α2. $\left|f(x)-x^3\right|\le x^4$ Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$.Βρείτε το

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}$

2Α3. $\left|f(x)+2\right|\le x^2\left|\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}\right|$ βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Β ΟΜΑΔΑ

2Β1. Αν $-4\le f^2(x)+4f(x)\le |x|-4$ βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

2Β2. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2\\ |f(x)-g(x)|\le |x^2-1|\end{array}\right\}$ βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

2Β3. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} f(x)=0\\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=0\\ f(x)>0, g(x)>0\end{array}\right\}$ βρείτε το $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f^2(x)+g^2(x)}{f(x)+g(x)}$

2Β4. $\lim\limits_{x\to a}\left(f^2(x)+g^2(x)\right)=0$ βρείτε τα $\lim\limits_{x\to a} f(x), \lim\limits_{x\to a} g(x)$

(μην νομίσετε εξαρχής ότι ξεχωριστά τα όρια υπάρχουν

Βασική άσκηση)

2Β5. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0<g(x)<f(x)$ βρείτε το

$$\ell im_{x\to 0}\frac{f^3(x)+g^3(x)\eta\mu x}{f^2(x)+g^2(x)}$$

2Β6. $0<f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2f^2(x)+1}{x^2f(x)+x}$

Γ ΟΜΑΔΑ

2Γ1. Αν $f^3(x)+f(x)=x^3 \ \forall x\in R$ να βρείτε τα όρια:

$$l im_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}\ ,\ \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$

3 ΘΕΤΩ

Α ΟΜΑΔΑ

3Α1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+3}{f(x)}=+\infty$ βρείτε το $\ell im_{x\to 1} f(x)$

3Α2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-1}{x-2}=1$ βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^{\nu}f(x)-2^{\nu}}{x-2}$

3Α3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-\sqrt{x}}{x-1}=1$ βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-\sqrt[3]{x+7}+1}{\sqrt{x}-1}$

Β ΟΜΑΔΑ

3Β1. $\left.\begin{array}{c} xf(x)+f(1+x)=\eta\mu x \\ \lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lambda \end{array}\right\}$ βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

3Β2. $\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0) \\ f(x+y)=f(x)+f(y) \end{array}$ βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ αν $f(1)=4$

3Β3. $\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0}\{f(x)-xg(x)\}=3 \\ \lim\limits_{x\to 0}\{x^3f(x)+g(x)\}=1 \end{array}$ βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\{(1-x)f(x)+5g(x)\}$

4 ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ

Α ΟΜΑΔΑ

Προσδιορίστε τις τιμές ή τις σχέσεις των παραμέτρων ώστε να υπάρχουν τα παρακάτω όρια.

4Α1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{ax^2+\beta x-3}{x-2}$

4Α2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-a}{(x-2)\left(\sqrt{x}-1\right)}$

4Α3. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)\colon\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-ax+\beta}{x-1} & x>1 \\ x+2 & x\le 1\end{cases}$

4Α4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a|x-3|+\beta|x+1|-2}{x-1}$

4Α5. $\lim\limits_{x\to 4} f(x)\colon\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-ax+\beta}{\sqrt{x}-2} & x>4\\ ax^2-x+2 & x\le 4\end{cases}$

4Α6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{a|x-1|+\beta|x-3|+4}{x^2-3x+2}$

Β ΟΜΑΔΑ

4Β1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+\beta^2}-\beta}$

4Β2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+ax+a^2}-\sqrt[3]{x^2-ax+a^2}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$, $a>0$

Προσδιορίστε τις τιμές, ή τις σχέσεις, των παραμέτρων ώστε:

4Β3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(a+1)x^3-6x^2+3x+8}{x^2-1}=\beta\in R$

4Β4. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{ax^2+\beta x+4}{x+1}=\gamma\in R$

4Β5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}+ax+\beta}{x^2-4}=\dfrac{1}{4}$

4Β6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+2}-\sqrt{x}+ax+\beta}{x-1}=1$

4Β7. Βρείτε για τις διάφορες τιμές των λ,μ το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{(x-x_0)^{\lambda}\,f(x)}{(x-x_0)^{\mu}\,g(x)}$

$\lambda,\ \mu\in N^*$ όπου f, g πολυώνυμα που δεν έχουν ρίζα.

4Β8. Έστω *p(x)* πολυώνυμο τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{p(x)}{x-k}=3\,,\ \lim_{x\to 2}\frac{p(x)}{x-k}=m\in R^*,\ p(0)=-6$$

Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί *m,k* και ο τύπος του πολυωνύμου *p(x)*

4Β9. Δείξτε ότι $\lim_{a\to 0}x_1=\frac{-c}{b}$ όπου $|x_1|<|x_2|$ και x_1,x_2 οι ρίζες της $ax^2+bx+c=0$

4Β10. Βρείτε το : $\lim_{x\to 1}\frac{ax^\nu+\beta x^\mu+\gamma}{x-1}$ με $\alpha+\beta+\gamma=0$, μ, $\nu\in N^*$

4Β11. Βρείτε το : $\lim_{x\to 1}\frac{ax^\nu+\beta x^\rho+\gamma}{(x-1)^2}$ $\alpha+\beta+\gamma=0$, με $\nu\alpha+\rho\beta=0$, $\nu>2$, $\rho>2$

(Ένα θεώρημα με παραγώγους αργότερα θα έδινε πιο εύκολη λύση. Προς το παρόν χρειάζεστε μια καλή τεχνική και γνώση της ταυτότητας $(\alpha+\beta)^\nu$)

5 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΟΡΙΑ

Α ΟΜΑΔΑ

Υπολογίστε τα παρακάτω όρια:

(Θα μπορούσατε να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα του De l Hospital σε κάποιες . Αν δεν είναι γνωστό εξασκηθείτε στην τριγωνομετρία.)

5Α1. $\lim_{x\to 0}\frac{2\eta\mu^2 x}{x}$

5Α2. $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu(ax)}{\eta\mu(\beta x)}$ $\alpha\beta\neq 0$

5Α3. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{2x-\pi}$

5Α4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\eta\mu x|+x}{x}$

5Α5. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{x-\pi/2}{\sqrt{1-\eta\mu x}}$

5Α6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\eta\mu 5x}$

5Α7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+8}-2}{\eta\mu^3 4x}$

5Α8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu^{\nu}x}{x^2}$ $\nu\in N^*$

Β ΟΜΑΔΑ

5Β1. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x+\eta\mu x}{x-\eta\mu x}$

5Β2. $\lim\limits_{x\to 0} x\sigma\varphi x$

5Β3. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu(6x)}=1\\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)g(x)=10\end{array}\right\}$ βρείτε τα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}, \lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x)$

5Β4. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\eta\mu 3x-xg(x)}{4x}=5\\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\eta\mu 3x+xg(x)}{4x}=7\end{array}\right\}$ βρείτε τα $\lim\limits_{x\to 0} f(x), \lim\limits_{x\to 0} g(x)$

5Β5. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)\\ x^2 f(x)-1+\sigma\upsilon\nu^2 x=0\end{array}\right\}$ βρείτε την $f(x)$

5Β6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$ βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-f(-x)\eta\mu 4x}{x^2+\eta\mu^2 x}$

5Β7. Αν $f(x)=a\eta\mu x+b\eta\mu 2x+c\eta\mu 3x\geq 0$, $\forall x\in(-\pi,\pi)$ δείξτε ότι $a+2b+3c=0$ όταν το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=k\in R$

Γ ΟΜΑΔΑ

5Γ1. $f(x)=3x-4x^3, f_1(x)=f(x), f_n(x)=f_{n-1}(f(x))$ με $x\in[-1,1], n\in N^*$ Βρείτε το: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f_n(x)}{x}$

(Πρέπει να δείτε τι σχέση έχει με την τριγωνομετρία γι αυτό παρατηρήστε καλά τον τύπο της f(x))

6 ΟΡΙΑ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

Α ΟΜΑΔΑ

Υπολογίστε τα παρακάτω όρια:

6Α1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)$

6Α2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x^2+3}}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}\right)$

6Α3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-2\sqrt{x}+\sqrt{x+2}\right)$

6Α4 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}+2x\right)$

6Α5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}-x\right)$

6Α6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+2}-\sqrt{x^2+1}\right)$

Β ΟΜΑΔΑ

Για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων βρείτε τα:

(Μην ξεχάσετε τα πεδία ορισμού)

6Β1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt[3]{x^3+\lambda x+1}\right)$

6Β2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{\lambda x^2-5x+6}-2x-1\right)$

6Β3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\lambda x^3+\mu x^2+1}{(\mu-\lambda)x^2+2\lambda\mu x+(\lambda+\mu)}$ $\lambda\neq 0$

6Β4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\lambda x^3+x+1}{(\lambda-1)x^2+3}$

6Β5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\lambda-1)x^2-x+2}{(\lambda+3)x^2+2\lambda x+3}$

6Β6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{\alpha x^2-x}-\sqrt{\beta x^2-1}-x\right)$

Βρείτε τις παραμέτρους ή σχέσεις μεταξύ τους ώστε:

6Β7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt{4x^2+x+2}+\lambda x+\mu\right)=1$

6Β8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{4x^2+x}+(\lambda-1)x\right)=\mu-2$

6Β9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-(\lambda x+\mu)\right)=0$

6Β10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+\alpha x+\beta}+\gamma x\right)=3$

6Β11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x+1}+\sqrt{4x^2+1}-\lambda x-\mu\right)=10$

6Β12. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x-4)=0$ να βρεθεί ο

$$m:\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)+mx-2}{xf(x)-3x^2+1}=2$$

Βρείτε τα παρακάτω όρια:

(Θυμηθείτε και ανισότητες που αφορούν τριγωνομετρία)

6Β13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2+\eta\mu 3x\right)$

6Β14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x-\sigma\upsilon\nu x\right)$

6Β15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x+4+\eta\mu 4x}$

6Β16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{x}\eta\mu 3x\right)$

6Β17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\eta\mu 2x}{x^2+1}$

6Β18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(3x^2+1\right)\eta\mu 5x}{x^3+1}$

6Β19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x\eta\mu x+1}{3x^2+5x\sigma\upsilon\nu x+3}$

6Β20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2+1\right)}{x+1}$

Παρακάτω να ασχοληθείτε με εκθετικές συναρτήσεις βρίσκοντας τα

6Β21. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^{2x+1}-3}{4^x+3^x}$

6Β22. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x+a^x}{a^{x-1}+2^{x+1}}$, $a>0$

6Β23. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^{x+1}+b^x+1}{b^{x+2}+a^x+2}$ $a>0,\ b>0$

Γ ΟΜΑΔΑ

6Γ1. Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\eta\mu\sqrt{x+1}-\eta\mu\sqrt{x}\right)$

6Γ2. Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\eta\mu\sqrt{x^2+1}-\eta\mu x\right)$

6Γ3. $a_1b_1^x+a_2b_2^x+\ldots+a_nb_n^x=0$ $\forall x\in R$, $b_1<b_2<\ldots<b_n\in R_+^*$ δείξτε τότε ότι όλες οι σταθερές $a_1=a_2=\ldots=a_n=0$

7 ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Α ΟΜΑΔΑ

Να εξετάσετε ως προς την συνέχεια τις παρακάτω συναρτήσεις.

7Α1. $f(x)=\begin{cases}x^2\eta\mu\dfrac{1}{x} & ,x\neq 0\\ 1 & ,x=0\end{cases}$

7Α2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon\phi x}{x-\pi} & ,x\neq\pi\\ -1 & ,x=\pi\end{cases}$

7Α3. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-4} & ,x\leq -2\\ \dfrac{1}{x}\sqrt{6+x-x^2} & ,-2<x\neq 0<3\\ \eta\mu(x-3) & ,3\leq x\end{cases}$

7Α4. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu(x-3)}{\sqrt{x^2+7}-4} & ,x<3\\ x\,\eta\mu(\pi/x) & ,x\geq 3\end{cases}$

7Α5. $f(x)=\begin{cases}x^{\nu}\eta\mu\dfrac{1}{x} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$ $\nu\in\mathrm{N}^*$

7Α6. $f(x)=\begin{cases}1-x & ,x\leq 0\\ -1-x & ,x>0\end{cases}$ Μελετήστε ως προς την συνέχεια της f και $|f|$. Δώστε γεωμετρική ερμηνεία.

Βρείτε τις τιμές ή τις σχέσεις των παραμέτρων ώστε οι παρακάτω συναρτήσεις να είναι συνεχείς.

7Α7. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-3x+1}{x-1} & ,x>1\\ ax+2 & ,x\leq 1\end{cases}$

7Α8. $f(x)=\begin{cases}x+3 & ,x\leq 1\\ \dfrac{ax+\beta}{x-1} & ,x>1\end{cases}$

7Α9. $f(x)=\begin{cases}x^2+3x & ,x\leq a\\ x-1-\beta^2 & ,x>a\end{cases}$

7Α10. $f:(-\lambda,\lambda)\to R$, $\lambda>0$, και f συνεχής ώστε

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3 f(x)-2x^2 f(x)-x\,\eta\mu 4x}{\sqrt{x^2+9}-3}=-36$$ βρείτε το $f(0)$.

7Α11. f συνεχής και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-\sqrt{x}}{x-1}=3$ βρείτε το $f(1)$.

7Α12. Βρείτε όλες τις συνεχείς f: $x^2f(x)+1=\sigma\upsilon\nu x$.

7Α13. $f:R\to R$ συνεχής στο 0 και $\eta\mu 4x \le xf(x)$, $\forall x \in R$ βρείτε τότε το $f(0)$

7Α14. Έστω $h:R\to R$ συνεχής. Βρείτε μια άρτια f και μία περιττή g συνεχείς ώστε $f+g=h$.

7Α15. Αν $f:R\to R$ ώστε $|f(x)|\le|x|$ δείξτε ότι f συνεχής στο 0.

7Α16. $f:R\to R$, $g:R\to R$ συνεχής, $g(0)=0$, και $|f(x)|\le|g(x)|$ δείξτε ότι f συνεχής στο 0.

7Α17. $f:R\to R$: $|f(x)-f(x_0)|\le M|x-x_0|$ $\forall x,x_0 \in R$ δείξτε ότι f συνεχής.

7Α18. $f:R\to R$: $|f(x)|\le|x^2-3x+2|$ δείξτε ότι f συνεχής στο 2.

7Α19. f, g συνεχείς στο α. $h(x)=\begin{cases} f(x) , x\le a \\ g(x) , x>a \end{cases}$ Δείξτε ότι h συνεχής στο α. όταν $f(a)=g(a)$

7Α20. Έστω $f(x)=g(x)$ $\forall x \in (\alpha,\gamma)\cup(\gamma,\beta)$, $f(\gamma)\ne g(\gamma)$. Δείξτε ότι δεν μπορεί ταυτόχρονα οι f, g να είναι συνεχείς στο γ.

Β ΟΜΑΔΑ

7Β1. $f(x)=\begin{cases} x\eta\mu\dfrac{1}{x} & , x<\beta , x\ne 0 \\ x^3+x & , x\ge\beta \end{cases}$

7Β2. $f:R\to R$ συνεχής στο 0, $g:R\to R$: $|g(x)|\le k$ $\kappa>0$ και

$x\,f(x)-x\le g(x)\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)-\eta\mu x$ βρείτε το $f(0)$.

7Β3. Βρείτε δύο συνεχείς f, g και μη αρνητικές συναρτήσεις ώστε $f-g=h$ όπου h δοσμένη συνεχής συνάρτηση.

7Β4. $f^2(x)+g^2(x)=\eta\mu^2 x$ δείξτε ότι f, g συνεχείς στο π.

7Β5. $f^2(x) + g^2(x) + 2f(x) - 4g(x) + 5 \le \sqrt{|x|}$ δείξτε ότι f, g συνεχείς στο 0.

7Β6. $f(x) \ge \dfrac{1}{|x-1|}$ δείξτε ότι η f δεν μπορεί να είναι συνεχής στο 1.

8 ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

Α ΟΜΑΔΑ

8Α1. Για τις διάφορες τιμές του α κάντε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και μελετήστε την συνέχειά της.

$$f(x) = \lim_{\nu \to +\infty} \frac{(1+x)^2 + (\alpha + x)e^{\nu x}}{1 + e^{\nu x}} \qquad (\nu \in R_+^*)$$

Μελετήστε ως προς την συνέχεια τις παρακάτω συναρτήσεις.
Κατασκευάστε και μια πρόχειρη γραφική παράσταση.

8Α2. $f(x) = \lim_{\nu \to +\infty} \dfrac{x^{\nu+1} + 2x}{1 + x^{\nu}}$ $\nu \in R_+^*$

8Α3. $f(x) = \lim_{\nu \to +\infty} \dfrac{x^{2\nu} + 4^{\nu}}{9^{\nu} + x^{2\nu+1}}$ $\nu \in R_+^*$

8Α4. $f(x) = \lim_{\nu \to +\infty} 1 - \left(1 - x^2\right)^{\nu}$ $\nu \in R_+^*$

8Α5. $f(x) = \lim_{\nu \to +\infty} \dfrac{x^{\nu} + 2^{\nu+1}}{2x^{\nu} - 3 \cdot 2^{\nu-1}}$ $\nu \in R_+^*$

8Α6. $f(x) = \lim_{\nu \to +\infty} \dfrac{x^{2\nu}}{1 + x^{2\nu}}$ $\nu \in R_+^*$

8Α7. $f(x)=\lim\limits_{\nu\to+\infty}\dfrac{x^2+x^{2\nu+1}}{1+x^{2\nu}}$ $\nu\in R_+$

8Α8. $f(x)=\lim\limits_{\nu\to+\infty}\dfrac{x^{\nu}}{1+x^{\nu}}$ $\nu\in R_+^{\ *}$

9 BOLZANO

Α ΟΜΑΔΑ

9Α1. Δείξτε ότι η εξίσωση $x=a\eta\mu x+b$ $a>0,b>0$ έχει λύση στο $[0,a+b]$

9Α2. Η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και είναι $m>0,n>0$.Να δείξετε ότι υπάρχει

$$\xi\in[a,b]:\ f(\xi)=\frac{mf(a)+nf(b)}{m+n}$$

(Μια ειδική περίπτωση μέσου όρου)

9Α3. Έστω x_1 , x_2 , . . . ,x_{100} σημεία του $[0,1]$. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0\in[0,1]:|x_0-x_1|+|x_0-x_2|+\ldots+|x_0-x_{100}|=50$.

9Α4. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R , $a>0$, $f(a)\neq 0$, τότε να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,a):\dfrac{f(a-x_0)}{x_0}=\dfrac{f(x_0)}{a-x_0}$

(Εδώ αξίζει να είστε παρατηρητικοί)

9Α5. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a,b]$, $f(a)\neq 0$, τότε να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(a,b)$: $\dfrac{f(a)+f(b)}{a-b}=\dfrac{f(x_0)}{a-x_0}$

9Α6. Η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και $0<a\le f(x)\le b$, $\forall x\in[a,b]$. Να δείξετε ότι υπάρχει ξ στο $[a,b]:f^2(\xi)+\xi f(\xi)=2\xi^2$.

9Α7. Έστω $f:[0,1]\to[-1,0]$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο $[0,1]$: $f^2(\xi)+f(\xi)+\xi=0$

9Α8. Έστω $f:[a,b]\to[a,b]$,$a>0$ συνεχής στο $[a,b]$. Να δείξετε ότι υπάρχει ξ στο $[a,b]$:$\xi f(\xi)=ab$.

9Α9. Έστω $f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=-x^2+ax+b$, $b\neq 0$. Αν $f(x_1)=g(x_2)=0$ με $x_1<x_2$ δείξτε ότι η εξίσωση : $kf(x)+\lambda g(x)=0$ όπου $\kappa,\lambda>0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $[x_1,x_2]$.

9Α10. Δείξτε ότι η εξίσωση $(x^2-1)\sigma\upsilon\nu x+2\eta\mu(x^2)=0$ έχει δυο λύσεις στο $(-1,1)$.

9Α11. Να δείξετε ότι η εξίσωση : $x^3+ax^2=-b$ με $b>0$, $1+a+b<0$ έχει δυο τουλάχιστον λύσεις ετερόσημες.

9Α12. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα (a,b) και επιπλέον ισχύει: $(\lim\limits_{x\to a+}f(x)).(\lim\limits_{x\to b-}f(x))<0$ τότε να δείξετε ότι υπάρχει x_0 στο (a,b) τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$

(Και αυτή η άσκηση μπορεί να είναι θεώρημα)

9Α13. Αν $a>0$, $n\in N^*$ τότε να δείξετε ότι η εξίσωση : $x^n=a$ έχει μοναδική θετική λύση.

(Πώς θα ονομάζατε αυτή την λύση;)

9Α14. Έστω $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $a>0$, $d<0$, $a+c<b+d$. Δείξτε ότι η f έχει δυο αρνητικές και μία θετική ρίζα ακριβώς.

9Α15. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R , $f(0)=5$ και $f(x)\neq 2$ για κάθε $x\in R$ τότε να δείξετε ότι η f δεν έχει καμιά ρίζα.

9Α16. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R ,$f(0)=-2$ και $f^2(x)+xf(x)-4=0$, $\forall x\in R$ τότε να δείξετε ότι η f δεν έχει καμιά ρίζα.και βρείτε τον τύπο της

9Α17. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R , $f(0)=-1$ και $f^2(x)=3f(x)+x^2-x+4$ τότε να δείξετε ότι η f δεν έχει καμιά ρίζα.και βρείτε τον τύπο της

9Α18. Έστω f,g συνεχείς στο $[a,b]$ και $g(x)\neq 0$, $\forall x\in[a,b]$.

Να δείξετε ότι υπάρχει ξ στο (a,b) : $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{1}{\xi-a}+\dfrac{1}{\xi-b}$.

9Α19. Έστω $f:R\to R:|f(x)|=1+|x|$. Θεωρούμε τα διανύσματα:

$\vec{u}=(f(0),1),\vec{v}=(f(1),-2),\vec{w}=(2,2)$

α) Αν $\vec{u}//\vec{v}$ δείξτε ότι η f δεν μπορεί να είναι συνεχής συνάρτηση.

β) Αν $\vec{u}//\vec{w}$ και f συνεχής, τότε βρείτε τον τύπο της.

9Α20. Η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, έχει μοναδική ρίζα στο (a,b) και $f(a).f(b)>0$. Δείξτε ότι $f(a).f(x)\geq 0$ $\forall x\in[a,b]$.

9Α21. Έστω f,g συνεχείς συναρτήσεις στο R, ώστε οι γραφικές τους παραστάσεις να μην έχουν κανένα κοινό σημείο. Αν επιπλέον ισχύει: $f(a)>g(a)$ τότε δείξτε ότι : $f(x)>g(x)$ για κάθε τιμή του x. Ενώ αν $f(a)<g(a)$ τότε δείξτε ότι : $f(x)<g(x)$ για κάθε τιμή του x.

9Α22. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[α,b]$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[a,b]:f(\xi)=\dfrac{2f(k)+5f(l)}{7}$ όπου $k,l\in[a,b]$

9Α23. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[α,b]$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[a,b]:f(\xi)=\dfrac{f(k)+f(l)+f(m)}{3}$

όπου $k,l,m\in[a,b]$

(Γενικεύστε!)

9Α24. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και γνήσια μονότονη. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό

$$\xi \in (a,b): f(\xi) = \frac{f(a) + f(\frac{2a+3b}{5}) + f(b)}{3}$$

9Α25. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης με τύπο $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[3]{1-x}$.

9Α26. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης με τύπο $f(x) = \ell nx - \ell n(e-x)$.

9Α27. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης με τύπο $f(x) = \sqrt{\ell nx} + 2e^{x-1}$.

9Α28. Η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και $f(x) \in Z$, $\forall x \in [a,b]$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Β ΟΜΑΔΑ

9Β1. Η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και $a \le f(x) \le b$, $\forall x \in [a,b]$. Να δείξετε ότι υπάρχει ξ στο $[a,b]$: $f(\xi)=\xi$.

*(Η πρόταση αυτή ονομάζεται **θεώρημα σταθερού σημείου**).*

Αν επιπλέον η συνάρτηση είναι γνήσια φθίνουσα να δείξετε ότι το ξ είναι μοναδικό και δεν μπορεί να είναι ούτε το α ούτε το b.

9Β2. Οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο R , $(a+b)ab \neq 0$ και ισχύει $abf^2(x)+(a+b)g(x)+abx=0$. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x σε δυο σημεία A,B εκατέρωθεν της αρχής των αξόνων, τότε να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα x σε σημείο ανάμεσα στα A,B.

9Β3. Να δείξετε ότι η εξίσωση : $x^3=1-x$ έχει μοναδική ρίζα r στο διάστημα $(\frac{1}{2},1)$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(\frac{1}{2},r)$ τέτοιο ώστε $(x_0^3-x_0)\sigma\upsilon\nu x_0=1-2x_0$

9Β4. Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, $f(0)=f(1)$ και $g(x)=f(x+\frac{1}{n})-f(x)$. Να δείξετε ότι $g(0)+g(\frac{1}{n})+g(\frac{2}{n})+...+g(\frac{n-1}{n})=0$ και στη συνέχεια ότι υπάρχει $\xi\in[0,1-\frac{1}{n}]: f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{n})$.

9Β5. Ένα κινητό ξεκινά από το σημείο A την στιγμή $t=1$ και μετά από 2 ώρες, αφού έχει διανύσει διάστημα 160 Km, φθάνει στο σημείο B την στιγμή $t=3$. Δείξτε ότι υπάρχουν δύο σημεία Γ και Δ στην διαδρομή A και B που απέχουν απόσταση 80 Km ώστε το κινητό να διανύσει την διαδρομή $\Gamma\Delta$ σε 1 ώρα.

9Β6. Αν f συνεχής στο R και γνήσια φθίνουσα δείξτε ότι τέμνει σε μοναδικό σημείο την πρώτη διχοτόμο

9Β7. Αν f συνεχής στο R και $f(x).f(f(x))=1$, $f(9)=1/9$ υπολογίστε το $f(1)$

9Β8. Η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και $0<f(a)<f(b)$ Δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ στο (a,b):
$f(\xi)(f(a)+f(b))=2f(a)f(b)$

9Β9. Αν f συνεχής στο R και $a<b<c$ ενώ $f(a)+f(b)+f(c)=0$ να δείξετε ότι η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[\alpha,c]$. Στη συνέχεια δείξτε ότι αν $3k+l+m=0$ τότε το πολυώνυμο

$p(x)=kx^3+lx+m$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[0,2]$.

9Β10. Έστω $f: R \to (k,l)$ $k,l \in R$ συνεχής συνάρτηση με $f(0)=m \neq 0$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $a,b \in R^*: a^3 f(b)+b^3 f(a)=0$.

9Β11. Η f είναι συνεχής στο R και $\lim\limits_{x\to=\infty} \frac{f(x)}{x^n} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^n} = 0$ n περιττός . Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in R: \xi^{\nu} + f(\xi) = 0$.

9Β12. Αν $p(x)$ πολυώνυμο αρτίου βαθμού να δείξετε ότι έχει ολικό ακρότατο

9Β13. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και $f(a+b)=b^2-b+1$. Αν η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{x-a+f(x)}$ έχει πεδίο ορισμού όλο το R, τότε να δείξετε ότι ισχύει: $f(a-1)>1$

9Β14. Αν h συνεχής συνάρτηση στο R και η εξίσωση $h(x)=x$ είναι αδύνατη, τότε να δείξετε ότι και η εξίσωση $h(h(x))=x$ είναι επίσης αδύνατη

9Β15. Έστω w συνεχής στο R και $v: R \to R: v(x) = \frac{1}{w(x)-2} - \frac{1}{x^2+1}$ Αν η συνάρτηση v έχει ρίζα, τότε να δείξετε ότι η w δεν έχει ρίζα.

9Β16. Δώστε παράδειγμα δυο μη μηδενικών στο R συναρτήσεων $f,g: f(x).g(x)=0$ για κάθε $x \in R$. Στην συνέχεια βρείτε όλες τις συνεχείς στο R συναρτήσεις ώστε $\{f(x)-2\}.\{f(x)-3\}=0 \ \forall x \in R$

9Β17. Αν $a(x),b(x),f(x)$ συνεχείς στο R συναρτήσεις, ώστε τα σύνολα τιμών των a,b να είναι διαστήματα που να μην έχουν κανένα

κοινό στοιχείο και ισχύει

$\{f(x)-a(x)\}.\{f(x)-b(x)\}=0\ \forall x\in R$ τότε υποχρεωτικά θα είναι : $f(x)-a(x)=0\ \eta\ f(x)-b(x)=0\ \ \forall x\in R$

9Β18. Να δείξετε ότι η εξίσωση $ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0$ με $f>0$, $a+b+c+d+e+f=0$, $5a+4b+3c+2d+e>0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(0,1)$

9Β19. Έστω $A=[-a,a]$ f,g συνεχείς στο A , $g(A)=A$, $f(-x)=-f(x)\ \forall x\in A$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(g(x))+f(x)+g(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο A.

(Η άσκηση αυτή έχει δυσκολίες. Θα ήταν πιο εύκολη αν η g ήταν γνήσια μονότονη)

9Β20. i)Έστω f συνάρτηση που δεν είναι γνήσια μονότονη σε κάποιο διάστημα Δ. Εξηγήστε γιατί υπάρχουν $a<b<c$ στο Δ τέτοια ώστε να μην ισχύει καμιά από τις ανισότητες: $f(a)<f(b)<f(c)$, $f(a)>f(b)>f(c)$. Υποθέστε μια διάταξη για τα $f(a),f(b),f(c)$ και αποδείξτε ότι αν η f είναι συνεχής και *1-1* στο Δ τότε είναι και γνήσια μονότονη

(Πρόκειται για βασικό θεώρημα το οποίο σας προτείνεται να αποδείξετε).

ii) Με την βοήθεια του προηγούμενου ερωτήματος δείξτε ότι δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση f στο R ώστε $f(f(x))=-x$

iii)Αν f συνεχής συνάρτηση στο R και $f(a)+f(b)=f(c)+f(d)$ με a,b,c,d διαδοχικούς όρους μη σταθερής αριθμητικής προόδου τότε η f δεν μπορεί να είναι αντιστρέψιμη

Γ ΟΜΑΔΑ

9Γ1. Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση στο *[0,1]* ώστε για κάθε *y* στο *f([0,1])* η εξίσωση *y=f(x)* να έχει δυο ακριβώς λύσεις στο *[0,1]*.

(Κάντε ένα σχήμα να πάρετε ιδέες)

9Γ2. Έστω ότι $f(f(x))+f(x)=x-1 \ \forall x \in R$ και $f(0)=1$. Να δείξετε ότι η f δεν μπορεί να είναι συνεχής.

9Γ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $ax^3+bx^2-(4a+3b+2c)x+c=0$ δεν μπορεί να έχει τρεις ακέραιες λύσεις

Δ ΟΜΑΔΑ

9Δ1. Έστω $f:[1,+\infty)\to(0,+\infty)$ συνεχής συνάρτηση. Αν για κάθε τιμή του α>0 η εξίσωση $f(x)=ax$,έχει τουλάχιστον μια λύση, τότε δείξτε ότι για οποιαδήποτε συγκεκριμένη τιμή του α η εξίσωση $f(x)=ax$ έχει άπειρες λύσεις

10 ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΟΙ ΤΥΠΟΙ

Α ΟΜΑΔΑ

10Α1. Έστω $\varphi:R\to R: \varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y) \ \forall x,y \in R$ δείξτε ότι φ συνεχής στο R αν και μόνο αν η φ είναι συνεχής στο 0.

10Α2. Έστω $\varphi:R\to R : \varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y) \ \forall x,y \in R$. Αν η φ είναι συνεχής στο 0 τότε δείξτε ότι η φ είναι συνεχής στο R.

10Α3. $\varphi:R\to R: \varphi(x+y)=e^x\varphi(y)+e^y\varphi(x) \ \forall x,y \in R$ και $\lim\limits_{x\to 0}\phi(x)=0$ δείξτε ότι η φ είναι συνεχής στο R.

Β ΟΜΑΔΑ

10Β1. Αν $|\phi(x)-\phi(y)|=|x-y|$ και φ συνεχής στο R, βρείτε τον τύπο της.

Με δεδομένο ότι οποιοσδήποτε άρρητος μπορεί να προκύψει από την σύγκλιση ρητών,(**άρα μπορείτε να πείτε ότι** $\mathbf{r \to x, r \in Q, \forall x \in R}$**)**, βρείτε του τύπους των συναρτήσεων φ όπου ισχύουν:

10Β2. $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$ $\forall x,y \in R/R$, φ συνεχής στο 0.

(Δείξτε πρώτα ότι $\varphi(\rho x)=\rho\varphi(x)$ $\forall \rho \in Q$ *εξίσωση* ***Cauchy)***

10Β3. $\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)$ $\forall x,y \in R^+$, φ όχι σταθερή.

(Δείξτε πρώτα ότι $\varphi(x^\rho)=(\varphi(x))^\rho$ $\forall \rho \in Q$ *).*

10Β4. Έστω $\varphi : R \to R$ όχι σταθερή και συνεχής στο 0 συνάρτηση : $\varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y)$ $\forall x, y \in R$.

Α) Δείξτε ότι $\varphi(0)=1$, η φ δεν έχει ρίζα, $\phi(-x)=\dfrac{1}{\phi(x)}$.

Β) Είναι $\phi(x-y)=\dfrac{\phi(x)}{\phi(y)}$, $\varphi(x)>0$ για κάθε $x \in R$.

Γ) Αν μοναδική λύση της $\varphi(x)=1$ είναι το 0 τότε η φ είναι 1-1.

Δ) Η φ είναι συνεχής στο R.

Ε) Ισχύει $\varphi(\rho x)=(\varphi(x))^\rho$ για κάθε $\rho \in Q$.

Στ) Με την βοήθεια των Δ), Ε) βρείτε τον τύπο της φ.

10Β5. Αν $\varphi:R\to R$: $\varphi(x+y)-x-y=(\varphi(x)-x)(\varphi(y)-y)$ για κάθε x, y στο R και φ συνεχής, βρείτε τον τύπο της φ.

10Β6. Αν $\varphi: (0,+\infty) \to R$ συνεχής: $\nu \in N^*$ και για κάθε τιμή των x, y στο R^+ είναι $\phi\left(\sqrt[\nu]{x^\nu + y^\nu}\right) = \phi(x)\cdot\phi(y)$ βρείτε τον τύπο της φ

10Β7. Βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης φ όταν $1+(x+y)\varphi(x+y)=(x\varphi(x)+1)(y\varphi(y)+1) \quad \forall x,y \in R.$

10Β8. Έστω $\varphi(x+\alpha)=\beta\varphi(x)$, $g(x+\alpha)=g(x)$, $\varphi(0)=g(0) \neq 0$, $\beta \neq 1,0$ βρείτε τον τύπο μιας συνεχούς $h(x)$ ώστε $\varphi(x)=\beta^{h(x)}g(x)$.

10Β9. Αν $\varphi: R \to R$ συνεχής ώστε $\varphi(2x)=\varphi(x)$ δείξτε ότι η φ είναι σταθερή.

Γ ΟΜΑΔΑ

10Γ1. Αν $x\phi(y)+y\phi(x)=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\phi(xy) \quad \forall\, x,y>1$ και φ συνεχής δείξτε ότι $\varphi(x)=0$

10Γ2. Έστω φ συνεχής στο R και $\varphi(x+y)=\varphi(\varphi(x))+\varphi(\varphi(y))$. Δείξτε ότι $\varphi(x+y)+\varphi(0)=\varphi(x)+\varphi(y)$ και βρείτε τον τύπο της φ.

10Γ3. Βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu$ ώστε $\varphi(x_1+x_2+\ldots+x_\nu)=\varphi_1(x_1)+\varphi_2(x_2)+\ldots+\varphi_\nu(x_\nu)$ για κάθε $x_1, x_2, \ldots, x_\nu \in R$.

Δ ΟΜΑΔΑ

10Δ1. $f:[-1,1] \to R$ συνεχής συνάρτηση : $f(2x^2-1)=2x\cdot f(x)\ \forall x \in [-1,1]$ τότε βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

(Βοηθητικά ερωτήματα

Α) Δείξτε ότι $f(-x)=-f(x)\ ,\ \forall x \in [-1,0)\cup(0,1]$

Β) Χρησιμοποιείστε την συνέχεια ώστε να δείξετε ότι f περιττή.

Γ) Τώρα υπολογίστε τους αριθμούς $f(0), f(-1), f(1)$

Μπορείτε πια να περιοριστείτε στο διάστημα (0,1) .Τα υπόλοιπα αφήστε τα στην συμμετρία./

Δ) Η παράσταση $2x^2$-1 και το διάστημα [-1,1] ή (0,1) θυμίζουν! κάποιον τριγωνομετρικό τύπο. Γι 'αυτό να θέσετε :

$x = συνφ$, $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ *όταν το x βρίσκεται στο (0,1)και*

$g(\phi) = \frac{f(συνφ)}{ημφ}$. *Έτσι να δείξετε ότι : g(2φ)=g(φ)*

Ε) Τώρα δείξτε ότι $g(\phi) = g(\frac{\phi}{2^n})$, $\forall n \in N$

ΣΤ)Από την συνέχεια της g μπορείτε τώρα να βρείτε τον τύπο της και βέβαια και τον τύπο της f. Η συμμετρία θα επεκτείνει τα αποτελέσματά σας σε όλο το [-1,1])

10Δ2 Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις $f : R \to R$ με την ακόλουθη ιδιότητα : Για κάθε ζευγάρι αριθμών a,b με α<b η εικόνα του διαστήματος $[a,b]$ μέσω της f δηλαδή το $f([a,b])$ είναι διάστημα πλάτους $b-a$.

10Δ3 Να δείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f : R \to R$ έτσι ώστε

$f(x+y) > f(x)(1+yf(x)), \forall x,y \in (0,+\infty)$

(Αποδείξτε ότι η f τείνει στο άπειρο και είναι αύξουσα

10Δ4 Βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : R \to R$ ώστε

$(f(x)+f(y))f(\frac{x+y}{2}) = 2f(x)f(y)$, $\forall x,y \in R$

10Δ5 Αν $f(f(x))+af(x)=bx, x\in R, a>0, b>0, \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$

όπου f συνεχής να βρείτε τον τύπο της

(πρέπει να έχετε γνώσεις από αναδρομικές ακολουθίες β τάξεως)

10Δ6 Αν $f: R\to R$ συνεχής και ισχύει :

$f(f(x))+4x=4f(x)$, $\forall x\in R$ τότε να βρείτε τον τύπο της f .

(και πάλι πρέπει να έχετε γνώσεις από αναδρομικές ακολουθίες β τάξεως)

Γ. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

(1) ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΟΤΗΤΑ

(2) ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΕΙΣ

(3) ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

(4) ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΡΥΘΜΟ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

(5) ROLLE , Θ.Μ.Τ

(6) ΕΥΡΕΣΗ ΤΥΠΩΝ ΜΕ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

(7) ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

(8) ΑΚΡΟΤΑΤΑ

(9) ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ ΑΚΡΟΤΑΤΑ

(10) ΡΙΖΕΣ

(11) ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

(12) ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ

(13) DE L' HOSPITAL

(14) ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

(15) ΜΕΛΕΤΗ

1 ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΟΤΗΤΑ

Α ΟΜΑΔΑ

Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στο x_0

1Α1. $f(x)=|x-1|x$, $x_0=1$

1Α2. $f(x)=\dfrac{x|x|}{2+|x|}$, $x_0=0$

1Α3. $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$, $x_0=0$

1Α4. $f(x)=x\sqrt{|x|}$, $x_0=0$

1Α5. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$, $x_0=0$

1Α6. $f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\dfrac{\pi}{x}, x\neq 0 \\ 0 \ , \ x=0 \end{cases}$, $x_0=0$

1Α7. $f(x)=\begin{cases} x^{\nu}, x\geq 0 \\ 0 \ , x<0 \end{cases}$ $(\nu\in N)$

1Α8. Έστω $f'(1)=1$ και $H(x)=\begin{cases} f(1-x), x\geq 0 \\ f(1+x), x<0 \end{cases}$. Να εξετάσετε αν η H είναι παραγωγίσιμη στο 0.

1Α9. Έστω $f'(1)=0$ και $H(x)=\begin{cases} f(2x-3) \ , x\geq 2 \\ f(3x-5) \ , x<2 \end{cases}$. Να εξετάσετε αν η H είναι παραγωγίσιμη στο 2.

Βρείτε τις τιμές των παραμέτρων ώστε οι παρακάτω συναρτήσεις να είναι παραγωγίσιμες στο x_0

1A10. $f(x)=\begin{cases}\alpha\eta\mu x+\beta, & x<0\\ x, & 0\le x\end{cases}$, $x_0=0$

1A11. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{3x^2+1}, & x<1\\ \alpha x+\beta, & x\ge 1\end{cases}$, $x_0=1$

1A12. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+3}, & x<1\\ x^2+\alpha x+\beta, & x\ge 1\end{cases}$, $x_0=1$

1A13. $f(x)=(x-a)\sqrt{x}$, $x_0=0$

1A14. $f(x)=\begin{cases}2\alpha\eta\mu x+\beta, & -\pi\le x<0\\ \alpha\sigma\upsilon\nu 2x+\eta\mu x-1, & 0\le x\le\pi\end{cases}$, $x_0=0$

1A15. Υπάρχει ο $f'(0)$. Βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+(x-1)f(0)}{x}$

1A16. Έστω: $f(x)=(x^2+2x+6)g(x)$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-5}{x}=4$, g συνεχής. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

1A17. Έστω f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\sqrt{4+x}}{x}=0$. Αφού δείξετε ότι $f(0)=2$, βρείτε, αν υπάρχει, την $f'(0)$.

1A18. Έστω f συνεχής στο 1 και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-\sqrt{x+3}}{x-1}=5$. Δείξτε ότι $f(1)=2$ και βρείτε ,αν υπάρχει, την $f'(1)$

1Α19. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο R. Αν επιπλέον $f(x)>0$ για κάθε x στο R δείξτε ότι η $\sqrt{f(x)}$ είναι παραγωγίσιμη.

(θα μπορούσε να ήταν θεώρημα)

1Α20. Υπάρχει ο $f'(\alpha)$. Βρείτε το $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{xf(\alpha)-\alpha f(x)}{x-\alpha}$

1Α21. Υπάρχει ο $f'(\alpha)$. Βρείτε το $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{x^2 f(\alpha)-\alpha^2 f(x)}{x-\alpha}$

1Α22. Η συνάρτηση g είναι συνεχής και $g(2)\neq 0$.

Αν $f: f(x)=|x-2|g(x)$, δείξτε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 2.

1Α23. Αν $f'(0)\cdot g'(0)\neq 0$, $f(0)=g(0)=0$, δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(0)}{g'(0)}$.

1Α24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}=a\in R$ Αν υπάρχει η $f'(0)$ να βρείτε την τιμή της

1Α25. Έστω $f: R\to R$ ώστε $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε x, y, $f'(0)=\lambda$. Να δείξετε ότι f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0\in R$.

1Α26. Έστω $f: R\to R$ ώστε $f(x+y)=f(x)f(y)$ για κάθε x, y, $f'(0)=1$. $f(0)\neq 0$ Να δείξετε ότι f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0\in R$.

1Α27. Αν $f(xy)=x^2 f(y)+y^2 f(x), \forall x,y\in(0,+\infty)$, $f'(1)=2$ δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $(0,+\infty)$

1Α28. Αν $f(xy)=f(y)f(x), \forall x,y\in(0,+\infty)$, $f'(1)=1/2$ τότε δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $(0,+\infty)$

1Α29. Έστω $f: R\to R$ ώστε $f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy(x+y)$ για κάθε x, y $f'(0)=\lambda$. Να δείξετε ότι f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in R$.

1Α30. Αν $f(x+y)=f(y)\sigma\upsilon\nu x+f(x)\sigma\upsilon\nu y$ $f'(0)=1$ δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το R

1Α31. Αν $f(x+y)=e^x f(y)+e^y f(x)$ $\forall x,y\in R$, $f'(0)=2$ δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το R

1Α32. Βρείτε την $f'(0)$, αν είναι γνωστό ότι: $|f(x)-x|\le x^2$.

Β ΟΜΑΔΑ

1Β1. Δείξτε ότι η $f(x)=|x-a|$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο α αλλά είναι παντού αλλού. Έστω τώρα ότι : $A_0|x|+A_1|x-1|+...+A_n|x-n|=0$, $\forall x\in R$.Δείξτε τότε ότι όλες οι σταθερές $A_\kappa=0$

1Β2. Βρείτε τις τιμές των παραμέτρων ώστε η παρακάτω συνάρτηση να είναι παραγωγίσιμη στα x_0

$$f(x)=\left(x^2+\alpha x+\beta\right)\sqrt{|x^2-4x|}\ ,\ x_0=0\ ,\ x_0=4$$

1Β3. Έστω $f:[\alpha,\beta]\to R$ συνεχής συνάρτηση ώστε f^2 να είναι παραγωγίσιμη. Αν επιπλέον $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη. Δώστε και ένα παράδειγμα συνάρτησης g ώστε : g^2 παραγωγίσιμη στο R αλλά η g να μην παραγωγίζεται σε ολόκληρο το R.

1Β4. Έστω $f:R\to R$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και $g: g(x)=|f(x)|$. Είναι γνωστό ότι και η g είναι παραγωγίσιμη. Τότε, αν

υπάρχει x_0 : $f(x_0)=0$ δείξτε ότι $f'(x_0)=0$. Αξίζει να δώσετε και μια γεωμετρική ερμηνεία στο αποτέλεσμά σας.

1Β5. Έστω $f: R\to R$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και $g: 2g(x)=1-\sqrt{f^2(x)-2f(x)+1}$. Είναι γνωστό ότι και η g είναι παραγωγίσιμη. Τότε, αν $f(2)=0$ δείξτε ότι $f'(2)=0$.

1Β6. Υπάρχει ο $f'(0)$ και $f^2(x)+2\eta\mu x f(-x)+\ell n(1+x^2)=0$ Βρείτε το $f'(0)$

1Β7. Υπάρχει ο $f'(\alpha)$.Δείξτε ότι $f'(\alpha)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x+\alpha)-f(\alpha-x)}{2x}$

1Β8. Έστω $f'(x_0)=\alpha$, $f(x_0)=\beta$. Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^2(3x+x_0)-f^2(x+x_0)}{x}$

1Β9. Έστω $f: (0,+\infty)\to R$ ώστε $f(xy)=yf(x)+xf(y)$ για κάθε $x, y>0$ και $f'(1)=4$. Να δείξετε ότι f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 του $(0,+\infty)$.

1Β10. Έστω συνάρτηση f ώστε για κάθε $x, y\in A_f$ να ισχύει $f(x+y)-f(x)f(y)-xy=yf(x)+xf(y)-x-y$, με $f''(0)=1$, $f(x)\neq 0$. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο τυχόν $x_0\in A_f$.

1Β11. Βρείτε την $f'(0)$, αν είναι γνωστό ότι: $\left|x^2-f(x)\eta\mu x\right|\le x^4$ και f συνεχής στο R

1Β12. Αν $0\ge g(1)$, $(x-1)\eta\mu(\pi x)\le g(x)\ \forall x\in R-\{1\}$ και g παραγωγίσιμη στο 1. τότε να δείξετε ότι : $g'(1)=0$

1Β13. Έστω $f: R\to R$ ώστε $\left|f(x)-f(y)\right|\le\left|x-y\right|^{\nu}\ \nu\in N^*-\{1\}$. Να δείξετε ότι $f'(x_0)=0$.

1Β14. Έστω *f: R→R* ώστε *f(0)=0* και $|f(x)| \geq \sqrt{|x|}$, $x \in R$. Δείξτε ότι η *f* δεν παραγωγίζεται στο μηδέν.

1Β15. Έστω συναρτήσεις *f, g* με *f(1)-g(1)=0,x+ f(x)-g(x)≤1* και *f, g* παραγωγίσιμες στο *1*. Να δείξετε ότι: *f ΄(1)=g΄(1)-1*

1Β16. Έστω συναρτήσεις *f, g* με *f(p)=g(p), f(x)-g(x)≤p-x* και *f, g* παραγωγίσιμες στο *p*. Να δείξετε ότι: *f ΄(p)-g΄(p)+1=0*.

1Β17. Αν $f(1) \geq g(1)$, $xf(x) \leq g(x)$ $\forall x \in R-\{1\}$ και *f, g* παραγωγίσιμες στο *1*. Να δείξετε ότι: *f(1)+f ΄(1)=g΄(1)*

1Β18. Έστω *f: f(0)=0, f ΄(0)=1, f(x+y)≤f(x)+f(y)* για κάθε *x, y*. Δείξτε ότι *f ΄(x_0)=1*.

2 ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΕΙΣ

Α ΟΜΑΔΑ

Να βρεθούν οι παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων όπου υπάρχουν

2Α1. $f(x)=x\sqrt{x}$

2Α2. $f(x)=\dfrac{|x|-1}{|x|+1}+\dfrac{|x|+1}{|x|-1}$

2Α3. $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

2Α4. $f(x)=\sqrt{x}$

2Α5. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

2Α6. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

2Α7. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$

2Α8. $f(x)=(\sqrt[3]{x})^2$

2Α9. $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

2Α10. $f(x)=x^{\frac{4}{3}}$

2Α11. Να προσδιοριστεί η 2^{η} παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=x^2|x|$

2Α12. Αν f παραγωγίσιμη και $f(2x^3-1)=x^5+3x$, $\forall x\in R$ βρείτε την $f'(-3)$

2Α13. Αν f δυο φορές παραγωγίσιμη να βρείτε την $\left(xf(\ln x)+\left(\ln f'(x)\right)\right)'$

2Α14. Αν f δυο φορές παραγωγίσιμη να βρείτε την $\left(xf(x^2)\right)''$

2Α15. Αν $f(x)=\dfrac{x\,\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha}{x\,\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha}$, $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ δείξτε ότι η παράσταση: $I=\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$ είναι ανεξάρτητη του α.

2Α16. Αν $f(t)=e^{-\alpha t}\eta\mu(\omega t)$, α, $\omega\in R^*$ σταθερές, υπολογίστε την τιμή της παράστασης: $f''(t)+2\alpha f'(t)+(\alpha^2+\omega^2)f(t)$.

(Η παράσταση αυτή είναι διάσημη στην φυσική γιατί παριστάνει την εξίσωση της φθίνουσας Α.Τ)

2Α17. Να δείξετε ότι η συνάρτηση y με τύπο $y(x)=e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}$ επαληθεύει την εξίσωση

$4xy''(x)+2y'(x)-y(x)=0$, $\forall x\in R$

2Α18. Να δείξετε ότι η συνάρτηση y με τύπο

$y(t)=a\eta\mu(\omega t)+b\sigma\upsilon\nu(\omega t)$ επαληθεύει την εξίσωση

$y''(t)+\omega^2 y(t)=0$, $\forall t\in R$

(Και αυτή παράσταση αυτή είναι διάσημη στην φυσική γιατί παριστάνει την εξίσωση Α. Α.Τ)

2Α19. Να δείξετε ότι υπάρχουν δυο τιμές του α : η συνάρτηση y με τύπο $y_a(x)=e^{ax}$ να επαληθεύει την εξίσωση

$y''(x)-3y'(x)+2y(x)=0$, $\forall x\in R$.Στην συνέχεια δείξτε ότι η συνάρτηση $g(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ επαληθεύει την ίδια εξίσωση

2Α20. Αν $g(x)=e^{-x}y(x)$ και $y''(x)+ay'(x)+by(x)=0$, $\forall x\in R$ προσδιορίστε τα α,b ώστε $g''(x)=0$, $\forall x\in R$

2Α21. Αν f συνεχής και $x^2+f^2(x)=r^2$ να δείξετε ότι:

Α)Η f έχει σταθερό πρόσημο στο *(-r,r)*

Β)Είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο *(-r,r)*

Γ)Η παράσταση $\dfrac{f''(x)}{\left(1+\left(f'(x)\right)^2\right)^{3/2}}$ είναι ανεξάρτητη του x στο *(-r,r)*

(Αργότερα το αντίστροφο αυτής της παράστασης θα έχει να κάνει με την καμπυλότητα της f)

2Α22. Έστω *f τρεις* φορές παραγωγίσιμη στο R ώστε $\left(f'(x)\right)^2+\left(f(x)\right)^2=x^4$ Να δείξετε ότι $f''(0)=0$

2Α23. Έστω *f* δυο φορές παραγωγίσιμη στο *R**.Τότε δείξτε ότι

: $x^3\left(xf(\frac{1}{x})\right)''=f''(\frac{1}{x})$

2Α24. Αν $f(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{x\sqrt{x^2+1}}{2}+\ell n\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$,δείξτε ότι: $2f(x)=xf'(x)+\ell n\left(f'(x)\right)$

2Α25. Αν $f(x+a)+f(a-x)=2b$, $\exists f''(x)\ \forall x\in R$ δείξτε ότι : $f''(0)+f''(2a)=0$

2Α26. Έστω *f, g* δύο φορές παραγωγίσιμες στο *R* ώστε $f^2(x)+g^2(x)=x^2$. Να δείξετε ότι $(f'(0))^2+(g'(0))^2=1$.

2Α27. Έστω *f:* $R\to R$ παραγωγίσιμη και άρτια. Δείξτε ότι η f' είναι περιττή.

2Α28. Έστω *f:* $R\to R$ παραγωγίσιμη και περιττή. Δείξτε ότι η f' είναι άρτια και εξετάστε αν ισχύει και το αντίστροφο.

2Α29. Αν f δυο φορές παραγωγίσιμη και άρτια στο *R* δείξτε ότι η $g(x)=f'(x)f''(x)$ είναι περιττή συνάρτηση

2Α30. Έστω *f:* $R\to R$ παραγωγίσιμη και περιοδική με περίοδο *T*. Δείξτε ότι η f' έχει την ίδια περίοδο. Δώστε παράδειγμα συνάρτησης *g* ώστε η $g'(x)$ να είναι περιοδική όχι όμως και η *g*.

2Α31. Αν *f, g* παραγωγίσιμες και ισχύει *f(0)=g(0)=0*, δείξτε ότι δεν είναι δυνατόν να ισχύει *f(x)g(x)=x* για κάθε $x \in R$.

2Α32. Αν $P(x)=(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)$, $r_1r_2r_3 \neq 0$ τότε

$$\frac{p'(x)}{p(x)}=\frac{1}{x-r_1}+\frac{1}{x-r_2}+\frac{1}{x-r_3} \quad \forall x \in R-\{r_1,r_2,r_3\}$$

2Α33. Αν $P(x)=(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)$, $r_1r_2r_3 \neq 0$ τότε δείξτε ότι $\forall x \in R-\{r_1,r_2,r_3\}$ ισχύει

$$\left(P'(x)\right)^2-P''(x)P(x)=\frac{P^2(x)}{(x-r_1)^2}+\frac{P^2(x)}{(x-r_2)^2}+\frac{P^2(x)}{(x-r_3)^2}$$

2Α34. Αν *p(x)* πολυώνυμο και η συνάρτηση $p(x)|x-a|$ είναι παραγωγίσιμη και στο *α* τότε δείξτε ότι *p(a)=0*

2Α35. Αν $p(x)=x^3+ax^2+bx+c$ δείξτε ότι $p^{(3)}(x)=1\cdot 2\cdot 3=3!$

(Γενικεύστε για πολυώνυμο νιοστού βαθμού)

2Α36. Αν $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

τότε $p(x)=p(0)+\frac{p'(0)}{1}x+\frac{p''(0)}{1\cdot 2}x^2+\frac{p'''(0)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3$

(Γενικεύστε πάλι για πολυώνυμο νιοστού βαθμού)

2Α37. Να δείξετε ότι : $(\eta\mu x)^{(n)}=\eta\mu(x+\frac{n\pi}{2})$,$\forall n \in N$

2Α38. Να βρείτε την $\left(e^{ax}\right)^{(n)}$, $\forall n \in N$

Β ΟΜΑΔΑ

2Β1. Αν υπάρχει η $f''(0), f'(0)=2, g(x)=xf(x)$ να υπολογιστεί η $g''(0)$

2Β2. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα συναρτήσει των n ,x :

$S(x)=1+2x+3x^2+...+nx^{n-1}$, $x\neq 1$

$\Sigma(x)=x+2^2x^2+3^2x^3+...+n^2x^n$, $x\neq 1$

2Β3. Αν $f''(x)=xf(x),\forall x\in R$, $f(x)\neq 0$ δείξτε ότι η f είναι πέντε φορές παραγωγίσιμη και $f^{(5)}(0)=0$

2Β4. Αν $ln|f(x)|=xf(x)$,$\forall x\in R$, $f(x)\neq 0$ και f δυο φορές παραγωγίσιμη να βρείτε την $f''(0)$

2Β5. Αν $x^3-x^2f(x)=\left(f(x)-x\right)^3$, $\forall x\in R$,$\exists f'(x)$ δείξτε ότι :

$f(x)=xf'(x)$

2Β6. Αν f δυο φορές παραγωγίσιμη στο R και $e^{f(x)}+xf(x)=e$

Υπολογίστε, εδώ την $f''(0)$.

(λέμε ότι η f ορίζεται πεπλεγμένα και συνήθως δεν υπάρχει τρόπος να βρούμε τον τύπο της.)

2Β7. Αν $y=y(x)$, ώστε, $(a+\beta x)e^{\frac{y(x)}{x}}=x$ δείξτε ότι:

$x^3\dfrac{d^2y}{dx^2}=\left(x\dfrac{dy}{dx}-y\right)^2$. Υποθέστε ότι οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες όπου τις χρειάζεστε και $y(x)>0$, $x>0$

2Β8. Αν $f(x)g(x)=e^x$ όπου f, g παραγωγίσιμες, δείξτε ότι:

$4f'(x)g'(x)\leq e^x$, για κάθε $x\in R$

2Β9. Αν $x=t^5+5t$, $y=5t^3$,$t>0$ βρείτε την $\dfrac{dx}{dy}$

2Β10. Έστω *f, g* τρεις φορές παραγωγίσιμες στο *R* συναρτήσεις ώστε $f'(x)\cdot g'(x)=c$ για κάθε $x\in R$.Δείξτε

$(f(x)g(x))'''=f'''(x)g(x)+g'''(x)f(x)$.

2Β11. Να βρεθεί η $H''(0)$ όπου $H(x)=f(x)συνx - f(συνx)$ με *f*, δυο φορές παραγωγίσιμη στο *R*, *f* περιττή και $f'(-1)=-2$.

2Β12. Έστω $f: (0,1)\to(0,1)$ δυο φορές παραγωγίσιμη ώστε $f^2(x)+(f'(x))^2=1$. Να δείξετε ότι: $f^{(4)}(x)=f(x)$.

2Β13. Το θεώρημα: *f* παραγωγίσιμη στο $x_0 \Rightarrow f$ συνεχής στο x_0 , μπορεί να σας κάνει να υποψιαστείτε ότι η παράγωγος συνάρτηση είναι πάντα συνεχής. Τα πράγματα όμως δεν είναι έτσι. Έστω λοιπόν *f:* $f(x)=\begin{cases} x^2 \eta\mu\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}x & ,x\neq 0 \\ 0 & ,x=0 \end{cases}$. Δείξτε ότι η *f* είναι παραγωγίσιμη στο 0. Βρείτε (και με κανόνες παραγώγισης) την f' και δείξτε ότι **η f' είναι ασυνεχής στο *0*.**

2Β14. Για το πολυώνυμο *p(x)* να δείξετε ότι ισχύει η ισοδυναμία

$p(x)=(x-a)^2Q(x) \Leftrightarrow p(a)=p'(a)=0$

*(Είναι βασικό συμπέρασμα και καλύτερα **να το έχετε υπ' όψη σας ως θεωρία**)*

και έτσι να βρείτε τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες , ώστε το $p(x)=x^n-ax^{n-m}+b$,$a>0,b>0$, $n>m$ να έχει τουλάχιστον μια διπλή ρίζα .

2Β15. Αν το πολυώνυμο *p(x)* έχει μια ρίζα με βαθμό πολλαπλότητας ίσο με *κ* να δείξετε ότι το $p'(x)$ έχει την ίδια ρίζα με βαθμό πολλαπλότητας *κ-1*

2Β16. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $(x^2-1)^3$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου :$x^{4v+2}-(2v+1)x^{2v+2}+(2v+1)x^{2v}-1$

2Β17. Αν $p(x)=a(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)$ τότε να δείξετε ότι

$\forall x \in R \setminus \{a_1,a_2,...,a_n\}$ είναι: $\frac{p'(x)}{p(x)} = \frac{1}{x-a_1} + ..+ \frac{1}{x-a_n}$ και

στην συνέχεια αν όλα τα a_k είναι διαφορετικά μεταξύ τους, τότε να δείξετε ότι το $[p'(x)]^2-p(x)p''(x)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες

(διάσημο συμπέρασμα που αφορά τα πολυώνυμα)

2Β18. Αν $p(x)=(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)$, $a_1,a_2,...,a_n \neq 0$ τότε να δείξετε ότι είναι: $-\frac{p'(0)}{p(0)} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} .. + \frac{1}{a_n}$

2Β19. Αν οι ρίζες του $p(x)$ είναι πραγματικές και διαφορετικές μεταξύ τους να δείξετε ότι και οι ρίζες του $p'(x)+ap(x)$ είναι και αυτές πραγματικές για κάθε a στο R

(Πρέπει να ξέρετε λίγα πράγματα από μιγαδικούς)

2Β20. Να βρείτε τους πραγματικούς $\alpha,\beta,\gamma,\delta$: Για κάθε πραγματικό x να ισχύει: $(2x-1)^{20}-(\alpha x+\beta)^{20}=(x^2+\gamma x+\delta)^{10}$

2Β21. Να βρεθεί πολυώνυμο ν βαθμού $P(x)$: $P^{(\kappa)}(0)=\kappa!$, $\kappa=0,1,...,v$ και στην συνέχεια να λυθεί η εξίσωση $P(x)=P(1/x)$ στο R.

2Β22. Να βρεθούν όλα τα πολυώνυμα

$p(x)$: $x^2(p(x)+p''(x)) = (xp'(x))^2$

2Β23. Να βρεθούν όλα τα πολυώνυμα $p(x)$:$[p'(x)]^2 = p(x)$

2Β24. Να βρεθούν όλα τα πολυώνυμα $p(x)$

: $(p'(x))^2 p''(x) = 32(p(x)-3), p(0) = -3$

2Β25. Να βρεθούν όλα τα πολυώνυμα $p(x)$: $p'(x)=p(x)+x^3+x-2$

2Β26. Να βρεθούν όλα τα πολυώνυμα $p(x)$:$x\,p'(x)= p(x)+x^2$

2Β27. Να βρεθούν όλα τα πολυώνυμα *p(x) : p΄(x)* να είναι παράγοντας του *p(x).*

2Β28. Έστω πολυώνυμο ν βαθμού *P(x):*

$A_0 p(x)+A_1 p'(x)+...+A_\nu p^{(\nu)}(x)=0$.Δείξτε ότι όλες οι σταθερές $A_\kappa=0$

2Β29. Αν είναι *f:* $f(x)=\frac{1}{1+x}$, δείξτε ότι: $f^{(\nu)}(x)=\frac{(-1)^\nu\,\nu!}{(x+1)^{\nu+1}}$

($\nu\in N^*$) ($\nu!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot\nu$).

2Β30. Έστω *f:* $f(x)=\frac{x^2+1}{x+1}$. Βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in R$, ώστε:

$f(x)=\alpha x+\beta+\frac{\gamma}{x+1}$ και υπολογίστε έτσι την $f^{(\nu)}(x)$, $\nu\in N^*$.

2Β31. Αν $f(x)g(x)=e^x$ όπου *f, g* παραγωγίσιμες, δείξτε ότι:

$4f'(x)g'(x)\le e^x$, για κάθε $x\in R$

<u>Γ ΟΜΑΔΑ</u>

2Γ1. Έστω *f:* $f(x)=x^\alpha e^{-1/x}$, $\alpha\in R$. Δείξτε ότι: $f^{(\nu)}(x)=x^{\alpha-2\nu}e^{-1/x}p_\nu(x)$,

όπου $p_\nu(x)$ πολυώνυμο νιοστού βαθμού .

2Γ2. Αν $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, δείξτε ότι: $f^{(\nu)}(x)=\frac{p_\nu(x)}{(1+x^2)^{\nu+\frac{1}{2}}}$, όπου

$p_\nu(x)$ πολυώνυμο νιοστού βαθμού .

2Γ3. Δείξτε ότι: $\left(x^{\nu-1}e^{1/x}\right)^{(\nu)}=(-1)^\nu\frac{1}{x^{\nu+1}}e^{1/x}$. $\nu\in N$.

2Γ4. Δείξτε ότι δεν είναι δυνατόν να ισχύει $\ln x=\frac{P(x)}{Q(x)}\ \forall x\in R_+^*$

με *P,Q* πολυώνυμα

2Γ5. Έστω r_i οι n απλές ρίζες του $p(x)$, και έστω ξ είναι τυχαία ρίζα του πολυωνύμου $f(x)=p(x)-kp'(x), k \neq 0$ Τότε αν $|\rho_i| \leq R \Rightarrow |\xi| \leq R+n|k|$ ενώ αν ρ πραγματικός και $\xi=a+bi$ τότε : $|b| \leq n|k|$ όπου $n>1$ ο βαθμός του $p(x)$

3 ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

Α ΟΜΑΔΑ

Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της $f(x)$ στο x_0

3Α1. $f(x)=2^x$, $x_0=0$

3Α2. $f(x)=x^3$, $x_0=x_0$

3Α3. $f(x)=\ln x$, $x_0=1$.

3Α4. $f(x)=x^v$, $x_0=0, v \in N^*$

3Α5. $f(x)=\sqrt{|x|}$, $x_0=0$.

3Α6. Για ποια τιμή του λ η ευθεία (ε): $y=\lambda x$ εφάπτεται της C_f όπου $f(x)=x^2+1$. Δώστε γεωμετρική ερμηνεία.

3Α7. Για ποια τιμή του λ η ευθεία (ε): $y=\lambda x-4$ εφάπτεται της C_f όπου $f(x)=x^2$. Δώστε γεωμετρική ερμηνεία

3Α8. Βρείτε για ποια τιμή του λ η ευθεία $y=x$ είναι εφαπτομένη της C_f όπου $f(x)=\ln(\lambda x)$, $\lambda>0$.

3Α9. Βρείτε όλες τις εφαπτόμενες της C_f: $f(x)=\sqrt{x}$ που διέρχονται από το $(0,1)$.

3Α10. Βρείτε όλες τις εφαπτόμενες της C_f: $f(x)=\dfrac{2}{x}$ που διέρχονται από το $(0,1)$.

3Α11. Βρείτε όλες τις εφαπτόμενες της C_f: $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ που διέρχονται από το *(0,1/3)*.

(Προσέξτε! $\sqrt[3]{x^2}\neq x^{2/3}$*)* .

3Α12. Έστω *f:* $f(x)=\sqrt{5-x^2}$, και *g:* $g(x)=6-\sqrt{1+4x-x^2}$.

Βρείτε τις εφαπτόμενες της C_f που διέρχονται από το *(1,3)* και δείξτε ότι αυτές είναι εφαπτόμενες και της C_g. Εξετάστε αν τα σημεία επαφής σχηματίζουν τετράγωνο.

(Μια γεωμετρική αναγνώριση των C_f,C_g *θα απλοποιούσε κατά πολύ την άσκηση)*

3Α13. Έστω *f:* $f(x)=\ell n(\varepsilon\varphi x)$ και *g:* $g(x)=\alpha x^2+\beta$, $x\in(0,\pi/2)$. Οι C_f και C_g τέμνονται σε κάποιο σημείο $(x_0,0)$ με $x_0\in(0,\pi/2)$. Αν οι εφαπτόμενες των C_f και C_g στο $(x_0,0)$ ταυτίζονται, βρείτε τα α, β.

3Α14. Έστω *C* η καμπύλη με εξίσωση $f(x)lnf(x)=ex$, Αν *f* παραγωγίσιμη , βρείτε την εφαπτομένη της *C* στο σημείο της *(1,e)*.

3Α15. Έστω ότι η καμπύλη *C* με εξίσωση: $\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\nu}+\left(\frac{y}{\beta}\right)^{\nu}=2$, $\alpha\cdot\beta\neq0$, $\nu\in N^*$ ορίζει μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $y=f(x)$ $(x,y,\alpha,\beta>0)$. Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $(\alpha,f(\alpha))$.

3Α16. Έστω *C* η καμπύλη με εξίσωση $x^2(x+f(x))=\alpha^2(x-f(x))$, $\alpha\neq0$. Αν *f* παραγωγίσιμη στο *0*, βρείτε την εφαπτομένη της *C* στο σημείο της *(0,0)*.

3Α17. Βρείτε τα α, β, γ ώστε οι C_f και C_g όπου $f(x)=x^2+\alpha x+\beta$ και $g(x)=x^3-\gamma$ να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο τους $(1,2)$. *(Λέμε τότε ότι C_f και C_g εφάπτονται στο (1,2).)*

3Α18. Δείξτε ότι η καμπύλη $c: y=e^{\kappa x}\eta\mu(\kappa x)$ εφάπτεται των καμπύλων: $c_1: y=e^{\kappa x}$ και $c_2: y=-e^{\kappa x}$, $\kappa>0$

3Α19. Βρείτε αν υπάρχουν κοινές εφαπτόμενες των C_f και C_g όπου $f(x)=x^3-1$ και $g(x)=x^2+2x$.

3Α20. Βρείτε τις κοινές εφαπτόμενες των C_f και C_g όπου $f(x)=x^2$ και $g(x)=x^2+2x$.

3Α21. Βρείτε αν υπάρχουν τις κοινές εφαπτόμενες των C_f και C_g όπου $f(x)=\ln x$ και $g(x)=x$

3Α22. Βρείτε αν υπάρχουν τις κοινές εφαπτόμενες των C_f και C_g όπου $f(x)=1+x^2$ και $g(x)=-1-x^2$

3Α23. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f: $f(x)=x^4+\lambda x^2-\lambda x+1$ στο $(-1,f(-1))$ διέρχεται από σημείο του οποίου οι συντεταγμένες είναι ανεξάρτητες του λ.

3Α24. Βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f με τον άξονα x, στο σημείο όπου η $f(x)=\ell nx$ τέμνει τον άξονα x.

3Α25. Βρείτε το α ώστε να υπάρχει εφαπτομένη της $f(x)=x^2+\alpha x+4$ που να διέρχεται από το σημείο $(0,0)$

3Α26. Βρείτε το α ώστε η εφαπτομένη της $f(x)=\alpha x-\frac{x^3}{4}$ στο σημείο που η C_f τέμνει τον άξονα x, να σχηματίζει με τον άξονα x γωνία $\pi/4$.

3Α27. Βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της

$f(x)=\frac{\alpha^2}{x}$ με τον άξονα x στο σημείο (α,α) της C_f $(\alpha>0)$.

3Α28. Βρείτε τις εφαπτόμενες της. $f(x)=x^2$ που είναι κάθετες και τέμνονται σε σημείο του άξονα y

3Α29. Βρείτε την εφαπτόμενη της. $f(x)=x^3+2$ που διέρχεται από το $(0,0)$ και βρείτε σε ποια σημεία τέμνει την C_f ?

3Α30. Έστω ότι η εφαπτομένη της $f(x)=x^2$ στο $A(a,f(a))$ τέμνει τον άξονα y στο B Δείξτε ότι δεν μπορεί το τρίγωνο OAB να είναι ισοσκελές με κορυφή το O

3Α31. Αν $A(a,f(a))$, $B(a,g(a))$ και f , g παραγωγίσιμες συναρτήσεις ώστε $f(x)+x=g(x)$ τότε δείξτε ότι οι εφαπτόμενες τους στα A και B τέμνονται σε σημείο του άξονα $y'y$.

3Α32. Έστω ότι η εφαπτομένη της $f(x)=\sqrt{x}$ στο $A(a,f(a))$, $\alpha>0$, τέμνει τον άξονα y στο M και τον άξονα x στο B. Δείξτε ότι το M είναι το μέσον του AB

3Α33. Έστω f: $f(x)=x^2+\kappa x+\lambda$. Αν $A(\alpha,f(\alpha))$, $B(\beta,f(\beta))$ να δείξετε ότι η AB είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη της C_f στο

$x_0=\frac{a+b}{2}$

(Αυτή είναι μια χαρακτηριστική ιδιότητα κάθε παραβολής)

3Α34. Έστω f: $f(x)=\alpha/x$. Δείξτε ότι το τμήμα της εφαπτομένης C_f που περιέχεται μεταξύ των αξόνων διχοτομείται από το σημείο επαφής. $(\alpha\neq 0)$

3Α35. Η ευθεία με εξίσωση $y=3x$ εφάπτεται της C_g στο $M(2,g(2))$. Αν $f(x)=(x-1)^2g(x)$να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της f στο M.

Β ΟΜΑΔΑ

3Β1. Βρείτε για ποια τιμή του λ η ευθεία $y=x$ είναι εφαπτομένη της C_f όπου $f(x)=\lambda^x$, $\lambda>0$.

3Β2. Να δείξετε ότι η $f(x)=e^x$ και η $g(x)=-x^2$ έχουν κοινή εφαπτομένη

(Δεν ζητείται και να την βρείτε!)

3Β3. Να δείξετε ότι η $f(x)=lnx$ και η $g(x)=e^x$ έχουν κοινή εφαπτομένη

3Β4. Να δείξετε ότι η $f(x)=x^{2n}$ και η $g(x)=(x-1)^{2n-1}$ έχουν κοινή εφαπτομένη

3Β5. Να δείξετε ότι η $f(x)=e^x$ και η $g(x)=-1/x$ έχουν κοινή εφαπτομένη

3Β6. Αν $f(x)=x(x-1)...(x-n), g(x)=-x(x-1)...(x-n-1)$

τότε δείξτε ότι σε κάποια από τα κοινά σημεία των C_f ,C_g υπάρχει κοινή εφαπτομένη τους

3Β7. Να βρείτε για ποιες του θετικού ακέραιου $v<4$ η εφαπτομένη της $f(x)=x^v$ τέμνει την C_f και σε δεύτερο σημείο εκτός από το σημείο επαφής

3Β8. Έστω $g_\lambda(x)=\lambda f(x)$ όπου f παραγωγίσιμη στο R. Θεωρούμε τις εφαπτόμενες των g_λ στα $(x_0,g_\lambda(x_0))$. Δείξτε ότι διέρχονται δια σταθερού σημείου ανεξάρτητου του λ. ($f'(x_0)\neq 0$)

3Β9. Αν $f'(x)\neq 0$, $h(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$, $\exists f''(x)$ τότε να δείξετε ότι η εφαπτομένη της *h* στο σημείο που τέμνει τον άξονα *x'x* είναι παράλληλη με την ευθεία *x-y=0*.

3Β10. Έστω *C* η καμπύλη με εξίσωση: $\dfrac{\alpha}{x^2}+\dfrac{\beta}{y^2}=1$, $\alpha\cdot\beta\neq 0$. Η εφαπτομένη της *C* στο (x_0,y_0) διέρχεται από το $(x_1,0)$. Δείξτε ότι: $x_0^3=\alpha x_1$.

3Β11. Έστω $f:R\to R$, $f(x)f(-x)=|x|$, $f(x)>0\ \forall x\in(0,+\infty)$, *f* παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$. Τότε δείξτε ότι η *f* είναι παραγωγίσιμη στο *R** και δεν είναι παραγωγίσιμη στο *0* και εξετάστε αν ορίζεται εφαπτομένη της *f* στο *(0,0)*.

3Β12. Αν *p(x)* πολυώνυμο τουλάχιστον δευτέρου βαθμού και είναι *y=g(x)* η εξίσωση εφαπτομένης του *p(x)* στο σημείο *(α,p(α))* να δείξετε ότι το πολυώνυμο *p(x)- g(x)* έχει παράγοντα το $(x-a)^{2.}$

4 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΡΥΘΜΟ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Α ΟΜΑΔΑ

4Α1. Η περίμετρος μιας κυκλικής κηλίδας μεταβάλλεται με ρυθμό *2m/sec* όταν η ακτίνα της είναι *12m*. Να βρεθεί την ίδια στιγμή ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού της

4Α2. Ο όγκος μιας σφαίρας μειώνεται με ρυθμό $-4m^3/sec$ την στιγμή που η ακτίνα της είναι *2m*. Να βρεθεί την ίδια στιγμή ο ρυθμός μεταβολής της επιφάνειάς της. (Δίνεται ότι η επιφάνεια $E=4\pi\rho^2$).

4Α3. Να βρεθεί ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της επιφάνειάς κύβου την ίδια στιγμή που η διαγώνιος του αυξάνεται με ρυθμό $3m/sec$ και ο όγκος του είναι $8m^3$

4Α4. Ο όγκος κώνου είναι $8m^3$ και το ύψος του $2m$ την στιγμή που οι ρυθμοί μεταβολής τους είναι και οι δυο ίσοι με $1m^3/sec$ και $2m/sec$ αντίστοιχα. Να βρεθεί την ίδια στιγμή ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της επιφάνειάς της βάσης του και της γωνίας της κορυφής του

4Α5. Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου $ΑΒΓΔ$ αυξάνονται με ίσους στιγμιαίους ρυθμούς μεταβολής $2m/sec$ όταν το $ΑΒΓΔ$ είναι τετράγωνο εμβαδού $1m^2$.Να βρεθεί την ίδια στιγμή στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της διαγωνίου του

4Α6. Να βρεθεί ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής του όγκου κυλίνδρου την στιγμή που η ακτίνα της βάσης του αυξάνεται με ρυθμό $3m/sec$, το ύψος του αυξάνεται με ρυθμό $1m/sec$, ο όγκος του είναι $8m^3$ και η ακτίνα του είναι $2m$

4Α7. Ένας άνθρωπος ύψους $170cm$ κινείται προς μια φωτεινή πηγή που απέχει από το έδαφος $300cm$. Αν η ταχύτητα του ανθρώπου είναι $7,2Km/h$ να βρεθεί με τι ταχύτητα κινείται η σκιά του κεφαλιού του.

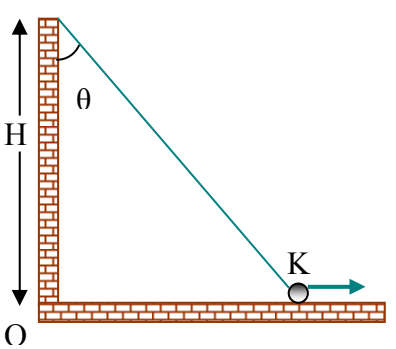
4Α8. Σε μια ευθύγραμμη κίνηση το μέτρο της ταχύτητας είναι ανάλογο της ρίζας της μετατόπισης. Αν η κίνηση δεν αλλάζει φορά δείξτε ότι η επιτάχυνση του κινητού είναι σταθερή.

4Α9. Η βαρομετρική πίεση p μεταβάλλεται συναρτήσει του ύψους h σύμφωνα με την σχέση $ln\frac{p}{p_0}=c.h$ όπου c μια σταθερά και p_0 η πίεση στο έδαφος ίση με $1Atm$.Σε ύψος $5430\ km$ η πίεση γίνεται το μισό της p_0.Να βρεθεί σ αυτό το ύψος ο ρυθμός μεταβολής της πίεσης ως προς το ύψος.

4Α10. Κινητό κινείται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $Ax+By+C=0$. Αν είναι $B\neq 0, \frac{dx}{dt}=K$ σταθερό δείξτε ότι το διάνυσμα της ταχύτητας του κινητού είναι σταθερό.

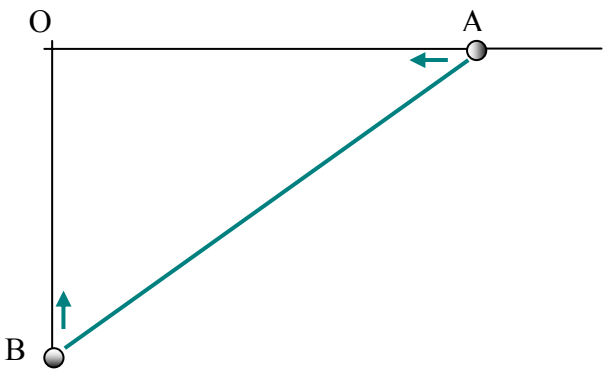
4Α11. Ένα σακί περιέχει άμμο η οποία διαφεύγει από μια τρύπα έτσι ώστε μετά από t sec η ποσότητα που βρίσκεται στο σακί να είναι $s(t)=50(1-\frac{t^2}{15})^3$ κιλά. Να βρείτε πόση άμμο περιέχει αρχικά το σακί, με ποιόν ρυθμό τρέχει η άμμος μετά από $1sec$ και σε πόσο χρόνο περίπου θα αδειάσει το σακί.

4Α12.



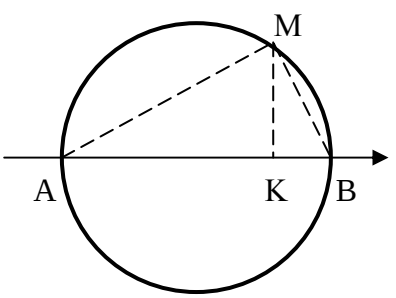
Όταν $OK=s$ τότε είναι $\frac{ds}{dt}=V$. Βρείτε την ίδια χρονική στιγμή το $\frac{d\theta}{dt}$. Δεδομένα θεωρείστε τα s,V,H

4Α13.



Τα κινητά *Α,Β* κινούνται προς το *Ο* χωρίς να έχουν αλλάξει φορά. Την στιγμή που *ΟΑ=4Km* και *ΟΒ=3Km* οι ταχύτητες τους είναι αντίστοιχα *8Km/h , 4Km/h*. Να βρεθεί την ίδια στιγμή ο ρυθμός μεταβολής του μήκους *ΑΒ*, του εμβαδού του τριγώνου *ΟΑΒ*, καθώς και οι ρυθμοί μεταβολής των γωνιών του τριγώνου.

4Α14.

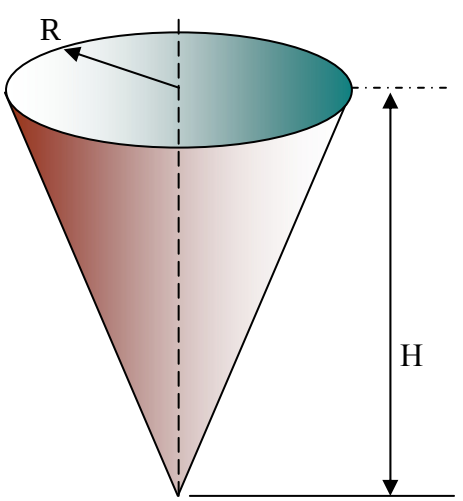


Είναι *ΑΒ=2m* και το *Κ* κινείται με σταθερή ταχύτητα *0.1m/s* από το *Α* προς το *Β*. Υπολογίστε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας *ΜΑΒ* σε συνάρτηση με τον χρόνο.

4Α15. Αν $\frac{dx}{dt}=e^t+e^{-t}$, $\frac{dy}{dt}=e^t-e^{-t}$ και το σημείο $M(x,y)$ στην αρχή των χρόνων βρίσκεται στο $(0,2)$, τότε να δείξετε ότι το M διαγράφει τόξο υπερβολής και να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας που σχηματίζει η εφαπτομένη της υπερβολής στο M με τον άξονα $\chi'\chi$ την στιγμή κατά την οποία $y=e+\frac{1}{e}$

4Α16. Βλήμα $B(x,y)$ εκτοξεύεται από το σημείο O και η εξίσωση τροχιάς του είναι $y=2x-x^2$. Είναι γνωστό ότι $x(0)=0, \frac{dx}{dt}=A=$σταθερό. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του y όταν $x=\beta$ και η επιτάχυνση του βλήματος την ίδια χρονική στιγμή. Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας που σχηματίζει η OB με τον άξονα x την ίδια χρονική στιγμή ?

4Α17.



Ο κώνος γεμίζει με υγρό με σταθερή παροχή $0.1m^3/s$,$H=1m$, $R=0,4m$. Βρείτε τον ρυθμό με τον οποίο ανεβαίνει η στάθμη του υγρού την στιγμή που έχει φθάσει στο μισό ύψος του κώνου.

4Α18. Σε μια Α.Α.Τ να δείξετε ότι : ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας ως προς την απομάκρυνση είναι ίσος με την δύναμη επαναφοράς, ενώ ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας ως προς την ταχύτητα είναι ίσος με την ορμή του σωματιδίου που εκτελεί την ΑΑΤ. Βρείτε ακόμη το πηλίκο των στιγμιαίων ρυθμών μεταβολής της δυναμικής και κινητικής ενέργειας

4Α19. Να βρεθεί η επιτάχυνση κινητού που κινείται ευθύγραμμα όταν ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας ως προς την απομάκρυνσή είναι $2sec^{-1}$ και η ταχύτητά του την ίδια στιγμή είναι $5m/sec$

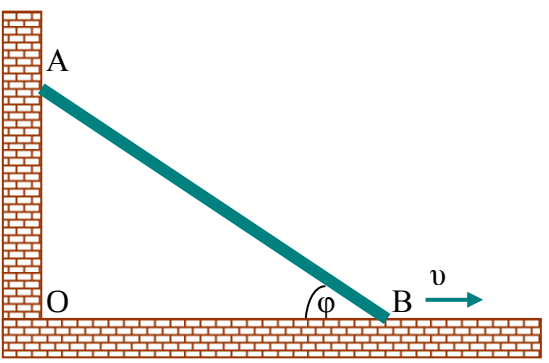
4Α20. Ένα κωνικό παγόβουνο αναδύεται με ταχύτητα $0,1m/μήνα$ Η γωνία του κώνου είναι 60^0 και το ύψος του $100m$ Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της κυκλικής βάσης που είναι ορατή στην επιφάνεια της θάλασσας καθώς και τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής του όγκου που εξέχει την στιγμή κατά την οποία έχει αναδυθεί σε ύψος $25m$

Β ΟΜΑΔΑ

4Β1. Ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται το μήκος μιας χορδής AB κύκλου είναι A την στιγμή που το μήκος της είναι $Δ$. Βρείτε την ίδια στιγμή τον ρυθμό μεταβολής του μικρότερου κυκλικού τμήματος .(Θεωρείστε ότι ακτίνα του κύκλου είναι R)

4Β2. Ο όγκος του κορμού ενός δέντρου είναι ανάλογος του κύβου της διαμέτρου του και η φλούδα του κορμού αυξάνει ομοιόμορφα από χρόνο σε χρόνο. Δείξτε ότι ο ρυθμός αύξησης του όγκου, όταν η διάμετρος είναι *90 cm*, είναι *25* φορές τον ίδιο ρυθμό, όταν η διάμετρος είναι *18 cm*.

4Β3.



Η σκάλα ΑΒ μήκους *d* γλιστράει όπως στο σχήμα, ώστε η ταχύτητα του άκρου Β να είναι σταθερή και ίση με *υ*. Αρχικά ήταν κατακόρυφη. Αν *t* η διάρκεια κίνησης πριν το Α να φτάσει στο έδαφος, τότε

ι)Να εκφράσετε τα *OA* , *OB* συναρτήσει του *t* και να αποδείξετε ότι το μέτρο της ταχύτητας του Α δίνεται από την σχέση $\upsilon_A = \dfrac{\upsilon^2 t}{\sqrt{d^2 - \upsilon^2 t^2}}$

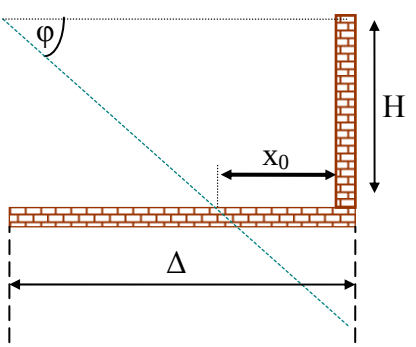
ιι)Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου *OAB* συναρτήσει του *t*

ιιι)Να βρείτε το μέτρο της επιτάχυνσης του άνω άκρου της σκάλας

ιν)Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας *φ*. *

4Β4. Σημείο Μ κινείται πάνω στην καμπύλη με εξίσωση $9x^2+16y^2=25$ και σε κάθε θέση ισχύει $\frac{dx}{dt}=2$.Βρείτε το $\frac{dy}{dt}$ όταν $x=5/3$ και όταν $x=0$.Ακόμη όταν $x=y=1$ βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{v}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}$ και δείξτε ότι είναι ίδιος με τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης στο ίδιο σημείο.

4Β5.



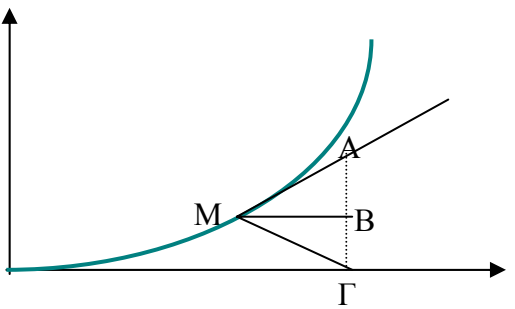
Ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας φ είναι ίσος με ω όταν το μήκος της σκιάς είναι x_o. Βρείτε με τι ταχύτητα αυξάνεται η σκιά εκείνη τη στιγμή. *(Η,Δ* δεδομένα)

4Β6. Η καμπύλη έχει εξίσωση $y=x^2$ και η συντεταγμένη $x_M=t/2$ με $0<t<1$.

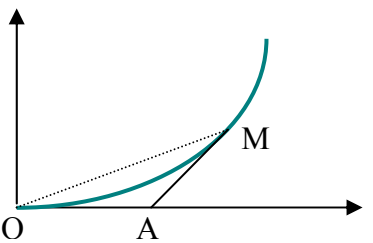
i) Να βρεθούν οι ρυθμοί μεταβολής των γωνιών $A\hat{M}B, B\hat{M}\Gamma$

ii) Να βρεθούν οι ρυθμοί μεταβολής των μηκών $MA, MB, M\Gamma$

iii) Να βρεθεί και ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $MA\Gamma$(η MA είναι εφαπτομένη της καμπύλης και $\Gamma(1/2,0)$)

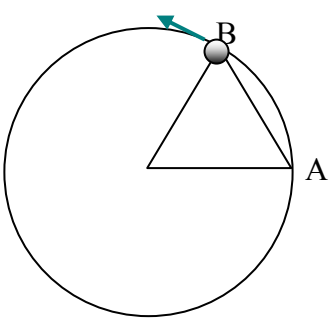


4B7.



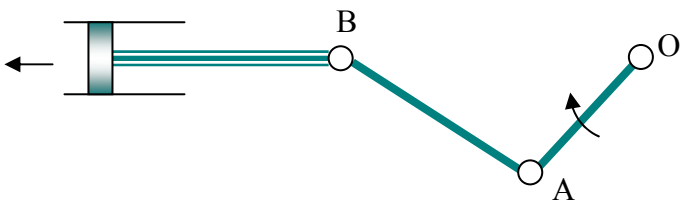
Η καμπύλη έχει εξίσωση $y=x^2$.Όταν η γωνία $O\hat{M}A$ παίρνει την μέγιστη τιμή της ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του A είναι ίσος με $3/2$ όπου MA είναι εφαπτομένη της καμπύλης. Βρείτε τότε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας $M\hat{O}A$

.4B8.



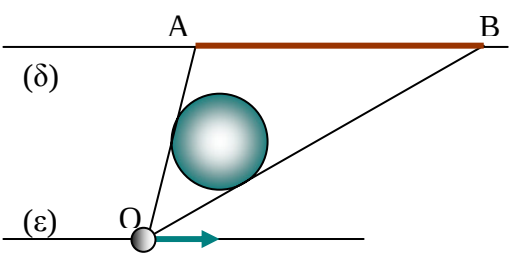
Ένα κινητό ξεκινά από το A και κινείται πάνω στον κύκλο. Όταν φθάνει στο B μετρήθηκε ότι η επίκεντρη γωνία είναι 60^0 και το μέτρο της ταχύτητας του κινητού $2m/sec$. Να βρείτε την ίδια στιγμή τον ρυθμό μεταβολής του μήκους της χορδής AB.

4Β9. Η ράβδος *ΟΑ* περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα *ω* και έχει μήκος *l* ενώ η *ΑΒ* έχει μήκος *d*. Να βρεθεί η ταχύτητα του εμβόλου συναρτήσει του χρόνου *t*



4Β10. Έστω $y=\ln x$. Η εφαπτομένη της στο σημείο της $A(a,f(a))$ τέμνει τον άξονα *x* στο σημείο *B* Αν ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής του y είναι *4m/sec* όταν $a=e$ να βρεθεί την ίδια στιγμή ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής του *B*

4Β11. Το κινητό Ο κινείται με σταθερή ταχύτητα *2m/sec* κατά μήκος της ευθείας *(ε)*. Κυκλικό εμπόδιο έχει το κέντρο του στην μεσοπαράλληλη των ευθειών *(ε)* , *(δ)*, έχει διάμετρο *2m* ίση με το μισό της απόστασης των *(ε)* , *(δ)* και δημιουργεί την «σκιά» *ΑΒ*. Να βρεθεί ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής του μήκους *ΑΒ* την στιγμή κατά την οποία το τρίγωνο *ΟΑΒ* γίνεται ορθογώνιο για πρώτη φορά



5 ROLLE , Θ.Μ.Τ

Α ΟΜΑΔΑ

5Α1. Έστω $f(x)=ax^4+x^2-ax+1$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο $(0,1)$: $f'(\xi)=2\xi$

5Α2. Δείξτε ότι μεταξύ δυο διαδοχικών ριζών ενός πολυωνύμου υπάρχει ρίζα της παραγώγου του

5Α3. Αν $f(x)=-x^3+x^2+2x+2$ δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(-1,0)$: η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον $x'x$.

5Α4. Έστω f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,b]$ και $f(\alpha)=b$, $f(b)=a$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο (a,b) : η εφαπτομένη της C_f στο ξ να είναι παράλληλη προς την ευθεία $y=-x$

5Α5. Έστω f συνεχής στο $[2,3]$, παραγωγίσιμη στο $(2,3)$ και $f(3)=f(2)+5$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο $(2,3)$: $f'(\xi)=2\xi$

5Α6. Έστω f συνεχής στο $[a,b]$, παραγωγίσιμη στο (a,b) και $f(a)-f(b)=a^2-b^2$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο (a,b): $f'(\xi)=2\xi$

5Α7. Έστω f συνεχής στο $[a,b]$, παραγωγίσιμη στο (a,b) και $f(a)=b^2$, $f(b)=a^2$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο (a,b): $f'(\xi)=2\xi-2(a+b)$

5Α8. Έστω f συνεχής στο $[1,3]$, παραγωγίσιμη στο $(1,3)$ και $f^2(3)=f^2(1)+8$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο $(1,3)$: $f'(\xi)\,f(\xi)-\xi=0$

5Α9. Έστω f συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f(1)=0$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο $(0,1)$: $\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$

5Α10. Έστω f συνεχής στο $[0,b]$, παραγωγίσιμη στο $(0,b)$ και $f(0)=0$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο $(0,b)$: $2f'(\xi)\,f(\xi)=\dfrac{f^2(b)}{b}$

5Α11. Έστω f παραγωγίσιμη στο R , $m \le f'(x) \le M \ \forall x \in R$. Δείξτε ότι υπάρχει K : $|f(x)-f(y)| \le K|x-y| \ \ \forall x,y \in R$.

Αν 0<K<1 η f ονομάζεται συνάρτηση συστολής

5Α12. Έστω f παραγωγίσιμη στο R και $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in R$. Δείξτε ότι η f είναι 1-1 συνάρτηση. Ισχύει το αντίστροφο?

5Α13. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,\alpha+2b]$, παραγωγίσιμη στο $(\alpha,\alpha+2b)$ και k ο αριθμός που ορίζεται από την ισότητα $k = \dfrac{f(a)-2f(a+b)+f(a+2b)}{b^2}$ Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο $(0,b)$: $f'(a+2\xi)-f'(a+\xi)=k\xi$

5Α14. Έστω ότι f' συνεχής στο $[0,2]$ και $f(0)+f(2)=f(1)$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο $(0,2)$: $f(1)=2f(2)-2f'(\xi)$

5Α15. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο στο (α,b) και υπάρχουν ξ_1,ξ_2 , $t_1>0,t_2>0 : t_1 f'(\xi_1)+t_2 f'(\xi_2)=0$. Δείξτε ότι υπάρχει ρίζα της f' στο (α,b).

5Α16. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,b]$, παραγωγίσιμη στο (α,b) και $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) \in R$.Δείξτε ότι η $f'(x)$ είναι συνεχής στο (α,b). Το x_0 είναι οποιοδήποτε σημείο του διαστήματος (α,b).

(Αυτή είναι μια σημαντική ιδιαιτερότητα που παρουσιάζει κάθε f ')

5Α17. Έστω f δυο φορές παραγωγίσιμη στο R και $2f(3)=f(1)+f(5)$. Δείξτε ότι η $f'(x)$ δεν είναι 1-1 συνάρτηση και ότι η $f''(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα

5Α18. Έστω f δυο φορές παραγωγίσιμη στο R και $f(0)=f(1)=1$, $f(-1)=-1$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο $(-1,1)$: $f''(\xi)=6\xi-2$

5Α19. Έστω f δυο φορές παραγωγίσιμη στο R και $a<b<c$ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου . Αν και τα $f(a),f(b),f(c)$ είναι και αυτά διαδοχικοί όροι αριθμητικής μιας άλλης προόδου, τότε δείξτε ότι η $f''(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα

5Α20. Έστω $f : R \to R$ τρεις φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε $f(1)=f(0)=f'(0)= f''(0)=0$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο $(0,1)$: $f'''(\xi)=0$.

5Α21. $f:R\to R$ δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η εφαπτομένη της C_f σε τυχαίο σημείο της C_f έχει για μοναδικό σημείο τομής με την C_f το σημείο επαφής όταν f'' έχει σταθερό πρόσημο.

5Α22. Δείξτε ότι αν στην γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης υπάρχουν τρία ή και περισσότερα συνευθειακά σημεία. τότε η παράγωγός της δεν μπορεί να είναι *1-1*

5Α23. Έστω f συνεχής στο $[3,5]$, παραγωγίσιμη στο $(3,5)$ και $f(3)=6$, $f(5)=10$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο $(3,5)$: η εφαπτομένη της f στο ξ να διέρχεται από το $(0,0)$. **(υπ)**

5Α24. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,b]$, παραγωγίσιμη στο (α,b) και $f(a)=f(b)=0$, $a>0$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ : η εφαπτομένη της f στο ξ να διέρχεται από το $(0,0)$.

5Α25. Έστω $f : (0,+\infty) \to R$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν υπάρχει «χορδή» της C_f που διέρχεται από το $(0,0)$ τότε υπάρχει και εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το $(0,0)$

5Α26. Έστω *f* συνεχής στο *[α,b]* , παραγωγίσιμη στο *(α,b)* και *2f(a)=f(b)*. Θέτουμε $g(x)=\dfrac{f(x)}{x-2a+b}$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ : $g'(\xi)=0$ και στην συνέχεια η εφαπτομένη της f στο ξ να διέρχεται από το *(2α-b,0)*.

5Α27. Έστω *f* συνεχής στο *[1,2]* , παραγωγίσιμη στο *(1,2)* και *f(2)=4f(1)*. Θέτουμε $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο *(1,2)* : $g'(\xi)=0$. Δείξτε στην συνέχεια ότι υπάρχει σημείο $A\in C_f$: η διάμεσος *ΑΜ* του τριγώνου *ΟΑΒ* να είναι εφαπτομένη της C_f . *Β* είναι η προβολή του *Α* στον xx' και *Ο* η αρχή των αξόνων .

5Α28. Έστω f παραγωγίσιμη στο *R* και η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει σε δυο τουλάχιστον σημεία την πρώτη διχοτόμο των αξόνων . Δείξτε ότι υπάρχει εφαπτομένη της συνάρτησης που σχηματίζει με τον άξονα *x* γωνία 45^0

5Α29. Έστω *f* συνεχής στο *[α,b]* , παραγωγίσιμη στο *(α,b)* και *f(a)=f(b)* Αν *Α(a,f(a))* , *Β(b,f(b))* δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(a,b)$: η $\varepsilon\varphi(\widehat{MAB})$ να είναι τριπλάσια της $\varepsilon\varphi(\widehat{MBA})$ όπου *Μ(ξ, (ξ))*

5Α30. Έστω $f:R\to R$ τρεις φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν υπάρχει εφαπτομένη *(ε)* της C_f που εφάπτεται της C_f και σε ένα άλλο σημείο εκτός του σημείου επαφής τότε υπάρχει ξ $f'''(\xi)=0$

5Α31. Έστω $f:[0,1]\to[0,1]$ παραγωγίσιμη συνάρτηση : $f(0)=0$, $f(1)=1$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1): f(\xi)=1-\xi$ και στην συνέχεια ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2: f'(\xi_1)f'(\xi_2)=1$

5Α32. Έστω f συνεχής στο $[-\alpha,\alpha]$, παραγωγίσιμη στο $(-\alpha,\alpha)$ και $f(-\alpha)=f(\alpha)=0, f(0)=a$. Δείξτε ότι υπάρχουν δυο εφαπτόμενες της C_f κάθετες μεταξύ τους.

5Α33. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,3\alpha]$, παραγωγίσιμη στο $(\alpha,3\alpha)$ και $f(a)=2\alpha, f(3a)=a>0$ δείξτε ότι υπάρχει ξ στο $(a,3\alpha)$ $:2f(\xi)=\xi+\alpha$. Μετά δείξτε ότι υπάρχουν αριθμοί y_i του διαστήματος $(\alpha,3\alpha): f'(y_1)f'(y_2)=1/4$.

5Α34. Αν f παραγωγίσιμη στο $[a,a+1]$, $f(a)=a+1$, $f(a+1)=a-2$, δείξτε ότι υπάρχει ξ στο $(a,a+1): f(\xi)=3\xi-2(\alpha+1)$. Μετά δείξτε ότι υπάρχουν αριθμοί y_i του διαστήματος $(\alpha,\alpha+1)$: $f'(y_1)f'(y_2)=9$.

5Α35. Έστω f,g συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμες στο (α,β) και $g'(x)\neq 0$ στο (α,β) Δείξτε ότι $g(a)\neq g(\beta)$ και ότι υπάρχει ξ στο (a,β) : $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(\beta)-f(a)}{g(\beta)-g(a)}$ Ποιο θεώρημα προκύπτει αν $g(x)=x$

5Α36. Έστω f,g συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμες στο (α,β) και $f(x)\neq 0$ στο $[\alpha,\beta]$ Δείξτε ότι αν $g(a)-g(b)=\ell n\dfrac{f(a)}{f(b)}$ τότε υπάρχει ξ στο (a,β) : $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=g'(\xi)$

5Α37. Έστω f,g συνεχείς στο $[0,1]$, παραγωγίσιμες στο $(0,1)$, $f(x)g(x)\neq 0\ \forall x\in(0,1)$ και $f(0)=g(1)=0$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο $(0,1)$: $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}+\dfrac{g'(\xi)}{g(\xi)}=0$

5Α38. Έστω *f,g* συνεχείς στο *[a,b]*, παραγωγίσιμες στο *(a,b)*, *a>0* , *f(x)g(x)* $\neq 0$ $\forall x \in (a,b)$ και $bf(a)g(a) = af(b)g(b)$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο *(a,b)* : $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} = \frac{1}{\xi}$

5Α39. Έστω *f,g* συνεχείς στο *[α,β]* , παραγωγίσιμες στο *(α,β)* και *f(x)g(x)* $\neq 0$ στο *[α,β]* . Αν *f(α)g(β) =g(α)f(β)*..Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο *(a,β)* : $f'(\xi)g(\xi) = g'(\xi)f(\xi)$

5Α40. Έστω *f,g* συνεχείς στο *[α,β]* , παραγωγίσιμες στο *(α,β)* και $f(a) = g(b) = 0$ Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο *(a,β)* : $f'(\xi)g(\xi) + g'(\xi)f(\xi) + a + b = 2\xi$

5Α41. Έστω *f,g* συνεχείς στο *[α,β]* , παραγωγίσιμες στο *(α,β)* και *f(α)=0* , *f(β)=0* , *g(α)g(β)* $\neq 0$, $f'(x)g(x) \neq g'(x)f(x)$ $\forall x \in (\alpha,\beta.)$ Δείξτε ότι δεν είναι δυνατόν να ισχύει $g(x) \neq 0$ $\forall x \in (\alpha,\beta)$.

5Α42. Έστω *f,g* συνεχείς στο *[α,β]* , παραγωγίσιμες στο *(α,β)* και $f'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)$ Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο *(a,β)*

$$\frac{f'(\xi)}{f(a) - f(\xi)} + \frac{g'(\xi)}{g(b) - g(\xi)} = 1$$

Β ΟΜΑΔΑ

5Β1. Έστω *f* συνεχής στο *[0,π/2]* , παραγωγίσιμη στο *(0,π/2)* και *f(0)=0.* Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο *(0,π/2)*: $f'(\xi) = f(\xi)\varepsilon\varphi\xi$

5Β2. Έστω f παραγωγίσιμη στο *R* , *f(0)=0.* Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο *(0,π/4)*: $f'(\xi) = \frac{1+\varepsilon\phi\xi}{1-\varepsilon\phi\xi} f(\xi)$

5Β3. Έστω $f : [0,1] \to [0,+\infty)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και *0<a<b<1 : f(a)=0=f(0)* , *f(b)=b.* Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο *(0,1)* : *f'(ξ)=c* όπου *c* τυχαίο σημείο του *(0,1)* .

5Β4. Έστω *f* συνεχής στο *[α,b]* , παραγωγίσιμη στο *(α,b)* και *f(a)=f(b)=0.* Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο *(a,b)* : $f'(\xi)=k\,f(\xi)$

5Β5. Έστω *f* παραγωγίσιμη στο *[0,1]* , *f(0)=0* , $f(x)\neq 0$ $\forall x\in(0,1]$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο *(0,1)* :

$$\frac{2f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$$

5Β6. Έστω *f* συνεχής στο *[α,b]* , παραγωγίσιμη στο *(α,b)* και $f(x)\neq 0$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο *(a,b)* :

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{1}{b-\xi}+\frac{1}{a-\xi}$$

5Β7. Έστω *f* συνεχής στο *[α,b]* , παραγωγίσιμη στο *(α,b)* Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο *(a,b)* : $f'(\xi)=\frac{1}{b-\xi}-\frac{1}{\xi-a}$

5Β8. Έστω $f:[1,4]\to(0,+\infty)$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο και *f(1)f(2)=f(3)f(4).* Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο *(1,4):* $f'(\xi)=0$

5Β9. *f* παραγωγίσιμη στο *[0,1]* με συνεχή παράγωγο και $f'(0)>0$, *f(1)-f(0)=1/2* Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο *(0,1)* : $f'(\xi)=2\xi$

5Β10. Αν *f* παραγωγίσιμη στο *[-1,1]* με συνεχή παράγωγο και $f'(-1)<3$, *f(1)-f(-1)>3* Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο *(-1,1)* : $f'(\xi)=3\xi^2$

5Β11. Έστω *f* συνεχής στο *[α,b]* , δύο φορές παραγωγίσιμη στο *(α,b)* και *f(a)=f(b)=0.* Είναι

$k=\frac{2f(c)}{(c-a)(c-b)}$, $c\in(a,b)$.Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο *(a,b)* : $f''(\xi)=k$

5Β12. Έστω $f:[1,4]\to R$ δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με f'' συνεχή και $f(2)<f(1)<f(4)<f(3)$ Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο $(1,4)$: $f''(\xi)=0$

5Β13. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,b]$, παραγωγίσιμη στο (α,b) και $f(a)=f(b)=0$, $c<a$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ : η εφαπτομένη της f στο ξ να διέρχεται από το $(c,0)$.

5Β14. Έστω $f:(k,+\infty)\to R$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν υπάρχει χορδή της C_f που διέρχεται από το $(m,0)$ με $m<k$ τότε υπάρχει και εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το $(m,0)$

5Β15. Έστω f: $f(x)=x^{2v}$. Δείξτε ότι μοναδικό σημείο τομής των C_f και της εφαπτομένης είναι το σημείο επαφής. ($v\in N^*$)

5Β16. Έστω f τρεις φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση και η ευθεία $y=ax+b$ είναι εφαπτομένη της C_f στα ξ_1,ξ_2 . Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο (ξ_1,ξ_2) : $f'(\xi)=a$. Δείξτε στην συνέχεια ότι υπάρχει w : $f'''(w)=0$.

5Β17. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,b]$, παραγωγίσιμη στο (α,b) και $f(a)=b,f(b)=a>0$ Δείξτε ότι υπάρχουν ξ_1,ξ_2 στο (α,b) : $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=1$.

5Β18. Αν $f:[0,1]\to R$ $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$ να δείξετε ότι υπάρχουν ξ_1, ξ_2 στο $(0,1)$ $\dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=2$ να δείξετε ότι υπάρχουν τώρα $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ στο $(0,1)$:$f(a_1)=1/n$, $f(a_2)=2/n$, … ,$f(a_n)=n/n=1$ $(a_0=0)$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μέσης

τιμής δείξτε ότι υπάρχουν αριθμοί y_i του διαστήματος

$(0,1)$: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f'(y_i)} = n$

(Η διαμέριση εδώ έγινε στον άξονα yy΄)

5Β19. Αν $\exists f'(x) \neq 0, \forall x \in [a,b]$ και η f είναι γνήσια μονότονη δείξτε ότι : Υπάρχουν μοναδικά $c,d \in (a,b)$ και πραγματικός αριθμός κ :

$f(c) - f(a) = 2k$
$f(d) - f(c) = k$
$f(b) - f(d) = 3k$

Στην συνέχεια δείξτε ότι υπάρχουν αριθμοί ξ_1 , ξ_2 και ξ_3 στο (α,b) : $\frac{2}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} + \frac{3}{f'(\xi_2)} = \frac{6(b-a)}{f(b)-f(a)}$

5Β20. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,b]$, παραγωγίσιμη στο (α,b) και $f(a)=f(b)$ Δείξτε ότι υπάρχουν ξ_1,ξ_2 στο (α,b) :
$f'(\xi_1)+3f'(\xi_2)=0$. Εξηγείστε γεωμετρικά

5Β21. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,b]$, παραγωγίσιμη στο (α,b) ,$f(a)=f(b)$ και $k,l,m>0$ Δείξτε ότι υπάρχουν ξ_1,ξ_2,ξ_3 στο (α,b) :
$k f'(\xi_1)+l f'(\xi_2)+m f'(\xi_3)=0$.

5Β22. Αν f παραγωγίσιμη στο (α,b) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x) = k \in R$, δείξτε ότι η $f'(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α,b).
(Γενίκευση του Rolle για ανοικτό διάστημα)

5Β23. Αν f παραγωγίσιμη στο (α,b) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$, δείξτε ότι η $f'(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α,b).

5Β24. Έστω f παραγωγίσιμη στο R , $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $f(0)=0$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο R : $f'(\xi)=0$

5Β25. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,+\infty)$, παραγωγίσιμη στο $(\alpha,+\infty)$ $f(a)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ Δείξτε ότι η $f'(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(\alpha,+\infty)$.

5Β26. Έστω f παραγωγίσιμη στο $(\alpha,+\infty)$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Δείξτε ότι η $f'(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(\alpha,+\infty)$.

(και άλλες γενικεύσεις του Rolle)

5Β27. Έστω k ο αριθμός που ορίζεται από την ισότητα

$$f(b)=f(a)+\frac{b-a}{1!}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}k$$,όπου f στο $[\alpha,b]$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο (a,b)

$$f(b)=f(a)+\frac{b-a}{1!}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(\xi)$$

(Το συμπέρασμα είναι εξαιρετικό! Ανοίγει ολόκληρο κεφάλαιο παραπέρα στην ανάλυση με τίτλο : ***Σειρές Taylor!!*** *Κάντε λίγο υπομονή. Μήπως μπορείτε να το γενικεύσετε ;)*

Γ ΟΜΑΔΑ

5Γ1. Έστω f παραγωγίσιμη στο $[a,b]$, $f'(a)=f'(b)=0$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο (a,b) : $f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$.

(θεώρημα Flett)

5Γ2. Έστω f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,b]$, $f(x)f'(x)\neq 0$ $\forall x\in[a,b]$ και $f(\alpha)f'(\beta)=f'(\alpha)f(\beta)$ Δείξτε ότι υπάρχουν ξ_1,ξ_2 :$f(\xi_1)f''(\xi_2)+f(\xi_2)f''(\xi_1)>0$

5Γ3. Αν $\exists f'', f'$ γνήσια αύξουσα στο $[a,b]: f(a)=f(b)=0$

Δείξτε ότι $\forall x\in(a,b)$ υπάρχουν $\xi_1<\xi<,\xi_2$ στο (α,b) :

$$f'(\xi_1)-f'(\xi_2)\le\frac{4f(x)}{b-a}\ ,\ f(x)\ge-f''(\xi)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

5Γ4. Αν f παραγωγίσιμη με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το $[a,b]$ τότε $\exists\xi\in(a,b):|f'(\xi)|=1$

(Αν ερμηνεύσετε γεωμετρικά τα πράγματα γίνονται απλά)

Δ ΟΜΑΔΑ

5Δ1. Έστω ότι f παραγωγίσιμη για $x>0$, $f(1)=0$, $f(x)=f(1/x)$ για κάθε $x>0$ Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι υπάρχουν τρεις θετικοί αριθμοί a,b,c διαφορετικοί μεταξύ τους ώστε

$$f'(a)+f'(b)+f'(c)+f(x)=0,\forall x\in(1,+\infty)$$

5Δ2. Αν f,g παραγωγίσιμες στο $[a,b]$, $g'(x)\neq0\ \forall x\in[a,b]$ και

$\frac{f'(a)}{g'(a)}=\frac{f'(b)}{g'(b)}$ τότε να δειχθεί ότι

$$\exists\xi\in(a,b):\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$$

(γενίκευση Flett για απλούστευση θεωρείστε ότι g' = συνεχής.

Το θ. Flett έχει μια πολύ εντυπωσιακή γεωμετρική ερμηνεία:.

Υπάρχει χορδή που είναι και εφαπτομένη της C_f όταν υπάρχουν δυο // εφαπτόμενες, η οποία όμως χρειάζεται την έννοια της κυρτότητας για να κατανοηθεί, λίγο αργότερα)

5Δ3. Αν f' συνεχής στο R και $f(x+f'(x))=f(x),\forall x\in R$ τότε

1.Δείξτε ότι η f' έχει ρίζα

2.Δώστε παράδειγμα μη σταθερής συνάρτησης

3.Αν η f' έχει τουλάχιστον δυο ρίζες δείξτε ότι η f είναι σταθερή στο R

5Δ4. Έστω $f:R\to R$ δυο φορές παραγωγίσιμη με $f(0)=2, f(1)=1, f'(0)=-2$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1): f(\xi)f'(\xi)+f''(\xi)=0$.

5Δ5. Έστω συνάρτηση $f:[0,1]\to[0,1]$, μη σταθερή και συνεχής. Να αποδείξετε πως υπάρχουν $\xi_1\neq\xi_2\in[0,1]$ στο $[0,1]: |f(\xi_1)-f(\xi_2)|=(\xi_1-\xi_2)^2$

6 ΕΥΡΕΣΗ ΤΥΠΩΝ ΜΕ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

Α ΟΜΑΔΑ

6Α1. Έστω ότι οι συναρτήσεις *f, g* είναι παραγωγίσιμες και $f'(x)+g'(x)f(x)=0 \quad \forall x\in R$. Δείξτε ότι η συνάρτηση με τύπο $f(x)e^{g(x)}$ είναι σταθερή.

(Από εδώ μπορείτε να βρείτε τον τύπο της f)

6Α2. Έστω ότι οι συναρτήσεις *f, g,h* είναι παραγωγίσιμες και $f'(x)+g'(x)f(x)=h(x) \ \forall x\in R$. Αν $h(x)e^{g(x)}=w'(x)$ και $f(a)=A$ βρείτε τον τύπο της *f*.

(είναι γενίκευση της προηγούμενης. Αργότερα θα έχετε μεγαλύτερη βοήθεια για την εύρεση της w με ολοκληρώματα)

6Α3. Έστω $f:(0,+\infty)\to R: \ f(1)=e \ , \ x^2f'(x)+f(x)=0$.

Δείξτε ότι η συνάρτηση με τύπο $g(x)=e^{\frac{-1}{x}}f(x)$ είναι σταθερή και έτσι βρείτε τον τύπο της *f*.

6Α4. Αν $f:R\to R: f(1)=e^2, f'(x)=-4f(x)$, βρείτε τον τύπο της *f(x)*

6Α5. Αν $f:(0,+\infty)\to R: \ f(1)=e \ , \ xf'(x)=5f(x)$, βρείτε τον τύπο της *f(x)*

6Α6. Αν $f'(x)+f(x)=1 \quad \forall x \in R$, $f(0)=e$, βρείτε τον τύπο της $f(x)$

6Α7. Αν $f'(x)=af(x)+b \quad \forall x \in R$, $f(0)=c$ βρείτε τον τύπο της $f(x)$ όταν $abc \neq 0$

6Α8. Αν $xf'(x)+2f(x)=3x \ \forall x>0$, $f(1)=1$ βρείτε τον τύπο της $f(x)$.

6Α9. Αν $4f'(x)=\left(f(x)\right)^5 \neq 0$, $\forall x<1$, $f(0)=1$ βρείτε τον τύπο της $f(x)$

6Α10. Αν $f(x)+x^2+\eta\mu x=f'(x)+2x+\sigma\upsilon\nu x \quad \forall x \in R$, $f(0)=1$, βρείτε τον τύπο της $f(x)$

6Α11. Αν $xf'(x)+f(x)=e^x \quad \forall x \in R$, βρείτε τον τύπο της $f(x)$.

6Α12. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης h στο $(0,+\infty)$ αν είναι γνωστό ότι ισχύουν $e^{h(x)}=\dfrac{1}{h'(x)}$, $h(1)=0$, $x>0$

6Α13. Αν $f(x)f'(x)=2x^3 \quad \forall x \in R$, $f(0)=1$ βρείτε τον τύπο της $f(x)$.

(Δεν είναι τόσο απλή όσο φαίνεται)

6Α14. Η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το R , $f(x)>0$, $f(1)=15$, $f'(x)=f(x)\ln[f(x)]$. Βρείτε τον τύπο της.

6Α15. Αν $f'(x)=[4-f(x)]^2 \quad \forall x>-1 \quad f(0)=3, f(x)\neq 4 \quad \forall x>-1$ βρείτε τον τύπο της $f(x)$.

6Α16. Αν $f'(x)=g(x)$, $f(x)=g'(x)$, $f(0)=1$, $g(0)=0$, $g(2)=1 \quad \forall x \in R$,

i) Δείξτε ότι $f^2(x)-g^2(x)=c \ \forall x \in \mathrm{R}$,

ii) Αν $kf(x)+mg(x)=0 \Rightarrow k=m=0$

6Α17. Αν $f'(x)=f(x)+g(x)$, $g'(x)=g(x)-f(x)$, $\forall x \in R$ και $f(0)=0, g(0)=1$ να δείξετε ότι η συνάρτηση

$[e^{-x}f(x)-\eta\mu x]^2+[e^{-x}f'(x)-\sigma\upsilon\nu x]^2$ είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο των $f(x),g(x)$

6Α18. Αν $2f'(x)f''(x)=\left(f'(x)-f(x)\right)^2$ και $f(0)=f'(0)=0$ να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=e^{-x}\left([f(x)]^2+[f'(x)]^2\right)$ είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της $f(x)$

6Α19. Αν $xf''(x)+f'(x)=0 \quad \forall x\in R \quad f(0)=1$. Βρείτε τον τύπο της $f(x)$.

6Α20. ι)Να δείξετε την ισοδυναμία

$f'(x)=f(x)\Leftrightarrow f(x)=ce^x \ ,\forall x\in R$

ιι)Αν $g''(x)-2g'(x)+g(x)=0$, $g'(0)=g(0)=1 \ \forall x\in R$, βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $g(x)$

6Α21. Αν $f'(x)=g(x)$, $f(x)=-g'(x)$, $f(0)=0$, $g(0)=1 \ \forall x\in R$,

i) Δείξτε ότι $f^2(x)+g^2(x)=1 \ \forall x\in R$,

*ii)*Αν οι συναρτήσεις $F(x),G(x)$ ικανοποιούν τις ίδιες συνθήκες με τις $f(x),g(x)$ δείξτε ότι η συνάρτηση $[F(x)-f(x)]^2+[G(x)-g(x)]^2$ είναι σταθερή.

iii) Δείξτε ότι $F(x)=f(x)$, $G(x)=g(x)$

iv) Δείξτε ότι $f(x)=\eta\mu x$, $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$

v) Βρείτε τον τύπο μιας συνάρτησης h:$h''(x)+h(x)=0$, $h(0)=0$, $h'(0)=1$

(Η άσκηση αυτή είναι ένας τρόπος να εξάγετε την εξίσωση της μετατόπισης της Α.Α.Τ. στην φυσική στην ειδική περίπτωση που ω=1 rad/sec. Μπορείτε όμως πάντα με αλλαγή της κλίμακας χρόνου να θεωρήσετε ότι ω=1 rad/sec.Ρωτήστε καλύτερα τους φυσικούς σας)

6Α22. Αν $f(x+y)=f(y)+f(x)+2xy \quad \forall x,y\in R \ , f'(0)=2$

δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το R και βρείτε τον τύπο της.

6Α23. Αν $f(x+y)=f(y)+f(x)+3xy(x+y),\forall x,y\in R$ και $\exists f'(x),\forall x\in R, f(1)=1$ βρείτε τον τύπο της.

6Α24. Αν $f(xy)+x+y=f(y)+f(x)+xy+1\forall x,y>0, f'(1)=2$ δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $(0,+\infty)$ και βρείτε τον τύπο της

6Α25. Αν $f(x+y)=f(y)συνx+f(x)συνy$ $f'(0)=1$ δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το R και βρείτε τον τύπο της

6Α26. Αν $f(xy)=xf(y)+yf(x)$ $\forall x,y\in(0,+\infty)$, $f'(1)=2$ δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $(0,+\infty)$ και βρείτε τον τύπο της

6Α27. Αν $f(x+y)=f(x).f(y)$ $\forall x,y\in R$, $f(x)=1+xg(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$ βρείτε τον τύπο της.

6Α28. Αν $f(x+y)=e^x f(y)+e^y f(x)$ $\forall x,y\in R$, $f'(0)=2$ δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το R και βρείτε τον τύπο της.

6Α29. Αν $f(x+y)=e^x f(y)+e^y f(x)+2xye^{x+y},\forall x,y\in R$ με $f'(0)=2$ δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το R και βρείτε τον τύπο της.

6Α30. Αν $f(\frac{x+y}{2})=\frac{f(x)+f(y)}{2}$ $\forall x,y\in R$ και η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το R, βρείτε τον τύπο της όταν $f'(0)=2$, $f(0)=1$. Χρησιμοποιείστε το προηγούμενο συμπέρασμα ή άλλον τρόπο για να βρείτε στην συνέχεια τον τύπο μιας συνάρτησης. $g(x)$ όταν
ισχύουν:

$$g(\frac{x+y}{2}) = \sqrt{g(x)g(y)} \quad , \quad g(x) > 0 \quad , g(0) = g'(0) = e$$

$\forall x, y \in R$, με την g να είναι παραγωγίσιμη σε όλο το R *

6Α31. Αν $f(x+y) + e^{x+y} = e^x f(y) + e^y f(x) \quad \forall x, y \in R$, f παραγωγίσιμη σε όλο το R βρείτε τον τύπο της $f(x)$.

6Α32. Αν $|f(x) - f(y)| \le 1 - συν(x-y) \quad \forall x, y \in R$ δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το R και βρείτε τον τύπο της.

6Α33. Αν $|f(x) - f(y)| \le (x-y)^2 \quad \forall x, y \in R$ και $f(0)=5$ βρείτε τον τύπο της $f(x)$

6Α34. Σε μια καλλιέργεια βακτηριδίων παρατηρήσαμε ότι αρχικά ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού τους ήταν σταθερός και ίσος με 1 (εκατομμύρια βακτηρίδια ανά ώρα)

Η καλλιέργεια αναπτύσσεται ομοιόμορφα πάνω σε μια γυάλινη πλάκα ακτίνας R_0. Μετά από χρόνο $t_1=2$ ώρες εκτιμήσαμε ότι ο αριθμός των βακτηριδίων ήταν $N_1=11$(εκατομμύρια) και μετρήσαμε ότι η καλλιέργεια κατελάμβανε μια κυκλική επιφάνεια που είχε ακτίνα

$$R = \frac{1}{2^{5/2}} R_0$$

α)Να βρείτε τον αρχικό αριθμό βακτηριδίων

Στην συνέχεια παρατηρήθηκε ότι ο αριθμός αύξησης έπαψε να είναι σταθερός και προέκυψε ανάλογος του πληθυσμού σε κάθε χρονική στιγμή μετά την t_1 Εκτιμήσαμε επίσης ότι ο πληθυσμός διπλασιάστηκε σε χρόνο 3 ώρες μετά την t_1

Δεχόμαστε ακόμη ότι η επιφάνεια που καταλαμβάνει η καλλιέργεια είναι ανάλογη του αριθμού των βακτηριδίων.

β)Να υπολογίσετε τον τελικό αριθμό βακτηριδίων και τον απαιτούμενο χρόνο όταν η καλλιέργεια έχει εξαπλωθεί σε όλη την γυάλινη πλάκα

γ)Να γράψετε τον τύπο μιας συνάρτησης *N(t)* η οποία θα δίνει τον πληθυσμό των βακτηριδίων σε κάθε χρονική στιγμή μέχρις ότου η καλλιέργεια καταλάβει όλη την γυάλινη πλάκα Να εξηγήσετε γιατί η συνάρτηση αυτή οφείλει να είναι συνεχής

Β ΟΜΑΔΑ

6Β1. Αν $xf'(x)-f(x)=x^2 \quad \forall x \in R$, $f(1)=3$, βρείτε τον τύπο της $f(x)$

6Β2. Αν $f''(x)\eta\mu x+f(x)\eta\mu x=\eta\mu 2x$ στο $(0,\pi)$, $f(0)=0$, $f(\pi/2)=\pi/2$, f' συνεχής στο $[0,\pi]$ Βρείτε τον τύπο της $f(x)$ στο $[0,\pi]$ *(Μην απλοποιήσετε με ημx)*

6Β3. Αν $xf'(x)=2f(x) \quad \forall x \in R$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2$ τότε δείξτε ότι

$f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$, $f'(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=0$, $f''(0)=4$, f' παραγωγίσιμη $\forall x \in R$, $xf''(x)=f'(x) \quad \forall x \in R$, f'' συνεχής $\forall x \in R$,f'' παραγωγίσιμη $\forall x \in R^*$,Με την βοήθεια του Θ-Μ-Τ δείξτε $f''(x)=4 \quad \forall x \in R$,και βρείτε τον τύπο της $f(x)$

6Β4. Αν $f'(x)f(1-x)=1 \quad \forall x \in R$, $f(1)=e$ βρείτε τον τύπο της $f(x)$

6Β5. Έστω $f:(0,+\infty)\to R$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Η εφαπτομένη *(ε)* της C_f στο σημείο της *Α* τέμνει τον άξονα *x* στο σημείο *Β* και *Γ* είναι η προβολή του *Α* στον άξονα *x* . Αν

το σημείο *(0,0)* είναι το μέσον του *ΒΓ* και *f(1)=1* να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης

6Β6. Έστω $f : R \to R$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Η εφαπτομένη *(ε)* της C_f στο σημείο της *Α* τέμνει τον άξονα *x* στο σημείο *Β* και *Γ* είναι η προβολή του *Α* στον άξονα *x* . Αν $\varepsilon\phi(B\hat{A}\Gamma) = \frac{1}{4}$ και *f(1)=2* να βρεθεί ο τύπος της

6Β7. Έστω $f : R \to R$ συνεχής συνάρτηση και παραγωγίσιμη στο *R**. Η εφαπτομένη *(ε)* της C_f σε κάθε σημείο της $A(x_0, f(x_0))$, $x_0 \neq 0$ διέρχεται από το σημείο *(0,0)* και είναι *f(1)=1, f(-1)=1* να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης

6Β8. Έστω $f : (0,+\infty) \to R^*$ παραγωγίσιμη συνάρτηση $f'(x) < 0$. Η εφαπτομένη *(ε)* της C_f στο σημείο της *Α* τέμνει τον άξονα *x* στο σημείο *Β* και *Γ* είναι η προβολή του *Α* στον άξονα *x* . Αν *(ΑΒΓ)=1/2* και *f(1)=1* να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης

6Β9. Έστω *f* παραγωγίσιμη στο *R*. Η εφαπτομένη της C_f σε τυχαίο σημείο της τέμνει τον άξονα *x* στο $(x_A,0)$ και $(x_B,0)$ είναι η προβολή του σημείου επαφής στον άξονα *x*. Αν είναι $x_B-x_A=1$ και *f(0)=1*, βρείτε τον τύπο της *f*.

6Β10. Αν $f : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση, ώστε το σημείο τομής της εφαπτομένης της C_f με τον άξονα *y'y* να είναι πάντοτε το μέσον των σημείων επαφής και του σημείου που η εφαπτομένη τέμνει τον *x'x* και επιπλέον *f(1)=1* τότε να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης *f*.

6Β11. Βρείτε τον τύπο μιας συνάρτησης w : $w''(x)+w(x)=A$, $w(0)=A$, $w'(0)=1$.

(Χρησιμοποιείστε προηγούμενη άσκηση.)

6Β12. Έστω $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, $f(1)=1$, $xf(\frac{1}{x})=\frac{1}{f'(x)}$.

Δείξτε ότι $\frac{f''(x)}{f'(x)}=-\frac{1}{x}+\frac{f'(x)}{f(x)}$ και βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$

6Β13. Αν $f''(x)=f(x),\ \forall x\in R, f'(0)=0$, $f(0)=0$ βρείτε τον τύπο της. Όμοια

αν $f''(x)=9f(x),\ \forall x\in R, f'(0)=3, f(0)=1$

6Β14. Έστω $y=f(x)$ συνάρτηση που ικανοποιεί τις παρακάτω σχέσεις :

$$x-y^2+2xy\frac{dy}{dx}=0, y(\frac{1}{e})=\frac{1}{\sqrt{e}}, x>0$$

(θυμηθείτε ότι : $f'(x)=\frac{dy}{dx}=y'$*)*

α)Με τον μετασχηματισμό $y^2=u$ να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης u

β)Να δείξετε ότι $x\in(0,1]$

γ)Να δείξετε ότι η συνάρτηση y διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,1)$ και

δ)Να βρείτε τον τύπο της y

ε)Έστω $g(x)=\begin{cases} y(x), 0<x<1 \\ K, x=1 \end{cases}$. Αν η g είναι συνεχής βρείτε το K

6Β15. Αν $f(x+y)=f(x)f(a-y)+f(y)f(a-x)$ $f(a)=0$, $f'(0)=1$, $f'(a)=0$, δείξτε ότι

i) f(0)=0,f(2a)=0,f(x+2a)=f(x)f(-a),

ii) f(x+4na)=f(x)

iii) f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το *R* και περιττή

$f'(x)=f(a-x), f'(a-x)=f(x), f^2(x)+f^2(a-x)=1$

iv) $f''(x)+f(x)=0$

6Β16. Αν $f(x)-f(y)=(y-x)f(x)f(y)$ στο R^* , f συνεχής στο R^* δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R^* και βρείτε τον τύπο της όταν $f(1)=1$, $f(-1)=-1$

6Β17. $f(x)-f(y)=(x-y)f'(\frac{x+y}{2})$. Αν η *f(x)* είναι δυο φορές παραγωγίσιμη βρείτε τον τύπο της όταν

$f(1)=f'(1)=f''(1)=2$

(Υπάρχει εδώ ένα αξιοσημείωτο γεωμετρικό περιεχόμενο που αξίζει να το ερμηνεύσετε)

6Β18. Αν $yf(x)-xf(y)\le(x-y)^2xy \quad \forall x,y\in(0,+\infty)$, $f(1)=2$ και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη Βρείτε τον τύπο της

6Β19. Αν $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty):2xf(y)\le xf(x)+yf(y)$ δείξτε ότι:

$\frac{2y-x}{y}f(x)\le f(y)\le\frac{x}{2x-y}f(x)$ με $2x>y$ και

$\frac{f(x)}{y}\le\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\le\frac{f(y)}{x}$ με $x>y$

Να συμπεράνετε ότι η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη και έτσι να βρείτε τον τύπο της.

6Β20. Αν $f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$ $f'(0)=2$, δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το *R* και περιττή .Στην συνέχεια

να θέσετε $g(x)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$, $f(x)\neq\pm1$ και να βρείτε έτσι τον τύπο της $g(x)$.

6Β21. Αν $f(x+y)+f(x-y)=f(x).f(y)$ $\forall x,y\in R$ με f να είναι παραγωγίσιμη σε όλο το R, να δείξετε τότε ότι η f είναι άρτια και έτσι να θέσετε $f(x)=g(x)+g(-x)$, g παραγωγίσιμη σε όλο το R. Να βρείτε τα : $f(0),g(0)$ και στην συνέχεια έναν τύπο για τις g , f .

6Β22. Να βρεθεί η f όταν $f(0)=1, f(x)\neq0\,\forall x>-1$ και

$$f'(x)=xf^2(x)+\frac{x}{x^2+1}f(x), x>-1$$

6Β23. Να βρεθεί η f όταν $f(\pi/4)=\pi/4$ και

$$xf'(x)-f(x)=x^2+f^2(x)\ ,\ \forall x\in(0,\pi/2)$$

Γ ΟΜΑΔΑ

6Γ1. Αν $h'(x)=e^{2x}h(-x)$, $h(0)=1$ $\forall x\in R$, βρείτε τον τύπο της

6Γ2. $w'(x)=w(x)+w(-x)$, $w(0)=1$ $\forall x\in R$, βρείτε τον τύπο της

6Γ3. Να δειχθεί ότι δεν υπάρχει συνάρτηση f που να ικανοποιεί ταυτόχρονα τις παρακάτω συνθήκες:

$$f(f(x)).f'(x)=f(x)\neq0\quad\forall x\in R\ ,f'(1)=1$$

6Γ4. Αν $f''(x)=e^{2f(x)}, f'(0)=1, f(0)=0, \forall x<1$ βρείτε την f

6Γ5. Αν $f''(x)+[f'(x)]^2=4$ $\forall x\in R$, βρείτε την $f(x)$

(Εδώ λοιπόν θέλει φαντασία)

6Γ6. Αν $f(2x)=[f(x)]^4$, $f(x)>0$, f συνεχής $\forall x\in R$,βρείτε τον τύπο της

(Είναι μια δύσκολη άσκηση)

6Γ7. Να Βρείτε την παραγωγίσιμη *f* στο *R* όταν *f(1)=0* και ισχύει

$f'(x)=\sqrt{1+f^2(x)}$, $\forall x\in R$

6Γ8. Αυτή η άσκηση είναι μια κλασική άσκηση συναρτησιακών τύπων χωρίς να παρουσιάζει ιδιαίτερες δυσκολίες. Ας είναι λοιπόν *f, g* δυο όχι σταθερές συναρτήσεις με πεδίο ορισμού όλο το *R* που ικανοποιούν τις ακόλουθες σχέσεις:

$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)-g(x)\cdot g(y)$ και

$g(x+y)=f(x)\cdot g(y)+f(y)\cdot g(x)$ με

$f'(0)=0$, $g'(0)=k>0$. Μάλλον θα πρέπει να αναγνωρίσατε ήδη για ποιες μιλάμε! Προκειμένου να το αποδείξετε μπορείτε να ακολουθήσετε τα παρακάτω βήματα

Α) Δείξτε ότι $f(0)=1$, $g(0)=0$

Β) Κατόπιν δείξτε ότι οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στο *R* και ικανοποιούν τις σχέσεις:

$f'(x)=-k\cdot g(x)$, $g'(x)=k\cdot f(x)$ $\forall x\in R$

Γ) Δείξτε ακόμη ότι η συνάρτηση με τύπο

$(f(x)-\sigma\upsilon\nu kx)^2+(g(x)-\eta\mu kx)^2$ είναι σταθερή

Δ) Βρείτε την τιμή της σταθεράς και έτσι θα συμπεράνετε ποιοι είναι οι τύποι των *f,g*

Ε) Τώρα, αν ξέρετε λίγα πράγματα για διαφορικές εξισώσεις, τα προηγούμενα ερωτήματα μπορεί να χρησιμεύσουν ώστε να βρείτε τον τύπο της *h* η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες: $h''(x)+k^2\cdot h(x)=0$, $h(0)=1$, $h'(0)=k$.

(Η ιδέα που κρύβεται εδώ είναι ότι μια γραμμική διαφορική εξίσωση ανωτέρας τάξεως διασπάται σε σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως.)

6Γ9. Βρείτε όλες τις συναρτήσεις f που είναι δυο φορές παραγωγίσιμες και ικανοποιούν την σχέση :

$$f^2(x)-f^2(y)=f(x+y)\cdot f(x-y)\ ,\ \forall x,y\in R$$

6Γ10. Βρείτε όλες τις

$$f:(0,+\infty)\to(0,+\infty):\ f'(\frac{a}{x})=\frac{x}{f(x)}\ ,\ a>0$$

6Γ11. Να βρείτε όλες τις δυο φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις f για $x>0$ έτσι ώστε

$$f(x)+2x^3f'(x)+x^4f''(x)=0\ ,\ \lim_{x\to+\infty}(xf(x))=1$$

6Γ12. Έστω ότι $f(x+y)=f(x)+f(y)\ \ \forall\ x,y$ στο R και υπάρχει $F:F'(x)=f(x),\forall x\in R$ Βρείτε την f όταν $f(1)=A$

6Γ13. Να βρείτε τα πολυώνυμα p(x), n βαθμού με $n\geq 2$, για τα οποία υπάρχουν $r_1<r_2<...<r_n$ έτσι ώστε

$p(r_k)=0\ ,\ k=1,2,...,n$ και επιπλέον

$$p'\left(\frac{r_k+r_{k+1}}{2}\right)=0\ ,\ k=1,2,...,n-1$$ [27]

Δ ΟΜΑΔΑ

6Δ1. Αν $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$:2xf(y)$\leq xf(x)+yf(y)$ να βρείτε τον τύπο της.

7 ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

Α ΟΜΑΔΑ

Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις f με τύπους:

7Α1. $f(x)=x^4-2x^2-3$ **(υπ)**

7Α2. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$

7Α3. $f(x)=x\ln x$

7Α4. $f(x)=1+x+\ell n\left(1+x^2\right)$

7Α5. $f\left(x\right)=2\ell n\left|x\right|+\dfrac{1}{x}-x$

7Α6. $f(x)=x^2e^x$

7Α7. $f(x)=(x^3-x^2-x+1)e^x$

7Α8. $f(x)=e^{2x}+3e^x-5x+1$

7Α9. $f\left(x\right)=\dfrac{e^x}{1+x^2}$

7Α10. $f(x)=3x^2-x^3-2+\sqrt{1-x^2}(x^2-1)$

7Α11. $f\left(x\right)=\sqrt{2x-x^2}$

7Α12. $f\left(x\right)=\begin{cases} x, & x<0 \\ \eta\mu^2\dfrac{\pi x}{2}, & 0\le x\le 1 \\ 1+\dfrac{\ell nx}{x}, & x>1 \end{cases}$

7Α13. $f\left(x\right)=\left|x+1\right|+\dfrac{2}{x}$

7Α14. $f(x)=\dfrac{a^x+b^x}{a^{-x}+b^{-x}}$, $1<a<b$

7Α15. Να εξετάσετε στο *(0,4)* την μονοτονία της f όπου:

$$f(x)=\frac{2-x}{\pi}\sigma\upsilon\nu\left(\pi\left(x+3\right)\right)+\frac{1}{\pi^2}\eta\mu\left(\pi\left(x+3\right)\right)$$

7Α16. Να δείξετε ότι η f: $f(x)=\begin{cases}1-\sqrt{1-x}\,, & x\le 1\\ e^{x-1} & ,x>1\end{cases}$ είναι γνήσια αύξουσα.Βρείτε την f^{-1}.

7Α17. Δείξτε ότι η f: $f(x)=x^5+2x+3$ είναι *1-1*. Βρείτε και το σύνολο τιμών της f.

7Α18. Αν $e^{\alpha}+\alpha=e^{\beta}+\beta$, δείξτε ότι $\alpha=\beta$.

Βρείτε την $f: e^{f(x)}+f(x)=x+\ln x$

Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις f με τύπους:

7Α19. $f(x)=\dfrac{\ell nx}{x-1}$ $x>1$

7Α20. $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x}$ $x\in(0,\pi/2)$

7Α21. $f(x)=e^{x}-e^{-x}-2x-\dfrac{x^3}{3},\ x\in R$

7Α22. $f(x)=x^2-\sigma\upsilon\nu x\ ,\ x\in R$

7Α23. $f(x)=3x^2+8\eta\mu x-\dfrac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2x\ ,\ x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$

7Α24. $f(x)=3x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu^3 x\ ,\ x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$

7Α25. $f(x)=x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\ln(1+x)-x\ ,\ x>0$

7Α26. $f(x)=\dfrac{\ell nx}{\ell n(x-1)}$, $x>2$

7Α27. $f(x)=2\sqrt{x}-\dfrac{\ell nx}{\sqrt{x}}$

7Α28. Για ποιες τιμές του λ η f $f(x)=x^3+2\lambda x^2+x-2$ είναι γνήσια αύξουσα.

7Α29. Για ποιες τιμές του λ η f $f(x)=\dfrac{x-\lambda}{1+x^2}$ είναι γνήσια φθίνουσα

7Α30. Για ποιες τιμές του λ η f $f(x)=e^{2x}+\lambda e^x+x$ είναι γνήσια αύξουσα.

7Α31. Αν $f(x)=\dfrac{\lambda e^x-(1+\lambda)e^{-x}}{1+e^x}$,βρείτε για ποιες τιμές του λ f είναι γνήσια μονότονη.

Β ΟΜΑΔΑ

7Β1. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in R$ μελετήστε τη μονοτονία της *f:* $f(x)=\lambda x+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$

7Β2. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in R$ μελετήστε τη μονοτονία της *f:* $f(x)=e^{\lambda x}(x^2-2x)$

7Β3. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in(0,+\infty)$ μελετήστε τη μονοτονία της *f:* $f(x)=2\lambda\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu 2x$.

7Β4. $f(x)=\pi x-x^2-\dfrac{\pi^2}{4}\eta\mu x, x\in[0,\pi]$ μελετήστε τη μονοτονία

7Β5. Αν $f(x)=\begin{cases}x^2\eta\mu\dfrac{1}{x} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$, δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και στο *0*. Κατόπιν αποδείξτε ότι δεν υπάρχει

διάστημα *(-δ,δ), δ>0* στο οποίο η f να είναι γνήσια μονότονη.

7Β6. Να εξετάσετε την μονοτονία της f : $f(x)=\dfrac{\eta\mu(x+\alpha)}{\eta\mu(x+\beta)}$,

$\alpha\cdot\beta\neq 0$

7Β7. Έστω *f: I→R* (*I* διάστημα) παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f'(x)\geq 0 \ \forall x\in I$. Αν δεν υπάρχει διάστημα $\Delta\subseteq I$ ώστε $f'(x)=0$ για κάθε $x\in\Delta$, δείξτε ότι f γνησίως αύξουσα στο *I*.

(Πρόκειται για θεώρημα που ξεκαθαρίζει τα πράγματα για το «γνησίως»)

7Β8. Αν $x^2f'(x)=f^2(x)\ \forall x\in[1,+\infty)$, $f(1)=1$ δείξτε ότι $f(x)\geq 1 \ \forall x\in[1,+\infty)$ και βρείτε την *f(x)*.

7Β9. Αν $f(0)=f'(0)=f''(0)=0$, $f'''(x)>0 \ \forall x\in[0,+\infty)$ μελετείστε ως προς την μονοτονία την $f(x)$, $x\in[0,+\infty)$

7Β10. Έστω *f:* $f^{(3)}(x)>0$, $\forall x\in R$ και

$g(x)=f(x)-xf'(x)+\dfrac{x^2}{2}f''(x)$. Μελετήστε τη μονοτονία της *g* στο *R* και δείξτε ότι:

$$f(x)-xf'(x)+\frac{x^2}{2}f''(x)>f(0),\forall x>0$$

7Β11. Είναι: *f(0)=0, f* συνεχής στο *R* , *f ΄* γνησίως αύξουσα στο R^*_+. Μελετήστε τη μονοτονία της *g(x)=f(x)/x* στο R^*_+

7Β12. Έστω *f:* $f''(x)>0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και $g(x)=\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$.

Μελετήστε τη μονοτονία της *g* στο *(α,β).*

7Β13. Αν $f''(x)<0 \ \forall x\in R$, $\lim\limits_{x\to\alpha+} f'(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\beta-} f'(x)=-\infty$.

Μελετήστε την f ως προς την μονοτονία στο (α,β).

7Β14. Αν $f''(x)<0 \ \forall x\in R$, $a<b$, $f(a)=f(b)$. Μελετήστε τη μονοτονία της f στο $[\alpha,\beta]$.

7Β15. Αν $f'(x)\neq 0$ για κάθε x στο εσωτερικό ενός διαστήματος Δ και η f είναι συνεχής στο Δ τότε να δείξετε ότι η f είναι *1-1* στο Δ

7Β16. Αν $f'(x)\neq 0$ για κάθε x στο εσωτερικό ενός διαστήματος Δ και η f είναι συνεχής στο Δ τότε να δείξετε ότι f είναι γνήσια μονότονη στο Δ

(Δεχθείτε ότι αν είναι 1-1 και συνεχής τότε είναι γνήσια μονότονη)

7Β17. Αν $f'(x)\neq 0$ για κάθε x ενός διαστήματος Δ, τότε η $f'(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ

(οι τρεις προηγούμενες ασκήσεις είναι βασικά θεωρήματα αλλά αν θέλετε να τα χρησιμοποιήσετε πρέπει πρώτα να τα αποδείξετε)

Γ ΟΜΑΔΑ

7Γ1. Αν $y=f(x)$ θεωρούμε την εξίσωση

$$-4+\frac{dy}{dx}=(y-4x)^4 \ \text{με} \ x\geq 0, y(0)=1$$

α)Με τον μετασχηματισμό $y-4x=u$ να δείξετε ότι $\frac{du}{dx}=u^4$

β)Δείξτε ότι $u(x)\geq 1$ εξετάζοντας την μονοτονία της

γ)Δείξτε ότι $x<\frac{1}{3}$

δ)Βρείτε τον τύπο της συνάρτησης y

7Γ2. Έστω f παραγωγίσιμη στο R , $f(a)=f(b)=0,a<b$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο R: $f'(\xi)\geq f(\xi)$

Δ ΟΜΑΔΑ

7Δ1. Αν $f:[a,b]\to R$, $f(a)=0$ με f' συνεχή και $|f'(x)|\leq m|f(x)|$ με $m>0$, $\forall x\in[a,b]$ δείξτε ότι $f(x)=0$, $\forall x\in[a,b]$

7Δ2. Βρείτε όλα τα πολυώνυμα $P(x)$, n βαθμού με $n\geq 4$ έτσι ώστε, το $P''(x)$ να είναι παράγοντας του $P(x)$ και επιπλέον να ισχύει : $P(a)=P'(a)=0$

7Δ3. Έστω συνάρτηση f ώστε να ισχύουν: $f(0)=f(4)=2-f(2)=0$ και επιπλέον είναι $0>f''(x)\geq -1$, $\forall x\in[0,4]$ τότε βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

(Αν τα χρειαστείτε δίνονται τα παρακάτω βοηθητικά ερωτήματα

Α)Αν $g(x)=\frac{1}{2}x(4-x)$ *θα δείξουμε ότι* $g(0)=g(4)=2-g(2)=0$ *, $g'(0)=2$, $g'(4)=-2$ και $g''(x)=-1$ στο $[0,4]$ προσπαθώντας να βρούμε μια συνάρτηση στην οποία η ανίσωση της εκφώνησης γίνεται ισότητα*

Β)Θέτουμε $h(x)=f(x)-g(x)$ για ευνόητους λόγους και θα δείξουμε ότι υπάρχουν $\xi_1\in(0,2),\xi_2\in(2,4)$: $h'(\xi_1)=h'(\xi_2)=0$

Γ)Θα δείξουμε ότι h΄ αύξουσα και έτσι δείξτε ότι h΄(x)=0 στο $[\xi_1,\xi_2]$

Δ)Θα δείξουμε ότι και η h(x)=0 στο $[\xi_1,\xi_2]$

Ε)Θα δείξουμε ότι h φθίνουσα στο $[0,\xi_1]$ *και αύξουσα στο* $[\xi_2,4]$

ΣΤ)Θα δείξουμε έτσι ότι η h είναι σταθερή και θα βρούμε τον τύπο της f.)

7Δ4. Να δειχθεί ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f:R\to(0,+\infty)$ έτσι ώστε να ισχύει $f'(x)=f(f(x))\ ,\forall x\in(0,+\infty)$

7Δ5. Έστω ότι : $f(x)=e^{f'(x)}\quad \forall x\in[a,b]\quad ,\quad f(a)=f(b)=1$ τότε βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

7Δ6. Αν $f''(x)>0\ ,\forall x\in[0,+\infty)$ γνήσια αύξουσα και συνεχής και $m=-\dfrac{(f'(0))^2}{2f''(0)}$ δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x)-m\ln x$ είναι γνήσια αύξουσα για $x>0$

7Δ7. Αν $f'(x)\geq M>0,\forall x\in[0,1]$ να δείξετε ότι υπάρχει διάστημα $I\subset[0,1]$ με πλάτος ¼ έτσι ώστε $|f(x)|\geq M/4\ ,\forall x\in I$

ΑΚΡΟΤΑΤΑ

Α ΟΜΑΔΑ

Να βρείτε και να χαρακτηρίσετε τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων *f* όπου:

8Α1. $f(x)=\dfrac{x^2}{9+x^2}$

8Α2. $f(x)=\dfrac{e^x}{2+x}$

8Α3. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^3}$

8Α4. $f(x)=e^{3x}+3e^{2x}-9e^x+6$

8Α5. $f(x)=x-2\ln|x|+2\ln|1+x|$

8Α6. $f(x)=2x\,\ell nx-x^2+1$

8Α7. $f(x)=x^\nu e^x$, $\nu\in N$

8Α8. $f(x)=\sqrt{|x|}$

8Α9. $f(x)=x+\eta\mu 2x$

8Α10. $f(x)=3\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu 3x$

8Α11. $f(x)=\begin{cases}-x^2+4x-3 & ,0\le x\le 3\\ x^2-16 & ,3<x<4\\ 5-x & ,4\le x<5\end{cases}$

8Α12. $f(x)=(x^2-x+1)(1+x^2)^{-2}e^{-x}$

8Α13. Δείξτε ότι όταν $a^2-4b+4<0$ τότε η $f(x)=e^x(x^2+ax+b)$ δεν παρουσιάζει ακρότατα.

8Α14. Αν $f(x)=x^m(x-2)^n$, $m\ge 2,n\ge 2,m,n\in N^*$ τότε δείξτε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει ένα τοπικό ελάχιστο

8Α15. Έστω $x^2f''(x)+3f'(x)+f^2(x)+e^{-x}=0$. Αν το $f(1)$ είναι ακρότατο να βρεθεί αν είναι τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο.

(Αν θέλετε κριτήριο Β΄ παραγώγου)

Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου α.

8Α16. $f(x)=e^{ax}(x^2-a)$

8Α17. $f(x)=\dfrac{ax^2+a+2}{x-1}$

8Α18. $f(x)=\dfrac{ln(ax)}{x}$, $a>0$

8Α19. Αν $f(x)=x+\dfrac{1}{x+a}$ Να βρεθεί το a ώστε το τοπικό ελάχιστο της f να γίνει διπλάσιο από το τοπικό μέγιστο της

(Αν θέλετε κριτήριο Β΄ παραγώγου)

8Α20. Αν $f(x)=a^2-\dfrac{ln(ax)}{x}$, $a>0$ Να βρεθεί το a ώστε το ελάχιστο της f να γίνει μέγιστο

8Α21. Αν $f(x)=(x+2)e^{-ax}, a>0$ Να βρεθεί το a ώστε το μέγιστο της f να γίνει ελάχιστο.

8Α22. $F(x)=x^a e^{2a-x}$ $a>0$, $x>0$. Βρείτε το a ώστε το μέγιστο της F να γίνει ελάχιστο.

8Α23. Αν $f(x)=\ell n(e^x+me^{-x}), m>0$ να βρεθεί ο τόπος των σημείων $(x_0, f(x_0))$ στα οποία η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ακρότατο

8Α24. Δείξτε ότι ένα πολυώνυμο νιοστού βαθμού έχει το πολύ ν-1 ακρότατα

8Α26. Αν $p(x)=x^3+ax^2+bx+c$ τότε δείξτε ότι το $p(x)$ δεν μπορεί να έχει μόνον ένα ακρότατο. Στην συνέχεια δείξτε ότι αν ρ_1 , ρ_2 είναι οι ρίζες του $p'(x)$ τότε $p''(\rho_1)+p''(\rho_2)=0$ και αν ξ θέση τοπικού ακροτάτου της p τότε θα ισχύει

$\frac{1}{\xi - r_1} + \frac{1}{\xi - r_2} + \frac{1}{\xi - r_3} = 0$ όπου r_1, r_2, r_3 οι ρίζες του πολυωνύμου

8Α27. Αν $p(x)=2x^2+2x-2\alpha x-\alpha$ να βρεθεί το α ώστε το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών του να είναι ελάχιστο.

Β ΟΜΑΔΑ

Να βρείτε και να χαρακτηρίσετε τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων f όπου:

8Β1. $f(x) = x\sigma\upsilon\nu(\pi x)\ ,\ x \in [0,2]$

8Β2. $f(x) = x^3 \sqrt[3]{(x-1)^2} \quad -2 \le x \le 2$

8Β3. $f(x)=x^2 \ln x - x$.

8Β4. Δείξτε ότι η εξίσωση : $x + 4\sigma\upsilon\nu x = 0$ δεν είναι αδύνατη και βρείτε το ελάχιστο της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x^2}{8} + x\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu 2x$$

8Β5. Δείξτε ότι αν $f^2(x) + \left(f'(x)\right)^2 = e^x + x^3$, $\forall x \in R$ όπου f δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση τότε η f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

8Β6. $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x + c}$. Αν η συνάρτηση έχει δύο διαφορετικά ακρότατα δείξτε ότι το μέγιστό της είναι μικρότερο από το ελάχιστό της

8Β7. $f(x) = \frac{4(a-1)x + 2a + 2}{4x^2 - 1}$ Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης για τις διάφορες τιμές του α.

8Β8. $f(x)=a\eta\mu x+b\eta\mu 3x$, $\alpha>0,b>0$. Να βρεθεί η συνθήκη μεταξύ των α,β ώστε η f να έχει τρία ακριβώς ακρότατα στο $(0,\pi)$.

8Β9. Η f είναι παραγωγίσιμη στο (a,b) και παρουσιάζει στα $c,d\in(a,b)$ ίδιο τοπικό ελάχιστο. Δείξτε τότε ότι έχει τοπικό μέγιστο σε κάποιο σημείο ανάμεσα στα c,d

8Β10. Αν υπάρχει f παραγωγίσιμη στο R : $f'(x)=1+xe^{-f(x)}$, $\forall x\in R$ να βρείτε τον τύπο όλων των $f(x)$ και να δείξετε ότι $f(1)>\ell n(e-2)$

8Β11. Δείξτε ότι ένα πολυώνυμο αρτίου βαθμού έχει ένα τουλάχιστο ακρότατο

8Β12. Αν ισχύει $P''(x)\neq 0$, $\forall x\in R$ όπου το $P(x)$ είναι πολυώνυμο δείξτε ότι το $P(x)$ έχει ακριβώς ένα ολικό ακρότατο

Γ ΟΜΑΔΑ

8Γ1. Αν $p(x)$ πολυώνυμο : $p(x)\,p(-x)=x^{4n}$ $n\in N^*$ να δείξετε ότι $p(0)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}p(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}p(x)$, $p(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R^*, $p'(0)=0$, $p(x)=x^2q(x)$ όπου q πολυώνυμο .

8Γ2. Αν $f''(x)=g(x)f(x)$ $\forall x\in[a,b]$, $f(a)=f(b)=0$, $g(x)>0$ g συνεχής στο $[a,b]$. Ασχοληθείτε με ακρότατα και το κριτήριο της β΄ παραγώγου για να δείξετε ότι η f είναι η μηδενική συνάρτηση

8Γ3. Έστω $f:[0,1]\to[0,+\infty)$ τρεις φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση και $0<a<b<1$: $f(a)=f(b)=0$. Δείξτε ότι υπάρχει $c\in(a,b)$: η f να παρουσιάζει μέγιστο στο c. Δείξτε στην συνέχεια ότι υπάρχει ξ : $f'''(\xi)=0$

8Γ4. Έστω f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$, M σημείο της C_f και $K \notin C_f$. Ονομάζουμε με $d(x)=\left|\vec{KM}\right|$ τότε

ι)Δείξτε ότι $d(x)$ παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$

ιι)Δείξτε ότι η $d(x)$ έχει και μέγιστο και ελάχιστο στο $[\alpha,\beta]$

ιιι)Αν ένα από τα προηγούμενα ακρότατα υπάρχει στη θέση x_0 με $x_0 \in (\alpha,\beta)$ και $M_0(x_0,f(x_0))$ δείξτε ότι : $\vec{KM}_0 \perp (\varepsilon)$ όπου (ε) είναι η εφαπτομένη της f στο σημείο M_0.

8Γ5. Έστω $3f(x)-2f(1)-f(2) \geq 3g(x)-2g(1)-g(2)$. Αν υπάρχουν οι f''',g''' στο R δείξτε ότι υπάρχει $\xi : f'''(\xi)=g'''(\xi)$

Δ ΟΜΑΔΑ

8Δ1. Έστω f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,b]$. Αν $f'(a)<K<f'(b)$ δείξτε ότι υπάρχει ξ στο $(a,b) : f'(\xi)=K$

*(Αυτό είναι ένα πολύ σημαντικό **θεώρημα του DARBOUX** που μοιάζει με το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών χωρίς όμως η f' να είναι συνεχής !!)*

8Δ2. Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,1]$, $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f'(0)=f'(1)=0$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο $[0,1] : \left|f''(\xi)\right| \geq 4$

(προσέξτε δεν είναι εύκολο! Υπάρχουν πολλοί τρόποι , ένας από αυτούς είναι με φυσική!!!)

8Δ3. Αν f'' συνεχής στο R και $\left|f(x)\right| \leq 1 \ \forall x \in R$, $f^2(0)+[f'(0)]^2=4$ δείξτε ότι υπάρχει ξ στο R : $f(\xi)+f''(\xi)=0$

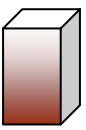
9 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ ΑΚΡΟΤΑΤΑ

Α ΟΜΑΔΑ

9Α1. Βρείτε δυο αριθμούς με άθροισμα *8* και ελάχιστο άθροισμα κύβων.

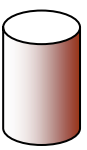
9Α2. Να διαιρεθεί ο αριθμός *8* σε δύο μέρη ώστε το γινόμενο των δύο μερών επί την διαφορά τους να γίνεται μέγιστο.

9Α3.



Ο όγκος του κουτιού είναι $72m^3$ και η πρόσθια πλευρά του έχει λόγο διαστάσεων *1* προς *2*. Βρείτε τις διαστάσεις του κουτιού ώστε να έχει την ελάχιστη επιφάνεια.

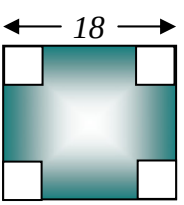
9Α4.

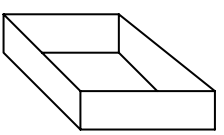


Ένας κύλινδρος έχει όγκο V. Ποια η ακτίνα της βάσης του και ποιο το ύψος του ώστε να παρουσιάζει την ελάχιστη δυνατή επιφάνεια.

(Χρήσιμο σε κουτάκια αναψυκτικών)

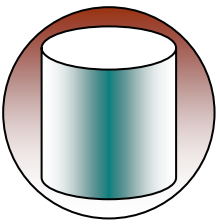
9Α5.





Από ένα ορθογώνιο χαρτόνι *18* επί *18* cm^2 κόβουμε *4* μικρά τετράγωνα με πλευρά *x cm* το καθένα και φτιάχνουμε το διπλανό κουτί χωρίς οροφή. Να βρείτε το *x* ώστε ο όγκος του κουτιού να είναι ο μέγιστος δυνατός.

9Α6.



Σε δοσμένη σφαίρα να εγγραφεί ορθός κύλινδρος μέγιστου όγκου

9Α7. Δίνονται τα σημεία *Α(4,0)* , *Β(-4,0)* και η ευθεία *(ε):4x+5y-2*

i)Να βρεθεί σημείο *Μ* της *(ε) (ΜΑ)+(ΜΒ)=min*

ii)Να βρεθεί η εξίσωση έλλειψης με εστίες τα *Α,Β* που εφάπτεται της *(ε)*

9Α8. Έστω *x* ο αριθμός τεμαχίων ενός προϊόντος. Ο ρυθμός μεταβολής της τιμής μονάδος είναι $\frac{dP}{dx}=\frac{3}{176}(54x-8x^2)$,

ενώ το κόστος των *x* τεμαχίων με $x<7$ είναι $K=x^3-18x^2+105x$

(x σε εκατομμύρια)

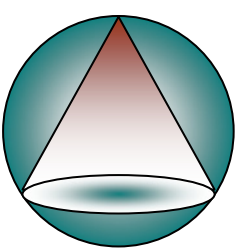
i) Να βρεθεί ο αριθμός τεμαχίων που μεγιστοποιεί την τιμή μονάδος

ii) Να βρεθεί ο αριθμός τεμαχίων που μεγιστοποιεί το κόστος

iii) Να βρεθεί ο αριθμός τεμαχίων που μεγιστοποιεί τις πωλήσεις

iv) Να δειχθεί ότι ο αριθμός τεμαχίων που ελαχιστοποιεί τα κέρδη είναι *x=*

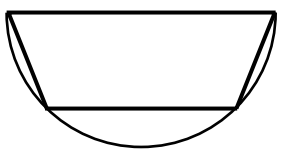
9Α9.



Σε δοσμένη σφαίρα να εγγραφή ορθός κώνος μέγιστου όγκου.

9Α10. Ένα βιβλιοπωλείο αγοράζει ένα βιβλίο από τον εκδότη *3 ευρώ* το καθένα .Όταν το διαθέτει στην αγορά με *15 ευρώ* τότε πουλά *200* αντίτυπα τον μήνα. Εκτιμήθηκε τώρα ότι αν η τιμή πώλησης μειωθεί, τότε για κάθε *1 ευρώ* μείωσης θα πωλούνται *20* περισσότερα αντίτυπα τον μήνα. Να βρείτε την τιμή πώλησης που μεγιστοποιεί τα κέρδη.

9Α11.



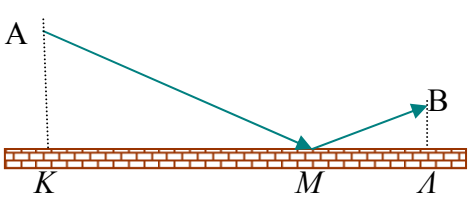
Σε δοσμένο ημικύκλιο διαμέτρου *2R* να εγγραφεί τραπέζιο όπως στο σχήμα με μέγιστο εμβαδό.

Β ΟΜΑΔΑ

9Β1.

Κινητό ξεκινά από το σημείο *Α* και κινείται με σταθερή ταχύτητα *2m/sec* ως το σημείο *Μ*. Στην συνέχεια κινείται με ταχύτητα *4m/sec* κατά μήκος της *ΜΓ* ως το *Γ*. Αν είναι *ΑΒ =5m* και *ΒΓ=12m* όπου *Β* η προβολή του *Α* στην ευθεία *ΒΜΓ* να βρεθεί η απόσταση *ΒΜ* : ο χρόνος κίνησης να είναι α) ελάχιστος β) μέγιστος

9Β2.



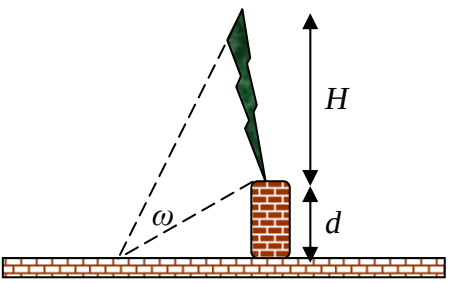
Οι αποστάσεις είναι $AK=\alpha$, $B\Lambda=\beta$, $K\Lambda=\gamma$. Ένα κινητό ξεκινά από το A, φτάνει στο M και καταλήγει στο B. Αν κινείται με την ίδια σταθερή ταχύτητα V προσδιορίστε την θέση του M πάνω στην $K\Lambda$, ώστε η διάρκεια κίνησης να είναι η ελάχιστη δυνατή. Σ αυτήν την περίπτωση δείξτε ότι οι γωνίες $A\hat{M}K, B\hat{M}\Lambda$ είναι ίσες. Τώρα στο ίδιο πρόβλημα αν η ταχύτητες στις διαδρομές AM και MB είναι αντίστοιχα V_1,V_2 προσδιορίστε το πηλίκο $\dfrac{\eta\mu A\hat{M}K}{\eta\mu B\hat{M}\Lambda}$ συναρτήσει των V_1,V_2.

Αρχή του Fermat , νόμος Snell στην διάθλαση)

9Β3. Μια κυκλική λίμνη έχει διάμετρο *2km*. Ένας άνθρωπος βρίσκεται σε κάποιο σημείο της περιφέρειας και θέλει να φθάσει όσο το δυνατόν γρηγορότερα στο αντιδιαμετρικό σημείο του *A*. Ο άνθρωπος κωπηλατεί με ταχύτητα *2km/h* και περπατά με ταχύτητα *4km/h*. Βρείτε την καταλληλότερη πορεία .

9Β4. Τα έξοδα καυσίμων ανά ώρα ενός ατμόπλοιου είναι ανάλογα του κύβου της ταχύτητας του. Στην ταχύτητα των *10Kn* τα έξοδα αυτά είναι *30$/h*, ενώ τα υπόλοιπα έξοδα είναι *600$/h*. Να βρείτε την οικονομικότερη ταχύτητα για ταξίδι *50miles*. (*Kn* σημαίνει *κόμβοι=miles/h* Η τιμή *30$/h* ήταν την εποχή που το πετρέλαιο ήταν φτηνό)

9Β5.



Σε πόση απόσταση πρέπει να σταθεί ένας άνθρωπος από το βάθρο ενός έργου τέχνης ώστε να έχει την καλύτερη οπτική εντύπωση ?($\omega=max$). Δίνονται το ύψος του βάθρου d και του έργου τέχνης H.

10 ΡΙΖΕΣ

Α ΟΜΑΔΑ

Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μία ακριβώς λύση

10Α1. $2^{x+1}+53^{x-1}-9^x=0$

10Α2. $a^x+b^x=(a+b)^x$, $a>0,b>0$

10Α3. $3^x+4^x=5^x$

(τι θυμίζουν τα 3,4,5?)

10Α4. $xe^x=e^x-1$

10Α5. $x+e^x=0$

10Α6. $e^x=ax+2$

Μπορεί να χρειαστείτε τον κανόνα του De l' Hospital για την εύρεση κάποιου ορίου

10Α7. $\ln x+e^{x-1}=2-x$

10Α8. $\ln x=e-x$

10Α9. $e^x\cdot\left[x+1+\ell n\left(x^2+1\right)\right]=1$

10Α10. $\sigma\upsilon\nu x=2x-\pi$

10Α11. $a_1^2(b_1-x)+a_2^2(b_2-x)+...+a_n^2(b_n-x)=x+x^3+...+x^{2n+1}$

10Α12. Αν *f,g* παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο *R* με , *f(a)=g(b), f(b)=g(a),a<b* και $f'(x)\neq g'(x)$, $\forall x\in R$ δείξτε ότι οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο

10Α13. Αν *f* συνεχής και γνήσια αύξουσα συνάρτηση σε όλο το *R* και ισχύουν $f(1)=1, f(-1)=-1$ τότε δείξτε ότι η εξίσωση $f^3(x)+x^5=0$ έχει μοναδική λύση

10Α14. *f(x)=x* όπου $f:[0,1]\to[0,1], f'(x)\neq 1 \quad \forall x\in[0,1]$

10Α15. Αν *f, g* παραγωγίσιμες στο *R*, $f'(x)\neq g'(x)\,\forall x\in R$, *f(R)=[0,4] , g(R)=[1,3]* τότε να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των *f,g* τέμνονται ακριβώς σε ένα σημείο *

10Α16. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+...+\frac{x}{1}+1=0$ έχει μία ακριβώς λύση $(n\in N^*)$

10Α17. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία ακριβώς λύση όταν *f(x)* πολυώνυμο με $f'(x)\neq 0\ \forall x\in R$

10Α18. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό *x* ώστε $\vec{a}\perp\vec{b}$ όπου $\vec{a}=(x,1), \vec{b}=(e^x,1-e^x)$

10Α19. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό *x* ώστε $(1,\ell nx)=\vec{v}\,//\,\vec{u}=(1,1-x)$

10Α20. Αν *f* παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$, $f(x)e^{f(x)}=x\ \forall x\in[0,+\infty)$ να βρεθούν οι τιμές $f^{-1}(1), f^{-1}(e)$ και να δειχθεί ότι η εξίσωση $2f(x)=e$ έχει μια ακριβώς λύση στο $[e,e^{e+1}]$

10Α21. Έστω $f(x)=e^{(x-p)^2}$ Θεωρούμε τις εφαπτόμενες της f στα σημεία $A(0,f(0))$, $B(2p,f(2p))$ οι οποίες τέμνονται στο $Γ$. Δείξτε ότι $ΑΓ=ΒΓ$ και ότι υπάρχει μοναδικό p στο $(0,1)$ ώστε $ΓΑ$ να είναι κάθετη στην $ΓΒ$

10Α22. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^{3n}-3nx+n=0$ έχει μία ακριβώς λύση στο διάστημα (01) $(n\in N^*)$

Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μία τουλάχιστον λύση στα διαστήματα που αναγράφονται δίπλα

10Α23. $(1-x)συνx=ημx$,στο R

10Α24. $9xlnx+e=0$ στο $(0,+\infty)$

10Α25. $5x^4+2kx=k+1$ στο $[0,1]$

10Α26. $k(3x^2-1)=ln(1+x)+\dfrac{x-1}{x+1}$ στο $[0,1]$

10Α27. $x(x-2)συνx=2(1-x)(a+ημx)$ στο $[0,2]$

10Α28. $(1+e^{x-k})(e^{-kx}-1)=ke^{-kx}(e^{x-k}+x-k-1)$,$k\neq 0$ στο $[0,k]$

10Α29. $2(x^3-2)=3k(x-1)$ στο $(0,2)$

10Α30. $2\ln x=k-e^x$ στο $(0,+\infty)$

10Α31. Για ποιες τιμές του $α$ η εξίσωση $\sqrt{x-2}+\sqrt{8-2x}=a$ έχει μία τουλάχιστον λύση?

10Α32. Έστω $f(x)$, $g(x)$ πολυώνυμα

$f(x)=\dfrac{g(a)}{12}x^4+\dfrac{g(b)}{2}x^2+g(b)x+6$,$a<b$,$g(a)\neq 0$. Αν το f έχει τρεις ρίζες διαφορετικές μεταξύ τους να δείξετε ότι το g έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[a,b]$.

10Α33. Αν $P(x)=a_n x^n+\ldots+a_1 x+a_0$, $\frac{a_n}{n+1}+\ldots+\frac{a_1}{2}+\frac{a_0}{1}=0$ να δείξετε ότι υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα του πολυωνύμου στο *(0,1)*.

Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν το πολύ λύση στα διαστήματα που αναγράφονται δίπλα

10Α34. $x^3-3x+k=0$ στο *(-1,1)*

10Α35. $\frac{x^3}{3}-x^2+4x+k=\eta\mu 2x$ στο R

10Α36. Αν $f'(x)<1 \ \forall x\in R$ να δείξετε ότι υπάρχει το πολύ ένα $\xi>1/2$: $f(\xi)=\xi^2$

10Α37. $x+f(x)=a$ όταν $-1<f'(x) \ \forall x\in R$ στο R

10Α38. $\varepsilon\varphi(x)=x+\lambda$, $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

10Α39. Αν $f'(x)<0 \ \forall x\in R$ να δείξετε ότι υπάρχει το πολύ ένα ξ : $f(\xi)-\xi^3=m$.

10Α40. Αν η f είναι γνήσια αύξουσα και η g είναι γνήσια φθίνουσα να δείξετε ότι οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται το πολύ σε ένα σημείο. (Δεν ξέρετε τίποτε για την συνέχεια και την παραγωγισιμότητα των *f, g*)

Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις είναι αδύνατες

10Α41. $\sqrt[n]{x-1}=1+x^n$, $n\in N^*$

10Α42. $\ln x=e^x$

10Α43. $\ln(\ln(x))=x$

10Α44. $x^4+4=(x+1)^2$

10Α45. Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x=ax^2+bx+c$ έχει τρεις το πολύ λύσεις.

10Α46. Αν $P(x)$ πολυώνυμο νιοστού βαθμού να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x = P(x)$ έχει το πολύ $v+1$ λύσεις.

10Α47. Να δείξετε ότι αν η εξίσωση $x^4 + x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, $a > \frac{3}{4}$ έχει 4 λύσεις τότε δυο τουλάχιστον είναι ίσες μεταξύ τους

10Α48. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x)= x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ δεν μπορεί να έχει όλες τις ρίζες της πραγματικές και άνισες, αν είναι γνωστό ότι ισχύει : $2a^2 < 5b$

10Α49. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^n=ax+b$ έχει τρεις το πολύ λύσεις.

10Α50. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $f(x) = 0$ έχει το πολύ δύο λύσεις όταν είναι: $f''(x) \neq 0 \ \forall x \in R$

10Α51. Να δείξετε ότι η εξίσωση $7^x + 9^x = 3x + 5$ δεν μπορεί να έχει τρεις ή και περισσότερες λύσεις.

10Α52. Είναι: $f''(x) \neq 0 \ \forall x \in R$. Να δείξετε ότι στην γραφική παράσταση της f δεν υπάρχουν τρία συνευθειακά σημεία.

Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν δυο ακριβώς λύσεις διαστήματα που αναγράφονται δίπλα

10Α53. $x^2=συνx$ στο R

10Α54. $x^4-32x+40=0$ στο R

10Α55. $e^x+e^{-x}=4-x^2$ στο R

10Α56. $x^4 = 16 + (x-2)^2$ στο R

10Α57. $x^4 = 1 + (x+14)^2$ στο R

10Α58. $3(x-1)^4 = 24 + x^3$ στο R

10Α59. $x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 16 = 0$ στο R

10Α60. $x^3 = 1 + \dfrac{2}{x-1}$ στο $R - \{1\}$

10Α61. Αν η εξίσωση $x^4 - 5x^3 + ax^2 + 5x - 6 = 0$ έχει τέσσερις διαφορετικές λύσεις δείξτε ότι $8a < 75$.

Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν δυο τουλάχιστον λύσεις διαστήματα που αναγράφονται δίπλα

10Α62. $x^3+ax^2+b=0$, $b>0$, $1+a+b<0$ στο $(-1,1)$

10Α63. $(3x^2-1)(k+\sigma\upsilon\nu x)=(x^3-x)\eta\mu x$ στο $(-1,1)$

10Α64. $(x^2-1)\sigma\upsilon\nu x + 2x\eta\mu x = 0$ στο $(-1,1)$.

10Α65. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\varepsilon\phi x = ax$, $a > 0$ έχει άπειρες λύσεις

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις

10Α66. $5^x=1+4x$

10Α67. $x^{2n+1}+a^{2n+1}=(x+a)^{2n+1}$ $a>0$, $n\varepsilon N^*$

10Α68. $e^x = ex + 1 - x$

10Α69. $2^{x+1} = x^2 + x + 2$

10Α70. $32^{2+x} = x^3 + 3x^2 + 8x + 12$

10Α71. $2(x-1) = (e^2-1)\ln x$

10Α72. $e(x-1) = (e-1)x\ln x$

10Α73. $x = e\ln x$

10Α74. $1 + x^{2n} = (1+x)^{2n}$ $n\varepsilon N^*$

10Α75. $2x + \ln^2(x+1) = 2\ln(x+1)$

10Α76. $\frac{x^2-a^2}{2ax}=\ln x-\ln a\ ,\ a>0$

10Α77. $2x+\ln x=2$

10Α78. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)+xf(0)=xf(1)+f(0)$ όταν είναι: $f''(x)\neq 0\ \forall x\in R$

10Α79. Να βρεθούν οι μη αρνητικές ρίζες της $f(x)=6e^x-(6+6x+3x^2+x^3)$

Σε πολλές από τις επόμενες κάποια όρια θα βρείτε με De l' Hospital»

10Α80. Να βρεθεί το σύνολο τιμών και το πλήθος των ριζών της συνάρτησης $f(x)=2x^3-6x+k\ ,|k|<4\ ,\ x\in[-1,1]$

10Α81. Να βρεθεί το σύνολο τιμών και το πλήθος των ριζών της συνάρτησης $f(x)=e^x+\ln(x-1)-\sqrt{3}$

Βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου *m*.

10Α82. $x\ln x=m$

10Α83. $mxe^{-x}=1$

10Α84. $x^3-x=m$

10Α85. $x^2e^x=m$

10Α86. $m^x=x$

10Α87. $x=m\ln x$

10Α88. $\ln|x|=\frac{m}{2x}$

10Α89. $2x(e^x-1)+(1-m)e^x+m=0$.

Β ΟΜΑΔΑ

10Β1. Για ποιες του *α/b* η εξίσωση $ax^3+be^x=0$, $ab\neq 0$ έχει μία ακριβώς λύση

(Μπορεί να χρειαστείτε τον κανόνα του De l' Hospital για την εύρεση κάποιου ορίου)

10Β2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $3x^4-x^2-2x+4=0$ είναι αδύνατη.

10Β3. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$m_1a_1^{b_1x+c_1}+m_2a_1^{b_2x+c_2}+...+m_na_1^{b_nx+c_n}=P(x)$, όπου το *P(x)* είναι, πολυώνυμο *k βαθμού* ,και όλοι οι αριθμοί m_i ,b_i είναι θετικοί , έχει *k+1* το πολύ λύσεις

10Β4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+...+\frac{1}{x-667}=0$ έχει *666* ακριβώς λύσεις

10Β5. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2^x+2^{-x}=x^2-\frac{1}{2}x+a$, $a>2$ έχει δύο ακριβώς λύσεις

10Β6. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x^2=x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu^2 x$ έχει δύο ακριβώς πραγματικές λύσεις .

10Β7. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2=\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x$ έχει δύο ακριβώς λύσεις.

10Β8. Αν $f(x)=x^2-3\sigma\upsilon\nu x+2x\eta\mu x$ και ισχύει $f(q)=0$ δείξτε ότι $|q|\leq 3$.

Στη συνέχεια δείξτε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο λύσεις.

10Β9. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\eta\mu x=\frac{1}{x}$ έχει άπειρες λύσεις

10Β10. Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^{-x}-\eta\mu x=0$ έχει άπειρες λύσεις για $x\in[0,+\infty)$

10Β11. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3-7x+2=0$ έχει τρεις ακριβώς πραγματικές λύσεις και αν f παραγωγίσιμη στο R ώστε $f^3(x)+2=7f(x)$ τότε η f είναι σταθερή.

10Β12. Να λυθεί η εξίσωση $x^x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

10Β13. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$a^x = 1+(a-1)x^2 \ , \ 1<a<3$

10Β14. Για ποιες τιμές του m υπάρχει $\kappa>0$: η εξίσωση $x^2+m=2k\ln x$ να έχει μοναδική λύση.

10Β15. Βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $m^x=\log_m x$ για τις διάφορες τιμές του m.

10Β16. Βρείτε το πλήθος των θετικών ριζών της εξίσωσης

$a^x = x^b \quad , \ a>1, b\neq 0$

10Β17. Να λυθεί η εξίσωση $x^{x+2} = (x+2)^x$

10Β18. Αφού βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων με τύπους

$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ και $g(x) = 2+ex\ln x$, να λύσετε την εξίσωση

δύο μεταβλητών $\frac{2z}{1+z^2} = 2+ey\ln y$

Χρησιμοποιήστε αυτή την τεχνική για να λύσετε τις εξισώσεις δύο μεταβλητών

10Β19. $\frac{e\ln y}{y} = z+\frac{1}{z}$

10Β20. $\frac{1}{x}+2\sqrt{x} = 3y(1-\ln y)$

10Β21. $4^x+1 = 2^{x+1}\eta\mu y$

10Β22. $\frac{\ln x}{x} = e^{\sigma\upsilon\nu y}$

Να λύσετε τα συστήματα

10Β23. $2+\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu y=z^2+1$

10Β24. $4x^3+3x^4+2=1-|y|=-ze^{z+1}$

Γ ΟΜΑΔΑ

10Γ1. Να λυθεί η εξίσωση $3^x+6^x=4^x+5^x$

(Ξεφεύγει από τα συνηθισμένα)

10Γ2. Αν το πολυώνυμο $x^3-kx^2+12x-8$ έχει τρεις θετικές ρίζες να βρεθούν οι ρίζες του καθώς και το *k*.

10Γ3. Αν $f''(x)+xf'(x)=f(x),\forall x\in[a,b],f(a)=f(b)=0$ με $\alpha>0$ τότε η *f* έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο *(a,b)*.

10Γ4. Αν $p(x)=a(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)$ τότε να δείξετε ότι αν όλα τα a_k είναι διαφορετικά μεταξύ τους, τότε το $[p'(x)]^2-p(x)p''(x)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες

10Γ5. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x^8+3x^6-5x^3-4x+6=0$ είναι αδύνατη στο R

10Γ6. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x^8+3x^6-3x^3-2x+9=0$ είναι αδύνατη στο R

10Γ7. Να δείξετε ότι οι εξισώσεις $\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x)=x,\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x)=x$ έχουν μία μόνον λύση στο $(0,\pi/2)$ με τη πρώτη μικρότερη της δεύτερης

10Γ8. Έστω πολυώνυμο *f* βαθμού $n\geq 1$ με όλες του τις $k\leq n$ πραγματικές ρίζες απλές και $f(0)\neq 0$

Να δείξετε ότι το πολυώνυμο

$g(x)=(1-x^2)f(x)f'(x)+x\left((f'(x))^2-f^2(x)\right)$ έχει τουλάχιστον $2k-1$ ρίζες

Δ ΟΜΑΔΑ

10Δ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+...+\frac{x}{1!}+1=0$ έχει μία μόνον λύση αν η περιττός και καμία αν η άρτιος

(Μην ξεχνάτε την επαγωγή. Δεν φτάνει όμως μόνον αυτό)

10Δ2. Έστω p πολυώνυμο αρτίου βαθμού. Αν $q(x)=p(x)+p(x+1)+...+p(x+k)$, $k\in N^*$ να δείξετε ότι υπάρχει τιμή του φυσικού κ ώστε το πολυώνυμο q να μην έχει ρίζα στο R

10Δ3. Έστω ότι α ακέραιος, b πραγματικός και n φυσικός. Πως πρέπει να επιλεγούν τα a,b ώστε η εξίσωση $x^n=2ax+b$ να έχει μια τουλάχιστον λύση για κάθε n

10Δ4. Αν a,b περιττοί πρώτοι, $c,n>1$ ακέραιοι να δείξετε ότι η εξίσωση $(\frac{a+1}{2})^b+(\frac{a-1}{2})^b=c^n$ δεν μπορεί να έχει δυο λύσεις $a\neq b$

11 ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

Α ΟΜΑΔΑ

Να δειχθούν οι παρακάτω ανισώσεις

11Α1. $\frac{a-b}{a}\le ln(\frac{a}{b})\le\frac{a-b}{b}\ \forall,a>0,b>0$

11Α2. $\frac{a-b}{\sigma\upsilon\nu^2 b}<\varepsilon\phi\, a-\varepsilon\phi\, b<\frac{a-b}{\sigma\upsilon\nu^2\, a}$ όταν $0<b<a<\pi/2$

11Α3. $\nu\beta^{\nu-1}(\alpha-\beta)<\alpha^{\nu}-\beta^{\nu}<\nu\alpha^{\nu-1}(\alpha-\beta)$ όταν $\alpha,\beta>0$

11Α4. Αν $0<a<b \Rightarrow ln\frac{a}{b}>\frac{a^2-b^2}{2ab}$

11Α5. $ae^{-bx}-be^{-ax}\geq a-b$ όταν $x>0,\ 0<a<b$

11Α6. $\frac{\varepsilon\phi a}{\varepsilon\phi b}>\frac{b}{a}$ όταν $0<b<a<\pi/2$

11Α7. $\frac{a-1}{a}\leq ln\,a\leq a-1 \quad \forall, a>0$

11Α8. $1+x\leq e^{x}\leq\frac{1}{1-x}\ \forall x\in(-1,1)$

11Α9. $\frac{1}{1+a}<ln(1+\frac{1}{a})<\frac{1}{a}\ \forall a>0$

11Α10. $f(x)=\frac{1-ln\,x}{x^2},0<a<b<e\Rightarrow f(b)<\frac{b\,ln\,a-a\,ln\,b}{ab(a-b)}<f(a)$

Να βρείτε το a στις παρακάτω περιπτώσεις

11Α11. Αν $x^4+2x^3+ax-a-3\geq 0\ \forall x\in R$ τ

11Α12. Αν $ln(\frac{x}{a})\leq x-a\ ,\ \forall x\in(0,+\infty)\ ,\ a>0$

11Α13. Αν $ae^{x}\geq x+a\ ,\forall x\in R$

11Α14. Αν $a^{x}-b^{x}\geq x\ \forall x\in R\Rightarrow a=be$

11Α15. Αν $f'(x)\neq 0, f(a)=0, x\in R, e^{f(x)}\geq mf(x)+1, \forall x\in R$ να βρεθεί το m

11Α16. $f(x)\leq ax^2+bx+c\ ,\ \forall x\in R\ ,\ f(0)=c\ ,\ f$ παραγωγίσιμη. Δείξτε ότι $f'(0)=b$

11Α17. Αν $a^{x}\geq 1+x \quad \forall x\in R\ ,\ a>0$ δείξτε ότι $a=e$

11Α18. $a_1^{x}+a_2^{x}+...+a_n^{x}\geq n \quad \forall x\in R\ ,\ a_k>0\Rightarrow a_1a_2...a_n=1$ *

11Α19. Έστω f παραγωγίσιμη και

$1+(x-2)f(1)+f(x)\geq e^{a(x-1)}\ \ \forall x\in R$. Αν επιπλέον ισχύει $f(1)+f'(1)=2$ βρείτε την τιμή του a.

11Α20. Να δειχτεί ότι υπάρχει ακριβώς ένας αριθμός x_0 και να βρεθεί, ώστε $4^x\geq x_0\cdot x+1$ για κάθε $x\in R$.

11Α21. Να δειχτεί ότι: $\ell n\left(x^2+1\right)\leq x$, για κάθε $x\geq 0$. Πότε ισχύει η ισότητα $\ell n\left(x^2+1\right)=x$;

11Α22. Έστω η συνάρτηση $f\left(x\right)=\frac{\ell nx}{x^2}$, $x>0$.

i) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να δειχτεί ότι $x^2\geq 2e\cdot \ell nx$, $x>0$.

11Α23. Αν $x>0$ τότε είναι: $n(1-x^{\frac{-1}{n}})\leq \ln x\leq n(x^{\frac{1}{n}}-1)$, $n\in N^*$

Βρείτε το $\lim\limits_{n\to\infty}[n(\sqrt[n]{x}-1)]$

(αυτή η τελευταία ακολουθία αποτελεί έναν τρόπο ορισμού του lnx)

Δείξτε ότι

11Α24. $\ln x>\frac{2x-2}{x+1}$ για $x>1$

11Α25. $2a\ln a\leq (a+1)(a^2+1)$, $\forall a\geq 1$

11Α26. $e^x\geq 1+x+\frac{x^2}{2}\ \ \forall x\geq 0$

11Α27. $(1+a)^x\geq 1+ax$, $\forall x\geq 1$, $a>-1$

(Μοιάζει με Bernoulli αλλά δεν είναι το x ακέραιος.)

11Α28. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή του $m: e^x\geq mx^2$, $\forall x>0$

Να δειχθεί ότι:

11Α29. $x^x \geq e^{x-1}$, $\forall x > 0$

11Α30. $x^a e^{-x} \leq \left(\frac{a}{e}\right)^a$ $\forall x, a \in [0,+\infty)$

11Α31. $\left(\frac{ea}{b}\right)^a < e^b$ όταν $0 < a < b$

11Α32. $e^{\pi} > \pi^e$

11Α33. $e^e \pi^{\pi} > e^{2\pi}$

11Α34. $e^x + e^{-x} \geq 2 + x^2$, $\forall x \in R$

11Α35. $\pi\eta\mu x \geq 2x$, $\forall x \in (0,\pi/2)$

11Α36. $\eta\mu(a+b) < \eta\mu a + b\sigma\upsilon\nu a$ όταν $0<\alpha<\alpha+\beta<\pi/2$

11Α37. $\frac{3x}{\eta\mu x} > 4 - \sigma\upsilon\nu x$, $\forall x \in (0,\pi/2)$

11Α38. $\eta\mu x + \varepsilon\varphi x > 2x$ $\forall x \in (0,\pi/2)$

11Α39. $\eta\mu x > x - \frac{x^3}{6}$ $\forall x > 0$

11Α40. Αν $\alpha > \frac{1}{2}$, τότε για κάθε $x \in R$.

11Α41. $\varepsilon\phi x < \frac{\pi x}{\pi - 2x}$ $\forall x \in (0,\frac{\pi}{2})$

11Α42. $x^{\frac{1}{x}} < 1 + \frac{3}{2\sqrt{x}}$ $\forall x \in [1,e]$

11Α43. $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$, $\forall x > 1$

11Α44. Αν $x|f'(x)| \leq 1$, $\forall x \geq 1$, $f(1) = 1$ δείξτε

$1 - \ln x \leq f(x) \leq 1 + \ln x$, $\forall x \geq 1$

11Α45. Αν είναι $x.f'(x) \geq 1 + x \ \forall x \in [1,e]$, $f(1)=1$, $f(e)=1+e$ τότε να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f στο $[1,e]$

11Α46. Να δειχθεί ότι, αν $f''(x)<0 \ \forall x \in [a,b]$, $f(a)=f(b)=0$, τότε θα ισχύει $f(x)>0 \ \forall x \in (a,b)$

*(**Βασική άσκηση** που θα χρησιμεύσει στα επόμενα.. Π.χ στην κυρτότητα κ.ο.κ)*

11Α47. Αν $f''(x) < 0$, $\forall x \in [1,3], f(2) = 0. f(3) = 1$. Δείξτε $f(x) < x - 2 \ \forall x \in (1,2)$ ενώ $f(x) > x - 2 \ \forall x \in (2,3)$

11Α48. Να δειχθεί ότι, αν $f''(x)<0$, $f(0)=0$, $f(v)=v$, τότε $f(x) \geq x \forall x \in [0,v]$

11Α49. Αν $f''(x) > 0$, $\forall x \in R$ δείξτε ότι $6f(7) < 5f(6) + f(12)$

11Α50. Αν $f''(x) > 0$, $\forall x \in R$ δείξτε ότι $3f(5a) < f(3a) + 2f(6a)$, $\forall a > 0$

Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις

11Α51. $e^{x^2+x+1} - e^{x+1} + x^2 \geq 0$

11Α52. $(x^2 + e)^{x^4+e} \geq (x^4 + e)^{x^2+e}$

11Α53. $(3^x + 4^x)^3 - 5^x > 125^x - 3^x - 4^x$

11Α54. $2\sqrt{x - e^4} > \sqrt{\ln(x-1)}$

11Α55. $x > 1 + e^{2-x}$

11Α56. $\pi\eta\mu\sqrt{x} > 4\sqrt{x}$

11Α57. $\ln^2 2 + e^x + e^{-x} > x^2 + \frac{5}{2}$

Β ΟΜΑΔΑ

11Β1. Να δείξετε ότι $(a+b)\ln(\frac{a+b}{2}) \le a\ln a + b\ln b \quad \forall a,b>0$

11Β2. Αν $a>0$, $b>0$, $a+b=1$, $x>0$, $y>0$ δείξτε ότι $x^a y^b \le ax+by$

11Β3. Δείξτε ότι $(x+y)\ln(\frac{x+y}{a+b}) < x\ln(\frac{x}{a}) + y\ln(\frac{y}{b})$

11Β4. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{a},\vec{b}$: $0 < \vec{a}.\vec{b} \ne 1$, $\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right| = 2$.

Αν ισχύει : $\log_{\vec{a}.\vec{b}} x - \frac{x}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 2} \le 0 \qquad \forall x>0$ δείξτε ότι :

$\vec{a},\vec{b}$ ομόρροπα

11Β5. Δείξτε ότι $e^x \ge 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} \ , \forall x \ge 0$

(Μπορεί να αποδειχθεί, αλλά πολύ αργότερα ότι :

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \ , \forall x \in R)$

11Β6. Αν $f(x) = \eta\mu x \ , 0 < x \le 1$ τότε δείξτε ότι

$f(x) + f^{-1}(x) > 2x , \forall x \in (0,1]$

11Β7. Αν $f'(x) > \sigma\upsilon\nu x \quad \forall x \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, $f(0) = 0$ δείξτε ότι

$f(x) + f(-x) > 2\eta\mu x \quad \forall x \in (0,\frac{\pi}{2})$

11Β8. Δείξτε ότι $\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^3 > \sigma\upsilon\nu x \quad \forall x \in (0,\pi/2)$

11Β9. Δείξτε ότι $4x \ge 4x^2 + \eta\mu(\pi x) \quad \forall x \in [0,1]$.

(Καλή εξάσκηση στον πίνακα μονοτονίας και όχι μόνον)

11Β10. *Αν* $na_n = 1 - x^n \ , 0 < x < 1 \ , n \in N^* \Rightarrow a_{n+1} < a_n$

11Β11. Έστω $f:R\to R \;:\left|f(x)\right|\le axe^{x}+e^{2x}-e^{3x} \quad \forall x\in R$. Τότε να δείξετε ότι αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 θα ισχύει: $f(0)=f'(0)=0$, $a=1$

11Β12. Έστω f παραγωγίσιμη στο $[1,\alpha]$, $f(1)=a$, $f(a)=1+2a$.Τότε να βρεθούν οι τιμές του a εάν είναι: $1\le f'(x)\le 2$, $x\in(1,a)$

11Β13. Αν $f''(x)>0$, $\forall x\in R$, $a<b$ δείξτε ότι

$$f(x)<f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \text{ και}$$

$$f(x)<f(b)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b) \text{ όταν } x\in(a,b).$$ Δείξτε ακόμη ότι οι προηγούμενες ανισότητες γίνονται ισότητες για $x=a$, $x=b$. Τέλος δείξτε ότι αλλάζουν φορά όταν $x\notin[a,b]$.

11Β14. Αν $f''(x)>0 \quad \forall x\in R$, $f(0)=3$, $f(3)=6$ τότε δείξτε ότι : $f(x)>x+3 \;\forall x>3$ ενώ $f(x)<x+3 \;\forall x\in(0,3)$

11Β15. Αν $f''(x)<0 \quad \forall x\in[-1,2]$, $f(-1)=-2$, $f(1)=0$ τότε δείξτε ότι : $f(0)>-1$ ενώ $f(2)<1$

11Β16. Αν $f:[a,b)\to R, \lim\limits_{x\to b} f(x)=+\infty, f'(x)\le (f(x))^2$, f αύξουσα, η f έχει συνεχή παράγωγο και ακόμη $f(a)=1$, τότε δείξτε ότι $b-a\ge 1$

11Β17. Αν $f''(x)>0 \quad \forall x\in R$, $a<b<c<d$, $a+d=b+c$, δείξτε ότι $f(a)+f(d)>f(b)+f(c)$

11Β18. Αν $f''(x)>0 \quad \forall x\in R$ τότε οποιαδήποτε «χορδή» ΑΒ βρίσκεται «επάνω» από το αντίστοιχο τμήμα της C_f

(Διάσημο συμπέρασμα που θα μπορούσε να ορίσει τις κυρτές συναρτήσεις.)

11Β19. Αν $f''(x)>0$, $\forall x\in R$ δείξτε $3f(1)<f(-3)+f(0)+f(6)$

11Β20. Αν $f''(x)>0$, $\forall x\in R$ δείξτε ότι

$$(a+b)f(\frac{b-a}{b+a})<af(-1)+bf(1)\ ,\ \forall a,b>0$$

11Β21. Αν $f(x)>0, f'(x)<0, f''(x)\geq 0$, $\forall x\in[0,+\infty)$, δείξτε ότι

$$\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$$

11Β22. Αν f'' συνεχής , $f(x)\geq 0$ στο (a,b) , $f(x_0)=f'(x_0)=0$, x_0 στο (a,b). Τότε να δείξετε ότι $f''(x_0)$ είναι μη αρνητικός αριθμός. Στη συνέχεια δείξτε ότι αν ισχύει

$1+\sigma\upsilon\nu(ax)\geq\sigma\upsilon\nu(bx)+\sigma\upsilon\nu(cx)$ $\forall x\in R$ τότε θα είναι

$b^2+c^2\geq a^2$

11Β23. Αν $f''(x)>0$, $f(x)=f(a+b-x)$, $\forall x\in[a,b]$ να μελετήσετε το πρόσημο της συνάρτησης

$$f(x)-f(b)-2\frac{f(\frac{a+b}{2})-f(a)}{b-a}(x-a)\ ,\ \forall x\in[a,b]$$

Γ ΟΜΑΔΑ

11Γ1. Αν $a,b\in(0,1)\Rightarrow a^b+b^a>1$

11Γ2. Αν $a,b>0$ τότε $(8a^2+b^2)^2>16a^3b$

11Γ3. Να δειχθεί ότι $(1+\frac{1}{x^2})x\eta\mu\frac{1}{x}>1,\forall x\geq\frac{1}{\sqrt{5}}$

11Γ4. Αν $f''(x)>0$ $\forall x\in R$ δείξτε ότι οποιοδήποτε σημείο της C_f

βρίσκεται "ψηλότερα" από το σημείο της εφαπτομένης της με την ίδια τετμημένη. Αν τώρα

$x_0 \in [a,b] \Rightarrow \exists m,n>0, m+n=1 : x_0 = ma+nb$. Δείξτε έτσι ότι $f(ma+nb) \le mf(a)+nf(b)$. Γενικεύστε την πιο πάνω πρόταση δείχνοντας ότι :Αν

$k,\lambda,m>0$, $k+\lambda+m=1 \Rightarrow$
$f(kx+\lambda y+mz) \le kf(x)+\lambda f(y)+mf(z)$

*Πρόκειται για τις **διάσημες ανισότητες Jensen**.Θα τις δείτε και αργότερα .*

Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα ή άλλον τρόπο να δείξετε ότι αν $f''(x)>0, \forall x \in R$

i) $3f(5) \le f(2)+f(3)+f(10)$

ii)Αν $a,b,c>0 \Rightarrow a^a b^b c^c \ge (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$

(Θυμηθείτε την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου)

11Γ5. Αν K εσωτερικό σημείο τριγώνου ABC και D,E,F οι προβολές του K στις πλευρές να βρεθεί το μέγιστο της παράστασης $\dfrac{KD.KE.KF}{KA.KB.KC}$

11Γ6. Κυρτό τετράπλευρο $ABΓΔ$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας 1 και ισχύει $AB.BΓ.ΓΔ.ΔA \ge 4$ τότε να δείξετε ότι το $ABΓΔ$ είναι τετράγωνο

11Γ7. Σε κάθε τρίγωνο $\dfrac{3\sqrt{3}}{2} \ge \eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu Γ$. Η τιμή $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, είναι η μέγιστη τιμή του αθροίσματος $\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu Γ$?

11Γ8. Δείξτε ότι

$$\frac{a^{n+2}}{(b+c)^n}+\frac{b^{n+2}}{(c+a)^n}+\frac{c^{n+2}}{(a+b)^n} \ge \frac{a^2+b^2+c^2}{2^n}, a,b,c>0$$

11Γ9. Αν $a,b,c>0$ να δειχθεί ότι

$$b^a c^b a^c \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^a \left(\frac{b+c}{2}\right)^b \left(\frac{c+a}{2}\right)^c \le a^a b^b c^c$$

11Γ10. $x,y,z\neq 1, xyz=1 \Rightarrow \left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\left(\frac{y}{y-1}\right)^2+\left(\frac{z}{z-1}\right)^2 \ge 1$

11Γ11. Αν $x,y,z\in[0,\frac{1}{2}]$, $x+y+z=1$ τότε να δείξετε ότι

$$x^3+y^3+z^3+4xyz \le \frac{9}{32}$$

11Γ12. $x,y,z>0$, $x+y+z=1$, $S=xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)$ να δείξετε ότι $S<1/4$

11Γ13. Να βρείτε το ελάχιστο της παράστασης

$$(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})(a+1)(b+1)(c+1) \text{ για } a,b,c>0$$

11Γ14. Αν $x>0$, $y>0$ για ποιες τιμές των πραγματικών αριθμών a , b υπάρχει σταθερά $K>0$: $x^a\cdot y^b \le K\cdot(x+y)$, $\forall x,y\in(0,+\infty)$

Δ ΟΜΑΔΑ

11Δ1. Δείξτε ότι $\varepsilon\varphi(\eta\mu x)>\eta\mu(\varepsilon\varphi x)$ $\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$

11Δ2. Έστω $f:[a,b]\to R$ δυο φορές παραγωγίσιμη με

$f(x)>0$ $\forall x\in(a,b)$, $f(a)=f(b)=0$, $f(x)+f''(x)>0$

$\forall x\in[a,b]$ Να δείξετε ότι $b-a\ge\pi$

11Δ3. Αν $f'''(x)$ γνήσια αύξουσα στο R τότε

$f(x+1)-2f(x)+f(x-1)>f''(x), \forall x\in R$

(Ψάξτε λίγο το θεώρημα Taylor έχει ξανά αναφερθεί)

11Δ4. Αν $f:R\to R$ με συνεχή $f'''(x)$ έτσι ώστε να ισχύουν σε όλο το R $f(x)>0, f'(x)>0, f''(x)>0, f'''(x)>0$ και επιπλέον $f'''(x)\le f(x)$, $\forall x\in R$ τότε δείξτε ότι :

$f'(x)<2f(x)$, $\forall x\in R$

(θα φανεί χρήσιμο εδώ το θεώρημα Taylor)

11Δ5. Αν $|f(x)|\le A, |f''(x)|\le B, \forall x\in[-a,a]\Rightarrow |f'(x)|\le \frac{A}{a}+Ba$

Για ποιο α έχουμε το ελάχιστο άνω φράγμα της $|f'(x)|$

(Υπάρχει σχετικά σύντομη λύση με το θεώρημα Taylor)

11Δ6. Έστω $f:R\to R$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη . Να δείξετε ότι αν c>0 δεν υπάρχει συνάρτηση f : $f^{(n+1)}(x)>f^{(n)}(x)+c$, $\forall x\in R$, $\forall n\in N$ και να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to-\infty} f^{(n)}(x)$, $\forall n\in N$

12 ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ

Α ΟΜΑΔΑ

Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα τις παρακάτω συναρτήσεις

12Α1. $f(x)=\frac{1}{2x}-\ln x$

12Α2. $f(x)=\frac{x^2-2x+5}{(x+1)^2}$

12Α3. $f(x)=\frac{x^3-x+3}{x^2+2x}$

12Α4. $f(x)=\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right), a>b>0$

12Α5. $f(x)=\frac{x^3}{x^2+3\alpha^2}$ $(\alpha>0)$.

12Α6. Το *(1,3)* είναι σημείο καμπής της *f: f(x)=αx³+βx²*. Βρείτε τα *α, β*.

12Α7. Βρείτε τις τα *α , b* έτσι ώστε η $f(x)=e^{ax}(x^2+b)$ να έχει ακρότατο στο *0* και σημείο καμπής για *x=1*

12Α8. Για ποιες τιμές του *α* η $f(x)=x^4-6a^2x^2+5ax$ έχει σημεία καμπής? Είναι δυνατόν τα σημεία καμπής και η αρχή των αξόνων να είναι συνευθειακά σημεία?

12Α9. Δείξτε ότι τα σημεία καμπής της *f* όπου:

f(x)=λx³+3λx²-(6λ+5)x-8λ+3 (λ>0) είναι ανεξάρτητα του *λ*.

12Α10. Για ποια *λ* η *f: f(x)=λe^x+x²+2x+2* έχει σημεία καμπής ;

12Α11. Δείξτε ότι τα σημεία καμπής της $f(x)=\frac{1+x}{1+x^2}$ είναι συνευθειακά.

12Α12. Βρείτε τα σημεία καμπής της *f(x)=αημ²x+βσυν²x, α>β>0*.

12Α13. Έστω $p(x)$ πολυώνυμο τρίτου βαθμού. Να δείξετε ότι έχει μοναδικό σημείο καμπής $(x_0, p(x_0))$. Αν τώρα το *p* έχει ακρότατα στις θέσεις x_1, x_2 τότε δείξτε ότι $2x_0 = x_1 + x_2$ Τέλος αν το $p'(x)$ έχει διπλή ρίζα το *ρ* θα είναι $\rho = x_0$

12Α14. Δείξτε ότι τα σημεία καμπής της $f(x)=x^2\ln(ax)$, $a>0$ βρίσκονται πάνω σε μια παραβολή

12Α15. Δείξτε ότι τα σημεία καμπής της $f(x)=xe^{ax}$, $a\neq 0$ βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία

12Α16. Για ποιες τιμές του *m* η $f(x)=x^4+mx^3+3x^2+1$ είναι κυρτή

12Α17. Έστω f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις σε όλο το R με $f'(x)g'(x) \neq 0$ και κυρτές Αν η f είναι γνήσια αύξουσα τότε δείξτε ότι η fog είναι κυρτή

12Α18. Δείξτε ότι στην γραφική παράσταση μιας κοίλης συνάρτησης δεν υπάρχουν τρία ή και περισσότερα συνευθειακά σημεία.

(αυτή η άσκηση υπήρχε και πιο πριν)

12Α19. f είναι κυρτή στο R και έχει τοπικό ελάχιστο. Δείξτε ότι είναι ολικό

12Α20. $f:(a,b) \to R$ κυρτή. Δείξτε ότι δεν έχει μέγιστο. Αν το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο τότε x_0 μοναδικό.

12Α21. Αν f κυρτή και g κοίλη στο R δείξτε ότι οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται το πολύ σε δυο σημεία

12Α22. Δείξτε ότι η εφαπτομένη μιας κυρτής συνάρτησης βρίσκεται πάντοτε κάτω από την γραφική της παράσταση στο αντίστοιχο διάστημα. Για $x>x_0$,όπου x_0 το σημείο επαφής, η κατακόρυφη απόσταση της f από την εφαπτομένη της αυξάνει.

Β ΟΜΑΔΑ

12Β1. Δείξτε ότι τα σημεία καμπής της f_0: $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x}$ ανήκουν στην καμπύλη με εξίσωση $y^2(4+x^4)=4$.

12Β2. Δείξτε ότι τα σημεία καμπής της $f: f(x)=x\eta\mu x$ βρίσκονται πάνω στην καμπύλη $c: y^2(4+x^2)=4x^2$.

12Β3. Έστω *f:* $f_\lambda(x)=\frac{x}{x^2+\lambda^2}$, *λ>0.* Δείξτε ότι τα σημεία στα οποία η *f* παρουσιάζει ακρότατα και καμπή εκτός του *(0,0)* είναι κορυφές παραλληλογράμμου. Δείξτε ακόμη ότι οι εφαπτόμενες της *f* στα σημεία που η C_f παρουσιάζει καμπή τέμνονται σε σταθερή υπερβολή.

12Β4. Αν $f''(x)$ συνεχής στο *R* και η *f* δεν είναι σταθερή σε κανένα διάστημα τότε να δείξετε ότι μεταξύ ενός τοπικού μεγίστου και ενός τοπικού ελαχίστου υπάρχει σημείο καμπής

12Β5. Αν *f* παραγωγίσιμη δύο φορές στο *[α,β]* και $x_0 \in (\alpha,\beta)$, δείξτε ότι δεν είναι δυνατόν η *f* να παρουσιάζει ταυτόχρονα ακρότατο και καμπή στο x_0. Θεωρήστε ότι η *f* δεν είναι σταθερή σε κανένα διάστημα

12Β6. Έστω *f* δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση σε όλο το *R* και είναι : $f''(x)>4\{f'(x)-f(x)\}$ στο *R.* Αν είναι : $g(x)=e^{-2x}f(x)$ στο *R* και η συνάρτηση *f* έχει ακρότατο στο x_0 το $f(x_0)=0$ τότε:
ι)Δείξτε ότι η *g* δεν έχει σημεία καμπής
ιι)Μελετήστε την μονοτονία της *g*
ιιι)Δείξτε ότι $f(x)\geq 0\ \forall x\in R$

12Β7. Έστω $f,g:[0,1]\to R$ δυο φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις με την *f* κυρτή την *g* κοίλη και $f(0)=0, f(1)=0, g(0)=1, g(1)=0$. Δείξτε ότι:
$g(x)-f(x)\geq 1-x, \forall x\in[0,1],$
$g'(0)>f'(0)-1, g'(1)<f'(1)-1$

12Β8. Έστω $f:R\to R$ δυο φορές παραγωγίσιμη με

$\left(f'(x)\right)^3+\left(f'(x)\right)^2+\left(f'(x)\right)=e^x-x-1+x^2$, $\forall x\in R$.

Δείξτε ότι η f δεν έχει ακρότατα αλλά έχει ένα σημείο καμπής.

12B9. Αν $f:R\to R$ δυο φορές παραγωγίσιμη και $\left(f'(x)\right)^5+f'(x)=2x+\eta\mu x$ για κάθε τιμή του x τότε να δείξετε ότι η συνάρτηση έχει μοναδικό ακρότατο στο R, αλλά δεν έχει κανένα σημείο καμπής.

12B10. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $e^x=f(x)$ είναι αδύνατη όταν: $f(1)=0$, $f'(1)=1$ και επιπλέον $f''(x)<0$, $\forall x\in R$

12B11. Αν $f'(x)=af^2(x)+bf(x)+c$, $\forall x\in R$ με $a>0$, $\Delta=b^2-4ac<0$ τότε

1) Δείξτε ότι η f δεν έχει ακρότατα

2) Δείξτε ότι η $f(x)-mx$ είναι αύξουσα στο R όπου $m=-\dfrac{\Delta}{4a}$

3) Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ και βρείτε το σύνολο τιμών

4) Δείξτε ότι η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και έχει ένα ακριβώς σημείο καμπής

12B12. Αν $f:R\to R$ δυο φορές παραγωγίσιμη δείξτε ότι δεν είναι δυνατόν να ισχύει $f(x)f''(x)<0$, $\forall x\in R$

12B13 Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f:R\to R$, κυρτή : $f(x)<M$, $\forall x\in R$

12B14 $f(x)>0$, $f''(x)\le 0$ $\forall x\in R$, $f(2)=1$, f'' συνεχής ,βρείτε τον τύπο της f

12Β15. Αν $f''(x)=5f(x)$, $\forall x\in R$ και στην C_f δεν υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα τότε η f έχει το πολύ μια ρίζα, ένα σημείο καμπής ένα ακρότατο

12Β16. Να λυθεί η εξίσωση $x^4-4x+4=0$

12Β17. Αν $f''(x)>f(x)$, $\forall x\geq 0, f(0)=f'(0)=0$ να δειχθεί ότι f κυρτή στο $[0,+\infty)$

Γ ΟΜΑΔΑ

12Γ1. Αν f' συνεχής και γνήσια μονότονη στο R και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\in R$ τότε να δειχθεί ότι υπάρχει το πολύ ένα ξ: $f'(\xi)=f(\xi)$

12Γ2. f κοίλη στο R Δείξτε ότι

$f(x+1)-f(x)<f'(x)<f(x)-f(x-1)$. Αν

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-ax-b\right)=0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=a$

12Γ3. $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax-b]=0$, $a>0$, f κοίλη στο R. Δείξτε ότι δεν υπάρχει εφαπτομένη της συνάρτησης παράλληλη της $y=ax+b$

12Γ4. Αν f κυρτή στο Δ και $x,y\in\Delta$, $k,\lambda>0$ δείξτε ότι

το $z=\dfrac{kx+\lambda y}{k+\lambda}$ βρίσκεται μεταξύ των x,y

και $f(\dfrac{kx+\lambda y}{k+\lambda})\leq\dfrac{kf(x)+\lambda f(y)}{k+\lambda}$, $x,y\in\Delta$ ενώ αν f κοίλη στο Δ τότε θα ισχύει

$f(\dfrac{kx+\lambda y}{k+\lambda})\geq\dfrac{kf(x)+\lambda f(y)}{k+\lambda}$, $k,\lambda>0$, $x,y\in\Delta$.

Τις προηγούμενες ανισότητες έχουμε ξαναδεί ως ***ανισότητες Jensen,*** *ισότητα ισχύει για x=y. Γενικότερα*

$$f\left(\frac{k_1x_1+k_2x_2+\ldots+k_nx_n}{k_1+k_2+\ldots+k_n}\right)\le\frac{k_1f(x)+k_2f(x_2)+\ldots+k_nf(x_n)}{k_1+k_2+\ldots+k_n}$$

με $k_i>0, x_i\in\Delta, f$ κυρτή *.Τις αναφέρουμε εδώ επειδή έχουν άμεση σχέση με την έννοια της κυρτότητας περιμένοντας και ακόμη έναν άλλον τρόπο απόδειξής τους*

12Γ5. Χρησιμοποιώντας κατάλληλα τις ανισότητες Jensen δείξτε ότι

1) $3(a^2+b^2+c^2)\ge(a+b+c)^2$

2) $\frac{x^n+y^n}{2}\ge\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \quad n\in N^*, x,y\in[0,+\infty)$

3) $(a+b)\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\le a\ln a+b\ln b \ , \forall a,b>0$

12Γ6. Αν $f''(x)<0\ \forall x\in[a,b]$, $f'(a)f'(b)<0$ τότε δείξτε ότι η συνάρτηση έχει μέγιστο έστω σε κάποιο μοναδικό *c*. Το $c\in(a,b)$. Αν $f'(a)>k>m$ με $g(x)=k(x-a)+f(a)$ και $m=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ τότε δείξτε ότι $m>f'(b)$ και ότι οι γραφικές παραστάσεις των *f,g* έχουν μοναδικό κοινό σημείο στο $(a,b]$, έστω $(d,f(d))$.

Τέλος να δείξετε ότι θα ισχύει $f(x)<g(x)\ \forall x\in(d,b)$ ενώ $f(x)>g(x)\ \forall x\in(a,d)$

Δ ΟΜΑΔΑ

12Δ1. *f* δυο φορές παραγωγίσιμη

$$\exists c: \frac{f(x)-f(y)}{x-y}\ne f'(c), \forall x\ne y \Rightarrow f''(c)=0$$

13 DE L' HOSPITAL

Α ΟΜΑΔΑ

Υπολογίστε τα όρια:

13Α1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\alpha}}{e^{x}}$, $\boldsymbol{\alpha>0}$

13Α2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{x}$

13Α3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x-x}{x^{3}}$

13Α4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{2}-\ln x\right)$

13Α5. $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x\ln x-1}{(x-1)\ln x}$

13Α6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^{2}(1+x)-\ln^{2}x}{\ln x}$

13Α7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\eta\mu x}$

13Α8. $f(x)=\begin{cases} g(x)\,\eta\mu\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0 \quad , x=0 \end{cases}$ όταν $g(0)=g'(0)=0$. Εξετάστε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

13Α9. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|2\eta\mu x-1|+e^{x}-2}{x}, x\neq 0 \\ -1 \quad , x=0 \end{cases}$. Εξετάστε αν η f είναι παραγωγίσιμη .

Βρείτε τις τιμές των παραμέτρων ώστε

13Α10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax+\varepsilon\phi x}{x^3}=b\in R$

13Α11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 3x+\alpha x}{x^3}=\beta\in R$.

13Α12.να υπάρχει η $f\,'(1)$ όπου: $f(x)=\begin{cases}\alpha x+\beta, x\le 1\\ \dfrac{lnx}{x-1}, x>1\end{cases}$

13Α13.η $f(x)=\begin{cases}ae^x+b\ , x\ge 0\\ cx^2+x+1, x<0\end{cases}$ να είναι παραγωγίσιμη στο R

13Α14.Έστω f: $f(x)=\begin{cases}(x+\lambda)ln(1-x), x\le 0\\ (x-\lambda)ln(1+x), x>0\end{cases}$. Αφού δείξετε ότι υπάρχει η $f\,'(0)$ για κάθε $\lambda\in R/R$, βρείτε το λ ώστε να υπάρχει και η $f\,''(0)$.

13Α15.Εξετάστε αν υπάρχουν τιμές των παραμέτρων α , b ώστε η παρακάτω συνάρτηση να είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο μηδέν

$$f(x)=\begin{cases}(x+a)ln(e+x), x\ge 0\\ (x+b)ln(e-x), x<0\end{cases}$$

13Α16.Αν $f(x)>0$, $f(0)=1$, $f\,'$ συνεχής στο R δείξτε ότι:

$$\lim_{x\to 0+}\left\{f(x)\right\}^{1/x}=e^{f'(0)}.$$

13Α17.Αν $\exists f'''(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f''(x)}{xf'''(x)}=1$ τότε να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{xf'(x)}$

13Α18.Βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)-2f(0)}{x^2}$ όταν υπάρχει η $f''(0)$

13Α19. Βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)+f(1-x)-2f(1)}{x^4}$ όταν η $f'''(x)$ είναι συνεχής

13Α20. Έστω $f''(x)$ συνεχής στο R. Να δείξετε τότε ότι θα ισχύει :

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{f(x)-f(a)}-\frac{1}{(x-a)f'(a)}\right)=-\frac{f''(a)}{2\left(f'(a)\right)^2}$$

13Α21. Αφού μελετήσετε την μονοτονία της f: $f(x)=\dfrac{e^{\lambda x}}{x^2+\lambda^2}$,

$\lambda\in R^*$ υπολογίστε το $\lim\limits_{\lambda\to 0}\left(\dfrac{1+\alpha\beta}{1-\alpha\beta}\right)^{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2}$ όπου α, β ρίζες της f'.

13Α22. Να δειχτεί η εξίσωση $συνx = x$ έχει ακριβώς μια λύση x_0 στο διάστημα $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Στη συνέχεια να βρεθεί το όριο:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\left(\eta\mu x-\frac{x^2}{2}\right)-\left(\eta\mu x_0-\frac{x_0^2}{2}\right)}{\left(x-x_0\right)^2}$$

Β ΟΜΑΔΑ

13Β1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

13Β2. Αν $P(x)$ πολυώνυμο να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{P(x)}{e^x}\right)$

13Β3. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt[n]{x}}\right)$

13Β4. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f είναι «πιο ισχυρή» από την g κοντά στο +άπειρο όταν το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{g(x)}{f(x)}\right)=0$. Τοποθετείστε

κατά σειρά ισχύος στο +άπειρο τις παρακάτω συναρτήσεις και δικαιολογείστε την απάντησή σας

Τριγωνομετρικές (*ημx,συνx)*

Λογαριθμικές ($ln_a(x)$, $a>1$)

Ριζικά ($\sqrt[n]{x}$,$n\in N^*-\{1\}$)

Πολυωνυμικές

Εκθετικές (a^x , $a>1$)

13Β5. Το αντίστροφο του κανόνα de l' Hospital δεν ισχύει και η παρακάτω άσκηση, σας προσφέρει ένα παράδειγμα:

Έστω $f(x)=x\eta\mu\dfrac{1}{x}$, $g(x)=\dfrac{ln(1+x)}{x}$, $h(x)=\dfrac{x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}}{ln(1+x)}$.

Δείξτε ότι: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=0$.

Δείξτε τώρα ότι το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)'}{\left(\ell n(1+x)\right)'}$, δεν υπάρχει.

13Β6. Έστω *p(x)* πολυώνυμο νιοστού βαθμού και

$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x\neq 0 \\ 0 \quad , x=0 \end{cases}$. Δείξτε ότι: $\lim\limits_{x\to 0}\left\{p(x)e^{-1/x^2}\right\}=0$ και

αν και η *f* δεν είναι σταθερή σε κανένα διάστημα ισχύει

$f^{(\kappa)}(0)=0$, $\kappa\in N^*$.

13Β7. Υπολογίστε το $\lim\limits_{x\to 1}\left\{lnx\cdot ln(1-x)\right\}$.

13Β8. Αν $g(0)=g'(0)=0$, $g''(0)=17$ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$ βρείτε την $f'(0)$.

13Β9. Βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a+x)+f(a-x)-2f(a)}{x^2}$ υπάρχει η $f''(x)$ στο R

13Β10. Έστω f, g δυο φορές παραγωγίσιμες στο R και $g(x)\neq 0\ \ \forall x\in R$. Θέτουμε $A=\dfrac{f(a)}{g(a)}$, $B=\dfrac{f'(a)-Ag'(a)}{g(a)}$ και ορίζουμε την συνάρτηση w στο R-$\{a\}$ από την σχέση $\dfrac{f(x)}{(x-a)^2 g(x)}=\dfrac{A}{(x-a)^2}+\dfrac{B}{(x-a)}+\dfrac{w(x)}{g(x)}$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to a} w(x)$

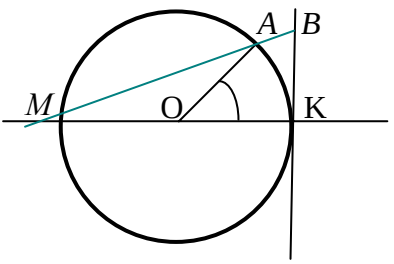
13Β11. Έστω f' συνεχής στο R και $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$

13Β12. Για ποια λ η f: $f(x)=e^x+\lambda x^3$ έχει σημεία καμπής;

Γ ΟΜΑΔΑ

13Γ1. Το μήκος του «μικρού» τόξου AK είναι ίσο με το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος KB. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{\omega\to 0} OM$ και να

εξετάσετε αν το μέγιστο του *OM* είναι το *2R* όπου *R* είναι η ακτίνα του κύκλου και ω η γωνία ΚΟΑ .



13Γ2. Έστω f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\{f'(x)+f(x)\}=\lambda\in R$. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lambda$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

Θα χρειαστεί μια βελτίωση του κανόνα de l' Hospital για μορφή ∞/∞ την οποία δεν θα βρείτε στην ύλη του Λυκείου, αλλά αξίζει να το ψάξετε και αλλού, όπως πχ στο παράρτημα

Δ ΟΜΑΔΑ

13Δ1. *Αν* $f:(0,+\infty)\to R$ *με συνεχή* f'' *και*

$|f''(x)+2xf'(x)+(x^2+1)f(x)|\le 1,\forall x>0$ *τότε δείξτε ότι*

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

13Δ2. *Αν* f''(x) *συνεχής στο R και ισχύει*

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f''(x)+af'(x)+bf(x)\right)=c$ όπου a,b,c πραγματικοί αριθμοί : $a>0,b>0,a^2>4b$ τότε να βρεθούν τα παρακάτω όρια : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)$

14 ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

Α ΟΜΑΔΑ

Να βρείτε τις ασύμπτωτες των συναρτήσεων *f*.

14Α1. $f(x)=\dfrac{x^3+4x^2+3}{x^2+2x-1}$

14Α2. $f(x)=\dfrac{x^2-|x+6|}{|x^2-5|-4}$

14Α3. $f(x)=\sqrt{x^2-6x-1}+\dfrac{3}{1+x}-x$

14Α4. $f(x)=\sqrt{4x^2-3x}-\sqrt{x^2+x}$

14Α5. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{x-1} & x>1\\ \dfrac{2}{x} & 0<x\le 1\\ 2x+3 & x\le 0\end{cases}$

14Α6. $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x-2},\ \ 0\le x\le 1$

14Α7. Βρείτε μια ρητή και όχι πολυωνυμική συνάρτηση που να έχει για ασύμπτωτο την ευθεία *(ε)* με εξίσωση $y = 1+x$.

14Α8. Έστω φ: $R\to R$ φραγμένη συνάρτηση που έχει μοναδική ασύμπτωτο. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\phi(x)\in R$ /*R*.

14Α9. Αποδείξτε ότι αν $\varphi(x)$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση τουλάχιστον $2^{ου}$ βαθμού τότε η φ δεν έχει ασύμπτωτους.

Το ίδιο συμβαίνει για πλάγιες αν φ ρητή με βαθμό αριθμητή

τουλάχιστον μεγαλύτερο κατά δυο του παρονομαστή

14Α10. Έστω $\varphi: R \to R$ περιττή συνάρτηση που έχει μοναδική πλάγια ασύμπτωτο έστω (ε). Δείξτε ότι η (ε) διέρχεται από την αρχή των συντεταγμένων.

14Α11. Αν η $f: R \to R$ είναι άρτια συνάρτηση και έχει μοναδική πλάγια ασύμπτωτο (ε) τότε δείξτε ότι η (ε) είναι οριζόντια ευθεία.

14Α12. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f με $f(x) = \eta\mu x$ δεν έχει ασύμπτωτους.

(Είναι μια καλή ευκαιρία για να δείξετε ότι το $\lim\limits_{x\to+\infty}(\eta\mu x)$ δεν υπάρχει , χωρίς την χρήση ακολουθιών)

14Α13. Εξετάστε αν μια περιοδική συνάρτηση μπορεί να έχει ασύμπτωτους.

Β ΟΜΑΔΑ

14Β1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f^2(x)x^2+g^2(x)\right]=0$ βρείτε την ασύμπτωτη της $h(x)=f(x)+g(x)$ στο $+\infty$

14Β2. Η f είναι κοίλη αύξουσα και έχει οριζόντια ασύμπτωτο για $x>0$. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}(x f'(x))=0$

14Β3. Η f είναι κυρτή για $x>0$ και έχει οριζόντια ασύμπτωτο. Δείξτε ότι η f είναι φθίνουσα

Γ ΟΜΑΔΑ

14Γ1. Έστω $f:(0,+\infty)\to R$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Να δείξετε ότι: Ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε να υπάρχει

εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το (0,0) είναι να $\exists x_0 \in \Delta : x_0 f'(x_0) = f(x_0)$. Στην συνέχεια δείξτε ότι: Αν η f έχει ασύμπτωτο δ της μορφής $y = \lambda x$, και η C_f τέμνει την δ τότε υπάρχει εφαπτομένη που διέρχεται από το $(0,0)$

14Γ2. Έστω $f:(0,+\infty) \to R$ δυο φορές παραγωγίσιμη, με f'' συνεχή συνάρτηση και η C_f δεν έχει κανένα ευθύγραμμο τμήμα. Υπάρχει εφαπτομένη που διέρχεται από το $(0,0)$ και ταυτίζεται με την ασύμπτωτο της C_f. Τότε η C_f έχει δυο τουλάχιστον σημεία καμπής.

15 ΜΕΛΕΤΗ

Α ΟΜΑΔΑ

Να γίνει η μελέτη και η χάραξη της γραφικής παράστασης των παρακάτω συναρτήσεων:

15Α1. $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$

15Α2. $f(x) = \dfrac{|x-1|}{|x^2-4|-5}$

15Α3. $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x-3}$

15Α4. $f(x) = \sqrt[3]{x^3-3x+2}$

15Α5. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$

15Α6. $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

15Α7. $f(x)=\dfrac{1+2\ln x}{x}$

15Α8. $f(x)=xe^{-x}$

15Α9. $f(x)=|x|e^{-|x-1|}$

15Α10. $f(x)=\eta\mu 2x+\sigma\upsilon\nu x$

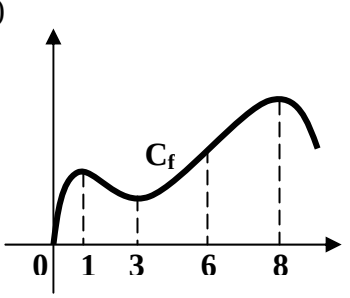
Να γίνει η μελέτη και η χάραξη της γραφικής παράστασης των παρακάτω συναρτήσεων για τις διάφορες τιμές του m

15Α11. $f(x)=(x+m)e^{mx}$

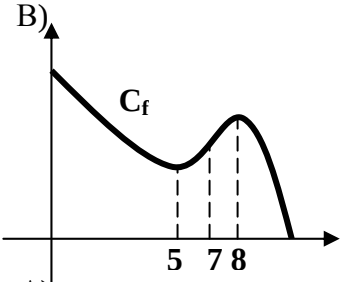
15Α12. $f(x)=(x-m)e^{\frac{1}{x}}$

15Α13. Στα παρακάτω σχήματα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f και ζητείται μια πρόχειρη γραφική παράσταση της παραγώγου της (ποιοτικά).

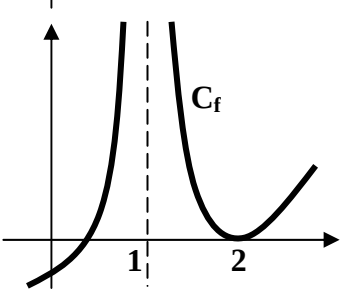
Α)



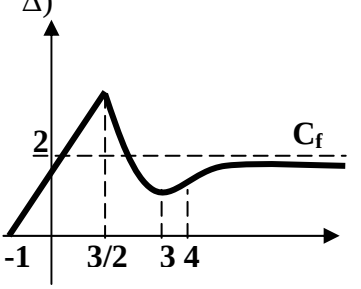
Β)



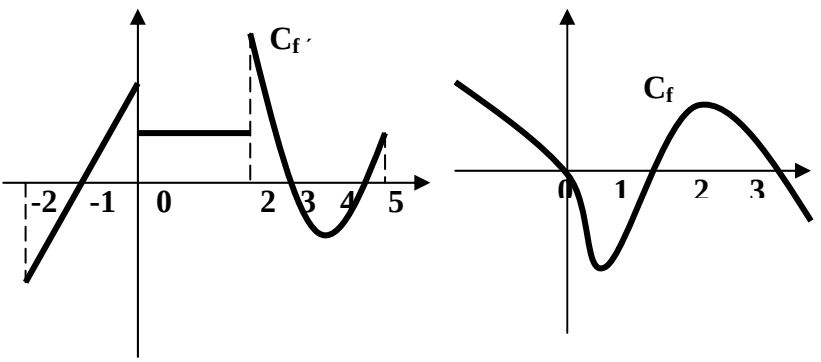
Γ)



Δ)



15Α14. Στα επόμενα σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της παραγώγου $f'(x)$ μιας συνεχούς συνάρτησης f και η πληροφορία ότι $f(0)=0$. Ζητείται μια πρόχειρη γραφική παράσταση της συνάρτησης (ποιοτικά)



15Α15. Να γίνει η μελέτη και η χάραξη της γραφικής παράστασης της παρακάτω συνάρτησης $f(x)=x^5-2x^3+x$. Στην συνέχεια, για τις διάφορες τιμές του λ να μελετήσετε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=\lambda$.

15Α16. Να γίνει η μελέτη και η χάραξη της γραφικής παράστασης της παρακάτω συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x}{4-x^2}$. Στην συνέχεια, για τις διάφορες τιμές του λ να /μελετήσετε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=\lambda$.

15Α17. Να γίνει η μελέτη και η χάραξη της γραφικής παράστασης της παρακάτω συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}$.

Στην συνέχεια, για τις διάφορες τιμές του λ να μελετήσετε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης

$\eta\mu^3x-(4+\lambda)\eta\mu^2x+2(4+\lambda)\eta\mu x-(4+\lambda)=0$

ΟΜΑΔΑ Γ

15Γ1. Έστω $0<a<b<c, a+b+c=7, abc=9$. Να βρείτε το σύνολο τιμών για κάθε μια από τις μεταβλητές a,b,c.

Δ. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

(1) ΑΟΡΙΣΤΑ

(2) ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

(3) ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ Κ.Λ.Π

(4) ΕΥΡΕΣΗ ΤΥΠΩΝ ΜΕ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

(5) ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ

(6) ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΥΠΑΡΞΗΣ

(7) ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

(8) ΟΡΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

(9) ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ

(10) ΑΠΟΛΥΤΑ-ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ

(11) ΕΜΒΑΔΑ

(12) ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 ΑΟΡΙΣΤΑ

Α ΟΜΑΔΑ

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

1Α1. $\int\left(\sqrt{x}+x\sqrt[4]{x}+\frac{2}{x}\right)dx$

1Α2. $\int\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{x}dx$

1Α3. $\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}\right)dx$

1Α4. $\int xe^x dx$

1Α5. $\int e^x \eta\mu x dx$

1Α6. $\int x^4 \ln x dx$

1Α7. $\int x\ln^3 x dx$

1Α8. $\int x^2 \ln\left(1+x\right)dx$

1Α9. $\int\frac{\ln x}{x^3}dx$

1Α10. $\int\sqrt{x}\ln x dx$

1Α11. $\int x^2 \eta\mu 3x dx$

1Α12. $\int\frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$

1Α13. $\int\frac{4}{\eta\mu^2 x}dx$

1Α14. $\int\left(\eta\mu\alpha x\right)\left(\sigma\upsilon\nu\beta x\right)dx \quad \alpha\cdot\beta\neq 0$

1Α15. $\int \eta\mu x\sigma\upsilon\nu^4 x\, dx$

1Α16. $\int \sigma\upsilon\nu x\, \eta\mu^3 x dx$

1Α17. $\int \varepsilon\phi^2 x dx$

1Α18. $\int \frac{x^2+1}{2x+3} dx$

1Α19. $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+1} dx$

1Α20. $\int \frac{x+4}{x^3+x^2-2x} dx$

1Α21. $\int x e^{-x^2} dx$

1Α22. $\int \frac{1}{x^2} e^{1/x} dx$

1Α23. $\int \frac{1}{4+e^x} dx$

1Α24. $\int \frac{1}{e^{-x}+e^x} dx$

1Α25. $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx$

1Α26. $\int \frac{1+e^x}{1-e^x} dx$

1Α27. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^x}} dx$

1Α28. $\int \frac{e^x}{1+2e^x+e^{2x}} dx$

1Α29. $\int e^x \sqrt{e^x-1} dx$, $x>0$

1Α30. $\int \varepsilon\phi\, x\, dx$

1Α31. $\int \eta\mu^5 x dx$

1Α32. $\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} dx$

1Α33. $\int \frac{\eta\mu x}{5+\sigma\upsilon\nu x} dx$

1Α34. $\int \frac{\eta\mu x}{3\sigma\upsilon\nu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu x - 5} dx$

1Α35. $\int \left(\varepsilon\phi^2 x + \varepsilon\phi^4 x\right) dx$

1Α36. $\int \frac{lnx}{x} dx$

1Α37. $\int \frac{1}{xlnx} dx$

1Α38. $\int \frac{\sqrt{lnx}}{x} dx$

1Α39. $\int \frac{ln\left(lnx\right)}{xlnx} dx$

1Α40. $\int x\sqrt{1-x^2}\, dx$

1Α41. $\int x\sqrt[4]{1+x} dx$

1Α42. $\int \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}}{\sqrt[4]{1+x}} dx$

1Α43. $\int \frac{x^2+2}{\left(x-1\right)^6} dx$

1Α44. $\int \frac{4^x+1}{2^x+1} dx$

1Α45. $\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} dx$

1Α46. $\int e^{3x}\eta\mu^2 4x dx$

1Α47. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx$

1Α48. $\int ln\left(4+\frac{3}{x}\right)dx$

1Α49. $\int \eta\mu x \cdot ln\left(\eta\mu 2x\right)dx$

1Α50. $\int \eta\mu\left(\sqrt[3]{x}\right)dx$

1Α51. $\int \frac{1}{1-\sigma\upsilon\nu x}dx$

1Α52. $\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 2x+\eta\mu^2 x}dx$

1Α53. $\int \frac{1}{3+5\eta\mu x}dx$

1Α54. $\int \frac{\eta\mu 2x}{1+\eta\mu^2 x}dx$

1Α55. $\int \frac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}dx$

1Α56. $\int \eta\mu\left(lnx\right)dx$

1Α57. $\int \eta\mu\left(\sqrt{x+1}\right)dx$

1Α58. $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$

1Α59. $\int xln\left(\sqrt{1+x^2}\right)dx$

1Α60. $\int \frac{ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}dx$

1Α61. $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$

Β ΟΜΑΔΑ

Να υπολογίσετε τα παρακάτω αόριστα ολοκληρώματα βρίσκοντας μια αρχική με το «μάτι» αφού προηγουμένως κάνετε και λίγες πράξεις.

1Β1. $\int \frac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}dx$

1Β2. $\int \frac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}e^x dx$

1Β3. $\int \frac{2x+\eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$

1Β4. $\int \frac{1-x}{e^x}dx$

1Β5. Να υπολογιστεί το $\int \varepsilon\phi 2x\,\varepsilon\phi 3x\,\varepsilon\phi 5x\,dx$

1Β6. Αν $f(x)=e^x+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x+2x$ να βρεθούν σταθερές $a,b: \eta\mu x+x-1=af(x)+bf'(x)$ και στην συνέχεια να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{\eta\mu x+x-1}{e^x+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x+2x}dx$

2 ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

Α ΟΜΑΔΑ

Να βρείτε την $f\,'(x)$ όταν:

2Α1. $f(x)=\int_1^x \frac{t^3}{1+t^2}dt$.

2Α2. $f(x)=\int_0^x |t|dt$.

2Α3. $f(x)=\int_{2x}^{x^2} ln^2 t dt$, $x>0$.

2Α4. $f(x)=\int_0^{\varepsilon\phi x}\frac{1}{1+t^2}dt$, $x\in[0,\pi/2)$.

2Α5. $f(x)=\int_x^{x+\pi}\frac{1}{1+\eta\mu^2 t}dt$.

2Α6. $f(x)=\int_0^{\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt}\frac{1}{1+y^2}dy$.

2Α7. $f(x)=\int_0^{x^2}\frac{1}{1+t^4}dt$.

2Α8. $f(x)=\int_0^x t^2\cdot\left(\int_0^t e^{y^2}dy\right)dt$.

2Α9. Αν *f, g, h* παραγωγίσιμες στο *R* βρείτε την *w΄(x)* όπου

$$w(x)=\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt\ .$$

(Το συμπέρασμα αυτό να το θεωρήσετε σαν θεώρημα)

Να βρείτε την *f ΄(x)* όταν:

2Α10. $f(x)=\int_0^x \eta\mu(x-t)dt$.

2Α11. $f(x)=\int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu(x-t)dt$.

2Α12. $f(x)=\int_{1-x}^{x} ln(xt)dt$, $0<x<1$.

2Α13. Δείξτε ότι *f* σταθερή στο *(0, +∞)* όπου

$$f(x)=\int_1^x\frac{1}{1+t^2}dt+\int_1^{1/x}\frac{1}{1+t^2}dt$$

2Α14. Να δείξετε ότι

$$\int_1^x \frac{ln(1+t^2)}{t}dt + \int_1^{1/x} \frac{ln(1+t^2)}{t}dt = ln^2(x)\ ,\ x \in (0,+\infty)$$

2Α15. Δείξτε ότι : $\int_{-x}^{x}(1+\frac{\eta\mu t}{t^2+e^{\sigma\upsilon\nu t}})dt = 2x\ ,\ \forall x \in R$

2Α16. Εξετάστε αν η *f: (0, π/2)* $\to R$ με $f(x) = \int_{-\sigma\upsilon\nu x}^{\eta\mu x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt$ είναι σταθερή συνάρτηση

2Α17. Αν *g(x)* είναι πολυωνυμική 2ου βαθμού βρείτε την σταθερά λ ώστε η συνάρτηση με τύπο $g(x) - \lambda \int_{x-1}^{x+1} g(t)dt$ να είναι σταθερή στο *R*.

2Α18. Έστω *f:R*$\to R$ συνεχής και $g: g(x) = \int_x^{x+T} f(t)dt$ $(T \in R^*)$. Δείξτε ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η *f* να είναι περιοδική συνάρτηση είναι : η συνάρτηση *g* να είναι σταθερή

2Α19. Αν $f(x) = \int_1^x \frac{lnt}{1+t}dt$, $x \in (0, +\infty)$ δείξτε ότι:

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}ln^2 x\ .$$

2Α20. Να δείξετε ότι : $\int_{-x}^{x} \frac{e^t + \sigma\upsilon\nu t}{1+e^t}dt = x + \eta\mu x$

2Α21. Ονομάζουμε $cosh\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $sinh\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\forall x \in R$.

Τότε να δείξετε ότι: $\int_1^{cosh\, x} \sqrt{t^2 - 1}dt = \frac{(cosh\, x \cdot sinh\, x) - x}{2}$.

2Α22. Έστω $g(x)=\int_{\alpha-x}^{\alpha+x} f(t)dt$ όπου *f* συνεχής, τότε δείξτε ότι:

$g'(x)=f(\alpha-x)+f(\alpha+x)$.

2Α23. Δείξτε ότι : $g(x)=\int_0^x (x-t)f'(t)dt$ με $f'(x)$ συνεχή

συνάρτηση στο *R* τότε $g'(x)=f(x)-f(0)$

2Α24. Έστω $g(x)=\int_0^x (x-t)f(t)dt$ όπου *f* συνεχής. Δείξτε ότι η *g*

είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και $g''(x)=f(x)$.

2Α25. Αν $g(x)=\int_0^x f(t)dt$, $h(x)=\int_0^x g(t)dt$ με *f* συνεχή, δείξτε

ότι θα ισχύει $h(x)=\int_0^x (x-t)f(t)dt$, $\forall x\in R$

2Α26. Έστω *f, g* συνεχείς στο *R* και

$\int_x^y f(t)dt=g(x)-g(y)$, $\int_x^y g(t)dt=f(y)-f(x)$ $\forall x,y\in R$ δείξτε

ότι: $f''(x)+f(x)=0$, $g''(x)+g(x)=0$

2Α27. Αν $f(x)f(y)=\int_{x-y}^{x+y} f(t)dt$ $\forall x,y\in R$ όπου *f* συνάρτηση δύο

φορές παραγωγίσιμη δείξτε ότι: $f''(x)f(y)=f''(y)f(x)$ $\forall x,y\in R$.

Β ΟΜΑΔΑ

2Β1. Αν $g(x)=\int_0^x f(t)|x-t|dt+\int_x^1 f(t)|x-t|dt$ με *f* συνεχή, δείξτε

ότι:$g''(x)=2f(x)$ $\forall x\in[0,1]$.

2Β2. Αν $g(x)=\int_0^1 max\{x,t\}f(t)dt$ όπου *f* συνεχής. Δείξτε ότι:

$g''(x)=f(x)$ $\forall x\in[0,1]$.

2Β3. Αν $g(x)=\int_{\alpha}^{\beta} f(t)|x-t|dt$ με f συνεχή, δείξτε ότι: $g''(x)=2f(x)$ $\forall x\in[\alpha,\beta]$.

2Β4. Αν

$$f(x)=\frac{x}{1+x^2}\ ,\ F(x)=\int_1^x f(t)dt\ ,\ G(x)=\int_1^x \frac{f(t)}{t^2}dt\ ,\ \forall x>0$$

να δείξετε ότι η $h(x)=F(\varepsilon\varphi x)+G(\sigma\varphi x)$ είναι σταθερή στο $(0,\pi/2)$. Ποια είναι η τιμή της?

2Β5. Έστω $f(x)=\int_0^x (x-t)e^{\alpha(x-t)}g(t)dt$ $\alpha\neq 0$, $x>0$ και g συνεχής.

Να δείξετε ότι: $f''(x)-2\alpha f'(x)+\alpha^2 f(x)=g(x)$.

2Β6. Έστω $f(x)=\frac{1}{\omega}\int_0^x R(t)\eta\mu(\omega(x-t))dt$ $(\omega\in R^*)$ και R συνεχής συνάρτηση. Να δείξετε ότι : $f''(x)+\omega^2 f(x)=R(x)$.

(Αυτή είναι μια λύση του εξαναγκασμένου αρμονικού ταλαντωτή χωρίς απόσβεση)

2Β7. Έστω $f(x)=\int_0^x \frac{e^{(x-t)}-e^{(t-x)}}{2}g(t)dt$ όπου g συνεχής να δείξετε ότι: $f''(x)-f(x)=g(x)$

(*και αυτή η άσκηση σας δίνει έναν έτοιμο τύπο για να λύνετε κάποιες διαφορικές εξισώσεις 2ας τάξεως.)*

2Β8. Έστω f, g, h παραγωγίσιμες στο R_+^* συναρτήσεις και είναι:

$f(x)=\frac{1}{x}\int_0^x (h(x)-h(t))dt$, $g(x)=\int_x^{\alpha}\frac{f(t)}{t}dt$ $(\alpha\in R^*)$ τότε να δείξετε ότι : $f(x)=h(x)+g(x)-\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha}h(t)dt$

2Β9. Αν f συνεχής δείξτε ότι: $\int_0^x f(t)(x-t)dt=\int_0^x\left(\int_0^t f(y)dy\right)dt$.

Γ ΟΜΑΔΑ

2Γ1. Αν *f* συνεχής δείξτε ότι:

$$\int_0^x f(t)(x-t)^2\,dt = 2!\int_0^x\left(\int_0^{\upsilon_2}\left(\int_0^{\upsilon_1} f(t)dt\right)d\upsilon_1\right)d\upsilon_2$$

2Γ2. Έστω *f* συνεχής. Αν $g^{(\nu+1)}(x)=f(x)$ όπου $g^{(\kappa)}(0)=a_\kappa$, $\kappa=0, 1, 2, \ldots, \nu$. Να δείξετε ότι

$$g(x)=\sum_{\kappa=0}^{\nu}\frac{\alpha_\kappa x^\kappa}{\kappa!}+\frac{1}{\nu!}\int_0^x f(t)(x-t)^\nu\,dt$$

(χρειάζεστε τα συμπεράσματα και προηγούμενης άσκησης και μια πιθανή γενίκευση.)

2Γ3. Αν $f(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}dt$ $x\in(0,+\infty)$. Να δείξετε ότι *f* αντιστρέψιμη και $f'\left(f^{-1}(x)\right)=\frac{1}{\left(f^{-1}(x)\right)'}$. Στην συνέχεια να δείξετε ότι: $\left(f^{-1}(x)\right)''=\kappa\left(f^{-1}(x)\right)^2$ όπου κ μια σταθερά την οποία και να προσδιορίσετε.

3 ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ Κ.Λ.Π

Α ΟΜΑΔΑ

3Α1. Έστω $f:\ f(x)=\int_0^{x^2}\frac{dt}{1+t^2}$. Να μελετήσετε την *f* ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

3Α2. Έστω $f:\ f(x)=\int_0^x (t-2)\eta\mu(\pi t)dt$. Να μελετήσετε την *f* ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα στο διάστημα *[0,2π)*.

3Α3. Έστω $f: (1,+\infty)\to R$ με $f(x)=\int_e^x \frac{\ln(\ln t)}{t}dt$. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

3Α4. Είναι $f(x)=\int_0^x (\int_0^{t^2+1} \frac{e^u}{u^2+1}du)dt$.Να μελετήσετε την κυρτότητα και τα σημεία καμπής της συνάρτησης $f(x)$.

(Το ολοκλήρωμα αυτό καθώς και τα δυο επόμενα δεν υπολογίζονται στοιχειωδώς. Αυτό όμως δεν ενοχλεί. σε ότι ζητείται)

3Α5. Είναι $f(x)=\int_1^{2x} e^{t-x}\ln t dt$, $x>0$ Δείξτε ότι: $xf''(x)=xf(x)+2e^x$ και κατόπιν ότι η $f(x)$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στην θέση $x_0=1/2$. Στην συνέχεια να προσδιοριστεί το $\int_{\frac{1}{2}}^1 g(t)dt$,όπου

$$g(x)=\frac{f'(x)+f''(x)}{e^x}$$

(Χρησιμοποιείστε το κριτήριο της β΄ παραγώγου)

3Α6. Είναι $f(x)=\int_1^x (\int_2^y e^{t-y}\ln t dt)dy$, $x,y\in(1,+\infty)$ Δείξτε ότι: $f''(x)+f'(x)=\ln x$ και κατόπιν ότι η $f(x)$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στην θέση $x_0=2$.

(Χρησιμοποιείστε το κριτήριο της β΄ παραγώγου)

3Α7. Έστω $f: f(x)=\int_0^{x^2} g(t)dt$, g παραγωγίσιμη στο R , $g(0)=1$ δείξτε ότι η f έχει ένα τουλάχιστον ακρότατο με τιμή μηδέν.

(Χρησιμοποιείστε το κριτήριο της β΄ παραγώγου)

3Α8. $f(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}dt$. Δείξτε ότι $\frac{1}{1+2x}\le\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}$ $\forall x\ge 0$

κατόπιν ότι $f(x)\ge\frac{1}{2}\ell n(1+2x)$ και βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3Α9. Αν $f(x)=\int_{-1}^x \sqrt{1+t^3}dt$, $x\in[-1,+\infty)$ μελετήστε την f ως προς την μονοτονία , την κυρτότητα και βρείτε το σύνολο τιμών

Β ΟΜΑΔΑ

3Β1. Έστω f συνεχής και $f(x)>0$ $\forall x\in R$. Να μελετήσετε την μονοτονία της g στο $(0,+\infty)$ όπου: $g(x)=\frac{\int_0^x t^\nu f(t)dt}{\int_0^x t^{\nu-1}f(t)dt}$

3Β2. Αν f, g, h συνεχείς συναρτήσεις ώστε $f(x)>0, g(x)>0, h(x)>0$ και $\frac{g}{h}$ αύξουσα τότε να μελετήσετε την μονοτονία της $w(x)$ στο $(0,+\infty)$ όπου $w(x)=\frac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x f(t)h(t)dt}$.

3Β3. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία, το πρόσημο και την κυρτότητα η συνεχής συνάρτηση

$f:\ f(x)=\int_0^x [f^2(t)+e^t-t+1]dt \quad , \quad x\in R$

3Β4. Έστω f παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $f(x)>0$, $f'(x)<-1 \quad \forall x\in[0,1]$.Θέτουμε $g(x)=\int_a^b f(t)dt\cdot\int_c^x f(t)dt+\int_a^c f(t)dt\cdot\int_x^b f(t)dt$.Ακόμη επιπλέον ισχύουν

$0 < a < b < c < 1$, $\int_b^c f(t)dt = 1$.

Δείξτε ότι $g(x) = -\int_a^x f(t)dt < \frac{f^2(x)}{2}$

3Β5. Αν f συνεχής συνάρτηση και $f(x) > \int_0^x f(t)dt$, $\forall x \geq 0$ τότε θα ισχύει $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [0,+\infty)$

3Β6. Αν $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{1+t^2}dt$, $x \in [1,+\infty)$ να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία , την κυρτότητα και αφού δείξετε ότι $f(x) > \frac{1}{2}ln(\frac{1+x^2}{2})$ βρείτε το σύνολο τιμών

3Β6. Αν $f(x) = \int_1^x \frac{ln(1+t^2)}{t}dt$, $x \in [1,+\infty)$ να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία , δείξτε ότι έχει σημείο καμπής και δείξτε ότι $f(x) \geq f(x_0) + ln(\frac{x}{x_0})$ για κάποιο $x_0 > 1$. Βρείτε το σύνολο τιμών και αν υπάρχουν βρείτε και τις ασύμπτωτές της

3Β7. Έστω $f: (0,+\infty) \to R$ με $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}dt$. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία τα ακρότατα και τα σημεία καμπής. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$ και αφού δείξετε ότι $f(x) \geq lnx \quad \forall x \in [1,+\infty)$ να βρείτε το $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Ακόμη δείξτε $f(x) \leq x - 1 + lnx$, $\forall x \in (0,1]$ βρείτε τις ασύμπτωτες της f και σχεδιάστε πρόχειρα την γραφική της παράσταση

Γ ΟΜΑΔΑ

3Γ1. Έστω $f(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-\kappa^2\eta\mu^2 t}}dt$, $\kappa\in(0,1)$, $T=f(\pi/2)$.

α) Δείξτε ότι f ένα προς ένα και περιττή.

β) Δείξτε ότι η $f(x+\pi)-f(x)$ είναι σταθερή συνάρτηση και εκφράστε την τιμή της συναρτήσει του T.

γ) Δείξτε ότι $f(x)\geq 2\left(\sqrt{1+x}-1\right)$ $\forall x\geq 0$ και βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(Το προηγούμενο ολοκλήρωμα ονομάζεται ελλειπτικό ολοκλήρωμα $1^{ης}$ τάξεως και δεν υπολογίζεται στοιχειωδώς, αλλά υπάρχουν πίνακες τιμών του στην βιβλιογραφία.)

3Γ2. Αν $f(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{1+t}dt$, $x\in(0,+\infty)$

α) Να μελετήσετε την μονοτονία της f στο $(0,+\infty)$

β) Δείξτε ότι: $f(x)>f\left(\frac{1}{x}\right)$ $\forall x\in(1,+\infty)$

γ) Δείξτε ότι: $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}\ln^2 x$ και βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(Το $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ υπολογίζεται χρησιμοποιώντας μιγαδικές συναρτήσεις!! ή σειρές Fourrier!? και βγαίνει ίσο προς $-\pi^2/12$. Υπάρχει όμως και τρίτη λύση, σχεδόν παραμυθένια , χωρίς τα προηγούμενα !! χρησιμοποιώντας σχεδόν λυκειακή ύλη)

4 ΕΥΡΕΣΗ ΤΥΠΩΝ ΜΕ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Α ΟΜΑΔΑ

4Α1. Υπάρχει συνεχής συνάρτηση f : $\int_0^x f(t)dt = x^2 - 1$?

4Α2. Δείξτε ότι δεν υπάρχει, συνεχής συνάρτηση f ώστε

$\int_1^x f(t)dt = 1 + f^2(x), \forall x \in R$

4Α3. Υπάρχει συνεχής συνάρτηση f ώστε $\int_0^x f(t)dt = |x|$?

4Α4. Δείξτε ότι δεν υπάρχει, συνεχής συνάρτηση f ώστε

$\int_0^x f(t)dt = \sqrt[5]{x^2}, \forall x \in R$

4Α5. Δείξτε ότι δεν υπάρχει, συνεχής συνάρτηση f ώστε

$\int_0^x t^2 f(t)dt = x^2, \forall x \in R$

4Α6. Δείξτε ότι αν υπάρχει, συνεχής συνάρτηση f ώστε

$\int_a^x f(t)dt = g(x), \forall x \in R$ πρέπει η συνάρτηση g να έχει συνεχή παράγωγο στο R και ρίζα το α.

4Α7. Να βρεθεί, αν υπάρχει, συνεχής συνάρτηση f ώστε

$\int_1^x tf(t)\,dt = x^2 + x - 2$.α) $\forall x \in R$ και β) $\forall x \in R_+^*$.

4Α8. Έστω $f: (0,2\pi) \to R$ ώστε $\frac{1}{x} f'(x) - \frac{1}{x^2} f(x) = \eta\mu x$.Βρείτε τον τύπο όλων των f.

4Α9. Αν $f: [0,+\infty)$ παραγωγίσιμη ώστε $x + \int_0^x f(t)\,dt = (x+1) f(x)$ βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

4Α10. Αν f συνεχής ώστε: $\int_0^x f(t)dt = \int_x^1 t^2 f(t)dt + \frac{x^{16}}{8} + \frac{x^{18} - 1}{9}$ να βρείτε τον τύπο της f.

4Α11. Βρείτε όλες τις συνεχείς $f:\int_0^x tf(t)dt = x^2 + x^3$.

4Α12. Έστω $f:[0,+\infty)\to R$ συνεχής ώστε

$x^2+4x=\int_0^x (1+t)f(t)dt$. Βρείτε τον τύπο της f

4Α13. Να βρείτε τον τύπο μιας παραγωγίσιμης και μη μηδενικής συνάρτησης, f στο R, αν ισχύει : $\int_0^x f(t)\frac{\eta\mu t}{2+\sigma\upsilon\nu t}dt = f^2(x)$.

4Α14. Αν f συνεχής, στο R^* ώστε: $\int_1^2 xf(x)dx = \frac{x+1-xf(x)}{x}$. Βρείτε την f.

4Α15. Έστω $f:(0,+\infty)\to R$ συνεχής ώστε

$2\int_1^x f(t)dt = x^2 - \ell n^2 x - k$, $x>0$. Βρείτε το k τον τύπο και τα ακρότατα της f.

4Α16. Έστω $f: R\to R$ συνεχής ώστε $f(x)=\int_0^x f(t)dt$. Βρείτε τον τύπο της f.

4Α17. Όμοια βρείτε την $f:R\to R$ συνεχή ώστε $1+\int_0^x f(t)dt = f(x)$ $\forall x\in R$.

4Α18. Βρείτε την συνεχή συνάρτηση f αν ισχύει:

$$f(x)=\left(1+x^2\right)\left\{1+\int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2}dt\right\} \qquad \forall\ x\in R\ .$$

4Α19. $\int_1^{x^2} f(\sqrt{t})dt = f(x)$, $\forall x>0$ βρείτε τον τύπο της συνεχούς f.

4Α20. Έστω *f: (0,+∞) →R* συνεχής ώστε: $f(x)=1+\frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt$.

Βρείτε τον τύπο της *f.*

4Α21. Έστω $f:R\to(0,+\infty)$ συνεχής ώστε

$f(x)(x^2+1)=2\int_1^x tf(t)dt+2$, $\forall x\in R$. Βρείτε τον τύπο της

4Α22. Αν *f* συνεχής ώστε *∀x>0* να είναι *f(x)≥0* και

$2x\int_1^x f(t)dt=f(x)$ να βρείτε τον τύπο της *f.*

4Α23. Έστω $f:(0,+\infty)\to R$ συνεχής ώστε

$f(x)=\frac{1}{x}+\int_1^x\frac{tf(t)}{x^2}dt$, $\forall x\in(0,+\infty)$. Βρείτε τον τύπο της *f.*

4Α24. Αν *f* συνεχής στο *R* , $2\int_0^x f(t)dt=x\left(f(x)+4\right)$ βρείτε τον τύπο της *f.* ώστε *f(1)=3* , *f(-1)=4*

4Α25. Έστω *f* συνεχής στο *R* ώστε $f(x)=\int_0^x e^{t-f(t)}dt$.

α) Να δείξετε ότι $f'(x)e^{f(x)}=e^x$.

β)Να βρείτε το *f(0)* και τον τύπο της συνάρτησης *f.*

4Α26. Έστω $f:(0,+\infty)\to R$ συνεχής ώστε

$f(x)+\int_1^x tf(t)dt=2$, $\forall x\in R$. Βρείτε τον τύπο της *f*

4Α27. Έστω *f* αντιστρέψιμη και παραγωγίσιμη στο *(0,+ ∞)* και

$\int_e^{f(x)} f^{-1}(t)dt=x-e$. Βρείτε τον τύπο της *f.*

4Α28. Να βρεθεί το *κ* και η συνεχής συνάρτηση $f:[-\pi,\pi]\to R$

$\int_0^x f(t)dt+\int_0^{-x} f(-t)dt=\eta\mu x+kx$, $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt=\frac{\pi}{4}$

4Α29. Να βρεθεί συνεχής συνάρτηση στο R ώστε

$$f(x)=x+\int_0^x e^{-t}f(x-t)dt$$

4Α30. Έστω $f: R\to R$ συνεχής ώστε

$f(x)=\frac{e^{1+x}}{2}+\int_0^x e^{-t}f(x-t)dt$, $\forall x\in R$. Βρείτε τον τύπο της

4Α31. Έστω $f: R\to R$ συνεχής ώστε

$0\neq f(x)=1-2x^2\int_0^1 tf^2(xt)dt$, $\forall x\in R$. Βρείτε τον τύπο της

(Προσέξτε! δεν είναι $x\neq 0$ εδώ)

4Α32. Έστω $f:[0,+\infty)\to R$ συνεχής ώστε

$f(x)=\frac{x^2}{2}-\int_{1/2}^0 2xf(2xt)dt$, $\forall x\in[0,+\infty)$. Βρείτε τον τύπο της f

4Α33. Έστω $f: R\to R$ συνεχής ώστε

$f(x)=x\int_0^{1/2} f(2xt)e^x dt$, $\forall x\in R$. Βρείτε τον τύπο της f.

4Α34. Έστω $f: (0,+\infty)\to R$ συνεχής ώστε:

$\int_1^x (1+f(t)dt=x\int_1^{1/x} f(xt)\ln t dt$. Να βρείτε τον τύπο της f.

4Α35. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις f στο $[\alpha,\beta]$ ώστε

$\int_\alpha^\beta f^2(x)dx=0$.

4Α36. Έστω f συνεχής στο $[1,2]$ ώστε:

$1+\int_1^2 t^2f^2(t)dt=2\int_1^2 tf(t)dt$. Να βρείτε τον τύπο της f.

4Α37. Έστω ότι η f' είναι συνεχής στο $[0,\alpha)$ και $f(\alpha)=0$.Αν $2\int_0^x \left(1+tf'(x)\right)e^{f(x)}dx = f'(x)$ δείξτε ότι:

α) $2xe^{f(x)} = f'(x)$,

β) ονομάστε $g(x)=e^{f(x)}$ και εξηγείστε γιατί $\dfrac{g'(x)}{g^2(x)} = 2x$

γ) βρείτε όλες τις συναρτήσεις g και f που ικανοποιούν τα προηγούμενα

Β ΟΜΑΔΑ

4Β1. Έστω $f:[0,+\infty)\to R$ συνεχής ώστε

$\int_0^{x^2} tf(t)dt = 2x^3\eta\mu x, \forall x\in[0,+\infty)$. Βρείτε τον τύπο της f

4Β2. Βρείτε την συνεχή συνάρτηση f και την σταθερά α αν $\forall x\in R$.

ισχύει: $\int_\alpha^x tf(t)dt = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x - \dfrac{x^2}{2}$

4Β3. Να βρεθεί η συνάρτηση f και η σταθερά α, αν είναι γνωστό ότι ισχύουν: f' συνεχής και

$2f(x)+\int_0^x \left(tf(t)-2f'(t)\right)dt = x^3+\alpha x \quad \forall x\in R.$

4Β4. Έστω $f(x)\neq 0$ στο R^* και f συνεχής στο R βρείτε τον τύπο της f αν ισχύει: $f(x)\int_0^x f(t)dt = x \quad \forall x\in R.$

4Β5. Έστω $f:R\to R$ παραγωγίσιμη :

$4f(x)+f'(x)=\int_a^b f(t)dt = k$, $\forall x\in R$. Βρείτε τον τύπο της

4Β6. Έστω f συνεχής στο R και $x^2 = \int_x^1 f(t)dt + xf(x)$ βρείτε τον τύπο της f.

4Β7. α) Αν f συνεχής και $g(x)=\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2$ βρείτε την $g'(x)$ συναρτήσει της f.

β) Αν γνωρίζετε ότι η g' είναι φθίνουσα στο R δείξτε ότι $f(x)=0\ \forall x\in R_+$.

4Β8. Να βρεθεί συνεχής συνάρτηση με x στο R_+ ,ώστε :

$$f(x)=e^{-\int_0^x f(t)dt}$$

4Β9. Έστω $f,g:[a,b]\to R$ συνεχείς :

$g(x)\neq 0$, $f(a)=f(b)$, $f(x)=\int_a^x \frac{f^4(t)}{g^3(t)}dt$ Βρείτε τον τύπο της f

4Β10. Έστω $f:A=[0,\alpha)\to R$ συνεχής ώστε

$f(x)=-1-2\int_0^x f^2(x-t)dt$,$\forall x\in A$. Βρείτε τον τύπο της f και το α

4Β11. Έστω f με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο R ,

$f(0)=0$, $f'(0)=2$ Αν επιπλέον είναι

$\int_0^x (t^2+1)f''(t)dt=2\int_x^0 tf'(t)dt-4\int_0^1 xtf(x)dt$ να δείξετε ότι ο τύπος της είναι $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$

4Β12. Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση στο R ώστε

$f(x)+\int_0^x tf(x-t)dt=0$, δείξτε πρώτα ότι η συνάρτηση

$(f(x))^2+(f'(x))^2$ είναι σταθερή

4Β13. Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση στο R ώστε

$$f(x)=6x+\int_0^x f(x-t)\eta\mu t dt$$

4Β14. Αν $\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 f^2(t)dt = 1$. Να δείξετε ότι $f(x)=1$ για κάθε $x \in [0,1]$.

4Β15. Αν f συνεχής ώστε $\int_0^1 f^2(x)dx \le \frac{1}{3} \le \int_0^1 xf(x)dx$. Να δείξετε ότι $f(x)=x$ για κάθε $x \in [0,1]$.

4Β16. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ώστε: $0 \le f(x) \le \int_\alpha^x f(t)dt$ $\forall x \in [\alpha,\beta]$. Να δείξετε ότι $f(x)=0$ στο $[\alpha,\beta]$.

4Β17. Αν $f''(x)f(x) - 2(f'(x))^2 = af^3(x) \neq 0$, $\forall x \in [0,1)$ με $g(x) = \frac{f(x)-1}{f(x)}$ και $g(0) = \frac{3}{2}$ τότε να βρεθεί το α ώστε η $x\text{-}g'(x)$ να είναι σταθερή και στην συνέχεια να βρεθούν οι τύποι των g , f

4Β18. Έστω $f, g : [1,+\infty) \to R$ συνεχείς :

$f(x) = \int_x^1 e^{g(t)}dt$, $g(x) = \int_x^1 e^{f(t)}dt$. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις είναι ίσες και βρείτε τους τύπους τους

4Β19. Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις

$f, g : [0,+\infty) \to R^*$:

$1 + \int_0^x f(t)dt = \frac{1}{g(x)}$, $1 + 5\int_0^x g(t)dt = \frac{5}{f(x)}$. Τότε δείξτε ότι $f(x) = 5g(x)$ και βρείτε τους τύπους τους.

Γ ΟΜΑΔΑ

4Γ1. Αν $f(x) = 1 + \int_0^x (\int_0^t f(u)du)dt$ όπου f συνεχής συνάρτηση στο R να βρείτε τον τύπο της f

4Γ2. Να βρεθεί συνεχής συνάρτηση στο *R* ώστε

$$f(x)=x^2+\int_0^x (x-t)f(t)dt$$

4Γ3. Αν f' συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει

$2(\beta-\alpha)f'(x)\geq 2f^2(\alpha)+2f^2(\beta)+1$ για κάθε x στο $[\alpha,\beta]$ βρείτε τον τύπο της f.

4Γ4. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

α) f συνεχής στο $[0,1]$,

β) $f(x)\geq 0 \ \forall x\in[0,1]$,

γ) $\int_0^1 x^2 f(x)dx=\alpha^2$, $\int_0^1 xf(x)dx=\alpha \int_0^1 f(x)dx=1$.

4Γ5. α) Δείξτε ότι όταν f συνεχής μη μηδενική και $f(x)\geq 0$ στο $[\alpha,\beta]$ τότε $\int_\alpha^\beta f(t)dt>0$.

β) Αν τώρα f συνεχής, f^2 παραγωγίσιμη και $f(x)\neq 0$ δείξτε ότι η ίδια η f είναι παραγωγίσιμη.

γ) Βρείτε όλες τις συνεχείς f σε κανένα διάστημα σταθερές ώστε $3\int_0^x f^2(t)dt=f^3(x)$.

4Γ6. Βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις στο *R* που ικανοποιούν την $\int_0^x |f(t)|\frac{t}{1+t^2}dt=f^2(x)$ και δεν είναι σταθερές σε κανένα διάστημα

4Γ7. Να βρεθεί συνεχής συνάρτηση στο *R* ώστε:

$$f(0)=0,\ f'(x)>0 \ \forall x\in R \ , \ \int_0^{f(x)} f(t)dt=xf(x)-\int_0^x f(t)dt$$

4Γ8. Έστω f συνεχής στο $[0,1]$ και

$0 < f(x) = f(1) + \int_0^x \ln(f(t))dt, \forall x \in [0,1]$ τότε

αν $f(1) = 1$ δείξτε ότι f σταθερή

4Γ9. Έστω f' συνεχής στο R και

$f'(x) = 2 + f(c)\int_0^x e^{tf(t)}dt, \forall x \in R$ τότε να βρείτε την f και

την σταθερά c όταν $f(0)=3$, $f(1)=5$

4Γ10. Να βρεθούν οι συνεχείς στοR συναρτήσεις με την ιδιότητα

$f(ax + b\int_0^x f(t)dt) = ax + b$, $a \neq 0$

4Γ11. Να βρείτε όλες τις συνεχείς στο R συναρτήσεις :

$$\int_a^b f(t)dt = (b-a) f\left(\int_a^b f(t)dt\right), \forall a,b \in R$$

4Γ12. Αν $f:(0,+\infty) \to (0,+\infty), f(x) = x + \int_x^{f(x)} \frac{\eta\mu t}{2t} dt$ τότε να

βρείτε τον τύπο της f

4Γ13. Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση με σύνολο ορισμού το R, και για όλους τους διαφορετικούς μεταξύ τους, πραγματικούς

αριθμούς x,y ισχύει $\frac{\int_x^y f(t)dt}{y-x} \geq f(x)$

Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή

<u>Δ ΟΜΑΔΑ</u>

4Δ1. Έστω $f:[0,+\infty) \to R$ συνεχής συνάρτηση που δεν μηδενίζεται σε διάστημα $[0,\alpha]$ για οποιοδήποτε $\alpha>0$ και

$f^2(x) = \int_0^x f(t)(2t+2)dt$, $\forall x \in [0,+\infty)$.

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης

4Δ2. Έστω $f:[0,a]\to R^+$ συνεχής συνάρτηση. Θέτουμε $O(0,0)$, $A(a,0)$, $M(a,f(a))$, $B(0,f(0))$ και $P(f,a)$ την περίμετρο της κλειστής καμπύλης $OAMBO$, ενώ $E(f,a)$ το εμβαδό που περικλείει.

Να δείξετε ότι $\alpha>2$

Δίνονται επιπλέον ότι : Η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και ότι το μήκος $L(f,a)$, της καμπύλης C_f, δίνεται από την σχέση : $L(f,a)=\int_0^a \sqrt{1+\left(f'(t)\right)^2}\,dt$. Να βρείτε τον τύπο όλων των f στην περίπτωση όπου $P(f,a)-E(f,a)=\Omega$ για κάθε τιμή του $a\geq 0$ όπου Ω μια σταθερά και να αποδείξετε ότι $\Omega\geq 4$

4Δ3. Έστω $f:R\to R$ ώστε

$$f'(x)=(2-f(x))e^{f(x)},\forall x\in R,\ f(0)=1$$

Δείξτε ότι $f^{-1}(x)=\int_1^x \frac{e^{-u}}{2-u}\,du,\forall x\in(-\infty,2)$

(Η άσκηση αυτή είναι εξαιρετικά δύσκολη και απαιτεί μεγάλο αριθμό πρωτοβουλιών)

5 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ

Α ΟΜΑΔΑ

Να βρείτε την $f'(x)$ όταν:

5Α1. $f(x)=\int_1^x \ell n(x+t)dt$, $x\geq 0$.

5Α2. $f(x)=\int_{-x}^x \varepsilon\varphi(x+t)dt$.

5Α3. $f(x)=\int_0^x \eta\mu(x\cdot t)dt$, $x\in R^*$.

5Α4. $f(x)=\int_0^2 e^{xt}dt$.

Θεωρήστε ότι παρακάτω οι συναρτήσεις f όπου αναφέρονται είναι συνεχείς και δείξτε ότι:

5Α5. $\int_{-\alpha}^{+\alpha} f(x)dx=\int_0^{\alpha}\left(f(x)+f(-x)\right)dx$.

5Α6. $\int_{\alpha}^{-\alpha} f(x)dx=\int_{+\alpha}^{-\alpha} f(-x)dx$.

5Α7. Αν f άρτια $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=2\int_0^{\alpha} f(x)dx$.

5Α8. Αν f περιττή $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=0$.

5Α9. Αν f περιττή, περιοδική με περίοδο $T>0$,

$\int_{\alpha}^{\alpha-\mathrm{T}} f(x)dx=\int_{\alpha}^{\alpha+\mathrm{T}} f(x)dx$.

5Α10. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\int_{\alpha+\gamma}^{\beta+\gamma} f(x-\gamma)dx$

5Α11. $\int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha+\beta-t)dt=\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$.

5Α12. $\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2}=\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}$, $(x>0)$.

5Α13. Έστω $g(x)=\int_0^1 f(tx)dt$ με $x\in(0,1)$ τότε δείξτε ότι

$xg'(x)+g(x)=f(x)$.Θεωρήστε ότι f συνεχής

5Α14. Δείξτε ότι : $\int_{-1}^{1} f'(x-t)dt=f(x+1)-f(x-1)$ αν $f'(x)$ συνεχής συνάρτηση

5Α15. Αν $L(x)=\int_1^x \frac{1}{t}dt$, $x>0$ χωρίς να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα δείξτε ότι: $L(xy)=L(x)+L(y),\ \forall x,y\in R_+^*$

5Α16. Δείξτε ότι: $\int_0^1 x^\nu e^x dx=\int_1^e (lnx)^\nu\, dx$, $\nu\in N$.

5Α1. Υπολογίστε το $I=\dfrac{\int_0^\alpha x^\nu (2\alpha-x)^\nu dx}{\int_0^{\alpha/2} x^\nu(\alpha-x)^\nu dx}$, θέτοντας $x=2t$.

5Α17. Αν $f(2\alpha-x)=f(x)$ τότε $\int_0^{2a} xg(f(x))dx=a\int_0^{2a} g(f(x))dx$.

5Α18. Αν $f(2\alpha-x)=-f(x)$ τότε $\int_0^{2\alpha} f(x)dx=0$.

5Α19. Δείξτε ότι : $\int_0^\pi xf(\eta\mu x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\eta\mu x)dx$.

5Α20. Δείξτε ότι: $\int_0^{\pi/2} f(\eta\mu x)dx=\int_0^{\pi/2} f(\sigma\upsilon\nu x)dx$.

5Α21. Υπολογίστε το $\int_0^2 f(x)dx$ αν είναι γνωστό ότι ισχύει $f(1+x)+f(1-x)=2$, $\forall x\in R$.

5Α22. Αν η f' είναι συνεχής στο R και $f(0)=0$, $f(1)=\sqrt{2}$ τότε να υπολογίσετε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^1 f(t)e^{2t}[f'(t)+f(t)]dt$

Β ΟΜΑΔΑ

5Β1. Δείξτε ότι g σταθερή στο $(0, +\infty)$ όπου $g(x)=\int_0^{a\cdot x}\frac{x}{x^2+t^2}dt$

5Β2. Αν $f'(x)$ συνεχής στο *[0,2]* και $f'(x)=f'(2-x)$ τότε δείξτε ότι $\int_0^2 f(t)dt=f(0)+f(2)=2f(1)$ *

5Β3. Αν $f(x)=\int_1^x \frac{\ell nt}{1+t}dt$, *x>0* υπολογίστε το $f(a)+f\left(\frac{1}{a}\right)$, $a>0$.

5Β4. Αν η *f* έχει συνεχή παράγωγο στο *R* και $g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)-f(0)}{x}, x\neq 0\\ f'(0)\ ,\ x=0\end{cases}$ τότε να δείξετε ότι $g(x)=\int_0^1 f'(xt)dt$

5Β5. Αν $f(\alpha+\beta-x)=f(x)$, $\forall x\in R$ δείξτε ότι $\int_\alpha^\beta xf(x)dx=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\int_\alpha^\beta f(t)dt$.

5Β6. Έστω $f(x)=f(\alpha-x)$, $(\alpha\in R^*)$ και $g(x)+g(\alpha-x)=\lambda$. Τότε να δείξετε ότι: $\int_0^\alpha f(t)g(t)dt=\frac{\lambda}{2}\int_0^\alpha f(t)dt$.

5Β7. Αν f άρτια και $\int_{-\alpha}^{\alpha} g(f(x))dx=\lambda$, δείξτε ότι: $\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{g(f(x))}{1+e^x}dx=\frac{\lambda}{2}$.

5Β8. Έστω $f(\alpha-x)+f(\alpha+x)=2\beta$, *(αβ≠0)*. Δείξτε ότι: $\int_0^{2\alpha} f(x)dx=2\alpha\beta$.

5Β9. Έστω $\alpha f(x)+\beta f(-x)=\gamma$, *(α+β≠0)*. Υπολογίστε το $\int_{-\delta}^{\delta} f(x)dx$.

5Β10. Αν $f(x)+f(\alpha-x)\neq 0$, $\forall x\in R$. Να υπολογίσετε το

$$\int_0^{\alpha}\frac{f(x)}{f(x)+f(\alpha-x)}dx$$

5Β11. Να υπολογίσετε το $\int_0^1\frac{1}{1+e^{\sqrt{1-t}-\sqrt{t}}}dt$

5Β12. Να υπολογίσετε το $\int_0^1\frac{x^4}{x^4+(1-x)^4}dx$

5Β13. Να υπολογίσετε το $\int_0^2\frac{e^{t^2}}{e^{t^2}+e^{4-4t+t^2}}dt$

5Β14. Αν $f(x-\alpha)+f(\beta-x)\neq 0$, $\forall x\in R$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{f(x-\alpha)}{f(x-\alpha)+f(\beta-x)}dx$

5Β15. Αν $f(x)f(-x)=1$, $\forall x\in[-1,1]$ να υπολογίσετε το

$$\int_{-1}^{1}\frac{|x|}{1+f(x)}dx.$$

5Β16. Αν f άρτια, g περιττή, $\alpha>0$, $\alpha\neq 1$. Να δείξετε ότι:

$$\int_{-\beta}^{\beta}\frac{f(x)}{\alpha^{g(x)}+1}dx=\int_0^{\beta}f(x)dx\ .*$$

5Β17. f παραγωγίσιμη, $f(0)=0$, f ένα προς ένα. Δείξτε

$$\int_0^x f(t)dt+\int_0^{f(x)}f^{-1}(t)dt=xf(x).$$

5Β18. Αν $f'(x)>0$, δείξτε ότι:

$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx+\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)}f^{-1}(x)dx=\beta f(\beta)-\alpha f(\alpha)$ και δώστε μια γεωμετρική ερμηνεία.

(Βασική πρόταση-θεώρημα)

5Β19. Να υπολογίσετε το $\int_0^1 \sqrt{e^t-1}dt+\int_0^{\sqrt{e-1}} ln(1+t^2)dt$

5Β20. Να υπολογίσετε το $\int_0^2 \sqrt{1+t^3}\,dt+\int_1^3 \sqrt[3]{t^2-1}dt$

5Β21. Να υπολογίσετε το $\int_0^{e^x-e^{-x}} \frac{1}{\sqrt{4+t^2}}dt$

5Β22. Έστω $f(x)=\frac{(4-m)x^2+2x-m}{(2x+1)(x^2+1)}$. Να βρεθούν

$a,b\in R:\ f(x)=\frac{ax}{x^2+1}+\frac{b}{2x+1}$ και στην συνέχεια να βρεθεί

το $m:\ \lim\limits_{k\to+\infty}\int_0^k f(x)dx\in R$

Να υπολογιστούν τα :

5Β23. $\int_0^{\pi} x\eta\mu x(3+\sigma\upsilon\nu^2 x)dx$

5Β24. $\int_0^{\pi/2} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}dx$

5Β25. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{ln(\varepsilon\phi x)}{\eta\mu^2 x}dx$

5Β26. $\int_0^{\pi/2} \frac{1+\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}dx$

5Β27. Έστω $I=\int_\alpha^x \frac{e^{2t}}{t-1}dt$, $\alpha=1+\ell n2$ και $Li(x)=\int_2^x \frac{1}{\ell nt}dt$ *(x≥2).*

Να εκφράσετε το *I* συναρτήσει του *Li(x).*

Το Li(x) κάνει συχνή την παρουσία του στην θεωρία των πρώτων ακέραιων αριθμών και δεν υπολογίζεται στοιχειωδώς.

5Β28. Αν $Li(x)=\int_2^x \frac{1}{lnt}dt$, *(x≥2)* να δείξετε ότι υπάρχει σταθερά *λ:*

$$\int_{\lambda}^{\ln x}\frac{e^t}{t}dt = Li(x).$$

Έστω $f:\ f(x)=\int_1^x \frac{e^t}{t}dt$ $x\in(0,+\infty)$. Να εκφράσετε συναρτήσει της f τα παρακάτω ολοκληρώματα

5Β29. $\int_1^x \frac{e^t}{t+\alpha}dt$ $\alpha>0$,

5Β30. $\int_1^x \frac{e^{\alpha t}}{t}dt$

5Β31. $\int_1^x \frac{e^t}{t^2}dt$

5Β32. $\int_1^x e^{1/t}dt$

Γ ΟΜΑΔΑ

5Γ1. Δείξτε ότι : $\int_0^x e^{-t}t^{\nu}dt = \nu!\,e^{-x}\left\{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \ldots - \frac{x^{\nu}}{\nu!}\right\}$.

7 ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΥΠΑΡΞΗΣ ΜΕ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Α ΟΜΑΔΑ

6Α1. Αν $f(x)=\int_0^x \frac{a^t\ln a + b^t\ln b}{a^t+b^t}dt$ και είναι :

$f(x)\geq x$, $\forall x\in R$ τότε να δείξετε ότι $ab=e^2$

(Σκεφθείτε ότι έχετε μια ανισότητα και θέλετε τελικά μια ισότητα)

6Α2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει :

$\int_0^{x^2} f(t)dt \geq a^x - x - 1 \quad x \in R$, $a>1$ δείξτε ότι $a=e$

6Α3. Η f είναι συνεχής στο R και ισχύει

$(1+x)\int_0^x f(t)dt \leq a\ln(1+x^2)+\eta\mu x \quad \forall x \in R$ δείξτε τότε ότι

$f(0)=1+a$

6Α4. Η f είναι συνεχής στο R και ισχύει

$\int_x^{2x} f(t)dt \leq x^2 + x$, $\forall x \in R$ δείξτε τότε ότι $f(0)=1$

6Α5. Η f είναι συνεχής στο R και ισχύει

$e^x + \int_0^x f(t)dt \geq 1 + mx$, $\forall x \in R$. Βρείτε την τιμή του m

6Α6. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)>0$. Αν ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx < 0$

δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$: $f(\xi)=0$.

6Α7. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [\alpha,\beta]$:

$\int_\alpha^\xi f(x)dx = \int_\xi^\beta f(x)dx$.

6Α8. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [\alpha,\beta]$:

$\int_\alpha^\xi f(x)dx = k\int_a^\beta f(x)dx$ όπου $k \in (0,1)$

6Α9. Έστω $f : R \to [2,+\infty)$ συνεχής ώστε

$g(x) = x^2 - 5x + 1 - \int_0^{x^2-5x} f(t)dt$, $\forall x \in R$. Δείξτε ότι η g έχει μοναδική ρίζα στο $[-3,0]$

6Α10. Έστω f, g συνεχείς και $\int_1^a f(x)dx = \int_1^a g(x)dx$ δείξτε τότε ότι οι C_f, C_g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο

6Α11. Έστω $f:[0,1]\to R$ συνεχής : $\int_0^1 f(x)dx = 1$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$: $f(\xi)=3\xi^2$.

6Α12. Έστω $f:[0,1]\to R$ συνεχής: $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{\pi}$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$: $f(\xi)=\frac{2\xi}{\pi}$.

6Α13. Έστω f συνεχής στο $[0,1]$: $3\int_0^1 f(x)dx = 1$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$: $f(\xi)=\xi^2$.

6Α14. Έστω f συνεχής στο $[0,1]$: $\int_0^1 f(x)dx = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$: $f(\xi)=\frac{1-\xi^3}{1-\xi}$.

6Α15. Έστω f συνεχής στο $[0,1]$: $6\int_0^1 f(t)dt = 2\alpha+3\beta+6\gamma$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$: $f(\xi)=\alpha\xi^2+\beta\xi+\gamma$.

6Α16. Έστω f συνεχής στο $[0,1]$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$:

$(1-\xi)f(\xi)=\int_0^\xi f(t)dt$.

6Α17. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$:

$f(\xi)=\frac{1}{\beta-\xi}\int_\alpha^\xi f(x)dx$.

6Α18. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $\int_a^b f(t)dt=\int_c^d f(t)dt$ με $b-a=d-c$ και ακόμη $b<c$ δείξτε ότι η παράγωγος της $g(x)=\int_x^{x+b-a} f(t)dt$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα ανάμεσα στα a , c. Ακόμη δείξτε ότι και η $f'(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα ανάμεσα στα x_0 , x_0+b-a όπου $g'(x_0)=0$

6Α19. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει

$\int_0^1 f(t)dt = \int_2^3 f(t)dt$ Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0,3)$: $f'(\xi) = 0$

6Α20. Έστω f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$, $f(\alpha)=0$ και $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$

τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f'(\xi)=0$

6Α21. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$: $\int_\alpha^\beta f(t)dt = 0$. Δείξτε ότι υπάρχουν

$\xi_1, \xi_2 \in [\alpha,\beta]$: $f(\xi_1)\cdot f(\xi_2) \le 0$.

6Α22. Έστω $f'(x) < 0$, $\forall x \in R$, $f(a)f(b) < 0$ Δείξτε τότε ότι

πάντα υπάρχουν ξ_1 , $\xi_2 \in R$: $\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(t)dt = 0$

6Α23. Έστω ότι $f''(x) = f(x)$, $\forall x \in R$ και η f παρουσιάζει

ακρότατο στο b. Τότε δείξτε ότι

$\int_a^b (2-t^2) f(t)dt + 2bf(b) = 0$

6Α24. Αν η f'' είναι συνεχής στο $[0,\pi/2]$ και

$\int_0^{\pi/2} (f(t) + f''(t))\sigma\upsilon\nu t dt = f(0)$ δείξτε ότι υπάρχει ξ στο

$[0,\pi/2]$: $f''(\xi) = 0$

6Α25. Έστω ότι

$xf''(x) = f(x)$, $\forall x \in [a,b]$, $f'(b) = f(a), f'(a) = f(b)$

Τότε δείξτε ότι υπάρχει ξ

: $(b-a)f(\xi) = (b+1)f(a) - (a+1)f(b)$

6Α26. Αν η f' είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ και

$\int_0^\pi (f(t) + f''(t))\eta\mu t dt = 2f(0)$ δείξτε ότι η $f(x)$ δεν μπορεί

να είναι να είναι *1-1* συνάρτηση

Β ΟΜΑΔΑ

6Β1. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,\alpha+1]$: $\int_a^{a+1} f(t)dt = 1$ και

$g:[a,a+1]\to R$ συνάρτηση με τύπο

$g(x)=\int_a^x f(t)dt\cdot\int_x^{a+1} f(t)dt$. Αφού δείξετε ότι

$g(x)=\frac{1}{4}-\left(\int_a^x f(t)dt-\frac{1}{2}\right)^2$ να δείξετε ότι g έχει μέγιστο το

οποίο και να βρείτε

6Β2. Έστω f συνεχής και $f(\alpha)>\alpha$. Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx<\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}$ δείξτε

ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$: $f(\xi)=\xi$.

6Β3. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)>\alpha^2$. Αν ισχύει

$3\int_\alpha^\beta f(x)dx<\beta^3-\alpha^3$ δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$: $f(\xi)=\xi^2$.

6Β4. Έστω $f'(x)>0$, $g'(x)=x\int_1^x f'(xt)dt \quad \forall x\in R$ Να

μελετήσετε την g ως προς την μονοτονία και να δείξετε ότι

υπάρχει ξ : $2\xi f'(\xi^2)=f'(\xi)$

6Β5. Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β)

με $\alpha\beta<0$ και ισχύει $\int_a^b f(a+b-t+x)dt\ge\int_a^b f(t)dt \quad \forall x\in R$.

Τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$: $f'(\xi)=0$

6Β6. Έστω f συνεχής: $\int_\alpha^\beta f(t)dt=0$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$:

$\int_\alpha^\xi f(x)dx=f(\xi)$.

6Β7. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = 0$ με $0<\alpha<\beta$, τότε δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$:

$\int_{\alpha}^{\xi} f(x)dx = \xi f(\xi)$.

6Β8. Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Δείξτε ότι υπάρχει

$\xi \in [\alpha,\beta]$: $\int_{\alpha}^{\xi} f(t)dt - \int_{\xi}^{\beta} f(t)dt = (\alpha+\beta-2\xi) f(\xi)$.

6Β9. Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο (α,β). Δείξτε ότι υπάρχει

$\xi \in (\alpha,\beta)$: $\int_{\alpha}^{\xi} f(x)dx + (\xi-\alpha) g(\xi) = \int_{\xi}^{\beta} g(x)dx + (\beta-\xi) f(\xi)$.

6Β10. f συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$ και $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \neq 0$. Δείξτε ότι

υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$: $\int_{\alpha}^{\xi} f(x)dx = \frac{f(\xi)(\xi-\alpha)(\xi-\beta)}{(\alpha+\beta-2\xi)}$.

6Β11. Έστω f συνάρτηση γνήσια μονότονη και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

Θέτουμε $g(x) = (x-\alpha)\int_{x}^{\beta} f(t)dt + (x-\beta)\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$. Δείξτε ότι

η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (α,β).

6Β12. Αν f παραγωγίσιμη στο $[0,1]$: $f(0)=0$. Να δείξετε ότι

υπάρχει ξ στο $(0,1)$: $f'(\xi) = 2\int_0^1 f(t)dt$

6Β13. Έστω f, g συνεχείς στο $[0,1]$: $g(0)=0$, $g(1) = \int_0^1 f(x)dx$. Να

δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$: $f(\xi)=g'(\xi)$.

6Β14. Έστω $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$: $\frac{\alpha}{10} + \frac{\beta}{6} + \frac{\gamma}{3} + \delta = 0$ δείξτε

ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$: $f(\xi)=0$.

6Β15. Έστω f συνεχής στο $[0,1]$. Να δείξετε ότι υπάρχει ξ στο $[0,1]$:

$\int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{2} \leq f(\xi) - \xi$

6Β16. Αν f παραγωγίσιμη: $\int_0^1 f(x)dx = 1$, $\int_2^3 f(x)dx = 5$. Να δείξετε ότι υπάρχει ξ στο $(0,3)$: $f'(\xi) = 2$

6Β17. Αν f' παραγωγίσιμη: $f(\alpha)=f(\beta)=0$ και $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$. Δείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha,\beta)$: $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$. Δείξτε ότι υπάρχει και ξ : $f''(\xi)=f'(\xi)$.

6Β18. Έστω $\alpha<\beta$, $\gamma<\delta$ και $\int_\alpha^\beta f(x)dx \cdot \int_\gamma^\delta f(x)dx < 0$. Δείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 : \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)dx = 0$

6Β19. Εστω f' συνεχής και $\int_0^1 f(x)dx = 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει ξ στο $(0,1)$: $\xi f'(\xi) = f(1)$

6Β20. Αν η f' είναι συνεχής στο $[0,1]$

$\int_0^1 tf'(t)dt = A, \int_0^1 f(t)dt = f(0), f'(0) = A+2$ Να δείξετε ότι υπάρχει ξ στο $(0,1)$: $f'(\xi) = A+1$

6Β21. Αν η f'' είναι συνεχής στο $[0,1]$ και

$2f(x+1) - 2f(x) = x^2$, $\forall x \in [0,1]$ τότε δείξτε ότι η $f''(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα και

$\int_0^1 f''(t)(t-2006)dt = f'(0)$

6Β22. f'' συνεχής και $\int_0^1 xf''(x)dx = 0$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$: $f'(\xi)=f'(1)$.

6Β23. f'' συνεχής $f(\beta)=0$, $f'(\beta)=0$ τότε δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$:

$\int_\alpha^\beta f(t)dt = \frac{\beta-\alpha}{2}(\xi-\alpha)^2 f''(\xi)$.

Γ ΟΜΑΔΑ

6Γ1. Αν *f,g* συνεχείς με $g(x)\geq 0$, $\forall x\in[a,b]$ (ή $g(x)\leq 0$) τότε δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$: $\int_a^b g(x)f(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$

Ένα σπουδαίο ΘΜΤ ολοκληρωμάτων , μπορείτε να το χρησιμοποιήσετε στις 3 επόμενες ασκήσεις

6Γ2. Αν f' συνεχής στο *[0,1]* τότε: υπάρχει $\xi\in(0,1)$:

$$\int_0^1 (1-x)f'(x)dx = \frac{1}{2}f'(\xi)$$

6Γ3. Αν f' συνεχής στο *[0,1]*υπάρχει $\xi\in(0,1)$:

$$\int_0^1 f(x)dx = f(1)-\frac{1}{2}f'(\xi).$$

6Γ4. Αν f''' συνεχής τότε δείξτε ότι υπάρχει ξ ανάμεσα στα *α* και *b* έτσι ώστε να είναι

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2}f''(a)+\frac{(b-a)^3}{6}f'''(\xi)$$

6Γ5. Εστω f' συνεχής , $f'(1)<1$ και

$x\int_1^x f(xt)dt \leq x^3-x$, $\forall x\in R$ τότε υπάρχει ξ : $f'(\xi)=\xi$

(δεν είναι απαραίτητη η συνέχεια της f΄αλλά...)

6Γ6. Εστω *f* συνεχής και $\int_0^1 f(t)dt = \ln(1+\sqrt{2})$ τότε υπάρχει

$$x_0\in(0,1):\frac{1}{\sqrt{2}}<f(x_0)<\frac{\sqrt{2}}{1+x_0}$$

Δ ΟΜΑΔΑ

6Δ1. Έστω $f:R\to R$ παραγωγίσιμη:

$$\int_x^y f(t)dt \leq f'(x)-f'(y)\ \ \forall x,y\in R\quad f(0)=0, f'(0)=1$$

Δείξτε ότι η *f* έχει τουλάχιστον μια ρίζα $\xi>0$

6Δ2. Αν f συνεχής και μη μηδενική στο R : $\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 tf(t)dt$

τότε δείξτε ότι

Α) υπάρχει α στο $[0,1]$: $f(a) = \int_0^a f(t)dt$

Β) υπάρχει b στο $[0,1]$: $bf(b) = \int_0^b tf(t)dt$

6Δ3. Αν f δυο φορές παραγωγίσιμη με πεδίο ορισμού το [a,b] και επιπλέον $f'(a) = f'(b) = 0$ τότε

$$\exists \xi \in (a,b) : |f''(\xi)| \geq \frac{2(f(b) - f(a))}{(b-a)^2}$$

7 ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

Α ΟΜΑΔΑ

Να δείξετε ότι :

7Α1. $-2 \leq \int_{-1}^{1} \frac{t^5}{t+2} dt \leq \frac{2}{3}$.

7Α2. $\frac{\pi}{2e} \leq \int_{-\pi/4}^{\pi/4} e^{\varepsilon\phi x} dx \leq \frac{\pi e}{2}$.

7Α3. $\int_{-1}^{2} \frac{t}{e^t} dt \leq \frac{3}{e}$.

7Α4. $\frac{1}{4} \leq \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sigma\upsilon\nu t}{t} dt \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

7Α5. $\int_0^{3\pi} \frac{1}{2 + \sigma\upsilon\nu^2 t} dt \geq \pi$.

7Α6. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ $m = \min_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)$, $M = \max_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)$, $\alpha>0$

τότε δείξτε ότι $m\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \leq \int_\alpha^\beta \frac{f(t)}{t} dt \leq M\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$.

7Α7. α) $\forall x \in [0,1]$ δείξτε ότι $x - x^2 \le \ln(1+x) \le x$,

β) δείξτε τώρα ότι: $\frac{1}{6} \le \int_0^1 \ln(1+t)\,dt \le \frac{1}{2}$.

7Α8. Αν $\alpha>0$ και $x \in [0,1]$ δείξτε ότι $1 - x^\alpha \le \sqrt{1-x^\alpha} \le 1 - \frac{1}{2}x^\alpha$

και στην συνέχεια δείξτε ότι: $\frac{\alpha}{1+\alpha} \le \int_0^1 \sqrt{1-x^\alpha}\,dx \le \frac{\alpha+\frac{1}{2}}{\alpha+1}$.

Ποιο το $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \int_0^1 \sqrt{1-x^\alpha}\,dx$.

7Α9. Δείξτε ότι: $\frac{\pi^2}{64} \le \int_0^{\pi/4} \frac{x\,dx}{1+\varepsilon\phi^2 x} \le \frac{\pi^2}{32}$.

Θεωρήστε κατάλληλες συναρτήσεις και ασχοληθείτε με την μονοτονία και τα ακρότατά τους, ώστε να δείξετε τις παρακάτω προτάσεις.

7Α10. $2\int_1^x e^{t^2}\,dt \le e^{x^2} - e \quad \forall x \in R.$

7Α11. Αν $1<\alpha<\beta$ τότε : $0 \le \int_\alpha^\beta \frac{dt}{\ln t} - \ln\left(\frac{\beta-1}{\alpha-1}\right) \le \beta - \alpha$.

7Α12. Αν f αύξουσα και συνεχής στο $[\alpha,b]$ τότε:

$\int_\alpha^b t f(t)\,dt \ge \frac{\alpha+b}{2}\int_\alpha^b f(t)\,dt$.

7Α13. Έστω $f'(x)$ συνεχής στο $[1,+\infty)$ με $f(1)=2$ και

$xf'(x) > f(x), \forall x \ge 1$ Δείξτε ότι $\int_a^b f(t)dt \ge b^2 - a^2$ όταν

$1 \le a < b$. Ακόμη δείξτε : $2\int_a^b f(t)dt < bf(b) - af(a)$

7Α14. Έστω $f'(x)$ συνεχής στο $[0,1]$ με $f(0)=0$ και

$f(x)>\frac{f'(x)}{2}>0$, $\forall x\in(0,+\infty)$ Να δείξετε ότι

$n\left(\int_0^a (f(t))^n dt\right)^2 \geq \int_0^a (f(t))^{2n} dt$, $a>0$, $n\in N^*$

7Α15. Έστω $f,g:[1,+\infty)\to R$ συνεχείς:

$x\int_{\frac{1}{x}}^{1} f(xt)dt + xg(x) < xf(x)+\int_1^x g(t)dt$. Να δείξετε ότι

$f(x)>g(x)$, $\forall x\in[1,+\infty)$

7Α16. Αν f παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$, κυρτή, $f(0)=1, f'(0)=1$.

Να δείξετε ότι $f(x)>1$ στο $(0,+\infty)$, η συνάρτηση

$\int_1^x f(t)dt - \int_1^x ln(f(t))dt$ είναι κυρτή και γνήσια αύξουσα

7Α17. Αν f' είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$

$f(1)=0$, $ln\,x \leq f'(x) \leq x-1$, $\forall x\in(0,+\infty)$ τότε να μελετήσετε την μονοτονία και τα ακρότατα της f Να δείξετε ότι η f δεν έχει ασύμπτωτους και ότι η εξίσωση $f(x)=m\geq 1$ έχει μοναδική λύση

7Α18. Χρησιμοποιήστε την ταυτότητα

$\left(f(x)-\eta\mu x\right)^2+\left(f(x)-\sigma\upsilon\nu x\right)^2\geq 0$ και με δεδομένο ότι

$\int_0^1 f(x)\eta\mu x dx = \int_0^1 f(x)\sigma\upsilon\nu x dx = 1$ δείξτε ότι για την συνεχή συνάρτηση f ισχύει: $\int_0^1 f^2(x)dx \geq \frac{3}{2}$.

7Α19. Αν $f(0)=0$, $0\leq\frac{x}{2}\leq f(x)\leq xf'(x)$, $\forall x\in[0,+\infty)$ δείξτε ότι θα ισχύει : $\frac{1}{4}\leq\int_0^1 f(t)dt\leq\frac{1}{2}f(1)$

7Α20. Έστω *f(x)≥0, f(α)=0, f(β)=1* και η συνεχής συνάρτηση *f* στρέφει τα κοίλα άνω τότε δείξτε ότι:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \le \frac{1}{2}(\beta-\alpha)$$

$$\int_\alpha^\beta f^2(x)dx \le \frac{\beta-\alpha}{3}.$$

Β ΟΜΑΔΑ

7Β1. Δείξτε ότι: $\int_0^1 e^{t^2}dt \ge \frac{4}{3}$.

7Β2. Δείξτε ότι: $\int_0^1 \frac{ln(2+t^2)}{1+t^2}dt \le 1$.

7Β3. Με μια γεωμετρική ερμηνεία της υπόθεσης *f ΄΄(x)>0* $\forall x\in[\alpha,\beta]$ δείξτε ότι: $\int_\alpha^\beta f(t)dt \le \frac{1}{2}(\beta-\alpha)(f(\beta)+f(\alpha))$.

7Β4. Και πάλι με γεωμετρικό τρόπο μπορείτε να δείξετε ότι αν *f ΄΄(x)<0* $\forall x\in[\alpha,\beta]$ τότε

$$\frac{(\beta-\alpha)^2}{2}f'(\alpha) \ge \int_\alpha^\beta f(x)dx-(\beta-\alpha)f(\alpha).$$

7Β5. Αν *f* παραγωγίσιμη : *f(0)=0* , $0\le f'(x)\le 1$, $\forall x\in[0,+\infty)$ τότε να δείξετε ότι ισχύει $\int_0^x f^3(t)dt \le \left\{\int_0^x f(t)dt\right\}^2$ $\forall x\in[0,+\infty)$.

7Β6. Έστω $f(x)=\int_\alpha^x g(t)dt$ όπου *g* συνεχής στο *[α,β]*. Αν $g(\xi_2)$ η ελάχιστη και $g(\xi_1)$ η μέγιστη τιμή της *g* στο *[α,β]* τότε να

δείξετε ότι ισχύει :

$$g(\xi_2)\frac{(\beta-\alpha)^2}{2} \le \int_\alpha^\beta f(t)dt \le g(\xi_1)\frac{(\beta-\alpha)^2}{2}.$$

7B7. Έστω $f''(x)\ge 0 \ \forall x\in[\alpha,\beta]$ δείξτε ότι:

$$\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x)dx - \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^\beta f(x)dx \le \frac{\beta-\alpha}{2}\left(f(\alpha) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right).$$

7B8. Έστω $f(x)=\int_x^{2x}\frac{dt}{t-lnt}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού.

β) Να δείξετε ότι f γνήσια φθίνουσα στο $[2,+\infty)$.

γ) Δείξτε ότι $f(x)\le x, \ \forall x>0$.

δ) Δείξτε ότι $f(x)\ge ln2, \ \forall x\ge 1$.

7B9. Δείξτε ότι: $\frac{1}{2}\le(\nu+1)\int_0^1\frac{x^\nu}{1+x^2}dx\le 1 \ (\nu\in N^*)$

7B10. Έστω $f_\nu(x)=\int_0^1 s^\nu \eta\mu(x\cdot s)ds \ x>0 \ , \ \nu\in N^*$.

α) Να δείξετε ότι : $f_\nu(x)=\frac{1}{x^{\nu+1}}\int_0^x t^\nu \eta\mu t dt$.

β) Αν $g(x)=\begin{cases} f_\nu(x), x>0 \\ 0 \quad ,x=0 \end{cases}$ τότε δείξτε ότι g συνεχής.

γ) Δείξτε ότι: $g'(0^+)=\frac{1}{2+\nu}$.

δ) Δείξτε ότι: $xg'(x)+(\nu+1)g(x)=\eta\mu x$.

7B11. Έστω $f: (0,+\infty)\to(0,+\infty)$ παραγωγίσιμη ώστε

$f'(x)+2xf(x)=0 \ , \ f(1)=1$

α)Να δείξετε ότι $f'(x)$ είναι συνεχής και να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$.

β) Να δείξετε ότι $\frac{x-1}{2x^2} f(x) < \int_1^x \frac{f(t)}{2t^2} dt < \frac{x-1}{2} \quad \forall x \in (1,+\infty)$

γ) Να βρείτε τον τύπο της $F(x) = \int_1^x (1+\frac{1}{2t^2}) f(t) dt \ , \ x > 1$

δ) Να δείξετε ότι $2e\int_1^x e^{-t^2} dt < 1$, $\forall x > 1$

7B12. Αν η συνεχής συνάρτηση *f* στρέφει τα κοίλα άνω στο *[α,β]* δείξτε ότι:

α) $f(x) \le \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} f(\beta) + \frac{x-\beta}{\alpha-\beta} f(\alpha)$

και $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \le \frac{1}{2}\{f(x) + f(a+\beta-x)\}$

β) $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \le \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)dx \le \frac{1}{2}(f(\alpha) + f(\beta))$.

7B13. Αν *f: R→R* συνεχής , γνήσια αύξουσα και

$g(x) = \int_k^x f(t)dt$ τότε να δείξετε ότι για κάθε

$m \in [0,1]$ ισχύει $g(ma+(1-m)b) \le mg(a)+(1-m)g(b)$

7B14. Έστω *f* παραγωγίσιμη και *f(0)=0, f(1)=1* τότε

$\int_0^1 |f'(x) - f(x)|dx \ge \frac{1}{e}$.

7B15. Έστω *f ΄(x)>0, f ΄* αύξουσα και *f(0)=0* δείξτε

ότι: $f'(x) \ge f(x), x \in [0,1]$, $\int_0^1 f(x)dx \le f(1)$.

7B16. Έστω *f* αύξουσα και συνεχής, $\alpha \in [0,1]$ τότε δείξτε ότι:

$\int_0^\alpha f(x)dx \le \alpha\int_0^1 f(x)dx$.

7Β17. Έστω *f* συνεχής στο *[α,β]*. Ονομάζουμε με $I_f = \int_\alpha^\beta \left(f^2(x) - 2xf(x)\right)dx$. Βρείτε την ελάχιστη τιμή του I_f καθώς και την αντίστοιχη f που ελαχιστοποιεί το I_f.

7Β18. Έστω *f* παραγωγίσιμη κυρτή και $\uparrow$, *f(α)=0, f(β)=1*. Δείξτε ότι:

α) $f(x) \le 1 + (x-\beta)f'(x) \quad \forall x \in [\alpha,\beta]$,

β) $f^2(x) \le f(x) + \frac{1}{2}(x-\beta)\left(f^2(x)\right)'$,

γ) $\int_\alpha^\beta f^2(x)dx \le \frac{2}{3}\int_\alpha^\beta f(x)dx$.

7Β19. Έστω f ΄αύξουσα και συνεχής δείξτε ότι:

$f(x) \le f(-1) + (x+1)f'(x) \quad \forall x \in [-1,1]$,

$\int_{-1}^1 f(x)dx \le f(-1) + f(1)$.

7Β20. Αν *f, g* συνεχείς συναρτήσεις ώστε $f(x)g(y)>1 \quad \forall x,y \in R$ τότε δείξτε ότι: $\int_\alpha^\beta f(t)dt \cdot \int_\alpha^\beta g(t)dt \ge (\beta-\alpha)^2$.

7Β21. Αν $f\uparrow$ και συνεχής στο *[α,β]* τότε να δείξτε ότι $\forall x \in (\alpha,\beta)$ ισχύει: $\frac{1}{x-\alpha}\int_\alpha^x f(t)dt \le \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(t)dt \le \frac{1}{\beta-x}\int_x^\beta f(t)dt$.

7Β22. Έστω $f' \uparrow$ στο *[-1,1]*. Να δείξετε ότι:

$\frac{1}{2}\int_{-1}^1 f(x)dx \le f(-1) + f'(1)$.

Το θεώρημα μέσης τιμής για παραγώγους και μια γεωμετρική παρατήρηση δίνει μεγάλη βοήθεια για την λύση της προηγούμενης άσκησης.

7Β23. Έστω $f(x)>0$, f συνεχής και $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{f(x)}<\beta-\alpha$ τότε $\exists\,\xi$: $f(\xi)>1$.

Γ ΟΜΑΔΑ

7Γ1. *Έστω* $f(x)>0$, f φθίνουσα συνεχής και $I_{\nu}=\int_{1}^{\nu}f(t)dt$.

Α) Δείξτε ότι $\int_{\nu}^{\nu+1}f(t)dt\le f(\nu)\le\int_{\nu-1}^{\nu}f(t)dt$ $(\nu\in N^{*})$.

Β) Αν $\alpha_{\nu}=f(1)+f(2)+\ldots+f(\nu)$ δείξτε ότι υπάρχουν αριθμοί c_1, c_2 ανεξάρτητοι του ν ώστε: $I_{\nu+1}-c_1<\alpha_{\nu}-c_2<I_{\nu}$.

Γ) Βρείτε το $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$, $n\in N*$

7Γ2. *Η παρακάτω άσκηση αφορά μια από τις πιο διάσημες ανισότητες για τα ολοκληρώματα και θυμίζει εσωτερικό γινόμενο! Λέγεται ανίσωση* ***Bouniakofski-Cauchy-Swartz*** *(B-C-S) και η αντίστοιχη ταυτότητα για αριθμούς είναι* $\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu}\alpha_k\beta_{\kappa}\right)^2\le\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu}\alpha_{\nu}^2\right)\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu}\beta_{\nu}^2\right)$.

Έστω λοιπόν f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$. Θεωρείστε παρακάτω ότι $I_{\lambda}=\int_{\alpha}^{\beta}(\lambda f(x)-g(x))^2dx$ $\lambda\in R$. Διατυπώστε το I_{λ} ως τριώνυμο του λ και εξηγείστε γιατί $I(\lambda)\ge0$ $\forall\lambda\in R$. Συμπεραίνετε έτσι ότι:

$\left(\int_{\alpha}^{\beta}f(x)g(x)dx\right)^2\le\int_{\alpha}^{\beta}f^2(x)dx\cdot\int_{\alpha}^{\beta}g^2(x)dx$. Εξετάστε πότε ισχύει το «=» στην προηγούμενη. Αν θέλετε μπορείτε να

λύσετε την άσκηση και συναρτησιακά θέτοντας π.χ όπου β το x κ.ο.κ

Με την βοήθεια της ανισότητας Cauchy-Swartz (B-C-S) για τις 8 επόμενες ασκήσεις δείξτε ότι ισχύει :

7Γ3. $\int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx < \frac{\sqrt{5}}{2}$

7Γ4. Αν f' συνεχής στο $[0,+\infty)$ και $f(0)=0$ δείξτε ότι:

$\int_0^x |f'(x)|dx \geq \sqrt{|f(x)|}$.

7Γ5. Αν $f(1)-f(0)=1$, f' συνεχής τότε δείξτε ότι : $\int_0^1 (f'(x))^2 dx \geq 1$.

7Γ6. Αν $f(1)=0$, f' συνεχής τότε δείξτε ότι :

$\int_0^1 (f'(x))^2 dx \geq 3\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$.

7Γ7. Αν f συνεχής $\int_0^1 f(x)dx = 1$ τότε $\int_0^1 \frac{f^2(x)}{1+x^2}dx \geq \frac{3}{4}$.

7Γ8. Έστω f συνεχής , $f(x)\geq 0$ και $I_\nu = \int_0^1 f^\nu(x)dx$ τότε

$I_{\nu-1}^2 \leq I_\nu I_{\nu-2}$.

7Γ9. Δείξτε ότι :

$$\left(\int_\alpha^\beta f(x)\eta\mu x dx\right)^2 + \left(\int_\alpha^\beta f(x)\sigma\upsilon\nu x dx\right)^2 \leq (\beta-\alpha)\int_\alpha^\beta f^2(x)dx$$

όταν βέβαια η f είναι συνεχής.

7Γ10. Αν $f(x)\geq x$, f συνεχής τότε $\int_0^1 e^x f(x)dx \cdot \int_0^1 e^{-x} f(x)dx \geq \frac{1}{4}$.

7Γ11. Έστω $0<\beta<f(\alpha)$, $f(0)=0$, f γνήσια αύξουσα και παραγωγίσιμη.

Να δείξετε ότι: $\int_0^{\alpha} f(t)dt + \int_0^{\beta} f^{-1}(t)dt \geq \alpha\beta$.

7Γ12. Έστω $f,g:[a,b] \to R^+$ συνεχείς

ώστε $f(x) \leq A + \int_a^x f(t)g(t)dt, \forall x \in [a,b]$ με $A>0$ Δείξτε

ότι $f(x) \leq Ae^{\int_a^x g(t)dt}, \forall x \in [a,b]$

Δ ΟΜΑΔΑ

7Δ1. Να δείξετε ότι $\ln 2 < 7/10$

7Δ2. Έστω συνάρτηση $f: f''(x)=p(x)f(x)$, $p(x)>0$ και συνεχής στο R. Τότε αν η f έχει δυο ρίζες a, b δείξτε ότι : $f(x)=0$ $\forall x \in [a,b]$

Τώρα υποθέστε ότι : η f δεν είναι σταθερή σε κανένα διάστημα , $f(a)=0$, $x_0>a$, $f(x_0)>0$ και δείξτε ότι : $f(x)>0$ $\forall x \in (a,+\infty)$

Αν $f'(k).f(m)=f'(m).f(k)$ δείξτε ότι υπάρχει ξ με $k<\xi<m$:

$$\sqrt{p(\xi)} \geq \frac{\ln f(m) - \ln f(k)}{m-k}$$

7Δ3. Έστω $f: R \to R$ συνεχής και κυρτή. Δείξτε ότι

$$f(1/2) \leq 12\int_0^1 t^2 f(t)dt - 6\int_0^1 tf\left(\frac{1+t}{2}\right)dt \quad [1]$$

7Δ4. Αν f' συνεχής στο $[0,1]$ και $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$ να δειχθεί ότι

$$\int_0^1 (f'(t))^2 dt \geq 12\left(\int_0^1 f(t)dt\right)^2$$

7Δ5. Αν f συνεχής και $f(x-1)+f(x+1)\geq x+f(x)$,$\forall x\in R$ ποια η ελάχιστη τιμή του $\int_0^{2005} f(x)dx$ και για ποια συνάρτηση f συμβαίνει αυτό?

7Δ6. Αν $f'(x)$ συνεχής στο $[0,1]$ και $\int_0^1 f(t)dt=0$ να δείξετε ότι

$$\left|\int_0^x f(t)dt\right|\leq \frac{1}{8}\max_{x\in[0,1]}\left|f'(x)\right| \text{ , } \forall x\in[0,1]$$

Την έχετε ξαναδεί σε άλλη μορφή

7Δ7. Έστω $f:(a,b)\to R$ συνεχής. Αν

$f(x)\leq \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x+t)dt$ για κάθε διάστημα

$[x-h,x+h]\subset(a,b)\Leftrightarrow f$ κυρτή

8 ΟΡΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

Α ΟΜΑΔΑ

8Α1. Υπολογίστε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{x+1}^{x+2}\frac{e^t}{t}dt$.

8Α2. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{x}^{x+1}\frac{t^2}{e^t}dt=0$.

8Α3. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lambda\in R$, $\alpha>0$ και f συνεχής δείξτε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{x}^{x+\alpha} f(t)dt=\lambda\alpha .$$

8Α4. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lambda$ και f συνεχής υπολογίστε το:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_{x}^{2x} f(t)dt .$$

8Α5. Αν $g(x_0)=0$, $g'(x)$, $g'(x_0)\neq 0$, f συνεχής υπολογίστε το

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\int_{x_0}^{x} f(t)dt}{g(x)}$$

8Α6. Υπολογίστε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \frac{e^t}{1+t}dt}{x}$.

8Α7. Υπολογίστε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \varepsilon\varphi^4 t dt}{x^5}$.

8Α8. Υπολογίστε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\int_1^x \frac{\ln t}{1+\ln^2 t}dt}{(x-1)^2}$.

8Α9. Υπολογίστε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi x\int_0^x \frac{\eta\mu t}{1+t}dt}{x^3}$.

8Α10. Αν $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu x}{x}, x\neq 0\\ 1\ ,\ x=0\end{cases}$ να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο R

και κατόπιν να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x^3}$

8Α11. Αν $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x-1}, 0<x\neq 1\\ 1\ ,\ x=0\end{cases}$ να δείξετε ότι η f είναι συνεχής

στο R και κατόπιν αν υπάρχει να υπολογίσετε το

$$\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^x f(t)dt}{\ln^3 x}$$

8Α12. Να υπολογίσετε το : $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\dfrac{1}{\sqrt{1+2t^2}}dt$

8Α13. Να υπολογίσετε το: $\lim\limits_{x\to+\infty}\int\limits_{x}^{x+2}\frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}}dt$

8Α14. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\int\limits_{x}^{x+2}\frac{ln(1+t)}{\ln t}dt$

8Α15. Να υπολογίσετε το : $\lim\limits_{x\to+\infty}\int\limits_{x}^{x+4}\frac{1}{\sqrt{1+t+t^2}}dt$

8Α16. Να υπολογίσετε το : $\lim\limits_{x\to+\infty}\int\limits_{1}^{x}\frac{e^t}{t}dt$ αφού πρώτα μελετήσετε την μονοτονία της $f(x)=\frac{e^x}{x}$, $x>0$

8Α17. Να υπολογίσετε το : $\lim\limits_{x\to+\infty}\int\limits_{x}^{2x}\frac{1}{(\ln t)^2}dt$ αφού πρώτα μελετήσετε την μονοτονία της $f(x)=\frac{1}{\ln^2 x}$, $x>1$

8Α18. Να υπολογίσετε το : $\lim\limits_{x\to+\infty}\int\limits_{x}^{2x}\frac{\ln t}{1+t}dt$ αφού πρώτα μελετήσετε την μονοτονία της $f(x)=\frac{\ln x}{1+x}$, $x>0$

8Α19. Αν $g(x)=\int_0^1 f(tx)dt$ όπου f συνεχής να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

8Α20. Να υπολογίσετε το : $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{x}^{2x}\frac{1}{1+t^2}dt$ αφού πρώτα μελετήσετε την μονοτονία της $f(t)=\frac{1}{1+t^2}$ Κατόπιν να υπολογίσετε και το $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int_{x}^{2x}\frac{x}{1+t^2}dt}{lnx}$

Β ΟΜΑΔΑ

8Β1. Υπολογίστε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x e^{t^2}dt$ και κατόπιν το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}+x^2}$.

8Β2. Να υπολογίσετε το: $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x\sqrt{1+t^3}dt\,,x>0$ και κατόπιν το $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-x}\int_0^x\sqrt{1+t^3}dt)$

8Β3. Να υπολογίσετε το: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left\{x^3e^{-3x}\int_0^x e^{2t}\sqrt{1+3t^2}dt\right\}$.

8Β4. Να υπολογίσετε το: $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_2^x\frac{1}{lnt}dt$ *(x≥2).*

8Β5. Έστω *f* συνεχής στο *[0,α]*. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to0^+}\left\{x^3\int_x^\alpha\frac{|f(t)|}{t^2}dt\right\}$

8Β6. Αν $|f'(x)|\le\frac{1}{1+x^2}$ $\forall x\in R$ και *f(0)=0* , *f΄* συνεχής. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

8Β7. Έστω $f:\ f'(x)=\dfrac{1}{x^2+f^2(x)}$ $\forall x\in R$ και $f(1)=1$. Να δείξετε ότι για $x\geq 1$ ισχύει $f(x)\geq 1$ και στην συνέχεια θέτοντας $u=\varepsilon\varphi x$ δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)<1+\dfrac{\pi}{4}$.

8Β8. Να υπολογίσετε το : $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^1 e^{(x-t)^2}dt$ αφού πρώτα μελετήσετε την μονοτονία της $f(x)=e^{x^2}$

8Β9. Έστω $g(x)=\int_{\alpha-x}^{\alpha+x} f(t)dt$ όπου f συνεχής στο R.

Αν f παραγωγίσιμη στο α, να υπολογίσετε το

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2 f(a)-\int_0^x g(t)dt}{x^3}$$

8Β10. Να υπολογίσετε το : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\int_1^x f(t)dt}{(x-1)^2}$ αν είναι γνωστό ότι η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και ότι

$2\ell nx\leq f(x)\leq 2(x-1)$, $\forall x\in(0,+\infty)$

8Β11. Έστω $f:(0,+\infty)\to R$ συνεχής και ισχύει :

$lnx\leq f(x)\leq x-1$, $\forall x>0$. Δείξτε ότι

α) $f'(1)=1$

β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\int_1^x f(t)dt+x^2+1-2e^{x-1}}{(x-1)^2}=1$

γ) Η εξίσωση $1+\int_1^x f(t)dt=lnx+\dfrac{x^2}{2}$ έχει μοναδική λύση στο $(1,e)$

8Β12. α)Δείξτε ότι $e^t > t \ \forall t \in R$

β) Είναι $f'(x) = e^{x^2}$ Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

γ) Βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{xf(x)}{e^{x^2}}$

δ)Βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} (x\int_0^x e^{t^2-x^2}dt + \dfrac{xf(0)}{e^{x^2}})$ *

8Β13. Αν f συνεχής στο R, γνήσια αύξουσα

και $\exists x_0 : f(x_0) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt = +\infty$

Γ ΟΜΑΔΑ

8Γ1. Έστω $f(x) = \int_x^{x^2} \dfrac{dt}{\ln t}$ $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$.

α) Μελετήστε την f ως προς την μονοτονία.

β) Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to1}\left\{ f(x) - \int_x^{x^2} \dfrac{dt}{t-1} \right\} = 0$ και $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \ln 2$.

γ) Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to0_1^+}\left\{ f(x) - \int_x^{x^2} \dfrac{dt}{t\ln t} \right\} = 0$ και βρείτε το

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$.

δ) Αν $g(x) = \begin{cases} f(x) & x > 0.x \neq 1 \\ \ln 2 & x = 1 \end{cases}$ εξετάστε αν υπάρχει η $g'(1)$.

8Γ2. $f(x) = \begin{cases} \int_\pi^{2\pi} \dfrac{\eta\mu\left(\frac{xt}{\pi}\right)}{t}dt, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Δείξτε ότι f συνεχής, παραγωγίσιμη.

8Γ3. Έστω f συνεχής στο R και $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt = A\in R$ τότε αν το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ υπάρχει δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

Δ ΟΜΑΔΑ

8Δ1. Να δειχθεί ότι η $f(x)=\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο R και $f'(x)=-2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$. Κατόπιν να δειχθεί ότι η συνάρτηση g με $g(x)=\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2+f(x)$ είναι σταθερή και έτσι να δείξετε ότι το $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(Το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι διάσημο και η άσκηση αυτή δίνει έναν τρόπο υπολογισμού με λυκειακή ύλη!!!)

8Δ2. α)Αν $f(x)=\int_a^b e^{xg(t)}dt, \forall x\in R$ όπου g μη αρνητική γνήσια μονότονη και συνεχής στο [a,b], η οποία έχει μέγιστο θετικό A ,να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

β)Αν είναι γνωστό ότι : $f'(x)=\int_a^b g(t)e^{xg(t)}dt$ να δείξετε ότι : $f'(x)\le Af(x), \forall x\in R$ Δείξτε ότι : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}=A$ Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(f(x))}{x}$

(Η άσκηση αυτή αποτελείται από δυο τμήματα και είναι μια πραγματικά δύσκολη άσκηση)

9 ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ

Α ΟΜΑΔΑ

Βρείτε μια αναδρομική σχέση για τα

9Α1. $I_\nu = \int_0^1 x^\nu e^x dx \;\; \nu \in N$.

9Α2. $I_\nu = \int_0^1 x^\nu e^{-x} dx \;\; \nu \in N$

9Α3. $I_\nu = \int_1^e (\ell nx)^\nu dx \;\; \nu \in N,$

(και δείξτε ότι: $I_\nu = (-1)^\nu \cdot \nu! \left\{ e \sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{(-1)^\kappa}{\kappa!} + e - 1 \right\}$).

9Α4. $I_\nu = \int_1^e t(\ell nt)^\nu dt \;\; \nu \in N$

9Α5. $\alpha > 0$ και $I_\nu = \int_0^1 x^\nu e^{\alpha x} dx \;\; (\nu \in N),$

9Α6. $I_\nu = \int_1^2 \frac{e^x}{x^\nu} dx \;\; \nu \in N^*$

Β ΟΜΑΔΑ

9Β1. Βρείτε μια αναδρομική σχέση για το

$$I_\nu = \int_0^1 \frac{1}{\left(1+x^2\right)^\nu} dx \; (\nu \in N^*).$$

9Β2. Έστω $I_\nu = \int_0^{\pi/4} \varepsilon\phi^\nu x dx \;\; (\nu \in N^* - \{1\})$: δείξτε ότι

α) $I_{\nu+1} < I_\nu$

β) $I_{\nu+1} + I_{\nu-1} = \frac{1}{\nu}$

γ) $\frac{1}{\nu+1} < 2I_\nu < \frac{1}{\nu-1}$.

9Β3. Υπολογίστε το $I_\nu = \int_0^1 \frac{x^\nu}{\left(1+x^2\right)} dx$.

9Β4. Βρείτε μια αναδρομική σχέση για το

$I_\nu = \int \sigma\upsilon\nu(\nu t)dt \ , \ \nu \in N^*$.

9Β5. Έστω $I_\nu(x) = \int_0^x \eta\mu^\nu(t)dt$ $(\nu \in N)$.

α) Βρείτε αναδρομικούς τύπους για τα $I_\nu(x)$, $I_\nu(\pi/2)$.

β) Υπολογίστε τα $I_{2\nu-1}(\pi/2)$, $I_{2\nu}(\pi/2)$ ως συνάρτηση του ν.

(Γινόμενα Wallis)

γ) Δείξτε ότι $(\nu+1)\cdot I_\nu(\pi/2)\cdot I_{\nu+1}(\pi/2) = \pi/2$.

δ) Έστω g η συνάρτηση με τύπο

$g(\alpha) = (\alpha+1)I_\alpha(\pi/2)I_{\alpha+1}(\pi/2)$ $\alpha>0$. Δείξτε ότι είναι περιοδική.

9Β6. Έστω $I_\nu = \int_0^1 \left(1-x^2\right)^\nu dx$ $\nu \in N$, βρείτε αναδρομικό τύπο για το I_ν και δείξτε ότι $0 \le I_{\nu+1} \le I_\nu$.

9Β7. $I_\nu = \int_0^1 x^\nu \sqrt{1-x^2}\, dx \Rightarrow (2\nu+3)I_\nu = 2\nu \cdot I_{\nu-1}$.

Γ ΟΜΑΔΑ

9Γ1. Έστω $I_{\mu,\nu} = \int_0^1 x^\mu (1-x)^\nu dx$ $\mu,\nu \in N^*$. Δείξτε ότι:

α) $I_{\mu,\nu} = I_{\nu,\mu}$

β) $I_{\mu+1,\nu} = \frac{\mu+1}{\nu+1} I_{\mu,\nu+1}$

γ) $I_{\mu,\nu+1} + I_{\mu+1,\nu} = I_{\mu,\nu}$

δ) $I_{\mu,\nu+1}=\dfrac{\nu+1}{\mu+\nu+2}I_{\mu,\nu}$

ε) υπολογίστε το $I_{\mu,0}$ και δείξτε ότι

$$I_{\mu,\nu}=\frac{\nu!}{(\mu+1)(\mu+2)...(\mu+\nu+1)}.$$

(Το προηγούμενο ολοκλήρωμα έχει άμεση σχέση με μια διάσημη συνάρτηση που ονομάζεται «Βήτα».)

10 ΑΠΟΛΥΤΑ-ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ

Α ΟΜΑΔΑ

Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα.

10Α1. $\int_{-3}^{3}\left|x^3-3x+2\right|dx$

10Α2. $\int_{-1}^{1}|x|(x-3)dx$

10Α3. $\int_{-1}^{1}(|x|+|x^2-x|)dx$

10Α4. $\int_{0}^{x}(t+|t|)dt$

10Α5. $\int_{0}^{x}(|t-1|+|t-2|+...+|t-\nu|)dt$

10Α6. $\int_{1/2}^{2}|2x-2+\ell nx|dx$

10Α7. $\int_{0}^{3}|3^x+4^x-5^x|dx$

10Α8. $\int_{-4}^{4}|x^2-\sigma\upsilon\nu(\pi x)-2|dx$

Μέση τιμή ενός μεγέθους y στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ όπου $y=f(t)$,

F συνεχής συνάρτηση, **ορίζουμε το** $\overline{y}=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$ και **ενεργό**

τιμή του y ορίζουμε το $y_{\varepsilon\nu}=\sqrt{\left(\overline{y^2}\right)}$. Βρείτε το $\overline{y}$ και $y_{\varepsilon\nu}$ των

παρακάτω συναρτήσεων $y=f(x)$.

(Η ενεργός τιμή συμβολίζεται και με $y_{R.M.S}$*)*

10Α9. $f(t)=\alpha$ στο $[0,2\pi]$

10Α10. $f(t)=\alpha\eta\mu\frac{2\pi t}{T}$ στο $[0,T]$ α , T σταθερές $\in R_+^*$

10Α11. $f(t)=\beta+\alpha\eta\mu(\omega t+\varphi)$ στο $[0,\frac{2\pi}{\omega}]$ $\alpha, \beta, \omega, \varphi$ σταθερές $\in R_+^*$

10Α12. Δείξτε ότι $\overline{y_1+y_2}=\overline{y_1}+\overline{y_2}$, $\overline{\lambda y}=\lambda\overline{y}$ (λ σταθερά)

Β ΟΜΑΔΑ

10Β1. $\int_0^3 \frac{1}{|x-\alpha|+1}dx$

10Β2. Δείξτε ότι $y_{\varepsilon\nu}^2=\left(\overline{y^2}\right)\geq\left(\overline{y}\right)^2$ και βρείτε αν υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $y=f(t)$ για τις οποίες θα ισχύει: $\left(\overline{y^2}\right)=\left(\overline{y}\right)^2$.

Κατόπιν να συγκρίνετε τα $\left(\overline{\frac{1}{y}}\right)$ και $\left(\frac{1}{\overline{y}}\right)$ όπου $y=f(t)>0$ στο $[0,T]$.

11 ΕΜΒΑΔΑ

Α ΟΜΑΔΑ

Χωρίς να είναι απαραίτητο ένα σχήμα μπορεί να σας βοηθήσει.

Χρειάζονται λίγες γνώσεις αναλυτικής γεωμετρίας καθώς και προσοχή στις πράξεις σας όταν λύνετε εξισώσεις. Να υπολογίσετε λοιπόν τα εμβαδά των χωρίων του επιπέδου που περικλείονται από τις καμπύλες με εξισώσεις:

11Α1. $2y=x^2,\ x^2+y^2=8$

11Α2. $y^2=2x+1,\ x-y-1=0$

11Α3. $y^2=6x,\ x^2+y^2=16$

11Α4. $y=2x^2e^x,\ y=-x^3e^x$

11Α5. $y=\ell nx,\ y=\ell n^2x$

11Α6. $y=\dfrac{\ell nx}{4x},\ y=x\ell nx$

11Α7. $2|x|+|y|=2$

11Α8. $y=x^3,\ y=x$

Στις παρακάτω ασκήσεις να υπολογίσετε το εμβαδόν που περικλείεται από την C_f τις ευθείες $x=\alpha,\ x=\beta$ και τον άξονα xx΄ όταν:

11Α9. $f(x)=x^2-1\ \alpha=-2,\ \beta=2$

11Α10. $f(x)=\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu 2x\ \ \alpha=0,\ \beta=\dfrac{5\pi}{3}$

11Α11. $f(x)=\dfrac{2\ell nx-1}{x^2}\ \ a=1/2,\ \beta=2$

11Α12. $f(x)= x+\dfrac{4}{(1+x)^2}$ $a=-\lambda, \beta=\lambda, 0<\lambda<1$

11Α13. $f(x)=\dfrac{\ell nx}{x}$ $a=\dfrac{1}{e}, \beta=e$

11Α14. $f(x)=\dfrac{2x^2}{x-1}$ $a=2, \beta=4$

11Α15. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+\lambda^2}}$ $a=-1, \beta=\lambda>0$

11Α16. $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}$ $a=0, \beta=\lambda>0$

11Α17. $f(x)=5|x|-x^2$ $a=-1, \beta=1$

11Α18. $f(x)=x-e\ell nx$ $a=1, \beta=e$

11Α19. $f(x)=\dfrac{2x-\ell nx}{2\sqrt{x}}$ $a=1, \beta=2$

11Α20. Να βρείτε ευθεία που διέρχεται από το $(0,0)$ και χωρίζει σε 2 ισεμβαδικά χωρία το εμβαδόν που περικλείεται από την $y=x-x^2$ και τον άξονα xx'.

11Α21. Να βρείτε ευθεία που διέρχεται από το $(\alpha,0)$ και χωρίζει σε δυο ισεμβαδικά χωρία το χωρίο που περικλείεται από τον άξονα x και την γραφική παράσταση της $f(x)=(x-a)(x-b), 0<a<b$

11Α22. Να βρείτε ευθεία της μορφής $x=x_0$ ώστε τα εμβαδά που περικλείονται από τις: $y=x^5$, $y=f(2)$, $x=x_0$ και $y=x^5$, $x=x_0>0$, $y=f(1)$ να είναι ίσα.

11Α23. Βρείτε το εμβαδόν που περικλείεται από την C_f:

$f(x)=e^{-x}(x^2+3x+1)+e^2$ και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ όπου στο α,β η f παρουσιάζει ακρότατα.

11Α24. Βρείτε το εμβαδόν που περικλείεται από την C_f: $f(x)=(1-x)e^{4x}$ και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ όπου στο α η f παρουσιάζει ακρότατο και στο β καμπή.

11Α25. Βρείτε το εμβαδόν που περικλείεται από την C_f: $f(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$ και τις ευθείες $y=f(\alpha)$, $f=f(\beta)$ όπου στο α η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $[0,2\pi]$ και στο β η f παρουσιάζει μέγιστο στο $[0,2\pi]$.

Βρείτε το εμβαδόν (ως κάποιο όριο ή αν χρειαστεί και ως δύο όρια) που περικλείεται μεταξύ της C_f και της ή των ασύμπτωτων της. Αν μπορείτε κάντε ένα σχεδιάγραμμα θα βοηθήσει κατά πολύ την διασαφήνιση του τι ακριβώς ζητείται , όπου C_f είναι:

11Α26. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}, x\geq 1$

11Α27. $f(x)=xe^{-x^2/2}$

11Α28. $f(x)=\sqrt{\dfrac{8-4x}{x}}$

Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τις εφαπτόμενες της στα α, β στις παρακάτω περιπτώσεις:

11Α29. $f(x)=-x^2+4x-3$, $\alpha=3$, $\beta=0$

11Α30. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$, $\alpha=-3\sqrt{3}$, $\beta=3\sqrt{3}$

11Α31. $f(x)=\eta\mu(2x)$ $x\in[0,\pi/2]$, $\alpha=0$, $\beta=\pi/2$

11Α32. Να υπολογίσετε το εμβαδόν που περικλείεται από την C_f: $f(x)=e^x$, την εφαπτομένη της C_f στο 0 και την $y=e^2$.

11Α33. Έστω $f(x)=\dfrac{3}{9x^2-3x-2}$ $x\geq 1$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, την εφαπτομένη της C_f στο 1 και τις ευθείες $x=1, x=2, y=0$.

Β ΟΜΑΔΑ

11Β1. $f(x)=\dfrac{1+x^2}{e^{1/x}}+\dfrac{1-x^3}{xe^{1/x}}$ $\alpha=1, \beta=e$

11Β2. Αν f παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ γνήσια φθίνουσα και θετική να βρείτε $x_0\in(a,b)$ ώστε το εμβαδό που περικλείεται από τις (ε): $y=f(x_0)$ την C_f και την $x=a$ συν το εμβαδό που ορίζεται από την (ε) την C_f και την $x=b$ να είναι ελάχιστο

11Β3. Έστω $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha<0$ και ρίζες ρ_1, ρ_2: $\rho_1<\rho_2$. Αν m=το μέγιστο της y και E το εμβαδόν που περικλείεται από την C_y και τον άξονα xx' δείξτε ότι: $3E=2m(\rho_1-\rho_2)$.

11Β4. Έστω $f(x)=x^\alpha$, $x>0$, $0<\alpha<1$ και η εφαπτόμενη ε της C_f στο $x_0>0$. Να δείξετε ότι το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από την C_f, την ε και τον yy' είναι

$$E=\frac{\alpha(1-\alpha)}{2(1+\alpha)}x_0\cdot f(x_0).$$

11Β5. Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $y=\ell nx$, $y=-\dfrac{1}{ex}$ και την $x=1$. *

11Β6. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+\varepsilon\phi^5 x}, x\in[0,\dfrac{\pi}{2})\\ a \quad , \quad x=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

α)$\alpha=?$ ώστε f συνεχής στο $[0,\pi/2]$.

β) Δείξτε ότι: $f(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu^5 x}{\sigma\upsilon\nu^5 x+\eta\mu^5 x} \quad \forall x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$

γ) Υπολογίστε $\int_0^{\pi/2} f(x)dx$.

δ) Βρείτε το εμβαδόν που περικλείεται από την C_f, και τους άξονες

11Β7. Βρείτε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από $x=0$, $x=\pi/2$ *και* C_f: $f(x)=\dfrac{1}{1+\eta\mu x}$.

11Β8. Από ένα σημείο Μ της παραβολής $y=x^2$ φέρνουμε κάθετη στην εφαπτομένη της παραβολής που επανατέμνει την παραβολή στο Ν. Να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή του εμβαδού του παραβολικού χωρίου που ορίζεται από τα Μ, Ν, και Ο.

11Β9. Αν $f(0)=0$ $f(1)=1$, f γνήσια αύξουσα, $x\in[0,+\infty)$, παραγωγίσιμη ώστε το εμβαδόν που περικλείεται από C_f, $x=x_0$,xx' να είναι το $1/3$ του εμβαδού που περικλείεται από C_f, yy' και $y=f(x_0)$ βρείτε τον τύπο της f.

11Β10. Αν f κοίλη $f(1)=1$, $f(x)>0$ $\forall x\in(0,+\infty)$ και f συνεχής στο $[0,+\infty)$,με $f(0)=0$ τότε να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης όταν: Το εμβαδόν που περικλείεται από την C_f και οποιαδήποτε χορδή της OA, όπου O η αρχή των αξόνων είναι πάντοτε το ένα τέταρτο του εμβαδού που ορίζεται από

την C_f , τον $x'x$ και την κατακόρυφη ευθεία από το A. (Η OA παραμένει πάντοτε κάτω από την C_f).

11B11. Από σημείο A της C_f , φέρνουμε εφαπτομένη που κόβει τον $x'x$ στο B. Αν Γ είναι η προβολή του A στον $x'x$ και το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι διπλάσιο από το εμβαδόν που ορίζεται από την C_f, τον $x'x$ και την ευθεία AB, τότε να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης όταν:
$f(0)=0$, $f'(x)>0$, $f''(x)>0$ στο $[0,+\infty)$

11B12. Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού που περικλείεται από την C_f τον άξονα $y'y$ και οποιαδήποτε τμήμα OA, όπου O η αρχή των αξόνων, είναι σταθερός $2\tau\mu/sec$ όταν η τετμημένη του A κινείται με σταθερή ταχύτητα $4\mu/sec$, τότε να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης όταν: $f(0)=1$, $f(1)=2$, $f(x)\geq 0$ στο $[0,+\infty)$ και η OA παραμένει πάντα κάτω από την C_f.

12 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Α ΟΜΑΔΑ

12A1. Ένα κινητό κινείται ευθύγραμμα με επιτάχυνση $a(t)$ όπου

$$a(t)=\begin{cases} 2-6t & ,0\leq t\leq 2 \\ -12+t & ,2\leq t\leq 12 \\ 0 & ,12\leq t \end{cases}$$. Αν αρχικά ($t=0$) η ταχύτητα του κινητού ήταν 0 και η μετατόπισή του από την αρχή του άξονα επίσης 0, βρείτε τους τύπους που δίνουν την ταχύτητα, την μετατόπιση και το διάστημα.. Μονάδες S.I

12A2. Ένα μη γραμμικό ελατήριο έχει «σταθερά» κ που δίνεται από την σχέση $\kappa=3x^2+5\ Nt/m$, όπου x είναι η συσπείρωση από το φυσικό μήκος. Να υπολογίσετε το έργο που πρέπει να του

προσφέρουμε ώστε να συσπειρωθεί α)από *0* έως *0,2m* και β)από *0,2m* έως *0,4m*.

12Α3. Σε μια ευθύγραμμη κίνηση η επιτάχυνση a και η ταχύτητα υ συνδέονται μέσω της σχέσης $a=k-\beta\upsilon$ όπου k , β θετικές σταθερές. Αν η αρχική ταχύτητα του κινητού ήταν υ_0, t η διάρκεια κίνησης και x η μετατόπιση του να δείξετε ότι: $\upsilon(t)=\upsilon_0+kt-\beta x(t)$.

12Α4. Η ροπή M ενός κινητήρα είναι ανάλογη της ρίζας των στροφών N όταν $0\le N\le N_0$. με σταθερά αναλογίας λ. Σε αυτή την περιοχή στροφών οι στροφές είναι ανάλογες της παροχής καύσιμου Π *Kg/sec*. Βρείτε το έργο που καταναλώνει ο κινητήρας με σταθερή παροχή για να φθάσει τις N_0 στροφές. (Ισχύς = ροπή x γωνιακή ταχύτητα)

Β ΟΜΑΔΑ

12Β1. Σε μια ευθύγραμμη κίνηση η συνισταμένη δύναμη F αντιτίθεται στην ταχύτητα και είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας. Αν η μάζα του κινητού είναι $m=1Kgr$, η αρχική ταχύτητα $\upsilon_0=20m/sec$ και αρχικά η τιμή της F είναι $F_0=40Nt$, να βρείτε το διάστημα που θα έχει διανύσει το κινητό όταν η ταχύτητα γίνει η μισή της αρχικής. (Να δείξετε πρώτα ότι ισχύει $a=-\upsilon\dfrac{d\upsilon}{dx}$ και να διατυπώσετε κατάλληλη εξίσωση)

12Β2. Σε ένα οριζόντιο επίπεδο που παρουσιάζει συντελεστή τριβής n σέρνουμε ένα παγάκι με σταθερή ταχύτητα υ_0 που λιώνει γιατί όλη η θερμότητα που αναπτύσσεται λόγω του έργου

τριβής μεταδίδεται στο παγάκι με σταθερή θερμοκρασία Αν η αρχική μάζα του πάγου είναι m_0 δείξτε ότι μετά από χρόνο t και πριν λιώσει ολόκληρο, η μάζα του θα δίνεται από τον τύπο $m=m_0e^{-\kappa t}$, όπου κ μια σταθερά. ($Q_{\theta\varepsilon\rho\mu\iota\kappa\acute{o}}=m\cdot c\cdot\Delta\theta$)

12Β3. Ένα ημισφαίριο είναι γεμάτο νερό και η οριζόντια βάση του βρίσκεται στο άνω μέρος. Ανοίγουμε μια τρύπα στο κατώτατο σημείο εμβαδού S_0. Η ταχύτητα εκροής υ είναι: $\upsilon=\sqrt{2gh}$ όπου h η υπερκείμενη στήλη υγρού. Αν η ακτίνα του ημισφαιρίου είναι R_0 βρείτε σε πόσο χρόνο θα αδειάσει το ημισφαίριο.

12Β4. Στην ειδική σχετικότητα ορίζεται η ορμή J ενός κινούμενου σωματιδίου ως $J=m\upsilon$ όπου υ η ταχύτητα του και $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$, m_0=μάζα ηρεμίας και c η ταχύτητα του φωτός. Η δύναμη F ορίζεται από την σχέση $F=\dfrac{dJ}{dt}$, και έργο της F, πάντα για μονοδιάστατη κίνηση, το $W=\int_0^x F dx$. Δείξτε ότι από $\upsilon=0$ έως $\upsilon=\upsilon_0<c$ το έργο δίνεται από την σχέση: $W=\dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-\upsilon_0^2/c^2}}-m_0c^2$ (Μην ξεχνάτε τον κανόνα της αλυσίδας).

12Β5. Ένα κυλινδρικό σύρμα μάζας m, ειδικής θερμότητας c και αντίστασης R_0 στους 0^oC συνδέεται με πηγή σταθερής τάσης V_0. Ένα ποσοστό $\lambda\%$ της ενέργειας που προσφέρει η πηγή απορροφάται από το σύρμα και αυξάνει την θερμοκρασία του. Να βρείτε τον τύπο που συνδέει την θερμοκρασία του

σύρματος με τον χρόνο. Για $t=0$ θερμοκρασία σύρματος είναι θ_0.

Ε. ΓΕΝΙΚΕΣ

ΘΕΜΑΤΑ

ΜΕ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ

ΜΕ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

ΜΕ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΓΕΝΙΚΕΣ

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1

Έστω $g : A \to A = [-a,a]$, $a > 0$, $g(A) = A$ μια συνεχής συνάρτηση.

1. Να δείξετε ότι για κάθε $y \in A$ η εξίσωση $g(-x) = y$ έχει μία τουλάχιστον λύση.
2. Να δείξετε ότι υπάρχει x_0 στο A : $g(x_0)=x_0$
3. Να δείξετε ότι σύνολο τιμών της $g(-x)$ είναι το A
4. Θέτουμε $w(x)=g(x)+g(-x)$. Να δείξετε ότι w άρτια
5. Να δείξετε ότι η w δεν μπορεί να έχει σταθερό πρόσημο.
6. Να δείξετε ότι $w(A) \subseteq [-2a,2a]$ και βρείτε μια περίπτωση : $w(A) = [-2a,2a]$
7. Να βρείτε το MAX και το MIN της g.
8. Έστω τώρα και μία ακόμη συνεχής συνάρτηση $f : A \to A$ περιττή. Αν η g είναι γνήσια μονότονη στο A να βρείτε τις θέσεις στις οποίες η g παρουσιάζει τα ακρότατά της και να δείξετε ότι η εξίσωση $f(g(x))+g(x)+f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον λύση.
9. Να δείξετε και πάλι ότι η εξίσωση $f(g(x))+g(x)+f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον λύση χωρίς η g να είναι μονότονη.
10. Η εξίσωση $g(f(x))+f(x)=0$ έχει πάντοτε λύση ;

ΘΕΜΑ 2

Έστω ότι : $f(f(x)) + f(x) = x + c$ για κάθε x στο R , $f(R)=R$

1. Δείξτε ότι f : 1-1

2. Δείξτε ότι $f(c)=c$

3. Αν $f(a)=b$ δείξτε ότι : $f(b)=a-b+c$

Υποθέστε τώρα ότι f συνεχής

4. Δείξτε ότι f γνήσια μονότονη

5. Αν $a<b$ και $c<2b-a$ δείξτε ότι : f γνήσια φθίνουσα

6. Δείξτε ότι : $a<c$

ΘΕΜΑ 3

1. Να δείξετε ότι: $\frac{1}{1+x} < x^2 - x + 1 \quad , \quad \forall x > 0$

2. Να δείξετε ότι: $ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \quad , \forall x > 0$

3. Να δείξετε ότι:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1-x} < 1 + x + x^2 + 2x^3 \quad , \quad \forall x \in (0, \frac{1}{2})$$

4. Να δείξετε ότι: $-ln(1-x) < x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{2} \quad , \quad \forall x \in (0, \frac{1}{2})$

5. Να συμπεράνετε ότι: $ln(\frac{1+x}{1-x}) < 2(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}) \quad , \quad \forall x \in (0, \frac{1}{2})$

6. Να δείξετε ότι: $ln 2 < 0.7$

ΘΕΜΑ 4

1. Αν $f''(x)>0 \quad \forall x \in R$ τότε οποιαδήποτε «χορδή» ΑΒ της C_f βρίσκεται «επάνω» από το αντίστοιχο τμήμα της C_f .

2. Δείξτε ότι : $f(a+b-x)+f(x) \geq 2f(\frac{a+b}{2}) \quad \forall x \in [a,b]$

3. Δείξτε ότι : $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(a+b-t)dt$

4. Δείξτε ότι : $(b-a)f(\frac{a+b}{2}) \leq \int_a^b f(t)dt \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$

ΘΕΜΑ 5

Έστω ότι : $f(x)=e^{f'(x)} \quad \forall x \in [a,b] \quad , \quad f(a)=f(b)=1$

1. Δείξτε ότι : f δύο φορές παραγωγίσιμη.

2. Δείξτε ότι : $f'(x)=f(x)f''(x)$

3. Δείξτε ότι οποιαδήποτε συνάρτηση δυο φορές παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ δεν μπορεί να έχει ταυτόχρονα στο ίδιο σημείο ακρότατο και καμπή.

4. Βρείτε τον τύπο της f . (Δεχθείτε ότι αν η f είναι σταθερή σε $U(x_0,\delta) \cap [a,b]$ για οποιοδήποτε $x_0 \in [a,b]$ τότε η f είναι σταθερή στο $[a,b]$)

ΘΕΜΑ 6

Έστω $f : [1,+\infty) \to R$: $f(1)=3$, $x^4 f'(x)=f^2(x)$

1. Να δείξετε ότι η f είναι αύξουσα.

2. Να δείξετε ότι $f(x) \geq 3, \forall x \in [1,+\infty)$

3. Να βρείτε τον τύπο της f.

4. Αν Ω είναι το χωρίο που ορίζεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$, $x=3$ να βρεθεί ευθεία $x=m$ που να χωρίζει το Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία..

ΘΕΜΑ 7

Έστω συνάρτηση f ώστε να ισχύουν: $f(0)=f(4)=2-f(2)=0$ και επιπλέον είναι

$0 > f''(x) \geq -1 \ , \ \forall x \in [0,4]$

1. Να δείξετε ότι $f(x) > 0 \ , \ \forall x \in (0,4)$

2. Να δείξετε ότι $f'(0) \leq 2 \ \ , \ \ f'(4) \geq -2$

3. Αν $g(x) = \frac{1}{2} x(4-x)$ να δείξετε ότι $g(0)=g(4)=2-g(2)=0$, $g'(0)=2$, $g'(4)=-2$ και $g''(x)=-1$ στο $[0,4]$

4. Να θέσετε $h(x)=f(x)-g(x)$ και να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (0,2) \ \ , \ \ \xi_2 \in (2,4) : h'(\xi_1) = h'(\xi_2) = 0$

5. Να δείξετε ότι h' αύξουσα και έτσι δείξτε ότι $h'(x)=0$ στο $[\xi_1,\xi_2]$

6. Να δείξετε ότι και η $h(x)=0$ στο $[\xi_1,\xi_2]$

7. Να δείξετε ότι h φθίνουσα στο $[0, \xi_1]$ και αύξουσα στο $[\xi_2,4]$

8. Να δείξετε έτσι ότι η h είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της f.

ΘΕΜΑ 8

Έστω $f(x) = 2^{x+1} - x^2 - x - 2 \ , \ x \in R$

1. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$

2. Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία..

3. Να βρεθεί το πρόσημο της f.

4. Να γίνει η γραφική παράσταση των:

$g(x)=2^{x+1}$, $h(x)=x^2+x+2$, $x\in R$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

5. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις *g,h.*

ΘΕΜΑ 9

Έστω $f'(x)=\dfrac{2}{1+e^{f(x)}}$ $\forall x\in R$, $f'(0)=1$

1. Μελετείστε την μονοτονία της f.

2. Λύστε την εξίσωση $f(x)=0$

3. Δείξτε ότι η f στρέφει τα κοίλα κάτω και ότι στην γραφική παράσταση της f δεν υπάρχουν τρία συνευθειακά σημεία.

4. Δείξτε ότι η $y=x$ είναι εφαπτομένη της f στο σημείο 0

5. Δείξτε ότι $f(x)\le x$,$\forall x\in R$

6. Δείξτε ότι $f(x)+e^{f(x)}=2x+1$, $\forall x\in R$

7. Δείξτε ότι $f(x)<2x+1$, $\forall x\in R$

8. Βρείτε το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

9. Δείξτε ότι $f(x)\ge \ln(x+1)$, $\forall x>-1$

10. Βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

11. Βρείτε το σύνολο τιμών της f.

12. Δείξτε ότι η f δεν έχει κατακόρυφες ασυμπτώτους.

13. Βρείτε την ασύμπτωτο της f στο $-\infty$

14. Δείξτε ότι η f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτο στο $+\infty$

15. Δείξτε ότι $f(\dfrac{e}{2})=1$

16. Υπολογίστε το : $\int_0^{e/2} f(t)dt$ χρησιμοποιώντας την συμμετρία των f , f^{-1}

ΘΕΜΑ 10

Αν $f'(x) \le \frac{|x|}{1+|x|} \quad \forall x \in R$ τότε

1. Δείξτε ότι $f(x) \le x - ln(1+x) + f(0) \quad \forall x \ge 0$

2. Δείξτε ότι $f(x) \ge x + ln(1-x) + f(0) \quad \forall x \le 0$

3. Η εξίσωση $f(x)=x$ έχει μοναδική λύση

Αν τώρα η g' είναι συνεχής και

ισχύει $g'(x) \ge \frac{e^x}{1+e^x} + 4 \quad \forall x \in R$ Τότε

4. Υπολογίστε το $\int_0^x \frac{e^t}{1+e^t} dt$

5. Δείξτε ότι η g έχει μοναδική ρίζα

ΘΕΜΑ 11

1. Αν $f'(x)>0$, δείξτε ότι: $\int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha)$

2. Να δώσετε μια γεωμετρική ερμηνεία της προηγούμενης σχέσης.

3. Να υπολογίσετε το άθροισμα : $\int_1^e e^{t^2} dt + \int_e^{e^{e^2}} \sqrt{\ln t}\, dt$

4. Αν τώρα g είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση σε όλο το R και ισχύει $g^3(x)+g(x)+2=x$ σε όλο το R τότε να λύσετε την εξίσωση $g(x)=0$

5. Να δείξετε ότι $g^{-1}(x)=x^3+x+2$

6. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_2^4 g(t)dt$

ΘΕΜΑ 12

Έστω E_v συναρτήσεις που ορίζονται στο R από τις παρακάτω σχέσεις:

$$E_0(x)=1, E_{v+1}(x)=1+\int_0^x E_v(t)dt, v\in N$$

1. Να βρείτε τον τύπο όλων των E_v συναρτήσει των v , x
2. Να δείξετε ότι τα πολυώνυμα : $E_{v+1}(x)$, $E_v(x)$ δεν είναι δυνατόν να έχουν κοινή ρίζα..
3. Να δείξετε ότι υπάρχει ξ ώστε $E_{2v-1}(\xi)=0$ για κάθε v στο N.*
4. Να συμπεράνετε ότι $E_{2v}(\xi)>0$
5. Τώρα να δείξετε επαγωγικά ότι $E_{2v}(x)>0$ για κάθε v στο N και x στο R.
6. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $E_v(x)=0$ είναι αδύνατη αν v άρτιος ενώ έχει μοναδική λύση αν v περιττός.

ΘΕΜΑ 13

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ **:**

$$2f(x)+f^2(x)=2\int_0^x e^{-f(t)}dt \quad \text{και} \quad f(0)=0$$

1. Να δείξετε ότι : $1+f(x)\neq 0$, $f\uparrow$ και $f(x)>0 \quad \forall x\in(0,+\infty)$
2. Να δείξετε ότι $f(x)e^{f(x)}=x$ στο $[0,+\infty)$
3. Αφού δείξετε ότι $\ln y<y$, $\forall y>0$ δείξτε ότι $2f(x)>\ln x$, $\forall x>0$
4. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ καθώς και το σύνολο τιμών της f.
5. Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $y=x$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο 0.

6. Να δείξετε ότι η f στρέφει τα κοίλα κάτω και επιπλέον ισχύει $f(x) \le x, \forall x \ge 0$

7. Αφού εξηγήσετε γιατί η f είναι αντιστρέψιμη, να βρείτε τον τύπο της $f^{-1}(x)$.

8. Να κατασκευάσετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση της f.

9. Να υπολογίσετε τα: $f(e), f(e^{e+1})$.

10. Να βρείτε την τιμή του αθροίσματος: $\int_0^e f(t)dt + \int_0^1 f^{-1}(t)dt$

11. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου $E(\lambda)$ που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την εφαπτομένη της στο 0 και την ευθεία $x=\lambda\, e^{\lambda} > 0$ *

12. Να βρείτε το : $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} E(\lambda)$

ΘΕΜΑ 14

Έστω η συνάρτηση f με: $f(x) = \begin{cases} \int_0^x e^t dt, x \ge 0 \\ \int_0^x \frac{2+\eta\mu t}{t-1} dt, x < 0 \end{cases}$

1. Να μελετήσετε την f ως προς την συνέχεια και την παραγωγισιμότητα..

2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία .

3. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x), \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

4. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

5. Να δείξετε ότι για κάθε x στο R^* υπάρχει μοναδικό y στο R^* με $xy<0$: $f(x)=f(y)$.

ΘΕΜΑ 15

Εστω ότι f , g παραγωγίσιμες στο R και $\int_1^x f(t)dt + \int_x^1 g(t)dt = (x-1)^2 \quad \forall x \in R$

Επίσης ισχύει: $f(a) = f(b) = 0 \quad , \; a < 1 < b$

1. Δείξτε ότι η g έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (a,b).
2. Δείξτε ότι υπάρχει ξ στο $(a,b) : g'(\xi) = -2$
3. Αν επιπλέον η g είναι κυρτή δείξτε ότι και η f είναι κυρτή .
4. Δείξτε ακόμη ότι η f παρουσιάζει ένα μόνον ελάχιστο στο ξ.
5. Υπολογίστε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την C_f ,C_g και τον άξονα $y'y$.

ΘΕΜΑ 16

1. Αν $P(x)=a_n x^n+\ldots+a_1 x+a_0$, $n \in N$, $a_n \neq 0$ δείξτε ότι $P^{(n)}(x)=a_n n!$
2. Βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{P(x)}{e^x}$
3. Αν $P'(x)<P(x) \quad \forall x \in R$ και $f(x)=e^{-x}P(x)$ μελετήστε την μονοτονία της f.
4. Βρείτε το σύνολο τιμών της f.
5. Δείξτε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ δεν έχει καμία πραγματική ρίζα.
6. Αν ισχύουν όλα τα προηγούμενα εξετάστε αν υπάρχουν σταθερές a,b ώστε να ισχύει : $P(x) = a + \int_b^x (t^2+1)^k \, dt \quad \forall x \in R \; , \; k \in N^*$

ΘΕΜΑ 17

1. Να δειχθεί ότι $t-\ell nt\geq 1\ \ \forall t>0$

2. Έστω $f(x)=\int_{x}^{2x}\frac{1}{t-lnt}dt$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

3. Να μελετήσετε την μονοτονία της f

4. Να δείξετε ότι $0<f(x)\leq x$ για κάθε $x>0$

5. Να δείξετε ότι $ln2<f(x)$ για κάθε $x\geq 1$

6. Να δείξετε ότι η f δεν έχει κατακόρυφες ασυμπτώτους.

ΘΕΜΑ 18

Έστω $f(x)=\int_{x}^{2x}\frac{1}{1+t^2}dt$

1. Μελετήστε την f ως προς την μονοτονία .

2. Βρείτε τις θέσεις τοπικών ακροτάτων .

3. Βρείτε τις ρίζες της .

4. Η f έχει σημεία καμπής?

5. Βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

6. Δείξτε ότι η f είναι περιττή ,

7. Χρησιμοποιώντας την αλλαγή μεταβλητής $t=\varepsilon\varphi u$ δείξτε ότι:

$$\varepsilon\phi(f(x))=\frac{x}{1+2x^2}$$

8. Εξηγήστε γιατί το σύνολο τιμών της f είναι διάστημα που περιέχει το 0 και τελικά δείξτε ότι: $-\frac{\pi}{6}<f(x)<\frac{\pi}{6}$

ΘΕΜΑ 19

Έστω $f:R\to R$ παραγωγίσιμη συνάρτηση :

$\int_x^y f(t)dt \le f'(x)-f'(y)\ \forall x,y\in R$ και $f(0)>0$

1. Δείξτε ότι η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f''(x)=-f(x),\forall x\in R$

2. Δείξτε ότι η συνάρτηση : $(f(x))^2+(f'(x))^2=a^2>0$ όπου α μια σταθερά

3. Βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$

4. Δείξτε ότι η f τέμνει την ευθεία με εξίσωση $y=x$

5. Δείξτε ότι η f έχει τουλάχιστον μια ρίζα ξ

6. Αν δοθεί η f δείξτε ότι μπορούμε να βρούμε αριθμούς A , φ : $f(0)=A\eta\mu\varphi$ $f'(0)=A\sigma\upsilon\nu\varphi$ και έτσι βρείτε τον τύπο της f . Θα ισχύει τότε $A=\alpha$?

ΘΕΜΑ 20

Έστω $f(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{1+t}dt$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

3. Να δείξετε ότι για κάθε πραγματικό $x>1$ ισχύει $f(x)>f(1/x)$

4. Να δείξετε ότι για κάθε θετικό πραγματικό x ισχύει $f(x)+f(1/x)=(1/2)\ln^2 x$

5. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

6. Για κάθε $\alpha\in(0,1)$ να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $b>1$ ώστε $f(a)=f(b)$

ΘΕΜΑ 21

Θέτουμε :

$$f(x)=\int_0^a e^{-t}t^{x-1}dt \quad , \quad a>0 \quad , \quad x\in[1,+\infty)$$

1. Για $\alpha=1$ να δείξετε ότι : η f είναι φθίνουσα

2. Για $\alpha=1$ να δείξετε ότι : $f'(x+1)=x\,f'(x)+f(x)$

3. Για $\alpha=1$ αφού δείξετε ότι $1-t\le e^{-t}\le 1$, $\forall t\ge 0$ να δείξετε ότι :

$$\frac{1}{x^2+x}\le f(x)\le\frac{1}{x}$$

4. Για $\alpha=1$ να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

5. Για $\alpha>0$ να δείξετε ότι : $f(n+1)=n\,f(n)-\frac{a^n}{e^a}$, $\forall n\in N^*$

6. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{a\to+\infty}\frac{a^n}{e^a}$

7. Ονομάζουμε με $\Gamma(n)$ το όριο : $\Gamma(n)=\lim\limits_{a\to+\infty} f(n)$, $n\in N^*$.Να δείξετε ότι $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$ και να συμπεράνετε ότι : $\Gamma(n+1)=1.2.3...n=n!$

8. Να γενικεύσετε το ερώτημα 5) για πραγματικούς

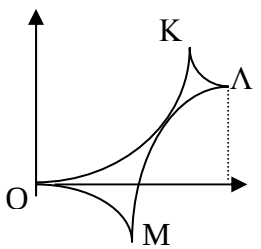
9. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{a\to+\infty}\frac{a^x}{e^a}$, $x\ge 1$

10. Ονομάζουμε με $\Gamma(x)$ το όριο : $\Gamma(x)=\lim\limits_{a\to+\infty} f(x)$, $x\ge 1$ το οποίο ξέρουμε ότι είναι πραγματικός αριθμός. Να δείξετε ότι $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$

(Μόλις γενικεύσατε την έννοια του παραγοντικού στους πραγματικούς!!! Το Γ(x) είναι μια διάσημη συνάρτηση στα μαθηματικά και ονομάζεται Gamma function)

ΘΕΜΑ 22

1. Δίνονται οι συναρτήσεις $A(x)=2x^2$, $B(x)=2x^2-4x+3$, $C(x)=-2x^2+4x-1$,$D(x)=-2x^2$, $x\in[0,1]$.Ονομάζουμε με K,Λ,M τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των A και B,B και C,C και D αντιστοίχως όπως στο σχήμα:



Να βρεθούν οι συντεταγμένες των K,Λ,M.

2. Να βρεθεί το εμβαδό του καμπυλόγραμμου χωρίου $(OK\Lambda M)$.

3. Να δείξετε ότι οι $A(x)$, $C(x)$ τέμνονται μόνο σε ένα σημείο στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

4. Αν για την συνάρτηση f ισχύουν : $|f''(x)|\le 4 \ \forall x\in[0,1]$ $f(0)=0$, $f(1)=1$,

$f'(0)=0$, $f'(1)=0$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται εντός του

χωρίου $(OK\Lambda M)$.

5. Δείξτε ότι $f(1/2)=1/2$

6. Δείξτε ότι $-\frac{1}{8}\le f(x)\le\frac{9}{8}$

7. Με την βοήθεια του σχήματος βρείτε τον τύπο μιας h ώστε το $\int_0^1 h(t)dt$ να γίνεται μέγιστο. Θεωρείστε ότι $h:[0,1]\to R$ και ότι η h βρίσκεται εντός του χωρίου $(OK\Lambda M)$. Είναι δυνατόν $h=f$ στο $[0,1]$;

8. Κινητό κινείται πάνω σε άξονα. Την στιγμή $t=0$ βρίσκεται στην αρχή του άξονα και έχει ταχύτητα $0\ m/sec$. Μετά από $1sec$ η μετατόπισή του είναι $1m$ και η ταχύτητα του $0\ m/sec$. Να δείξετε ότι κατά την διάρκεια της κίνησής του υπάρχει μια χρονική στιγμή t_0 στην οποία το μέτρο της επιτάχυνσης του να είναι τουλάχιστον $4\ m/sec^2$.

ΘΕΜΑ 23

Έστω η συνάρτηση f με: $f(x)f''(x)=A\neq 0\ \ \forall x\in R$. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο 1, το 1 τότε :

1. Να δείξετε ότι $f(x)>0$ στο R

2. Να δείξετε ότι $A>0$

3. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

4. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)$ και βρείτε το σύνολο τιμών της f

5. Να αποδείξετε ότι : $f'(x)=\begin{cases}\sqrt{2Aln(f(x))}\ , x\geq 1\\ -\sqrt{2Aln(f(x))}\ , x<1\end{cases}$

6. Να υπολογίσετε τα όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]$

7. Να δείξετε ότι η C_f τέμνει την ευθεία $y=x$ σε δυο σημεία ακριβώς

8. Να δείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f που να διέρχεται από την αρχή των αξόνων

9. Να δείξετε ότι : $\sqrt{2A}(x-1)=2\int_0^{\sqrt{ln(f(x))}} e^{t^2}dt\ ,\ \forall x\geq 1$

10. Αν $w(x)w''(x)=B\neq 0\ \ \forall x\in R$, $w(1)=1$, $w'(1)=0$ τότε να δείξετε την ισοδυναμία

$B>A\Leftrightarrow w(x)\geq f(x)$, στο διάστημα $[1,+\infty)$

ΘΕΜΑ 24

1. Έστω συνάρτηση $f: f''(x)=p(x)f(x)$, $p(x)>0$ και συνεχής στο R. Τότε αν η f έχει δυο ρίζες a ,b δείξτε ότι : $f(x)=0 \ \forall x \in [a,b]$

(Υποθέστε ότι η f έχει μια τουλάχιστον θετική τιμή, εξασφαλίστε ακρότατο στο $[a,b]$ και καταλήξτε σε άτοπο χρησιμοποιώντας το κριτήριο της β΄ παραγώγου)

2. Τώρα υποθέστε ότι : η f δεν είναι σταθερή σε κανένα διάστημα , $f(a)=0$, $x_0>a$, $f(x_0)>0$ και δείξτε ότι : $f(x)>0 \ \ \forall x \in (a,+\infty)$

3. Συμπεράνετε ότι : f κυρτή $\forall x \in (a,+\infty)$

4. Να αποδείξετε ότι : $f'(a) \geq 0$ και f γνήσια αύξουσα $\forall x \in (a,+\infty)$

5. Δείξτε ότι : η f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $\chi\grave{}\chi$ και στρέφει τα κοίλα κάτω στο διάστημα $(-\infty,a)$. Εξετάστε στη συνέχεια αν το σημείο $(a,0)$ είναι σημείο καμπής της f.

6. Δείξτε ότι : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ και βρείτε το σύνολο τιμών της f.

7. Δείξτε ότι αν $f'''(x)>0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=+\infty$

8. $\forall x \in (a,+\infty)$ δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $w>a$: $f'(w)=\dfrac{f(x)}{x-a}$

9. Αν $A(a,0)$, $B(x,f(x))$, $x>a$, δείξτε ότι η κλίση της χορδής AB είναι μεγαλύτερη από την κλίση της εφαπτομένης της f στο A.

10. Αποδείξτε ότι στην γραφική παράσταση της f υπάρχουν πάντοτε 3 συνευθειακά σημεία.

11. Δείξτε ότι : $\int_k^m p(x)dx=\left[\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right]_k^m+\int_k^m\left(\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 dx \quad \forall m>k>a$

12. Αν $f'(k).f(m)=f'(m).f(k)$ δείξτε ότι υπάρχει ξ με $k<\xi<m$:

$$\sqrt{p(\xi)} \geq \frac{\ln f(m)-\ln f(k)}{m-k}$$

ΘΕΜΑ 25

Αν $f:R\to R, f''(x)=f(x), \forall x\in R$

1. Να δείξετε ότι η $(f'(x))^2-(f(x))^2$ είναι σταθερή στο R

2. Να δείξετε ότι $f(x)=\frac{f(0)+f'(0)}{2}e^x+\frac{f(0)-f'(0)}{2}e^{-x}$

Θέτουμε $a=\frac{f(0)+f'(0)}{2}$, $b=\frac{f(0)-f'(0)}{2}$

3. Αν $ab\geq 0$, $|a|+|b|\neq 0$ δείξτε ότι η συνάρτηση διατηρεί σταθερό πρόσημο, είναι είτε κοίλη είτε κυρτή

4. Αν $ab>0$ τότε, έχει ακριβώς ένα ακρότατο, έστω στο r, ίσα όρια στα $\pm\infty$ και είναι συμμετρική ως προς την ευθεία $x=r$

5. Αν $ab<0$ έχει μοναδική ρίζα. Σχεδιάστε τότε μια πρόχειρη γραφική παράσταση διακρίνοντας δυο περιπτώσεις

6. Εξηγείστε γιατί μπορούμε να έχουμε $f(x)=f(0)g(x)+f'(0)h(x)$ όπου οι h, g να ικανοποιούν την αρχική σχέση της εκφώνησης

7. Αν $w''(x)=k^2w(x)$, $k>0$ να θέσετε $x=\frac{y}{k}$ να αποδείξετε ότι $\frac{d^2w}{d^2x}=k^2\frac{d^2w}{d^2y}$ και να βρείτε τον τύπο της w

ΘΕΜΑ 26

1)Δείξτε ότι ότι υπάρχει συνάρτηση

$f:(0,+\infty)\to(0,1):4f^3(x)=2xf(x)=x+1, x>0$

2)Δείξτε ότι $\frac{x+1}{2x+4}<f(x)<\frac{x+1}{2x}$ και ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{1}{2}$

3)Δείξτε ότι $|f(x)-f(x_0)|<\frac{1}{2x_0}|x-x_0|, \forall x_0>0$ και ότι f συνεχής

4)Δείξτε ότι $f(x)>\frac{1}{2}, \forall x\in(0,+\infty)$

5)Δείξτε ότι f παραγωγίσιμη και γνήσια φθίνουσα

6)Δείξτε ότι $f((0,+\infty))=(\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt[3]{4}})$

7)Βρείτε την f^{-1}

ΘΕΜΑ 27

1. Α) Σχεδιάστε την γραφική παράσταση της $f(t)=\frac{\ln t}{t}$.

Β) Για ποιους αριθμούς *x,y* ισχύει η ιδιότητα : $\forall x\in A\cap D_f$ $\exists$ μοναδικό $y\in A\cap D_f$ τέτοιο ώστε *f(x)=f(y)?* Βρείτε το σύνολο αυτό και αποδείξτε τον προηγούμενο ισχυρισμό

Στη συνέχεια δεχθείτε ότι το *y* είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση του *x* με τύπο *y=y(x)* . Παρακάτω σας ζητείται να ασχοληθείτε με μερικά χαρακτηριστικά αυτής της συνάρτησης. Έτσι αφού βρείτε το πεδίο ορισμού της:

Γ1) Δείξτε ότι η *y* είναι *1-1*.

Γ2) Δείξτε ότι η *y* είναι γνήσια φθίνουσα.

Γ3) Βρείτε το σύνολο τιμών της.

Γ4) Λύστε την εξίσωση : *y(x)=e*.

Γ5) Βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της *y* στην θέση *x=e*.

Γ6) Εξετάστε αν η *y* έχει ασύμπτωτους.

ΜΕ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ

1. Να δειχθεί ότι υπάρχει μοναδικός μιγαδικός z : $Rez>0$, $Imz=1$ και επιπλέον $z^2+\frac{1}{z}\in R$

2. Έστω $K=\left|z^3-z+2\right|$, όπου $z\in\mathbb{C}$, με $|z|=1$. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της παράστασης K.

3. Δίνονται οι μιγαδικοί z και u, με $|z|=1, z=x+iy, x>0, y\neq\pm1$ και $u=\bar{z}^2+iz$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου του u ως προς το $Im(z)$ Να βρεθεί ο μιγαδικός z,για τον οποίο το $|u|$ γίνεται μέγιστο.

4. Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμες στο (α,b) και επιπλέον $g(x).g'(x)\neq 0\ \forall x\in(a,b)$.Αν $z_1=f(\alpha)+i.g(\beta)$, $z_2=g(\alpha)+i.f(\beta)$ και ισχύει : $|z_1+\bar{z}_2|=|\bar{z}_1-z_2|$ τότε να δείξετε ότι υπάρχει ξ στο (α,β) τέτοιο ώστε : $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}+\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=0$

5. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύουν $f(x)+f'(x)=0$, $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=i^{-2000}$. Να βρείτε την καμπύλη στην οποία κινείται η εικόνα Μ του μιγαδικού $z=f(\alpha)+f(-\alpha)\cdot i$, $\alpha\in\mathbb{R}/R$.

6. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμες στο (α, β) και $g(x)\cdot g'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha, \beta)$. Έστω οι μιγαδικοί $w=2f(\alpha)-ig(\beta)$ και $z=g(\alpha)-2if(\beta)$ για τους οποίους ισχύει: $|2w+\bar{z}|=|2\bar{w}-z|$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha, \beta)$, ώστε:

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}+\frac{f(x_0)}{g(x_0)}=0.$$

7. **Α)** Αν για τους μιγαδικούς z_1, z_2 ισχύει η ισότητα: $\left||z_1|-|z_2|\right|=|z_1+z_2|$. Να δειχθεί ότι: $Im(z_1\cdot\overline{z}_2)=0$.

Β) Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$. Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z_1 = f(\alpha)+i\cdot f(\beta)$ και $z_2 = f(\beta)+i\cdot f(\alpha)$, για τους οποίους ισχύει η ισότητα του προηγουμένου ερωτήματος και $f(\beta)+\cdot f(\alpha)\neq 0$. Να δειχθεί ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in(\alpha, \beta)$, με $\xi_1\neq\xi_2$, ώστε $f'(\xi_1)+ f'(\xi_2)=0$.

8. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = 1+i\alpha^{\eta\mu x}$, $\alpha>0$ και $w = 1+\eta\mu x+i$, για τους οποίους ισχύει: $|2w+\overline{z}|\leq|2w-\overline{z}|$. Να δειχθεί ότι $\alpha = e$.

9. **Α)** Να δειχθεί ότι για κάθε ζεύγος μιγαδικών z_1, z_2 ισχύει: $|z_1|^2+|z_2|^2=|z_1-z_2|^2$ αν και μόνο αν $Re(z_1\cdot\overline{z}_2)=0$.

Β) Έστω μία συνάρτηση $f: [\alpha, \beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha^2+i\cdot f(\alpha)$, $w = f(\beta)+i\cdot\beta^2$, $\alpha\cdot\beta\neq 0$. Αν $|w|^2+|z|^2=|w-z|^2$ Να δειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[\alpha, \beta]$.

10. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta]\to R$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha+\beta i$, $z_1 = \alpha+i\cdot f(\alpha)$, $z_2 = \beta+i\cdot f(\beta)$. Αν ισχύει $3\left(z^2-\overline{z}^2\right)-4iz\overline{z}=4i\,Re(z_1\cdot\overline{z}_2)$, να δειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $[\alpha, \beta]$.

11. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0,+\infty)\to R$, με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x>0$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \alpha^2+i\cdot f(\alpha)$, $z_2=\frac{1}{\beta^2}+i\frac{1}{f(\beta)}$, $\alpha, \beta>0$. Αν ισχύει: $|z_1+\overline{z}_2|=|z_1-\overline{z}_2|$, Να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha, \beta)$ ώστε $\xi\cdot f'(\xi)=2f(\xi)$.

12. *f:R→R*, δύο φορές παραγωγίσιμη και τα σημεία *Α(α, f(α))*, *Β(β, f(β))* , *Γ(γ, f(γ))*, της γραφικής παράστασης, με *α<β<γ*.

Θέτουμε: $w = z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1$, όπου

$z_1 = \alpha+i\cdot f(\alpha), z_2 = \beta+i\cdot f(\beta), z_3 = \gamma+i\cdot f(\gamma)$. Αν $w\in R$, Να δειχθεί ότι :

i) Τα σημεία *Α, Β, Γ* είναι συνευθειακά.

ii) Υπάρχει $x_0\in R$, τέτοιο ώστε $f''(x_0)=0$.

13. Έστω $z = x+\psi i$, x, ψ στο R και f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, με $f(\alpha)\neq f(\beta)$.

Αν ισχύει: $\left|\dfrac{z-f(\alpha)}{z-f(\beta)}\right| = \left|\dfrac{z+f(\alpha)}{z+f(\beta)}\right| = 1$. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο (α, β).

14. Έστω $z = x+\psi i$, $x, \psi\in R$ και f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$,

$p(z) = z^3 + f(a)z^2 + f(b)z + 1$, $p(1+i) = 0$ Να δείξετε ότι f η έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (a,b)

15. Έστω $z = a+bi$, $a,b\in R$ και $f(x) = |z|x^3 + |w|x^2 - |z+w|$ Να δείξετε ότι f η έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[-1,1]$.

16. Έστω $z = x+\psi i$, $x, \psi\in$ αι f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Αν ισχύει,

$|z| = 1$, $z + \dfrac{1}{z} = f(a)$, $z^2 + \dfrac{1}{z^2} = f(b)$ τότε να δείξετε ότι η εξίσωση: $x^3 f(a) + f(b) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[-1,1]$

17. Έστω $z = a+bi \neq 0$, $a, b\in R$ και f συνεχής στο R. Αν ισχύει

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|zf(x)-3|-3}{x}\in R$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|zf(x)+1|-1}{x-1}\in R$, Να δείξετε ότι η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[0,1]$.

18. Έστω $z = x+f(x)i \neq 0$, $x, f(x) \in \mathbb{R}$ $a>0$ και f συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αν ισχύει $f(\frac{a}{2}) = \frac{a}{2}, f(\frac{3a}{2}) = -\frac{a}{2}$ και για κάποιο $x_0 \in (0,2a)$ $|z-a| < a$, $|2z-a| \geq a$, $|2z-3a| \geq a$ δείξτε ότι $f(a)=0$

19. Έστω P πολυώνυμο n βαθμού με μιγαδικούς συντελεστές και ρίζες απλές, διαφορετικές μεταξύ τους να ανήκουν όλες στον μοναδιαίο κύκλο. Να δείξετε ότι οι εικόνες των ριζών του $Q(z)=2zP'(z)-nP(z)$ ανήκουν και αυτές όλες στον μοναδιαίο κύκλο.

ΜΕ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

1. Έστω δειγματικός χώρος Ω με $\Omega=\{2r / r \in Z, 1 \leq r \leq 50\}$ όπου για κάθε στοιχειώδες ενδεχόμενο ω του Ω είναι : $P(\omega) = m + \int_{\omega}^{\omega+2} f(t)dt$ με m σταθερά και f συνεχή συνάρτηση.

Να δείξετε ότι υπάρχει κ πραγματικός αριθμός ώστε να ισχύει : $f(k) = \frac{1-50m}{100}$

2. Έστω συναρτήσεις f,g για τις οποίες ισχύουν : $f(x) = \begin{cases} x^3 g(x) + ax, x > 0 \\ 2bx, x \leq 0 \end{cases}$ και $|g(x)| \leq K$, $\forall x \in R$. Τα a,b επιλέγονται τυχαία μέσα από τον δειγματικό χώρο Ω όπου $\Omega=\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}\}$.Αν A το ενδεχόμενο η f να είναι συνεχής στο 0 και B το ενδεχόμενο η f να είναι παραγωγίσιμη στο 0 να δείξετε ότι $P(A)=P(B')$.

3. Σε κάθε στοιχειώδες ενδεχόμενο x ενός δειγματικού χώρου $\Omega \subset R$ αντιστοιχίζουμε την πιθανότητα $P(x)=\frac{2x}{1+x^2}$. Αν Γ και Δ ενδεχόμενα του Ω για τα οποία ισχύει $P(\Gamma)=P(\alpha)$ και $P(\Delta)=P(\beta)$ όπου $\alpha, \beta \in [1,3]$, τότε να δείξετε ότι τα Γ και Δ δεν μπορεί να είναι ασυμβίβαστα.

4. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση με τύπο $f(x)=x^a e^{2a-x}$ $a>0$, $x>0$. Έστω τώρα ο δειγματικός χώρος $K=\{e^{-n} \quad n \in N^*, n \le 20\}$ Διαλέγουμε στην τύχη ένα στοιχείο του K και το τοποθετούμε στην θέση του α. Να βρεθεί η πιθανότητα το μέγιστο της f να γίνεται ελάχιστο. Αν Ω δειγματικός χώρος και A ενδεχόμενό του και για $\alpha=1$ η εξίσωση $f(x)=e+P(A)$ έχει λύση τότε να βρεθεί η πιθανότητα $P(A)$. Ποιο το Α αν τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα ?

5. Έστω $\Omega=\{1,2,...,100\}$, φ παραγωγίσιμη συνάρτηση και $P(\kappa)=\varphi(\kappa+1)-\varphi(\kappa)$ $\kappa \in \Omega$ όπου $P(k)$ είναι οι πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων του Ω Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi>0$: $\varphi'(\xi)=1/100$

6. Έστω συνάρτηση f με $f(0)=0$, $f(n)=n>3$ $n \in N^*$ και $f''(x)<0$ στο R

i)Δείξτε ότι $f(x) \ge x$, $\forall x \in [0,n]$

ii)Αν η ευθεία με εξίσωση $y=x+1$ εφάπτεται της C_f τότε $f(x) \le x+1$

iii)Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega=\{x_1,x_2,...,x_n\} \subset R$.Θεωρούμε τους αριθμούς

$P(x_{k+1})=\int_{k}^{k+1}(f(t)-t)dt$, $k=0,1,...,n-1$ και γνωρίζουμε ότι

$$\int_{0}^{n} f(t)dt = 1+\frac{n^2}{2}$$

Να δείξετε ότι τα $P(x_{k+1})$ μπορούν να θεωρηθούν ως οι πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων του Ω.

iv)Εξετάστε αν τα στοιχειώδη ενδεχόμενα του Ω είναι ισοπίθανα.

7. Αν $A=\{1,2,\ldots,n\}$ διαλέγουμε στην τύχη και με επανατοποθέτηση δυο στοιχεία a,b του A και γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα ώστε να ισχύει $|f(b)-f(a)|\le|b-a|$ είναι 8% όταν $f(x)=x^2-7x+\ln x$. Να βρείτε το n

ΜΕ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

1. Έστω f,g συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το R : $f'(x)=g(x)$, $g'(x)=f(x)$, $f^2(1)\neq g^2(1)$ και το σημείο $M(f(x),g(x))$. Να δείξετε ότι το M κινείται σε ισοσκελή υπερβολή.

2. Έστω f συνεχής στο R και ισχύει $f(x)=\left|\vec{a}\,x-\vec{b}\right|$, $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1$, $x\in R$.

Αν είναι: $\int_{1}^{x} f(t)dt \ge 2x-2 \;\; \forall x\in R$ να δείξετε ότι τα διανύσματα είναι ίσα και να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης.

ΓΕΝΙΚΕΣ

Οι παρακάτω δυο ασκήσεις είναι εκτός ύλης πανελληνίων Εξετάσεων ,συνοδεύονται από βοηθητικά ερωτήματα και αφορούν γνωστά

μαθηματικά αποτελέσματα. Σίγουρα όμως είναι απολαυστικές!!

ΓΕΝ 1

Για να υπολογίσουμε το $\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}dt = \lim_{x\to 0^+}\left\{\int_x^1 \frac{\ln t}{1+t}dt\right\}$ χρειαζόμαστε πρώτα το άπειρο άθροισμα $r = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots$ Τα παρακάτω ερωτήματα βοηθούν αυτόν τον σκοπό

Α) Αν η *f* έχει συνεχή παράγωγο στο *[a,b]* και *ω>0* τότε ισχύει:

$\lim_{\omega\to+\infty}\int_a^b f(t)\eta\mu(\omega t)dt = 0$

Β) Αν $S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ τότε η ακολουθία *Sn* είναι γνήσια αύξουσα και άνω φραγμένη, άρα θα συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό. Λέμε τότε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ είναι συγκλίνουσα και γράφουμε $r = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$.

Αποτέλεσμα που δίνει μετά από πολύ κόπο(*τον οποίο σας προτείνουμε να καταβάλετε)* ότι $r = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots = \frac{\pi^2}{6}$

αποδείξτε το(*και χαρείτε το)*

Γ) Να υπολογίσουμε τώρα το $\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}dt = \lim_{x\to 0^+}\left\{\int_x^1 \frac{\ln t}{1+t}dt\right\}$!!

ΓΕΝ 2

Έστω συνάρτηση *φ* με συνεχή $2^{η}$ παράγωγο. Να δείξετε ότι η *φ΄* είναι φραγμένη στο *[α,β]*

1. Ονομάζουμε $\alpha_\nu = \int_\alpha^\beta \phi(x)\eta\mu\nu x dx$ Δείξτε ότι η ακολουθία (α_ν) είναι μηδενική

2. Θέτουμε $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\phi(x)-\phi(0)}{x}, x\neq 0\\ \phi'(0)\ ,\ x=0\end{cases}$ Δείξτε ότι g είναι παραγωγίσιμη
3. Δείξτε ότι η g' είναι συνεχής
4. Ονομάζουμε $b_\nu=\int_0^b g(x)\eta\mu\nu x dx$ Δείξτε ότι η ακολουθία (b_ν) είναι μηδενική
5. Δείξτε τώρα ότι $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_0^b \frac{\phi(x)}{x}\eta\mu\nu x dx-\phi(0)\int_0^{\nu b}\frac{\eta\mu y}{y}dy\right)=0$ και τροποποιήστε κατάλληλα την ισότητα στην περίπτωση όπου το $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\nu b}\frac{\eta\mu y}{y}dy=C\in R$. Μπορείτε να γράψετε τότε ότι $\int_0^{+\infty}\frac{\eta\mu y}{y}dy=C$
6. Για να δείξουμε ότι το προηγούμενο όριο είναι πραγματικός αριθμός χρησιμοποιήστε το κριτήριο Cauchy ,παραγοντική ολοκλήρωση και ιδιότητες απολύτων τιμών
   (αν δεν τα καταφέρατε θεωρείστε το δεδομένο και προχωρήστε παρακάτω στα επόμενα)
   Για να βρείτε την τιμή του C τώρα
7. Δείξτε ότι αν f συνεχής τότε

$$I_\nu=\int_0^\pi f(x)\frac{\eta\mu(2\nu+1)x}{\eta\mu x}dx=\int_0^{\pi/2}\left(f(x)+f(\pi-x)\right)\frac{\eta\mu(2\nu+1)x}{\eta\mu x}dx$$

8. Να υποθέσετε ότι η f έχει συνεχή $2^{η}$ παράγωγο και να δείξετε ότι το ίδιο ισχύει για τις

$$k(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\eta\mu x}, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases},\ h(x)=\begin{cases}\big(f(x)+f(\pi-x)\big)\dfrac{x}{\eta\mu x}, x\neq 0\\ f(0)+f(\pi), x=0\end{cases}$$

9. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = C(f(0)+f(\pi))$

10. Αποδείξτε ότι $\dfrac{\eta\mu(2\nu+1)x}{\eta\mu x}=1+2\sum\limits_{k=1}^{\nu}\sigma\upsilon\nu 2kx$

11. Υπολογίστε το $\int_0^{\pi}\sigma\upsilon\nu 2kx dx,\ k\in N$

12. Δείξτε ότι $\int_0^{\pi}\dfrac{\eta\mu(2\nu+1)x}{\eta\mu x}dx=\pi$

13. Επιλέξτε $f(x)=1$ και συμπεράνετε ότι $C=\pi/2$. Τελικά δείξτε ότι

$$\lim_{\nu\to+\infty}\int_0^{\pi} f(x)\frac{\eta\mu(2\nu+1)x}{\eta\mu x}dx=\frac{\pi}{2}\big(f(0)+f(\pi)\big)$$

ΟΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

ανάλυση για την

Γ' Λυκείου

Ρ. Μπόρης

ΟΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ –ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΑΝΑΛΥΣΗ ΓΙΑ ΤΗΝ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΠΟΡΗΣ ΡΟΔΟΛΦΟΣ
ΤΗΛ 2109712610
© Copyright Φλεβάρης 2010
ΕΚΔΟΣΕΙΣ

Επιτρέπεται η αναδημοσίευση και γενικά η αντιγραφή όλου ή μέρους του κειμένου προς χρήση των μαθητών της Γ λυκείου ή προς ενημέρωση των συναδέλφων μαθηματικών. Η γνώση δεν οριοθετείται από τυχόν ιδιοκτήτες.
Η ιδιοκτησία κινδυνεύει να γίνει κλοπή

ΕΞΩΦΥΛΛΟ ΤΙΝΑ ΘΕΡΜΟΥ

ΣΤΟΥΣ
ΑΝΘΡΩΠΟΥΣ ΤΟΥ
MATHEMATICA . GR

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το τεύχος Β του βιβλίου «ΟΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ» περιέχει **σύντομες υποδείξεις** για τις λύσεις των ασκήσεων του τεύχους Α. Όλες οι ασκήσεις των ομάδων Γ και Δ συνοδεύονται από αυτές τις υποδείξεις ενώ έχει γίνει μια επιλογή από ασκήσεις της ομάδας Β. Η ομάδα Α δεν συνοδεύεται από υποδείξεις διότι οι ασκήσεις της κατά κανόνα θεωρούνται «εύκολες» οπότε η λύση τους δεν απαιτεί βοήθεια.

Στόχος των ομάδων Α, Β και μερικώς της Γ είναι οι Πανελλήνιες εξετάσεις της Γ λυκείου. Η ομάδα Δ αφορά θέματα επιπέδου διεθνών μαθηματικών διαγωνισμών και υφίσταται ώστε να καλυφθεί κατά το δυνατόν η πληρότητά της συλλογής. Δεν είναι λοιπόν παράξενο που η αντιμετώπιση της χρειάζεται μερικές φορές γνώσεις και εκτός Λυκείου (Θ.Darboyx, Θ.Taylor, αναδρομικές ακολουθίες Β τάξεως, κοκ), πάντως προσπαθήσαμε ώστε το περιεχόμενό της να κρατηθεί κοντά στην ύλη του λυκείου.

Πολλές από τις ασκήσεις κατασκεύασαν εκλεκτοί συνάδελφοι και βρίσκονται στον **υπέροχο ιστότοπο «mathematica.gr»** και άλλοι σε διάφορα βιβλία τους που κυκλοφορούν στα βιβλιοπωλεία και αναφέρονται στο τεύχος Α.

Ελπίζω η δουλειά αυτή να φανεί χρήσιμη αλλά και απολαυστική σε μαθητές και συναδέλφους και θα ήθελα πάλι να ευχαριστήσω όλους τους κατασκευαστές των τόσο όμορφων ιδεών που παρουσιάζονται εδώ.

Αθήνα
Φλεβάρης 2010
Ροδόλφος Μπόρης

Α. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

(1) ΣΥΝΟΛΑ ΟΡΙΣΜΟΥ

(2) ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ

(3) ΣΥΝΘΕΣΗ ΙΣΟΤΗΤΑ

(4) ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

(5) ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ

(6) ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 1-1 . ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ

(7) ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

(8) ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

(9) ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΟΙ ΤΥΠΟΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α

3Γ1

Με επαγωγή είναι εύκολο να δείξουμε ότι

$D(f_n) = R, f_n(x) = \dfrac{x}{1+n|x|}$, $n = 1,2,...$

4Β7

Είναι $f(0) = 0$

Θέτουμε για $x \neq 0, y = \dfrac{f(x)}{x}$ ενώ για $x = 0, y = 0$

προκύπτει ότι $(y-1)^3 + y - 3 = 0$

Η αντίστοιχη εξίσωση λόγω μονοτονίας έχει μοναδική λύση το 2 που δίνει $f(x) = 2x$ και που επαληθεύει τις αρχικές συνθήκες

4Β12

Η $f(x) - 2x$ είναι γνήσια φθίνουσα…

Προφανής λύση η $x = 0$

4Β13

Προφανής λύση η $x = 1 - f(1)$

Η $f(x) + x$ είναι γνήσια αύξουσα…

6Β6

Για $x = 0, x = 3$ με πρόσθεση κατά μέλη $(f(0) - f(3))^2 \leq 0$ …

6Β7

Για $x = 0, x = 1 \Rightarrow (f(0) - 6)^2 \leq 0, (f(1) - 6)^2 \leq 0$ …

6Γ1

Έστω ότι η f(x) δεν είναι η συνάρτηση x με $x \in R$

Έστω $f(x_0) > x_0 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(f(x_0)) > f(x_0) \Rightarrow x_0 > f(x_0)$ αντίφαση ,οπότε

$f(x) = x, \forall x \in R$

6Γ2

Για $x=0, x=1$ έχουμε $f(0)f(1)=f(b)=f(a+b) \overset{f:1-1}{\Rightarrow} b=a+b\ldots$

Για $x=b \Rightarrow f(b)f(1-b) \overset{a=0}{=} f(b)$

Αν $f(b)=0 \Rightarrow f(x)f(1-x)=0$ τότε $f(2)f(-1)=0=f(4)f(-2)$ άρα έχει 2 τουλάχιστο διαφορετικές ρίζες , άτοπο…

6Γ3

Α) Με μονοτονία η f είναι γνήσια αύξουσα

Β) Η εξίσωση $f=f^{-1}$ δείχνουμε ότι είναι ισοδύναμη με την $f(x)=x$ όπως στην 6Γ1…

6Γ4

Α) χορδή $\leq$ τόξου (στον τριγωνομετρικό κύκλο) … Η ισότητα ισχύει μόνον όταν $x=0$

Β)

$$x_1-\eta\mu x_1=x_2-\eta\mu x_2 \Rightarrow x_1-x_2=\eta\mu x_1-\eta\mu x_2=2\eta\mu\frac{x_1-x_2}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x_1+x_2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{|x_1-x_2|}{2} \leq \left|\eta\mu\frac{x_1-x_2}{2}\right| \cdot 1 \overset{A)}{\Rightarrow} \frac{|x_1-x_2|}{2}=\left|\eta\mu\frac{x_1-x_2}{2}\right|$$

Η ισότητα ισχύει μόνον όταν $x_1=x_2$ …

Γ) εργαζόμαστε όπως στην 6Γ2 εξασφαλίζοντας το «γνησίως αύξουσα»…

6Γ5

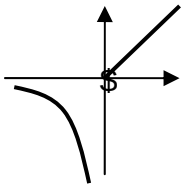
Α) Αν $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1))=f(f(x_2)) \Rightarrow \ldots$

Β) όπου x το f(x) άρα $f(f(f(x)))=f(-x)=-f(x)$

Γ) όπου x το $f^{-1}(x) \Rightarrow f(f(f^{-1}(x)))=-f^{-1}(x) \Rightarrow f^{-1}(x)=f(-x)$, x στο σύνολο τιμών της f

6Γ6

Α)



Β) εύκολο

Γ) Η εξίσωση $f(x)=y$ έχει μοναδική λύση για οποιοδήποτε $y\in R$

Δ) προκύπτει $f^{-1}=f$

Ε) η C_f είναι συμμετρική ως προς την $y=x$

ΣΤ) ανά δύο οι συνθέσεις δίνουν την ταυτοτική και επειδή 666=άρτιος…

9Β5

Δ) αν $f(x)=\dfrac{x^3+1}{2}$, $g(x)=\sqrt[3]{x^2+100}$ οι εξισώσεις γίνονται

$f(x)=f^{-1}(x), g(x)=g^{-1}(x)$ με f,g γνήσια αύξουσες οπότε…

9Β7

α. όπου x το f(x) τότε $f(f(f(x)))=\dfrac{f(f(x))}{f(x)}=\dfrac{1}{x}$ άρα $\dfrac{1}{x}\in A$

β. όπου x το f(x) στο α τότε $f\left(f(f(f(x)))\right)=\dfrac{1}{f(x)}\Rightarrow f(\dfrac{1}{x})=\dfrac{1}{f(x)}\ldots$

γ. Αν $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow f(f(x_1))=f(f(x_2))\Rightarrow \dfrac{f(x_1)}{x_1}=\dfrac{f(x_2)}{x_2}\ldots$

δ. $f(x)=4=f(2)\overset{f:1-1}{\Rightarrow} x=2$

9Β8

Δείχνουμε ότι $f(kx)=kf(x), \forall x\in R, k\in Z$ τότε

$f(a)=f(1.a)=a.f(1)=a.k\Rightarrow f(1)=k$ άρα $f(b)=f(1.b)=k.b\in Z$

9Β14

α. $x=y=0$ … β. $x=y=a$ … γ. $y=2a$ … δ. στο γ όπου

$x=-a \Rightarrow f(-a)=\pm 1$ μετά όπου x το x+2a στο γ

$f(x+2a+2a)=f(x+2a)f(a)=f(x)f^2(a)=f(x)$ …

9Β18

$\begin{matrix} f((x-y)+y) \le y+f(x-y) \Rightarrow f(x-y) \ge f(x)-y \\ f(x+(-y)) \le -y+f(x) \end{matrix}$ άρα $f(x-y)=f(x)-y$

Για x=5 και μετά σε αυτήν που θα προκύψει για y=5-x …

9Β19

α) βγάζουμε κοινό παράγοντα το 2x-y

μετά όπου x το y και κοινό παράγοντα το 2y-x.

β) 2xf(y)=xf(y)+xf(y) βγάλτε κοινό παράγοντα το x-y

μετά το άλλο μέλος προκύπτει λόγω συμμετρίας

9Β20

Για x=y=0 έχουμε $f(0+0) \le f(0)+f(0)$ και $f(0) \le 0$ άρα $f(0)=0$

Για $y=-x \Rightarrow 0 \le f(x)+f(-x) \le x+(-x)=0 \Rightarrow f(-x)=-f(x)$

Επειδή $f(x) \le x \Rightarrow f(-x) \le -x \Rightarrow -f(x) \le -x \Rightarrow f(x) \ge x$ …

9Γ1

Για x=y=0 έχουμε f(0)=0 μετά εύκολα επαγωγικά δείχνουμε ότι

f(nx)=nf(x) για κάθε n φυσικό αριθμό

Η συνάρτηση είναι περιττή διότι

$f(x-x)=f(x)+f(-x) \Rightarrow f(-x)=-f(x), \forall x \in R$ οπότε

$f(-nx)=-f(nx)=-nf(x)$

$f(\frac{m}{n}x) \overset{[1]}{=} mf(\frac{x}{n}) = n\frac{m}{n}f(\frac{x}{n}) \overset{[1]}{=} \frac{m}{n}f(n\frac{x}{n}) = \frac{m}{n}f(x)$ όπου

$m,n \in Z, n \neq 0$

Άρα $f(rx)=rf(x), \forall r \in Q \Rightarrow f(r)=rf(1)$ [2]

Θέτουμε στην $xf(x) > 0$ όπου x το x-y και παίρνουμε

$(x-y)f(x-y) > 0$ αλλά $f(x-y) = f(x) + f(-y) = f(x) - f(y)$ οπότε αντικαθιστώντας στην προηγούμενη είναι

$(x-y)(f(x)-f(y)) > 0, \forall x \neq y \Rightarrow f \uparrow \overset{[2]}{\Rightarrow} f(1) > 0$

Υποθέστε ότι $f(x) \neq f(1)x \;\; x \in R$ π.χ $f(x) < f(1)x$ και θεωρήστε

$\frac{f(x)}{f(1)} < r < x$ γιατί πάντα υπάρχει ρητός μεταξύ δυο πραγματικών[1] ,ή

$f(x) < f(1)r = f(r)$ λόγω μονοτονίας καταλήξαμε σε άτοπο υποθέτοντας ότι $f(x) \neq f(1)x \;\; x \in R \Rightarrow f(x) = ax, \; a > 0$

9Γ2

Α)Αφού η f έχει σύνολο τιμών το [0,1] τότε $|f(0) - f(1)| \leq 1$ αλλά για $x = 0, x = 1$ έχουμε $|f(0) - f(1)| \geq |1 - 0| = 1 \ldots$

Β) άμεση συνέπεια του προηγούμενου συλλογισμού

Γ)Αν $f(0) = 0 \Rightarrow |f(x)| = |x| = x$ και αφού $0 \leq f(x) \leq 1 \ldots$

Αν $f(0) = 1$ ομοίως

9Γ3

α. $a \leq x_0 \leq b \Rightarrow 0 \leq \frac{x_0 - b}{a - b} \leq 1$ θέτουμε $\frac{x_0 - b}{a - b} = r \ldots$

β. $f(x_0) = f(ra + (1-r)b) \overset{0 \leq r \leq 1}{\Rightarrow} f(x_0) \leq rf(a) + (1-r)f(b)$

γ. Εφαρμογή του β για $m = r, n = 1 - r, x = a, y = b$

δ. $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = (\lambda_1 + \lambda_2)(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} x_2) + \lambda_3 x_3$ μετά εφαρμογή του γ $m = \lambda_1 + \lambda_2, n = \lambda_3$ και ύστερα του β για

$r = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, 1 - r = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \ldots$

9Γ4

α. $x = y = 0 \ldots$

β. $g(x) = \frac{f(x)}{2^x} \Rightarrow ... \Rightarrow g(x+y) = g(x) + g(y)$ επαγωγικά $g(nx) = ng(x) \ldots$

γ. Η γενίκευση αφορά την g που είναι περιττή…

9Γ5

Θέτουμε g(x)=f(x)-f(0) τότε g μονότονη και με μοναδική ρίζα το 0 .

Έχουμε $|g(x) - 0| = |x - 0|$

Αν διακρίνουμε δυο περιπτώσεις για την μονοτονία της g και σε κάθε μια x<0 , x>0 τότε…

9Γ6

Αν [1] η αρχικά δοσμένη σχέση τότε

Για $y = 0, x \neq 0 \overset{[1]}{\Rightarrow} f(0) = f(0)f(x), \forall x \in R^*$ [2]

Αν $f(0) = a \neq 0 \overset{[2]}{\Rightarrow} f(x) = \begin{cases} 1, x \neq 0 \\ a, x = 0 \end{cases}, a \in R^*$ [3]

Αν $f(0) = 0$ τότε για $y = x \neq 0 \overset{[1]}{\Rightarrow} f(x) = f^2(x), \forall x \in R^*$ άρα η f παίρνει τις τιμές 0 και 1 και μόνο αυτές στο R^*

Αν υποθέσουμε ότι παίρνει και τις δυο τότε

$\exists a \neq b \in R^* : f(a) = 0, f(b) = 1 \overset{[1]}{\Rightarrow} a = 0$ άτοπο

Άρα $f(x) = 0, \forall x \in R^*$ ή $f(x) = 1, \forall x \in R^*$ πάντα με $f(0) = 0$ [4]

Τελικά οι [3],[4] δίνουν ότι $f(x) = 0, \forall x \in R$ ή ότι $f(x) = \begin{cases} 1, x \neq 0 \\ a, x = 0 \end{cases}$

9Γ7

α. $x \in [a,b] \Leftrightarrow x - a \in [0, b-a]$ αρκεί f(x-a) φραγμένη αλλά

$|f(x-a)| = |f(x) - f(a)| \leq |f(x)| + |f(a)| \leq M + |f(a)| = m$

β. πράξεις…

γ. αρκεί g(T)=0 ή f(b-a)=k(b-a) που ισχύει

δ. επαγωγή

ε. $|g(x)| = |f(x) - kx| \le |f(x)| + |kx| \le M + |k||b - a| = M_0$

στ) g φραγμένη στο R λόγω περιοδικότητας που δείξαμε στο γ αλλά αν g μη μηδενική προκύπτει άτοπο από το δ αφού το $\frac{g(nx)}{n}$ μπορεί να γίνει οσοδήποτε θέλουμε μικρό

9Γ8

α. ν=1…

β. επαγωγή…

γ. όπου x το x-1 στο α και επαγωγή για το $f(k) = f(-n) = \ldots$

δ. $f(r) = f(\frac{k}{n}) = f(\frac{1}{n} + \frac{k-1}{n}) = f(\frac{k-1}{n}) = f(\frac{1}{n} + \frac{k-2}{n}) = \ldots = f(0)$

9Γ9

α. Για $x = 0, f(y_1) = f(y_2) \Rightarrow \ldots$

β. Για $x = y = 0 \Rightarrow f(f(0)) = f(0) \overset{f:1-1}{\Rightarrow} f(0) = 0$

γ. όπου y το f(y) στην αρχική…

9Γ10

α. Για $x = 1, f(y_1) = f(y_2) \Rightarrow \ldots$

β. Για x=a , y=a …

γ. Για x=1 , y=1 και f:1-1 …

δ. Σύνολο τιμών το R (λόγω β) και 1-1 τότε f αντιστρέψιμη για x=1 και y το $f^{-1}(y)$…

ε. όπου y το $f^{-1}(y)$ στην αρχική…

στ. όπου y το $\frac{1}{y}$ στο ε

ζ. υπάρχει ίδιο στην 9Α25

9Γ11

όπου x το f(x)-(1/x) οπότε

$$f(f(x)+\frac{1}{x})f(f(f(x)+\frac{1}{x}))+\frac{1}{f(x)+\frac{1}{x}})=1\Rightarrow$$

$$f(\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(x)+\frac{1}{x}})=f(x)\overset{f:1-1}{\Rightarrow}\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(x)+\frac{1}{x}}=x$$

Το τριώνυμο που προκύπτει δίνει $f(x)=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2x}$ και δεχόμαστε την θετική ρίζα

9Γ12

α. Για $x=1, f(y_1)=f(y_2)\Rightarrow\ldots$

β. Για x=1 , y=1 και f:1-1 …

γ. Για x=1 στην αρχική…

δ. όπου y το f(y) στην αρχική , λόγω του γ…

9Γ13

α. Εύκολο

β. $f(\frac{1}{x})=\frac{f(x)}{x^2}\overset{x\to1-x}{\Rightarrow}f(\frac{1}{1-x})=\frac{f(1-x)}{(1-x)^2}=\frac{f(1)-f(x)}{(1-x)^2}=\frac{1-f(x)}{(1-x)^2}$ [1]

$$f(\frac{1}{1-x})=f(1+\frac{x}{1-x})=f(1)+f(\frac{x}{1-x})=1+f(\frac{x}{1-x})=$$

γ. $$=1+f\left(\frac{1}{\frac{1}{x}-1}\right)=1-f\left(\frac{1}{1-\frac{1}{x}}\right)=$$

$$=1-\frac{f\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{x-1}{x}\right)^2}=1-\frac{f(1)-f(\frac{1}{x})}{\left(\frac{x-1}{x}\right)^2}=$$

$$= \frac{(x-1)^2 - x^2 + x^2 f(\frac{1}{x})}{(x-1)^2} = \frac{1-2x+f(x)}{(1-x)^2}, \forall x \neq 0,1 \text{ [2]}$$

δ. Εξισώνοντας τα τελευταία μέλη των [1] και [2] προκύπτει

ότι $f(x) = x, \forall x \neq 0,1$ αλλά είχαμε ότι $f(0) = 0, f(1) = 1$ άρα

$f(x) = x, \forall x \in R$

9Γ14

α. Η g είναι γνήσια αύξουσα και έχει σύνολο τιμών το R

β. έχουμε $f(g(x)) \leq x \leq g(f(x))$ όπου x το g^{-1} τότε

$f(x) \leq g^{-1}(x) \leq g(f(g^{-1}(x)))$

ακόμη $f(g(x)) \leq x \leq g(f(x)) \Rightarrow g^{-1}(f(g(x))) \leq g^{-1}(x) \leq f(x)$ όπου

λάβαμε υπ όψη μας ότι η g^{-1} είναι γνήσια αύξουσα

Άρα $f(x) = g^{-1}(x)$

9Γ15

$f(g(f(x))) = f(x^3) = f^2(x)$ για $x = -1,0,1$ θα έπρεπε οι αριθμοί

$f(-1), f(0), f(1)$ να επαληθεύουν την $y = y^2 \ldots$

9Γ16

Ανταλλάσοντας τα x,y

$$3^x f(y) + 2^y f(x) = 3^y f(x) + 2^x f(y) \Rightarrow \frac{f(x)}{3^x - 2^x} = \frac{f(y)}{3^y - 2^y} \ldots$$

Ακόμη $f(0) = 0 \ldots$

9Γ17

Όπου $x = 0, y = 0 \Rightarrow x^2 f(x) = f(x^3), yf(y^2) = f(y^3)$ οπότε για

$x^3 = a, y^3 = b$ έχουμε $f(a+b) = f(a) + f(b), \forall a, b \in R$

Και από τις δυο πρώτες $xf(x) = f(x^2)$

$f((x+1)^2) = (x+1)f(x+1) = (x+1)(f(x) + f(1)) = xf(x) + f(x) + xf(1) + f(1)$
$f((x+1)^2) = f(x^2 + x + x + 1) = xf(x) + f(x) + f(x) + f(1)$

Άρα με επαλήθευση στην αρχική…

9Γ18

$f(x+1)+94 \le f(x+95) = f(x+5.19) \le f(x)+95 \Rightarrow f(x+1) \le f(x)+1$

Αντίστοιχα $f(x+1) \ge f(x)+1$

Τότε τα f(n) είναι σε αριθμητική πρόοδο με $1^{ο}$ όρο το 0 και διαφορά=1…

9Γ19

α. όπου y=2 και όχι όπου x=2 διότι έτσι f(x+2)=0 οπότε άμεσα είναι $f(x)=0, \forall x \in [2,+\infty)$

β. Έτσι παίρνουμε $f((2-y)f(y))=0, \forall y \in [0,2)$

γ. επειδή όμως $f(y) \ne 0$ στο [0,2) και

(2-y)f(y)≥0 ώστε να ορίζεται το

$f((2-y)f(y))=0, \forall y \in [0,2)$ συμπεραίνουμε

$(2\text{-}y)f(y) \ge 2 \Rightarrow f(y) \ge \frac{2}{2-y}$

Θα εμφανίσουμε f(2)=0 και στο β΄ μέλος θέτοντας όπου x το

$\frac{2}{f(y)} > 0$

Έτσι προκύπτει ότι $f(\frac{2}{f(y)}+y)=0$ Με ίδιο ισχυρισμό όπως πριν καταλήγουμε στην σχέση

$y+\frac{2}{f(y)} \ge 2 \Rightarrow ... \Rightarrow f(y) \le \frac{2}{2-y}, \forall y \in [0,2)$

Τελικά προέκυψε ότι $f(x)=\begin{cases} 0\ ,\ x \ge 2 \\ \frac{2}{2-x}, 0 \le x < 2 \end{cases}$

9Γ20

α. $x = y = 0 \ldots$

β,γ. όπου y το $a - x$ στην αρχική

$\Rightarrow 1/2 = f^2(x) + f^2(a-x) \overset{x \to -x}{\Rightarrow} 1/2 = f^2(-x) + f^2(a+x)$

όπου y το $-x \Rightarrow 1 = 2f(x)f(a-x) + 2f(-x)f(a+x)$ από τις 3 τελευταίες

$\big(f(x) - f(a-x)\big)^2 + \big(f(-x) - f(a+x)\big)^2 = 0 \ldots$

δ. από το β $\Rightarrow f(x+y) = f(x)f(y) + f(y)f(x) = 2f(x)f(y)$ και σε αυτήν

για $x = y = t/2 \Rightarrow f(t) \geq 0$

ακόμη σε αυτήν για $y = a - x \overset{\beta}{\Rightarrow} \frac{1}{2} = 2f^2(x)$ και λόγω του

προηγούμενου…

9Γ21

Έχουμε $w = x_0 + f(x_0) + x_0 f(x_0) = (1+x_0)(1+f(x_0)) - 1 > -1$

$\Rightarrow w \in S$

Παρατηρούμε ότι $f(w) = w$ [1]

Αν $w \neq 0 \Rightarrow \frac{f(w)}{w} = 1$ με w μοναδικό αφού η $\frac{f(x)}{x}$:1−1

Αν $f(0) \neq 0$ τότε $w = f(0) \neq 0$ και το w έχει δυο διαφορετικές τιμές

,το 0 και το f(0), που επαληθεύουν την εξίσωση $\frac{f(w)}{w} = 1$ άτοπο

αφού είναι 1- 1

Αν $f(0) = 0$ τότε w=0 και το 0 επαληθεύει την αρχική εξίσωση [1]

Άρα $w = 0 \Rightarrow f(x_0) = -\frac{x_0}{1+x_0}, \forall x_0 \in S$

9Γ22

α. θέτουμε όπου x το x+f(y) έτσι

$f(x) = f(f(y)) + (x + f(y))f(y) + f(x + f(y)) - 1$

Τότε $f(0)= f(f(y))+f^2(y)+f(f(y))-1$

άρα $f(x)=\frac{1+f(0)}{2}-\frac{x^2}{2}$ με $x=f(y)$

β. Αν $f(0)=0 \overset{x=y=0}{\Rightarrow} 0=-1$

γ. Όμως για y=0 στην αρχική δίνει

$f(x-f(0))-f(x)=xf(0)+f(f(0))-1$

Παρατηρούμε ότι η διαφορά δυο αριθμών, αφού $f(0)\neq 0$, του συνόλου τιμών είναι οποιοσδήποτε πραγματικός $xf(0)+f(f(0))-1$

δ. Ακόμη για $x=y_1$,$f(y)=y_2$ με y_1,y_2 στο σύνολο τιμών της f από την αρχική έχουμε

$f(y_1-y_2)=f(y_2)+y_1y_2+f(y_1)-1$

$\Leftrightarrow -\frac{(y_1-y_2)^2}{2}=-\frac{y_1^2}{2}-\frac{y_2^2}{2}+y_1y_2+\frac{1+f(0)}{2}-1\Leftrightarrow f(0)=1$

ε. Έτσι $f(x)=1-\frac{x^2}{2}$ με σύνολο τιμών το $(-\infty,1]$ οπότε μπορεί ο οποιοσδήποτε πραγματικός να γραφεί ως διαφορά δυο στοιχείων του Άρα πεδίο ορισμού όλο το R

9Γ23

Για $y=0\Rightarrow xf(x)=f(x^2)\Rightarrow yf(y)=f(y^2)$ οπότε αντικαθιστώντας στην αρχική είναι $f(x^2-y^2)=f(x^2)-f(y^2)$

Τώρα για $x,y\geq 0$ θέτουμε όπου x^2 το x και όπου y^2 το y άρα

f(x-y)=f(x)-f(y) και σε αυτήν όπου x το x+y οπότε f(x)=f(x+y)-f(y) δηλαδή f(x+y)= f(x)+f(y)

Δεν ενοχλεί το γεγονός ότι τα x,y είναι μη αρνητικά στην προηγούμενη σχέση, γιατί από την $xf(x)=f(x^2)$ εύκολα βγαίνει ότι f περιττή στο R οπότε η f(x+y)= f(x)+f(y) ισχύει σε όλο το R

Τώρα είναι

$f(x) + f(x - 1)= f(2x - 1) = f(x^2 - (x - 1)^2) = x f(x) - (x - 1) f(x - 1)$

$=x f(x - 1) + x f(1) - (x - 1) f(x - 1)$

$= x f(x - 1) + x f(1)- x f(x - 1)+f(x-1)$

οπότε θα έχουμε $f(x) = x f(1).=Ax$

9Δ1

α. $x = 1, y = 0 \ldots$

β. $y = 1 \ldots$

γ. επαγωγή για ακεραίους

δ. στο γ $x = 0 \Rightarrow f(n) = 2n + 1, n \in Z$ τώρα $y = b \in Z, xy = a \in Z$ δίνει

$f(x + b) + 2f(a) = 2 + f(x)f(b) \Rightarrow (f(x) + 2b) + 2(2a + 1) = 2 + f(x)(2b + 1)$

δηλαδή $f(x) = \frac{4a + 2b}{2b} = 2\frac{a}{b} + 1 = 2x + 1$ ακόμη και όταν x=0 λόγω του α ερωτήματος

9Δ2

α. όπου y=r=ρίζα έχουμε $f(x + f(r)) = f(x)f(r) \overset{f(r)=0}{\Rightarrow} f(x) = 0, \forall x \in R$

β. $f(y - f(y) + f(y)) = f(y - f(y))f(y) \overset{f(y)\neq 0}{\Rightarrow} f(y - f(y)) = 1$ [1]

Τώρα όπου y το y-f(y) στην αρχική

$f(x + f(y - f(y)) = f(x)f(y - f(y)) \overset{[1]}{\Rightarrow} f(x + 1) = f(x)$ [2]

γ. Τώρα επαγωγικά εύκολα για κάθε ακέραιο $n \Rightarrow f(n) = f(0)$ [3]

Θέτοντας τιμές στο x=0,1,2,…n ,γιατί η [2] θυμίζει διαφορά διαδοχικών όρων ακολουθίας, στην αρχική σχέση προκύπτει ότι θα πρέπει να ισχύει $f(nf(y)) = f(0)[f(y)]^n$ [4]

δ. Αφού όμως

$$f(y)\in Q \Rightarrow f(y)=\frac{a}{b} \Rightarrow a=bf(y) \Rightarrow f(a)=f(bf(y)) \overset{[4]}{=} f(0)[f(y)]^b \overset{[3]}{\Rightarrow}$$

$$f(a) \overset{[3]}{=} f(0)=f(0)[f(y)]^b \overset{[1]}{\Rightarrow} f(y)=1, \forall y\in Q$$

9Δ3

α. Θέτουμε f(0)=k για x=y=0 στην [1] παίρνουμε $f(k)=k^2$ [2], ενώ για y=0 $f(x^2+k)=f^2(x)$ [3] και για x=0 , y=x $f(f(x))=x+k^2$ [4] ακόμη για x=1 και y=0 $f(1+k)=f^2(1)$ [5].

β. Για x=k,y=1+k το αριστερό μέλος της [1] γίνεται ίσο με $f(k^2+f^2(1))$ λόγω της [5} ενώ το δεξιό της μέλος $1+k+f^2(k)=1+k+k^4$ λόγω της [2]

Για x=f(1) y=k το αριστερό μέλος της [1] γίνεται ίσο με $f(k^2+f^2(1))$ λόγω της [2] ενώ το δεξιό της μέλος $k+f(f(1))^2=k+(1+k^2)^2$ λόγω της [4]

Άρα $1+k+k^4= k+(1+k^2)^2$ τελικά k=f(0)=0

γ. Τώρα για k=0 οι [3],[4] γίνονται $f(x^2)=f^2(x)$ και f(f(x))=x [6]

δ. οπότε για y το f(y) στην [1] παίρνουμε λόγω των [6]

$f(x^2+y)=f(y)+f(x^2)$ άρα $f(x+y)=f(y)+f(x)$ με $x\geq 0$ [7]

ε. επειδή f(0)=f(x-x)=f(x)+f(-x) , ένας από τους x,-x είναι μη αρνητικός προκύπτει ότι η f είναι περιττή άρα η [7] ισχύει στο R

στ. Τελικά έστω y=f(x)>x άρα z=y-x>0 και f(z)=f(y)-f(x)=f(f(x))-y=x-y=-z

Αν y<x ,z=x-y=x-f(x)>0 και πάλι f(z)=f(x)-f(y)=y-f(y)=y-f(f(x))=y-x=-z

Άρα υπάρχει z>0: f(z)=-z<0

Για $z=v^2$ έχουμε $f(v^2)<0$ δηλαδή $f^2(v)<0$ άτοπο, οπότε f(x)=x στο R

9Δ4

α. f σταθερή =Α εύκολα βρίσκουμε ότι A = 0 ή A = 2

β. Τώρα έστω f όχι σταθερή Αν a=b=c=d=0 τότε εύκολα f(0)=0 η 2

Αν f(0)=2 για c=d=0 είναι από την αρχική f(a)+f(b)=1 άτοπο για a=0

Άρα f(0)=0 και προσπαθώντας να περιορίσουμε τις 4 μεταβλητές

b=d=0,a=x,c=y στην αρχική δίνει f(x)f(y)=f(xy) [1]

γ. Ακόμη για d=-a c=-b [f(a)+f(b)][f(-a)+f(-b)]=f(-a^2+b^2) οπότε ανταλλάσοντας τον ρόλο των a,b η f προκύπτει άρτια

δ. Από την [1] λοιπόν για $x = y = \sqrt{x}$ είναι $f(x) = f^2(\sqrt{x}) \geq 0$

ε. Για d=a,c=b $f(a^2 + b^2) = [f(a) + f(b)]^2 \geq f^2(a) = f(a^2)$ [2]

στ. θέτοντας $x = a^2 + b^2, y = b^2$ έχουμε ότι $x \geq y$ και από την

$[2]\, f(x) \geq f(y), \forall x \geq y \geq 0 \Rightarrow f \uparrow \text{στο } [0, +\infty)$

ζ. Ακόμη f(1)=f^2(1) από την[1] και αν f(1)=0 τότε

f(x)=f(x1)=f(x)f(1)=0 άτοπο άρα f(1)=1

Πράγματι για a=x ,b=c=d=1 παίρνουμε f(x-1)+f(x+1)=2(1+f(x)) [3]

η. Για x=n θα δείξουμε επαγωγικά ότι $f(n)=n^2$. Για n=0,n=1 αληθεύει

. Υποθέτουμε ότι $f(n-1)=(n-1)^2$, $f(n)=n^2$ οπότε αντικαθιστούμε στην

[3] και μετά τις λίγες πράξεις έχουμε $f(n+1)=(n+1)^2$

άρα $f(n) = n^2, \forall n \in N$ [4]

θ. σχέση που ισχύει και στο Z αφού η f είναι άρτια. Γενικεύουμε με την βοήθεια της [1] στο Q

$$f(\frac{m}{n}) = f(m\frac{1}{n}) = f(m)f(\frac{1}{n}) = m^2 f(\frac{1}{n}) = \frac{m^2}{n^2} n^2 f(\frac{1}{n}) = \frac{m^2}{n^2} f(n)f(\frac{1}{n}) =$$

$$= \left(\frac{m}{n}\right)^2 f(1) = \left(\frac{m}{n}\right)^2$$

Το πέρασμα στους άρρητους θα γίνει με την βοήθεια της μονοτονίας με τρόπο που μοιάζει με τον τρόπο προηγούμενης άσκησης

Έστω $0 \le f(x) < x^2 \Leftrightarrow \sqrt{f(x)} < x$ μεταξύ των πραγματικών $\sqrt{f(x)}, x$ υπάρχει ρητός q

$\Rightarrow \sqrt{f(x)} < q < x \Rightarrow f(x) < q^2 = f(q) \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} x \le q$ άτοπο άρα $f(x) \ge x^2$

Με ίδιο τρόπο αντίστοιχα έχουμε $f(x) \le x^2$ τελικά $f(x) = x^2$ όχι μόνον στο $[0,+\infty)$ αλλά σε όλο το R αφού η f είναι άρτια

9Δ5

Αφού $f(x) \in N$ το σύνολο τιμών θα έχει ελάχιστο στοιχείο έστω $f(x)$ και αν δεν είναι σταθερή ονομάζουμε $f(y)$ τον διαδοχικό επόμενο όρο του $f(x)$ (δηλαδή ανάμεσά τους δεν υπάρχει κανένας φυσικός του συνόλου τιμών).Όμως

$$f(x) = \frac{x+y}{x+y} f(x) = \frac{xf(x)+yf(x)}{x+y} < \frac{xf(y)+yf(x)}{x+y} = f(x^2+y^2) < f(y)$$

άτοπο αφού ο $f(x^2+y^2)$ βρέθηκε ανάμεσα στα $f(x), f(y)$

9Δ6

Αν $f(n) < n, \forall n \in N^*$ τότε επειδή τα $f(1), f(2), ..., f(n)$ είναι διαφορετικοί μεταξύ τους θετικοί ακέραιοι , λόγω του 1-1 κάποιος από αυτούς θα έπρεπε να είναι >n άτοπο

Άρα $f(n) \ge n, \forall n \in N^* \Rightarrow \frac{n+f(n)}{2} \le f(n) \Rightarrow f(f(n)) \le f(n)$

Αν δεν ισχύει το ίσον τότε θέτοντας $f(n) = m \in N^*$ παίρνουμε $f(m) < m$ που είδαμε ότι είναι άτοπο λόγω της αρχής του περιστερεώνα

Άρα $f(n) = n, \forall n \in N^*$ τύπος που επαληθεύει την αρχική σχέση

9Δ7

α. $y = 0 \Rightarrow f(f(0)+x) = f(x) \overset{f\,1-1}{\Rightarrow} f(0) = 0$

$f(f(y)+0)=y+f(0)=y$

Όπου y το f(y) $f(f(f(y))+x)=f(y)+f(x)\Rightarrow f(x+y)=f(y)+f(x)$

επειδή είναι μονότονη είναι γραμμική έχει αποδειχτεί σε προηγούμενη άσκηση

β. Για n>1 $f(f(y))=y^n$ Αν η άρτιος αύξουσα = όχι μονότονη άτοπο

Αν η περιττός η y^n είναι επί άρα και η fof άρα και η f υπάρχει b:

$b^n=f(y)$, όμως $b^n=f(f(b))$ άρα $f(f(b)))=f(y)$ ή $f(b)=y$ και

$f(f(b)+x)=b^n+f(x)\Rightarrow f(y+x)=f(y)+f(x)$ άρα f(x)=ax μαζί με την $f(f(y))=y^n$ προκύπτει… το n=1

Β. ΟΡΙΑ-ΣΥΝΕΧΕΙΑ

(1) ΜΟΡΦΗ 0/0 , Α/0

(2) ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

(3) ΘΕΤΩ

(4) ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ

(5) ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΟΡΙΑ

(6) ΟΡΙΑ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

(7) ΣΥΝΕΧΕΙΑ

(8) ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

(9) BOLZANO

(10) ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΟΙ ΤΥΠΟΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β

2Β6

$0<$ζητούμενο$<f(x)+\frac{1}{x}$

2Γ1

Αν $f(x)\le 1$ κοντά στο άπειρο τότε… άρα $2f^3(x)>x\Rightarrow\ldots$

$\frac{f(x)}{x^3}=\frac{1}{1+f^2(x)}\to\ldots$ και $\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3=1-\frac{f(x)}{x^3}\to\ldots$

4Β11

Θέτουμε x=1+y και $(1+y)^n=1+ny+\frac{n(n-1)}{2}y^2+y^3Q(y)$ οπου Q είναι πολυώνυμο του y

5Γ1

Θέτουμε $x=\eta\mu u\Rightarrow f_1(x)=\eta\mu 3u\Rightarrow f_2(x)=\eta\mu(3^2u)\Rightarrow\ldots$ επαγωγικά…

Έχουμε να βρούμε το $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\eta\mu(3^n u)}{\eta\mu u}=\ldots$

6Γ1

Χρησιμοποιήστε την $|\eta\mu a-\eta\mu b|\le|a-b|$ και προχωρήστε με συζυγή στο β μέλος …

6Γ2

Ίδια με την προηγούμενη

6Γ3

Διαιρούμε με b_n^x και παίρνουμε όρια όταν $x\to+\infty$ … Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο μέχρι το πρώτο b

7Β5

Συμπληρώνουμε τα τέλεια τετράγωνα και χρησιμοποιούμε βασική άσκηση ορίων

9Β4

Δεν μπορεί όλοι οι όροι του αθροίσματος να είναι ομόσημοι…

9Β18

$P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$, $P(1) = 0, P(0) > 0$ άρα

P(x)=(x-1)Q(x) με Q(1)>0 τότε $0 < Q(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{P(x)}{x-1}$ άρα υπάρχει x_0

στο (0,1): $\frac{P(x_0)}{x_0 - 1} > 0 \Rightarrow P(x_0) < 0$ …

9Β19

Θέτουμε $w(x) = 1/2[g(x) + g(-x)]$

Τότε w(A)=A αφού το A=[-α,α] οπότε υπάρχει r : w(r)=0

αν η ρίζα r είναι το 0 τότε g(0)=0 και f(0)=0 αφού f περιττή άρα …

αν $r \neq 0$ τότε

$f(g(-r)) + f(-r) + g(-r) = f(-g(r)) - f(r) - g(r) = -(f(g(r)) + f(r) + g(r))$

Bolzano…

9Β20

Ι)Αφού δεν είναι μονότονη θα υπάρχει διάταξη που δεν θα ικανοποιεί τις ανισότητες της αύξουσας ούτε τις φθίνουσας πχ

$f(a) < f(c) < f(b)$

Με Θ.εδιαμέσων τιμών στο [α,β]… άτοπο

ΙΙ) Αν f 1-1 και συνεχής τότε f γνήσια μονότονη, άρα fof= γνήσια αύξουσα…

ΙΙΙ) Αν f 1-1 και συνεχής τότε f γνήσια μονότονη, οπότε αν ω>0

$f(a) < f(b) < f(c) < f(d)$ ή ανάποδα

9Γ1

Η f θα εχει και MAX f(a) και MIN f(b)

Αν ίσχυε το ζητούμενο θα είχε MAX f(a)=f(c) και MIN f(b)=f(d)

Με Θ.ενδιαμέσων τιμών στα [a,b],[b,c],[c,d] η όποια άλλη διάταξη έχουν τα a,b,c,d… άτοπο

9Γ2

Έστω *f* συνεχής. Για $x = 0 \Rightarrow f(1) = -2$. Από θεώρημα ενδιαμέσων τιμών υπάρχει α στο (0,1) : f(α)=0. Για x=α στην αρχική α=2.Τώρα η f είναι 1-1 άρα α μοναδικό, άτοπο γιατί το 2 δεν βρίσκεται στο (0,1)

9Γ3

Θέτω $f(x) = ax^3 + bx^2 - (4a + 3b + 2c)x + c$ και έστω ότι η f έχει τρεις ακέραιες ρίζες

$f(-1) = 3a + 4b + 3c, f(0) = c, f(1) = -3a - 2b - c, f(2) = -2b - 3c$ άρα $f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) = 0$

Έστω πχ $f(0) > 0$ τότε πρέπει $f(-1) > 0$ γιατί διαφορετικά η f θα είχε μη ακέραια ρίζα. Για τον ίδιο λόγο $f(1) > 0$ και όμοια $f(2) > 0$. Άρα $f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) > 0 \Rightarrow 0 > 0$ άτοπο Αντίστοιχα και αν $f(0) < 0$

9Δ1

Η εξίσωση $f(x) = ax \overset{x \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{f(x)}{x} = a$ Για να έχει λύση για κάθε a>0

πρέπει το σύνολο τιμών της $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ να είναι το $(0, +\infty)$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι δεν ισχύει το ζητούμενο. Τότε το πεπερασμένο πλήθος των ριζών της $g(x) = a$ θα «χωρέσει» σε ένα διάστημα [1,b] και έξω από αυτό η $g(x) - a$ θα έχει σταθερό πρόσημο πχ θετικό

Όμως στο [1,b] η συνεχής $g(x)-a$ θα έχει μέγιστο Μ και ελάχιστο μ. Τότε

$g(x)\geq \mu, \forall x\in[1,b]$ και $g(x)>a>0, \forall x>b$ συνεπώς σύνολο τιμών της g δεν μπορεί να είναι το $(0,+\infty)$. Ανάλογα αν το πρόσημο της $g(x)-a$ είναι αρνητικό

10Β6

Θέτουμε $g(x)=f(\sqrt[n]{x})$

10Β9

Επαγωγικά $\phi(x)=\phi(\frac{x}{2^n})$ όριο του $n\to\infty$…

10Γ1

Για $x=y\Rightarrow 2xf(x)=2\sqrt{x}f(x^2)\Rightarrow \frac{f(x)}{\sqrt{x}}=\frac{f(x^2)}{x}$

Θέτουμε $g(x)=\frac{f(x)}{\sqrt{x}}$ Επαγωγικά $g(x)=g(x^{\frac{1}{2^n}})$ όριο του $n\to\infty$…

10Γ2

Για $x=y=0\Rightarrow 2f(f(0))=f(0)$

Για $\begin{matrix} y=0\Rightarrow f(x)=f(f(x))+f(f(0)) \\ x=0\Rightarrow f(y)=f(f(y))+f(f(0)) \end{matrix}$ με πρόσθεση κατά μέλη

$f(x)+f(y)=f(x+y)+f(0)\Rightarrow (f(x)-f(0))+(f(y)-f(0))=f(x+y)-f(0)$

Άρα…

10Γ3

$f(x_1+x_2+...+x_n)=f_1(x_1)+f_2(x_2)+...+f_n(x_n)$ [1]

Για $x_2=x_3=\ldots=x_n=0$ η [1] δίνει $f(x_1)=f_1(x_1)+f_2(0)+f_3(0)+\ldots+f_n(0)$ [2]

Για $x_1=x_3=\ldots=x_n=0$ η [1] δίνει $f(x_2)=f_1(0)+f_2(x_2)+f_3(0)+\ldots+f_n(0)$

…

Για $x_1=x_2=\ldots=x_{n-1}=0$ η [1] δίνει $f(x_n)=f_1(0)+f_2(0)+f_3(0)+\ldots+f_n(x_n)$

$$f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)=$$
$$=f_1(x_1)+f_2(x_2)+...+f_n(x_n)+(n-1)[f_1(0)+f_2(0)+...+f_n(0)]$$
$$f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)=f(x_1+x_2+...+x_n)+(n-1)f(0)$$

Λόγω της [1]

$$f(x_1)+f(x_2)+\underbrace{f(0)+...+f(0)}_{n-2}=f(x_1+x_2)+(n-1)f(0)$$
$$\Leftrightarrow f(x_1)+f(x_2)+(n-2)f(0)=f(x_1+x_2)+(n-1)f(0)$$
$$\Leftrightarrow [f(x_1)-f(0)]+[f(x_2)-f(0)]=[f(x_1+x_2)-f(0)]$$

Αν θέσουμε $g(x)=f(x)-f(0)$ η προηγούμενη σχέση μετατρέπεται στην γνωστή συναρτησιακή σχέση του Cauchy

$g(x_1)+g(x_2)=g(x_1+x_2)$ και επειδή g συνεχής είναι γνωστό ότι

$$g(x)=ax \Rightarrow$$
$$f(x)=ax+b, b=f(0)$$

Τότε από τις σχέσεις [2] έχουμε

$$f_i(x)=ax+b_i \text{ , } b_i=f_i(0) \text{ , } \sum_{i=1}^{n} b_i=b=f(0)$$

10Δ1

Θέτουμε x=συνφ οπότε ο τύπος γίνεται

f(συν2φ)=2συνφf(συνφ) [1]

Όπου x το –x στην αρχική θα πάρουμε 2x(f(-x)+f(x))=0 οπότε για $x \neq 0$ η συνάρτηση είναι περιττή και η συνέχεια επιτρέπει να πούμε ότι f(0)=0 και μετά για x=0

f(1)=-f(-1)=0

Τώρα μπορούμε να περιοριστούμε στο (0,1) ή για την μεταβλητή φ στο (0,π/2) έτσι αν αντικαταστήσουμε την [2] στην [1] και θέσουμε

$g(\varphi)=\frac{f(\sigma\upsilon\nu\varphi)}{\eta\mu\varphi}, \varphi \in (0,\frac{\pi}{2}]$ και g(0)=0 θα πάρουμε

$$g(2\varphi)=g(\varphi), \varphi \in [0,\frac{\pi}{2}] [3]$$

Τώρα επαγωγικά εύκολα είναι

$g(\varphi)=g(\frac{\varphi}{2^n})\Rightarrow g(\varphi)=\lim\limits_{n\to+\infty} g(\frac{\varphi}{2^n})=g(0)=0$,λόγω του ότι η g είναι συνεχής, προκύπτει ότι η g άρα και f είναι η μηδενική συνάρτηση στο [0,1] και λόγω συμμετρίας σε όλο το [-1,1]

10Δ2

Από την εκφώνηση είναι $|f(x)-f(y)|\le|x-y|,\forall x,y\in R$.

Άρα η συνάρτηση είναι συνεχής.

Έστω $f(b),f(a)$ το min και max αυτής. στο [x,y] σε κάποια $b,a\in[x,y]$ Τότε $f([x,y])=[f(b),f(a)]$ οπότε

$y-x=f(a)-f(b)=|f(a)-f(b)|\le|a-b|\le y-x$.

Άρα το α είναι ένα από τα x,y και το b το άλλο αφού $b,a\in[x,y]$ και αφού ισχύει το «=»

Συνεπώς η συνάρτηση είναι μονότονη γιατί $\forall x<y\Rightarrow\begin{cases}f(x)<f(y)\\f(y)<f(x)\end{cases}$ ή

οπότε αν $f\uparrow\Rightarrow f(x)-f(y)=x-y\Rightarrow f(x)-x=f(y)-y$ που σημαίνει ότι η $f(x)-x$ είναι σταθερή δηλαδή $f(x)=c+x$

Αντίστοιχα όταν είναι φθίνουσα $f(x)=c-x$

10Δ3

$f(x+y)-f(x)>yf^2(x)\ge0$ άρα f γνήσια αύξουσα και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

Άρα $\forall x\ge a>0\Rightarrow f(x)>0$

Θεωρούμε την ακολουθία $x_{n+1}=x_n+\frac{1}{f(x_n)},y_n=f(x_n)$

Επειδή για $y=\frac{1}{f(x)}\Rightarrow f\left(x+\frac{1}{f(x)}\right)>2f(x)\overset{x=x_n}{\Rightarrow}y_{n+1}>2y_n$

τότε $y_n > 2^n y_0$ οπότε

$$x_{n+1} - x_n \le \frac{1}{y_n} = \frac{1}{2^n y_0} \Rightarrow x_{n+1} - a < \frac{2}{y_0} \Rightarrow f(x_{n+1}) \le f(a + \frac{2}{y_0})$$ άρα

$y_n \le M$ άτοπο

10Δ4

Αν $f(x) \ne 0, \forall x \in R$ διαιρούμε με $f(x)f(y)$ και θέτουμε

$1/f = g, h(x) = g(x) - g(0)$ καταλήγουμε στην

$h(x+y) = h(x) + h(y) \ldots$

Αν $f(b) = 0$ Δείχνουμε με άτοπο ότι πρόκειται για την μηδενική συνάρτηση. Έστω ότι $\exists a : f(a) \ne 0$ Θεωρούμε

$$y = b, x = a \Rightarrow f(\frac{a+b}{2}) \Rightarrow f(x_1) = 0$$

$$y = x_1, x = a \Rightarrow f(\frac{x_1 + a}{2}) = 0 \Rightarrow f(x_2) = 0 \ldots$$ ορίζουμε λοιπόν

$$2x_{n+1} = x_n + a \Rightarrow x_n = a + \frac{x_0 - a}{2^n} \to a$$ και προέκυψε ότι $f(x_n) = 0$

Επειδή η $x_n \to a$ από την συνέχεια θα έπρεπε $0 = f(x_n) \to f(a) \ne 0$

άτοπο

10Δ5

Η f είναι 1-1 διότι αν

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) + af(x_1) = f(f(x_2) + af(x_2) \Rightarrow$$
$$bx_1 = bx_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Επειδή είναι συνεχής και 1-1 είναι γνήσια μονότονη

άρα $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ή $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = m \in R$ Αυτή η δεύτερη περίπτωση απορρίπτεται γιατί αλλιώς η $f(f(x)) + af(x)$ είναι φραγμένη κοντά στο - άπειρο ενώ η bx δεν είναι. Τότε $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ και κατά συνέπεια η f είναι γνήσια αύξουσα με $f(R) = R$

Θέτουμε $x_0 = x$, $x_1 = f(x)$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in N$. Τότε από την αρχική προκύπτει $x_2 + ax_1 = bx_0$ και θέτοντας όπου $x \to f(x)$ παίρνουμε $x_3 + ax_2 = bx_1$ κ.ο.κ οπότε τελικά

$x_{n+2} + ax_{n+1} = bx_n \Leftrightarrow x_{n+2} + ax_{n+1} - bx_n = 0$

Άρα ο νιοστός της όρος είναι της μορφής $x_n = Ap^n + Bq^n$ όπου p,q οι ρίζες του τριωνύμου $x^2 + ax - b = 0$. Επειδή a , b >0 οι ρίζες είναι πραγματικές , ετερόσημες και απόλυτα μεγαλύτερη η αρνητική q. Ακόμη τα A, B προσδιορίζονται από τους αρχικούς όρους x_1, x_0

Επαγωγικά εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι αφού η f είναι γνήσια αύξουσα τότε η x_n που ορίστηκε από την $x_{n+1} = f(x_n)$ είναι γνήσια μονότονη

Τότε θα πρέπει

$x_{n+1} - x_n > 0 (\text{ή} < 0) \Leftrightarrow Ap^n(p-1) + Bq^n(q-1) > 0 (\text{ή} < 0)$. Αφού p>0 η τελευταία σχέση γίνεται $A(p-1) + B\left(\frac{q}{p}\right)^n (q-1) > 0 (\text{ή} < 0)$ η ακόμη $B\left(\frac{q}{p}\right)^n (q-1) > -A(p-1) (\text{ή} < 0)$ Αυτή όμως για $B \neq 0$ είναι αδύνατη διότι αφού $pq < 0$, $\left|\frac{q}{p}\right| > 1$ το πρώτο μέλος δεν είναι ούτε άνω ούτε κάτω φραγμένο σε αντίθεση με ότι δηλώνει η σχέση όποια φορά ανίσωσης και αν ισχύει. Άρα B=0

Όμως $x_0 = A + B, x_1 = Ap + Bq$. Τότε λύνοντας αυτό το σύστημα ως προς A,B και απαιτώντας B=0 προκύπτει

$x_1 = x_0 p \Leftrightarrow f(x) = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2a} x$

10Δ6

Η άσκηση έχει πολλά κοινά με την προηγούμενη οπότε ας ξεκινήσουμε όπως πριν

Η συνάρτηση f είναι 1-1 διότι

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow f(f(x_1))=f(f(x_2))\Rightarrow f(f(x_1))-4f(x_1)=f(f(x_2))-4f(x_2)\Rightarrow -4x_1=-4x_2\Rightarrow x_1=x_2$

Αφού η f είναι 1-1 και συνεχής θα είναι γνήσια μονότονη

Αν $f\downarrow$ στο R τότε η $f(f(x))\uparrow$ στο R και η συνάρτηση με τύπο $4x\uparrow$ στο R οπότε και το άθροισμά τους θα είναι γνήσια αύξουσα συνάρτηση στο R που σημαίνει ότι και η $f\uparrow$ στο R , αντίφαση.

Συνεπώς $f\uparrow$ στο R

Αφού $f\uparrow$ στο R τότε : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a\in R$ ή $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Αν ισχύει η πρώτη περίπτωση τότε παίρνοντας όρια στην αρχική σχέση της εκφώνησης θα έχουμε

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(f(x))+4x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4f(x)\right)\Rightarrow +\infty=4f(a)$ άτοπο . Άρα

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ και με ανάλογο τρόπο προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

Τότε $f(R)=R$, $f:1-1$ συνεπώς f αντιστρέψιμη και $f\uparrow$ στο R

Θέτουμε $x_0=x$, $x_1=f(x)$, $x_{n+1}=f(x_n)$, $n\in N$. Τότε από την αρχική προκύπτει $x_2+4x_0=4x_1$ και θέτοντας όπου $x\to f(x)$ παίρνουμε $x_3+4x_1=4x_2$ κ.ο.κ οπότε τελικά

$x_{n+2}+4x_n=4x_{n+1}\Leftrightarrow x_{n+2}-2x_{n+1}=2(x_{n+1}-2x_n)$ που σημαίνει ότι η $x_{n+1}-2x_n$ είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο 2.. Τότε

$x_{n+1}-2x_n=(x_1-2x_0)2^n$ Άρα θα είναι

$\frac{x_{n+1}-2x_n}{2^n}=x_1-2x_0\Leftrightarrow \frac{x_{n+1}}{2^n}-\frac{x_n}{2^{n-1}}=x_1-2x_0$ οπότε η ακολουθία

$\frac{x_n}{2^{n-1}}, n \in N$ είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά το $x_1 - 2x_0$ που σημαίνει ότι ο νιοστός της όρος θα είναι

$\frac{x_n}{2^{n-1}} = \frac{x_0}{2^{-1}} + n(x_1 - 2x_0) \Rightarrow x_n = \left(2x_0 + n(x_1 - 2x_0)\right)2^{n-1}$ Δηλαδή

τελικά $x_n = \left(x_0 + n(\frac{x_1}{2} - x_0)\right)2^n$, $n \in N$

Συνεχίζουμε θέτοντας στην αρχική όπου x την $f^{-1}(x)$ οπότε παίρνουμε την σχέση $f(x) + 4f^{-1}(x) = 4x$

Πάλι στην προηγούμενη θέτουμε όπου x την $f^{-1}(x)$ οπότε προκύπτει $x + 4f^{-1}(f^{-1}(x)) = 4f^{-1}(x)$

Θέτουμε $y_0 = x$, $y_1 = f^{-1}(x)$, $y_{n+1} = f^{-1}(x_n)$, $n \in N$.Όπως και πριν παίρνουμε $4y_{n+2} + y_n = 4y_{n+1} \Leftrightarrow 2y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{1}{2}\left(2y_{n+1} - y_n\right)$ που δηλώνει ότι η $2y_{n+1} - y_n$ είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο το ½ ενώ με αντίστοιχο τρόπο η $2^n y_n$ είναι αριθμητική με διαφορά το $2y_1 - y_0$ οπότε τελικά ο νιοστός όρος της y_n θα δίνεται από τον τύπο

$y_n = \left(y_0 + n(2y_1 - y_0)\right)\frac{1}{2^n}$

Θα συνδυάσουμε τώρα τα δυο συμπεράσματα που αφορούν τις δυο ακολουθίες

Ας υποθέσουμε ότι $x_0 < x_0'$. Τότε ορίζονται δυο ακολουθίες x_n, x_n' με τύπους που δίνονται από τις σχέσεις

$x_n = \left(x_0 + n(\frac{x_1}{2} - x_0)\right)2^n$, $x_n' = \left(x_0' + n(\frac{x_1'}{2} - x_0')\right)2^n$. Θα εκμεταλλευτούμε την μονοτονία της f την οποία δείξαμε γνήσια

αύξουσα. Έχουμε

$x_0 < x_0' \Rightarrow f(x_0) < f(x_0') \Rightarrow x_1 < x_1' \Rightarrow f(x_1) < f(x_1') \Rightarrow x_2 < x_2' \Rightarrow$
$... \Rightarrow x_n < x_n'$

Όμως

$$x_n - x_n' = \left((x_0 - x_0') + n[\frac{x_1 - x_1'}{2} - (x_0 - x_0')] \right) 2^n < 0 \Rightarrow$$

$$(x_0 - x_0') + n[\frac{x_1 - x_1'}{2} - (x_0 - x_0')] < 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x_1 - x_1'}{2} - (x_0 - x_0') \le 0$$

Αλλιώς $(x_0 - x_0') + n[\frac{x_1 - x_1'}{2} - (x_0 - x_0')] \to +\infty$ και τελικά γίνεται

θετική και όχι αρνητική όπως αποδείξαμε πριν .

Επειδή $f(x) + 4f^{-1}(x) = 4x \Rightarrow x_1 + 4y_1 = 4x_0 = 4y_0$ ο τύπος της

ακολουθίας y_n γίνεται $y_n = \left(x_0 + n(x_0 - \frac{x_1}{2}) \right) \frac{1}{2^n}$

Για τα ίδια $x_0 < x_0'$ ορίζονται όμοια οι ακολουθίες y_n, y_n' και αφού

και η $f^{-1} \uparrow$ θα είναι $y_n < y_n'$ που καταλήγει ακριβώς με ίδιο τρόπο

στην παρακάτω ανισότητα

$$(x_0 - x_0') - \frac{x_1 - x_1'}{2} \le 0$$

Τελικά

$$(x_0 - x_0') - \frac{x_1 - x_1'}{2} = 0 \Rightarrow x_0 - \frac{x_1}{2} = x_0' - \frac{x_1'}{2} \Rightarrow x_0 - \frac{f(x_0)}{2} = x_0' - \frac{f(x_0')}{2}, \forall x_0, x_0' \Rightarrow$$

$$x - \frac{f(x)}{2} = c \Rightarrow f(x) = 2(x - c)$$

Γ. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

(1) ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΟΤΗΤΑ

(2) ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΕΙΣ

(3) ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

(4) ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΡΥΘΜΟ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

(5) ROLLE , Θ.Μ.Τ

(6) ΕΥΡΕΣΗ ΤΥΠΩΝ ΜΕ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

(7) ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

(8) ΑΚΡΟΤΑΤΑ

(9) ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ ΑΚΡΟΤΑΤΑ

(10) ΡΙΖΕΣ

(11) ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

(12) ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ

(13) DE L' HOSPITAL

(14) ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

(15) ΜΕΛΕΤΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Γ

1B18

Όπου x το x-y $\Rightarrow f(x)-f(y)\le f(x-y)$

Όπου y το y-x $\Rightarrow f(x)-f(y)\ge -f(y-x)$

Άρα με $x=y+h, h>0 \Rightarrow$

$$-(f(-h)-f(0))\le f(y+h)-f(y)\le f(h)-f(0) \overset{h>0}{\Rightarrow}$$
$$\frac{f(-h)-f(0)}{-h}\le \frac{f(y+h)-f(y)}{h}\le \frac{f(h)-f(0)}{h}\Rightarrow$$
$$1\le f'(y+)\le 1$$

Όμοια…

2B12

Αν $f'(x_0)=0 \Rightarrow f(x_0)=\pm 1$ άτοπο τότε

$$\left(f(x)\right)^2+\left(f'(x)\right)^2=1\Rightarrow 2f'(x)\left(f(x)+f''(x)\right)=0 \overset{f'(x)\neq 0}{\Rightarrow} f''(x)=-f(x)$$

Άρα η $f''(x)$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη…

2B19

Αν $p'(r)+ap(r)=0 \Rightarrow p(r)\neq 0$ αλλιώς r=διπλή ρίζα του P…

$$-a=\frac{p'(r)}{p(r)}=\frac{1}{r-a_1}+\ldots+\frac{1}{r-a_n}\Rightarrow -a=\frac{1}{x+iy-a_1}+\ldots+\frac{1}{x+iy-a_n}$$
$$\Rightarrow \frac{(x-a_1)-iy}{(x-a_1)^2+y^2}+\ldots+\frac{(x-a_n)-iy}{(x-a_n)^2+y^2}=-a\Rightarrow y=0$$

2B26

Παραγωγίστε

2B27

Από την διαίρεση

$$P(x)=P'(x)\left(\frac{1}{n}x-b\right)\Rightarrow \frac{P'(x)}{P(x)}=\frac{n}{x-nb}=\frac{1}{x-a_1}+\ldots+\frac{1}{x-a_n}$$ Για να

είναι ίσες οι συναρτήσεις $\frac{n}{x-nb}, \frac{1}{x-a_1}+...+\frac{1}{x-a_n}$ πρέπει να έχουν

ίδιο Π.Ο άρα $a_1=a_2=...=a_n=nb=B \Rightarrow P(x)=c(x-B)^n$

2Β28

$p(x)=a_n x^n+\underbrace{q_{n-1}(x)}_{n-1\text{βαθμού}}$ και συνεχίζουμε ομοίως…

2Β31

$\ln f(x)+\ln g(x)=x \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{g'(x)}{g(x)}=1$

Αρκεί $4f'(x)g'(x) \geq f(x)g(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \frac{g'(x)}{g(x)} \geq \frac{1}{4} \ldots$

2Γ1

Για $n=0, p_0(x)=1$

Έστω

$f^{(k)}(x)=x^{a-2k}e^{-\frac{1}{x}}p_k(x) \Rightarrow$

$f^{(k+1)}(x)=x^{a-2k-2}e^{-\frac{1}{x}}\left(\left(1+(a-2n)x\right)p_k(x)+x^2p_k'(x)\right)$

Το $\left(\left(1+(a-2n)x\right)p_k(x)+x^2p_k'(x)\right.$ είναι πολυώνυμο κ+1 βαθμού αν

το $p_k(x)$ είναι πολυώνυμο κ βαθμού

2Γ2

Για $n=0, p_0(x)=1$

Έστω

$f^{(k)}(x)=\frac{p_k(x)}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}} \Rightarrow$

$f^{(k+1)}(x)=\frac{(1+x^2)p_k'(x)-(1+2k)xp_k(x)}{(1+x^2)^{k+\frac{3}{2}}}$

Το $(1+x^2)p_k'(x)-(1+2k)xp_k(x)$ είναι πολυώνυμο κ+1 βαθμού αν το $p_k(x)$ είναι πολυώνυμο κ βαθμού αφού κάνουμε έλεγχο στον μεγιστοβάθμιο…

2Γ3

Για $n=0$ ισχύει

Έστω $\left(x^{n-1}e^{1/x}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{1}{x^{n+1}}e^{1/x}$ τότε

$\left(x^n e^{1/x}\right)^{(n+1)}=\left(x(x^{n-1}e^{1/x})\right)^{(n+1)}$ εύκολα όμως δείχνουμε ότι

$(xg(x))^{(n+1)}=(n+1)g^{(n)}(x)+xg^{(n+1)}(x)$ οπότε

$$\left(x(x^{n-1}e^{1/x})\right)^{(n+1)}=(n+1)(x^{n-1}e^{1/x})^{(n)}+x\left((x^{n-1}e^{1/x})^{(n)}\right)'=$$

$$=(n+1)(-1)^n\frac{1}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}+x(-1)^{n+1}\frac{1}{x^{n+2}}e^{\frac{1}{x}}=$$

…

2Γ4

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ άρα ν>μ όπου ν=βαθ(P) ,μ=βαθ(Q)

$$\ln x=\frac{Q(x)W(x)+U(x)}{Q(x)}=W(x)+\frac{U(x)}{Q(x)}\ (1)\Rightarrow$$

$$\frac{1}{x}=W'(x)+\frac{U'(x)Q(x)-U(x)Q'(x)}{Q^2(x)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}W'(x)+\frac{U'(x)Q(x)-U(x)Q'(x)}{Q^2(x)}\Rightarrow 0=\lim_{x\to+\infty}W'(x)+0$$

$$\overset{W'=\pi o\lambda/\mu o}{\Rightarrow}\ W'(x)=0\Rightarrow W(x)=\sigma\tau\alpha\theta.\ \ \alpha\rho\alpha\ (1)\ln x=c+\frac{U(x)}{Q(x)}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\ln x=c+\lim_{x\to+\infty}\frac{U(x)}{Q(x)}\overset{\beta\alpha\theta U<\beta\alpha\theta Q}{\Rightarrow}\ +\infty=c+0$$

Άτοπο

2Γ5

Αν $f(\xi)=0 \Rightarrow p(\xi)\neq 0$ αφού οι ρίζες του p είναι απλές

$$f(\xi)=0 \Rightarrow \frac{p'(\xi)}{p(\xi)}=\frac{1}{k} \Rightarrow \frac{1}{\xi-r_1}+\ldots+\frac{1}{\xi-r_n}=\frac{1}{k} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{|\xi-r_1|}+\ldots+\frac{1}{|\xi-r_n|}\geq\frac{1}{|k|} \Rightarrow$$

Αν

$$|\xi|>R+n|k| \Rightarrow |\xi|>|r_i|+n|k| \Rightarrow |\xi-r_i|>n|k| \Rightarrow$$

$$\frac{1}{|\xi-r_1|}+\ldots+\frac{1}{|\xi-r_n|}<n\frac{1}{n|k|}=\frac{1}{|k|}$$

Άτοπο άρα…

Αν

$$\xi=a+bi \Rightarrow |\xi-r_i|=\sqrt{(a-r_i)^2+b^2}\geq|b| \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|\xi-r_i|}\leq\frac{n}{|b|} \Rightarrow \ldots$$

$$\frac{1}{|k|}\leq\frac{n}{|b|} \Rightarrow$$

4Β7

$$\widehat{MAx}-\widehat{OMA}=\widehat{MOA}=\phi \Rightarrow \varepsilon\phi\phi=\frac{2x-\frac{x^2}{x}}{1+2x\frac{x^2}{x}}=\frac{x}{1+2x^2}, x>0$$

Από το σύνολο τιμών της $\frac{x}{1+2x^2}$ βρίσκουμε ότι έχει ΜΑΧ στο

$x=\frac{\sqrt{2}}{4}$ και από την εξίσωση εφαπτομένης στο Μ $x_A=\frac{x}{2}$. Τώρα

$$\frac{(1-2x^2(t))x'(t)}{(1+2x^2(t))^2}=(\varepsilon\phi\phi(t))'=\phi'(t)(1+\varepsilon\phi^2\phi)=\phi'(t)(1+\frac{x(t)}{1+2x^2(t)})$$

και επειδή $x'_A(t_0)=3/2 \Rightarrow x'(t_0)=3$ όταν $x(t_0)=\frac{\sqrt{2}}{4}$ …

4B11

Ονομάζουμε Κ το κέντρο του κύκλου, Μ την τομή των ΑΒ,ΟΚ, Ρ και Σ τις προβολές του Μ στις εφαπτόμενες ΟΓ και ΟΔ αντίστοιχα, και Λ ,Ν ις προβολές του Κ στις (δ),(ε) ενώ τις γωνίες ΚΟΔ=ΚΟΓ=θ, ΔΟΝ=ΜΒΟ=φ και ΡΜΑ=ω τότε αν $OM = x = 2t$,

$OK = \sqrt{4 + x^2}$, $\varepsilon\phi(\theta + \phi) = \frac{2}{x}$, $\eta\mu\theta = \frac{1}{\sqrt{4 + x^2}}$ οπότε από τις δυο τελευταίες βρίσκουμε την εφφ συναρτήσει του x και έτσι και το ημφ.

Όμως $\eta\mu\phi = \frac{2}{MB} \Rightarrow MB = f(t) \ldots$

$\omega = 90 - 2\theta - \varphi, \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{2}{MA} \Rightarrow MA = g(t) \ldots$

Παραγωγίζουμε το $AB = f(t) + g(t)$

5B2

$\varepsilon\phi\xi = \frac{\eta\mu\xi}{\sigma\upsilon\nu\xi}$ μετά ομώνυμα και θέτω…

5B8

Αν $f'(x) \neq 0$ τότε λόγω συνέχειας η $f'(x)$ θα διατηρούσε σταθερό πρόσημο άρα η $f(x)$ θα ήταν γνήσια μονότονη με τιμές θετικές…

5B9

ΘΜΤ στην $f(x) - x^2$, Bolzano στην $f'(x) - 2x$ …

5B10

ΘΜΤ στην $f(x) - x^3$, Bolzano στην $f'(x) - 3x^2$ …

5B12

3 ΘΜΤ για την f , 2 ΘΜΤ για την f΄, Bolzano f΄΄

5Β22

Rolle στην $g(x)=\begin{cases} k, x=a \\ f(x), a<x<b \\ k, x=b \end{cases}$

5Β23

Rolle στην $g(x)=e^{-f(x)}$

5Β24

Αν υπάρχει α>0 : f(a)=0 Rolle στο [0,α].

Έστω f(x)>0 για x>0 . Αν f(x)>f(b)>0 για x>b άτοπο λόγω ορίου..

Άρα υπάρχει c>b : f(c)<f(b).

Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών στο [0,b]. Υπάρχει d στο (0,b) :

f(d)=f(c) . Rolle

5Β25

$g(x)=f(x)-f(a)$ προηγούμενη

5Β26

Αν $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=k\in R$,Rolle στην $f(x)-k$ και

προηγούμενη

Αν $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ Rolle στην $e^{f(x)}$ και προηγούμενη

Αν $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$ Rolle στην $e^{-f(x)}$ και προηγούμενη

5Β27

Rolle στην $f(b)-f(x)-\frac{b-a}{1!}f'(x)-\frac{(b-x)^2}{2!}k$ στο $[a,b]$

5Γ1

$g(x)=\begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, a<x\le b \\ 0=f'(a)\ , x=a \end{cases}$

g συνεχής στο [a,b] και παραγωγίσιμη στο (a,b]

$g'(x) = -\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2} + \dfrac{f'(x)}{x-a}$, $\forall x \in (a,b]$ Χβγ, g(b)>0 τότε

$$g'(b) = -\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2} + 0 = -\frac{g(b)}{b-a} < 0 \Rightarrow \lim_{x\to b-} \frac{g(x)-g(b)}{x-b} < 0$$

$$\Rightarrow \exists x_1 < b : g(x_1) > g(b)$$

όμως $g(x_1) > g(b) > 0 = g(a)$

Επειδή g συνεχής στο $[a,x_1] \subset [a,b]$ και $g(x_1) > g(b) > g(a)$ από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών θα υπάρχει $c \in (a,x_1)$ άρα

$c \neq b : g(c) = g(b)$. Ισχύουν οι προϋποθέσεις του θ Rolle για την g

στο $[c,b] \subset [a,b] \Rightarrow \exists \xi \in (a,b) : g'(\xi) = 0 \Rightarrow \quad f'(\xi) = \dfrac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a}$

5Γ2

Θέτουμε $g(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow g(a) = g(b)$

Με δυο ΘΜΤ για την g στα [α.α+β/2],[α+β/2,β]

Προκύπτει με πρόσθεση κατά μέλη $g'(\xi_1) + g'(\xi_2) = 0$.

$$g'(\xi_1) + g'(\xi_2) = \frac{f''(\xi_1)f(\xi_1) - (f'(\xi_1))^2}{(f(\xi_1))^2} + \frac{f''(\xi_2)f(\xi_2) - (f'(\xi_2))^2}{(f(\xi_2))^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{f''(\xi_1)}{f(\xi_1)} + \frac{f''(\xi_2)}{f(\xi_2)} > 0 \Rightarrow \frac{f''(\xi_1)f(\xi_2) + f''(\xi_2)f(\xi_1)}{f(\xi_1)f(\xi_2)} > 0$$

θεώρημα σταθερού προσήμου για την συνάρτηση f …

5Γ3

$$\exists \xi_1 \in (a,x) : f'(\xi_1) = \frac{f(x)}{x-a} \text{ , } \exists \xi_2 \in (x,b) : f'(\xi_2) = \frac{-f(x)}{b-x}$$

$$f'(\xi_1) - f'(\xi_2) = f(x)\left(\frac{1}{x-a} + \frac{1}{b-x}\right) = f(x)\frac{b-a}{(x-a)(b-x)}$$

όμως ισχύει η $(b-x)(x-a) \le \frac{(b-a)^2}{4}$ (μέγιστο τριωνύμου)

$\Rightarrow \frac{1}{(b-x)(x-a)} \ge \frac{4}{(b-a)^2}$ οπότε με δεδομένο ότι $f(x) \le 0$ αφού

$f'(\xi_1) - f'(\xi_2) \le 0$ [1] διότι $\xi_1 < \xi_2, f' \uparrow$ προκύπτει ότι

$\Rightarrow f'(\xi_1) - f'(\xi_2) \le \frac{4f(x)}{b-a}$

ΘΜΤ στο $[\xi_1,\xi_2]$ για την $f'(x)$

$f'(\xi_1) - f'(\xi_2) \le \frac{4f(x)}{b-a} \Rightarrow (\xi_1 - \xi_2)f''(\xi) \le \frac{4f(x)}{b-a}$ έχουμε ακόμη

$a - b < \xi_1 - \xi_2 < 0$ αφού το $[\xi_1,\xi_2]$ είναι υποσύνολο του (a,b) και

$f''(\xi) > 0$ λόγω της [1] οπότε

$-(b-a)f''(\xi) \le \frac{4f(x)}{b-a} \Leftrightarrow f(x) \ge -f''(\xi)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$

5Γ4

Αφού f([a,b])=[a,b] υπάρχουν $c,d \in [a,b] : f(c) = a, f(d) = b$ έστω με c<d

Θέτουμε $g(x) = f(x) - x \Rightarrow g(c)g(d) = (a-c)(b-d) \le 0$ [1] και

$g(0)g(c) = (f(0))(a-c) \le 0$ επειδή g συνεχής από το θ Bolzano θα έχουμε

$\exists \xi_1 \in [0,c] : g(\xi_1) = 0$ και $\exists \xi_2 \in [c,d] : g(\xi_2) = 0$ Αν

$\exists \xi_1 = \xi_2 = c : g(c) = 0 \Rightarrow a = 0$ και κάνουμε ένα ακόμη Bolzano στο [d,b] είτε g(b)=0

Ενώ αν ήταν c>d θα θέταμε $g(x) = f(x) - (a+b-x)$ και θα επαναλαμβάναμε τα ίδια πράγματα

άρα η C_f θα τέμνει μια από τις δύο διαγώνιους τουλάχιστον δυο φορές , έστω στα K,M

Από την γεωμετρική ερμηνεία του ΘΜΤ πρέπει να υπάρχει εφαπτομένη με συντελεστή διεύθυνσης $f'(\xi)$ παράλληλη στην ΚΜ που είναι μια από τις δυο διαγώνιες του τετραγώνου οι οποίες έχουν συντελεστή διεύθυνσης το 1 ή το -1 οπότε

$\exists \xi \in (a,b) : |f'(\xi)| = 1$

5Δ1

Από ΘΜΤ στα [1,x] , [1/x,1] έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} f(x)-f(1)=(x-1)f'(b)\ ,\ 1<b<x \\ f(\frac{1}{x})-f(1)=(\frac{1}{x}-1)f'(a), \frac{1}{x}<a<1 \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(x)=(x-1)f'(b)\ ,\ 1<b<x \\ f(x)=(\frac{1}{x}-1)f'(a), \frac{1}{x}<a<1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} xf'(a)+f'(b)=0 \\ f(x)+f'(a)=xf'(a) \end{array}\right] \Rightarrow f(x)+f'(a)+f'(b)=0$$

Παραγωγίζοντας την $f(x)=f(1/x)$ και θέτοντας όπου x=1προκύπτει $f'(1)=0$

Τότε από τις δυο τελευταίες σχέσεις για c=1 παίρνουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα μια που $a<c=1<b<x$

5Δ2

Θέτω

$$h(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}, a<x\le b \\ \dfrac{f'(a)}{g'(a)}\ ,\ x=a \end{cases}$$

Η h είναι καλά ορισμένη διότι δεν μπορεί $g(x)=g(a)$ λόγω Rolle και επιπλέον $g'(a)\neq 0$ από εκφώνηση

Η h είναι παραγωγίσιμη στο (a,b] και

$\lim\limits_{x\to a} h(x) = \lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}\right) = \dfrac{f'(a)}{g'(a)} = h(a)$ είναι και συνεχής στο

$[a,b]$

Είναι ακόμη $h'(x) = \dfrac{f'(x)\big(g(x)-g(a)\big) - g'(x)\big(f(x)-f(a)\big)}{\big(g(x)-g(a)\big)^2}$, $a < x \le b$

Α) αν $h(a) = h(b)$ τότε από Rolle στην h στο $[a,b]$ προκύπτει το ζητούμενο

Β) αν

$h(a) < h(b) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{f'(a)}{g'(a)} = \dfrac{f'(b)}{g'(b)} < \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \Leftrightarrow f'(b)(g(b)-g(a)) < g'(b)(f(b)-f(a))$

$\Leftrightarrow h'(b) < 0$

δεν άλλαξε φορά αφού $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in [a,b]$ η g' έχει σταθερό πρόσημο και τα $g'(b)(g(b)-g(a)) = g'(b)g'(u)$ είναι ομόσημα

Τότε όμως

$h'(b) < 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to b-} \dfrac{h(x)-h(b)}{x-b} < 0 \overset{x-b<0}{\Rightarrow} \exists c \in (a,b) : h(c) > h(b) > h(a)$

Από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών της συνέχειας συμπεραίνουμε ότι

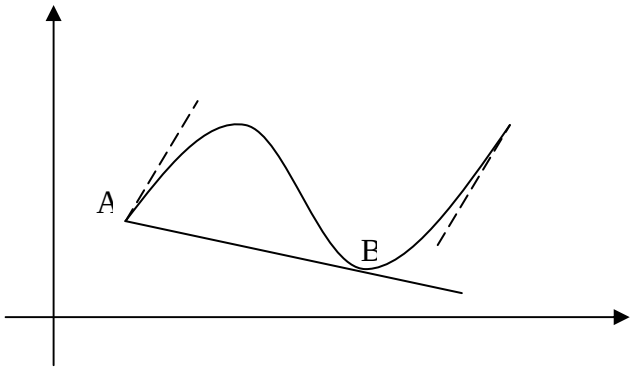
$\exists d \in (a,c) : h(d) = h(b)$

Τότε με Rolle για την h στο $(d,b) \subset (a,b)$ προκύπτει το ζητούμενο

Γ) Αντίστοιχα με το Β

Το Θ Flett έχει μια εντυπωσιακή γεωμετρική ερμηνεία

Ζητείται να δειχθεί ότι υπάρχει χορδή ΑΒ η οποία στο ένα άκρο της Β είναι και εφαπτομένη στην Cf όταν αυτή έχει δυο // εφαπτόμενες



5Δ3

Αν $f'(x) \neq 0, \forall x \in R \Rightarrow x + f'(x) \neq x$ και ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ Rolle στο $[x, x + f'(x)]$ ή $[x + f'(x), x]$ οπότε θα υπάρχει θ :

$f'(\theta) = 0$ άτοπο

Αν $f(x) = -x^2 \Rightarrow x + f'(x) = -x \Rightarrow f(x + f'(x)) = -(-x)^2 = x^2 = f(x)$ α

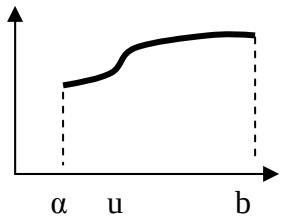
Αν υπάρχει διάστημα $[a, b] : f'(a) = f'(b) = 0, f'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$

τότε αν $f'(x) > 0$ στο (a,b) και

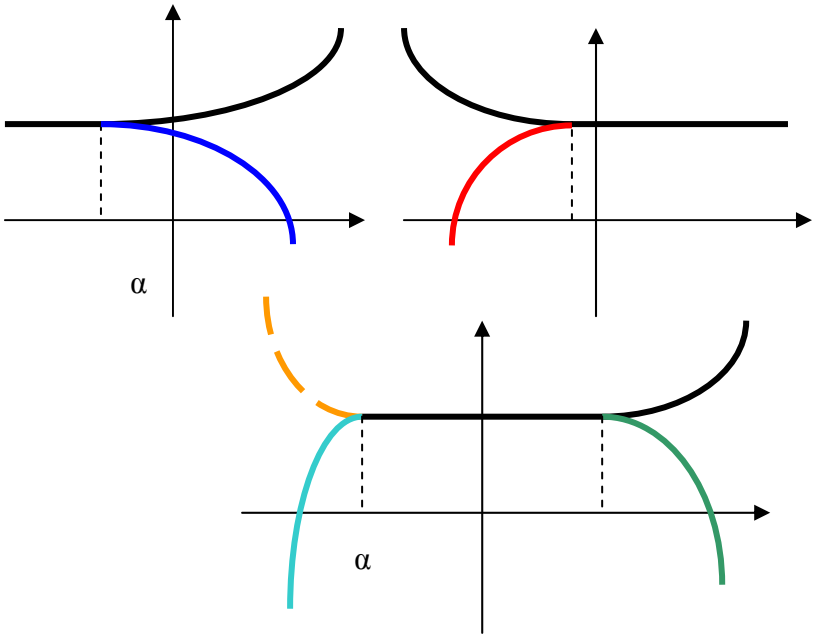
$u \to a^+ \Rightarrow f'(u) \to f'(a) = 0 \Rightarrow u + f'(u) \to a^+ < b \Rightarrow u + f'(u) \in (a, b)$
αλλά στο (a, b) η f είναι 1-1 και δεν μπορεί να ισχύει

$f(u + f'(u)) = f(u)$ με $f'(u) \neq 0$

Αν $f'(x) < 0$ στο (a,b) εργαζόμαστε ομοίως με $u \to b^-$



β)Αν δεν υπάρχει τέτοιο διάστημα τότε σε περιοχή του $+\infty$ η $-\infty$ η $f'(x)$ θα διατηρεί σταθερό πρόσημο και αν αυτό είναι θετικό εργαζόμαστε κοντά στο $+\infty$ αλλιώς κοντά στο a ομοίως όπως πριν κ.ο.κ



Τα προηγούμενα σχήματα δείχνουν τις πιθανές περιπτώσεις που όλες μελετώνται με ίδιο τρόπο Πχ Αν βρισκόμασταν στο τελευταίο σχήμα με την $f\downarrow$ στο $(-\infty,a]$ τότε αν $u\in(-\infty,a] \overset{f'(u)<0}{\Rightarrow} u+f'(u)\in(-\infty,a]$ πράγμα αδύνατο αφού η f είναι 1-1 και θα έπρεπε να ισχύει $f(u+f'(u))=f(u)$ με $f'(u)\neq 0$ στο διάστημα αυτό

5Δ4

Θέτουμε $g(x)=f^2(x)+2f'(x)$

Α) $f(x)\neq 0\ \forall x\in[0,1]$ τότε η h είναι παραγωγίσιμη στο [0,1] και h(0)=h(1)=-1/2 άρα υπάρχει α στο [0,1] :

$h'(a)=0\Rightarrow \frac{1}{2}=-\frac{f'(a)}{f^2(a)}\Rightarrow g(a)=0$ και επειδή g(0)=0 πάλι με Rolle για την g στο [0,a], άρα και στο [0,1], προκύπτει εύκολα το ζητούμενο

Β) Να υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1): f(x_0) = 0$ τότε η f δεν μπορεί να αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 αφού f(0)f(1)>0 και x_0 μοναδικό. Όμως τότε $f(x) \geq f(x_0) = 0$ διότι

$f(1) = 1 > 0 = f(x_0), f(0) = 2 > 0 = f(x_0)$

$\lim\limits_{x \to x_0+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \geq \lim\limits_{x \to x_0-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ άρα $f'(x_0) = 0$ οπότε

$g(x_0) = 0$ και πάλι με Rolle στο $[0,x_0]$ το ζητούμενο

Γ) η f να έχει δυο τουλάχιστον ρίζες και έστω x_1, x_2 η πρώτη και η τελευταία από αυτές(η ύπαρξη πρώτης και τελευταίας τεκμηριώνεται από το γεγονός ότι υπάρχουν τουλάχιστον δυο στο [0,1] και η f είναι συνεχής με $f(x) \neq 0$ κοντά στο 0 και στο 1)

Τότε θα ισχύουν $f(x) > f(x_1) = 0$ για $x<x_1$,x κοντά στο x_1 και

$f(x) > f(x_2) = 0$ για $x>x_2$,x κοντά στο x_2

Με τον ορισμό της παραγώγου (ως πλευρικό όριο τώρα) βλέπουμε ότι θα είναι $f'(x_1) < 0, f'(x_2) > 0$

Αλλά τότε $g(x_1)g(x_2) = (0 + 2f'(x_1))(0 + 2f'(x_2)) < 0$.Άρα από το θεώρημα Bolzano θα υπάρχει b στο (x_1,x_2) : g(b)=0. Rolle και πάλι για την g στο [0,b] δίνει το ζητούμενο.

5Δ5

Αν $|f(x_1) - f(x_2)| \leq (x_1 - x_2)^2, \forall x_1, x_2 \in [0,1] \Rightarrow f(x) = c, \forall x \in [0,1]$

Ας το αποδείξουμε. Πράγματι

$|f(x_1) - f(x_2)| \leq (x_1 - x_2)^2 \underset{x_1, x_2 \in [0,1]}{\overset{x_1 \neq x_2}{\Rightarrow}} 0 \leq \left| \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| \leq |x_1 - x_2|$

Αν θεωρήσουμε ότι $x_1 \to x_2$ από το κριτήριο παρεμβολής θα έχουμε

$$\lim_{x_1 \to x_2} \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = 0 \Rightarrow f'(x_2) = 0, \forall x_2 \in [0,1] \Rightarrow f(x) = c, \forall x \in [0,1]$$

άτοπο Άρα υπάρχουν $x_1, x_2 \in [0,1] : |f(x_1)-f(x_2)| > (x_1-x_2)^2$ [1]

Θεωρούμε συναρτήσεις του t (μιας μεταβλητής στο [0,1]) τα άκρα των διαστημάτων (οι πιο απλές είναι της μορφής at+b)

Θέλουμε να προκύπτει το $[x_1, x_2]$ λόγω του προηγουμένου και το [0,1] διότι γνωρίζουμε ότι $0 \le f(x) \le 1$ που θα το αξιοποιήσουμε

Για t=0 $\Rightarrow (a.0+b)x_1 + (c.0+d) = x_1, (e.0+f)x_2 + (g.0+h) = x_2$ τότε

$b = 1, d = 0, f = 1, h = 0$ Για

t=1 $\Rightarrow \begin{matrix} (a.1+b)x_1 + (c.1+d) = 1, (e.1+f)x_2 + (g.1+h) = 0 \\ (a.1+1)x_1 + (c.1+0) = 1, (e.1+1)x_2 + (g.1+0) = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow$ άρα

$a = -1, c = 1, e = -1, g = 0$ Θεωρούμε λοιπόν την

$$g(t) = |f((-t+1)x_1 + t) - f((-t+1)x_2)| - \left((-t+1)x_1 + t - (-t+1)x_2\right)^2$$

Η g είναι καλά ορισμένη στο [0,1] αφού ένας απλός έλεγχος δείχνει

ότι αν $0 \le t \le 1 \Rightarrow \begin{cases} (-t+1)x_1 + t \\ (-t+1)x_2 \end{cases} \in [0,1], \forall x_{1,2} \in [0,1]$

Η g είναι συνεχής , $g(0) = |f(x_1)-f(x_2)| - (x_1-x_2)^2 > 0$ λόγω [1]

$g(1) = |f(1)-f(0)| - 1 \le 0$ αφού από εκφώνηση είναι

$0 \le f(x) \le 1, \forall x \in [0,1]$ Άρα $\exists \xi \in [0,1] : g(\xi) = 0$

Θέτοντας $\xi_1 = (-\xi+1)x_1 + \xi$, $\xi_2 = (-\xi+1)x_2$ καταλήγουμε εύκολα στο ζητούμενο

(αν $x_1 > x_2$ βγαίνει $\xi_1 > \xi_2$ αλλιώς ονομάζουμε ανάποδα τα ξ_1, ξ_2 οπότε πάντα $\xi_1 \ne \xi_2$

6Β13

Προσθέτουμε το $\sqrt{9}f'(x) = 3f'(x)$ και θέτουμε $g(x) = f'(x) + 3f(x)...$

6Β22

Θέτουμε $f(x) = -\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{g(x)}$ …

6Β23

Θέτουμε $f(x) = x\varepsilon\phi g(x)$ …

6Γ1

Όπου x το –x , $h'(-x) = e^{-2x}h(x)$

Παραγωγίζουμε

$h''(x) = -e^{2x}h'(-x) + 2e^{2x}h(-x) = -h(x) + 2h'(x) \Rightarrow$
$h''(x) - h'(x) = h'(x) - h(x)$

Θέτοντας

$h'(x) - h(x) = f(x) \Rightarrow ... \Rightarrow f(x) = ae^x \Rightarrow (h'(x) - h(x))e^{-x} = a \Rightarrow$

$\left(e^{-x}h(x)\right)' = (ax)'...$

6Γ2

$w''(x) = w'(x) - w'(-x)$
$w'(-x) = w(-x) + w(x) = w'(x)$
$w''(x) = 0 \Rightarrow ...$

6Γ3

Έστω $f(x) = F'(x), \forall x \in R$

Το ότι υπάρχει τέτοια F=παράγουσα μας το εξασφαλίζει το γεγονός ότι f συνεχής αφού η f είναι παραγωγίσιμη Έτσι

$F'(f(x))f'(x) = F'(x), \forall x \in R \Leftrightarrow$
$F(f(x)) = F(x) + A$ [1]

$f'(x) \neq 0, f(x) = F'(x) \neq 0$ συμπεραίνουμε ότι και η f αλλά και η F είναι συναρτήσεις 1-1 στο R αλλιώς με Rolle προκύπτει άτοπο

Για x=1 στην αρχική δίνει $f(f(1)) = f(1) \overset{f:1-1}{\Rightarrow} f(1) = 1$ [2]

Για x=1 στην [1] έχουμε $F(f(1)) = F(1) + A \overset{[2]}{\Rightarrow} F(1) = F(1) + A \Rightarrow A = 0$

τότε η [1] γίνεται $F(f(x)) = F(x), \forall x \in R \overset{F:1-1}{\Rightarrow} f(x) = x$ άτοπο αφού

f(0)=0 ενώ εμείς είχαμε ότι $f(x) \neq 0, \forall x \in R$

6Γ4

$$2f''(x)f'(x) = 2f'(x)e^{2f(x)} \Rightarrow (f'(x))^2 = e^{2f(x)} + c \underset{f(0)=0}{\overset{f'(0)=1}{\Rightarrow}} (f'(x))^2 = e^{2f(x)}$$

Θεώρημα σταθερού προσήμου και $f'(0) = 1 \Rightarrow f'(x) > 0$ άρα

$$f'(x) = e^{f(x)} \Rightarrow -e^{-f(x)}f'(x) = -1 \Rightarrow \left(e^{-f(x)}\right)' = (-x)' \Rightarrow$$

$$f(x) = -\ln(1-x)$$

Επαληθεύει την αρχική

6Γ5

$$\left(f'(x)e^{f(x)}\right)' = \left(f''(x) + (f'(x))^2\right)e^{f(x)} = 4e^{f(x)}$$

θέτοντας $e^{f(x)} = g(x) \Rightarrow f'(x)e^{f(x)} = g'(x)$ οπότε αντικαθιστώντας

στην προηγούμενη παίρνουμε

$g''(x) = 4g(x) \Rightarrow g''(x) + 2g'(x) = 2(g'(x) + 2g(x))$ και πάλι θέτοντας

$g'(x) + 2g(x) = h(x) \Rightarrow h'(x) = 2h(x) \ldots$

6Γ6

$$f(2x) = [f(x)]^4 \Leftrightarrow \ln f(2x) = 4\ln f(x) \overset{g=\ln f}{\Leftrightarrow} g(2x) = 4g(x)$$

παραγωγίζουμε δυο φορές και παίρνουμε

$$4g''(2x) = 4g''(x) \Leftrightarrow g''(2x) = g''(x)$$

Τώρα επαγωγικά εύκολα δείχνουμε ότι

$$g''(x) = g''(\frac{x}{2^n}) \Rightarrow g''(x) = \lim_{n\to+\infty} g''(\frac{x}{2^n}) \overset{g''\text{συνεχής}}{=} g''(0) = 2A \Leftrightarrow g(x) = Ax^2 + Bx + C$$

άρα $f(x) = e^{Ax^2+Bx+C}$

6Γ7

Αφού η $\sqrt{1+f^2(x)}$ είναι παραγωγίσιμη, η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη.

$$f''(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+f^2(x)}}2f'(x)f(x)=f(x)$$

Οπότε

$$f''(x)=f(x)\Leftrightarrow f''(x)+f'(x)=f'(x)+f(x)\Leftrightarrow \left(f'(x)+f(x)\right)'=f'(x)+f(x)\Leftrightarrow$$
$$f'(x)+f(x)=ae^x$$

Επειδή $f(1)=0\Rightarrow f'(1)=1\Rightarrow a=1/e$ άρα η προηγούμενη γίνεται

$$f'(x)+f(x)=e^{x-1}\Rightarrow e^xf'(x)+e^xf(x)=e^{2x-1}\Rightarrow e^xf(x)=\frac{e^{2x-1}}{2}+b$$

Εύκολα $b=-\frac{e}{2}$ και $f(x)=\frac{e^{x-1}-e^{1-x}}{2}$

6Γ8

Α) Για x=y=0 προκύπτει σύστημα. Αν $f(0)=0$ η g προκύπτει σταθερή άτοπο αφού $g'(0)\neq 0$ Β) Με τον ορισμό και λαμβάνοντας υπ' όψη την συνέχεια στο 0… Γ)Παραγωγίζοντας… Δ) Εύκολο Ε) Να θέσετε $h'(x)=w(x)$ καταλήγετε στο προηγούμενο

6Γ9

Αρχικά για x=y προκύπτει ότι f(0)=0

Έχουμε λοιπόν

$$f^2(\frac{a+b}{2})-f^2(\frac{a-b}{2})=f(a)f(b)\ [2]$$

Παραγωγίζοντας δυο φορές την [2] ως προς α

$$\frac{1}{2}\left(-f'(\frac{a-b}{2})^2+f'(\frac{a+b}{2})^2-f(\frac{a-b}{2})f''(\frac{a-b}{2})+f(\frac{a+b}{2})f''(\frac{a+b}{2})\right)$$
$$=f''(a)f(b)$$

Και αντίστοιχα ως προς b

$$\frac{1}{2}\left(-f'(\frac{a-b}{2})^2+f'(\frac{a+b}{2})^2-f(\frac{a-b}{2})f''(\frac{a-b}{2})+f(\frac{a+b}{2})f''(\frac{a+b}{2})\right)$$
$$=f''(b)f(a)$$

Συμπεραίνουμε ότι $f''(a)f(b)=f(a)f''(b)$ [2]

Αν f δεν είναι η μηδενική συνάρτηση που επαληθεύει την αρχική σχέση τότε υπάρχει $b: f(b)\neq 0$ και θέτοντας $k=\frac{f''(b)}{f(b)}$ καταλήγουμε σε μια διάσημη εξίσωση $f''(x)=kf(x), \forall x\in R, f(0)=0$ [7] η οποία για να λυθεί χρειάζεται να γνωρίζουμε το πρόσημο του k

Στην συνέχεια θα δώσουμε πολύ περιληπτικά τους τρεις τρόπους λύσης

Α) αν k=0 τα πράγματα είναι απλά. Θα καταλήξουμε σε $f(x)=Ax$

Β) αν $k=-\omega^2<0$ θεωρούμε την $(f(x)-\eta\mu\omega x)^2+(f'(x)-\sigma\upsilon\nu\omega x)^2$ και δείχνουμε ότι είναι η μηδενική συνάρτηση. Θα καταλήξουμε σε $f(x)=\eta\mu\omega x$

Γ) αν $k=\omega^2>0$ να προσθέσετε και στα δύο μέλη την $\omega f'(x)$ θεωρούμε $g(x)=f(x)+\omega f'(x)$ και φτάνουμε σε γνωστή εξίσωση, καταλήγουμε σε $f(x)=A(e^{\omega x}-e^{-\omega x})$

6Γ10

είναι για x το a/x στην αρχική

$$f'(x)=\frac{a}{xf(a/x)}\Rightarrow f''(x)=-\frac{a}{x^2f(a/x)}+\frac{a^2f'(a/x)}{x^3[f(a/x)]^2}$$

Τώρα όπου $f(a/x)=\frac{a}{xf'(x)}, f'(a/x)=\frac{x}{f(x)}$ και καταλήγουμε στην

$$f''(x) = -\frac{f'(x)}{x} + \frac{[f'(x)]^2}{f(x)} \Leftrightarrow xf(x)f''(x) + f(x)f'(x) = x[f'(x)]^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{xf(x)f''(x) + f(x)f'(x) - x[f'(x)]^2}{[f(x)]^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{xf'(x)}{f(x)}\right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{xf'(x)}{f(x)} = A$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{A}{x}$$

Όπου A>0 οπότε τελικά

$$\left(\ln f(x)\right)' = (A\ln x)' = (\ln x^A)' \Leftrightarrow f(x) = Bx^A, \quad A, B > 0$$

6Γ11

Όπου x το 1/u

$$0 = f(\frac{1}{u}) + \frac{2}{u^3}f'(\frac{1}{u}) + \frac{1}{u^4}f''(\frac{1}{u}) =$$

$$f(\frac{1}{u}) + \left(-\frac{1}{u^2}\right)' f'(\frac{1}{u}) + \left(-\frac{1}{u^2}\right)\left(-\frac{1}{u^2}f''(\frac{1}{u})\right) =$$

$$= f(\frac{1}{u}) + \left(-\frac{1}{u^2}\right)' f'(\frac{1}{u}) + \left(-\frac{1}{u^2}\right)\left(f'(\frac{1}{u})\right)' =$$

$$f(\frac{1}{u}) + \left(-\frac{1}{u^2}f'(\frac{1}{u})\right)' = f(\frac{1}{u}) + \left(f(\frac{1}{u})\right)''$$

Αν ονομάσουμε $f(\frac{1}{u}) = g(u)$ τότε η εξίσωση γράφεται

$g''(u) + g(u) = 0$ η διαφορική εξίσωση έχει επαρκώς συζητηθεί στα προηγούμενα Γενική λύση της είναι

$$f(\frac{1}{u}) = g(u) = A\sigma\upsilon\nu u + B\eta\mu u \Rightarrow f(x) = A\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x} + B\eta\mu\frac{1}{x}$$

Τώρα

$$xf(x) = Ax\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x} + Bx\eta\mu\frac{1}{x} = Ax\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x} + B\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x) = A\sigma\upsilon\nu 0 \lim_{x\to+\infty} x + B \Rightarrow 1 = A\lim_{x\to+\infty} x + B \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \eta\mu\frac{1}{x}$$

6Γ12

$f(x) = F'(x), \forall x \in R$

Θεωρούμε το y σταθερό και έτσι η δοσμένη γίνεται

$F'(x+y) = F'(x) + (xf(y))' \Leftrightarrow (F(x+y))' = (F(x) + xf(y))', \forall x \in R \Leftrightarrow$
$F(x+y) = F(x) + xf(y) + c_1$

Για x=0 παίρνουμε το c_1=F(y)-F(0) και το αντικαθιστούμε στην προηγούμενη οπότε $F(x+y) = F(x) + xf(y) + F(y) - F(0)$

Για x σταθερό όμοια προκύπτει ότι

$F(x+y) = F(y) + yf(x) + F(x) - F(0)$

Τελικά $xf(y) = yf(x), \forall x, y \in R$ και για $y = 1 \Rightarrow f(x) = Ax, \forall x \in R$

6Γ13

Έστω $p(x) = (x - r_1)(x - r_2)q(x), \deg(q) = n - 2$ [1]

Αν n>2 ρίζες του q θα είναι οι υπόλοιπες ρίζες του p

Όμως λόγω του θεωρήματος Rolle το q΄ θα πρέπει να έχει ρίζες στα $[r_3,r_4],\ldots[r_{n-1},r_n]$.

Το πλήθος των διαστημάτων είναι ίσο με τον βαθμό του q΄ (=n-3)

Παραγωγίζουμε την [1] και έχουμε

$p'(x) = (2x - r_1 - r_2)q(x) + (x - r_1)(x - r_2)q'(x)$ και αν θέσουμε όπου

$x = \frac{r_1 + r_2}{2}$ τότε προκύπτει ότι $q'(\frac{r_1 + r_2}{2}) = 0$

Επειδή $\frac{r_1+r_2}{2} < r_3 < ... < r_n$ συμπεραίνουμε ότι το q΄ έχει μια παραπάνω ρίζα από τον βαθμό του άρα είναι το μηδενικό πολυώνυμο οπότε q(x)=c και $p(x) = c(x-r_1)(x-r_2)$

6Δ1

Από [1],[2] έχουμε

$$\left.\begin{array}{l}(2x-y)f(y) \le xf(x)\\ (2y-x)f(x) \le yf(y)\end{array}\right\} \overset{0<y<2x}{\Rightarrow} \frac{2y-x}{y}f(x) \le f(y) \le \frac{x}{2x-y}f(x)\ [3]$$

Αφού $0 < y < 2x$ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $y \to x$ οπότε παίρνοντας όρια στην [3] $\lim\limits_{y\to x} f(y) = f(x)$ άρα η f είναι συνεχής.

$$\left.\begin{array}{l}x(f(y)-f(x)) \le (y-x)f(y)\\ y(f(x)-f(y)) \le (x-y)f(x)\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}x(f(y)-f(x)) \le (y-x)f(y)\\ y(f(y)-f(x)) \ge (y-x)f(x)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{f(x)}{y} \le \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(y)}{x} \text{ αν } y > x$$

$$\frac{f(x)}{y} \ge \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \ge \frac{f(y)}{x} \text{ αν } y < x$$

Παίρνοντας πλευρικά όρια όταν $y \to x^+, y \to x^-$ στην κατάλληλη προηγούμενη ανίσωση με το κριτήριο παρεμβολής και επειδή f συνεχής προκύπτει ότι

$$\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \frac{f(x)}{x} \in R \Rightarrow f'(x) = \frac{f(x)}{x} \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = \ln x + c \Rightarrow f(x) = Ax, A > 0$$

Σχέση που επαληθεύει την αρχική

7Β11

$$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x}=\frac{xf'(x)-(f(x)-f(0))}{x}=\frac{xf'(x)-xf'(\xi)}{x}=\dots$$

7Γ1

1. $\frac{du}{dx}=\frac{d(y-4x)}{dx}=\frac{dy}{dx}-4=u^4$

2. $\frac{du}{dx}=u'(x)=u^4(x)\geq 0$ αρα u αύξουσα και για

3. $x\geq 0\Rightarrow u(x)\geq u(0)=1$

$$\frac{u'(x)}{u^4(x)}=\left(-\frac{1}{3u^3(x)}\right)'=(x)'\Rightarrow -\frac{1}{3u^3(x)}=x+c\overset{u(0)=1}{\Rightarrow} c=-\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x-\frac{1}{3}<0$$

4. $-\frac{1}{3u^3(x)}=x-\frac{1}{3}\Rightarrow u(x)=\dots$

7Γ2

Έστω $f'(x)>f(x)\Rightarrow e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)>0\Rightarrow (e^{-x}f(x))'>0$ άρα

$e^{-x}f(x)$ γνήσια αύξουσα οπότε με $a<b\Rightarrow e^{-a}f(a)<e^{-b}f(b)\Rightarrow 0<0$

άτοπο

7Δ1

Έστω $d\in[a,b]:f(d)\neq 0$ πχ

$f(d)>0\Rightarrow \exists c\in[a,d):f(x)>0,\forall x\in(c,d]$ ενώ $f(c)=0$ δεδομένου

ότι η f είναι συνεχής οπότε οφείλει να έχει το πρόσημο του f(d)

κοντά στο d. Τότε $|f'(x)|\leq mf(x),x\in(c,d]$ Έτσι

$$\frac{f'(x)}{f(x)}\leq m\Leftrightarrow \left(\ln f(x)-mx\right)'\leq 0\Rightarrow (\ln f(x)-mx)\downarrow \text{στο (c,d]}\ \text{αρα}$$

$$\lim_{x\to c+}(\ln f(x)-mx)\geq \ln f(d)-md\Rightarrow \ln f(c)-mc\geq \ln f(d)-md$$

$$\Rightarrow f(c)\geq e^{m(c-d)}f(d)>0$$

άτοπο αφού f(c)=0 δηλαδή δεν υπάρχει $d \in [a,b] : f(d) \neq 0$ άρα

$f(x) = 0, \forall x \in [a,b]$

7Δ2

Είναι γνωστό ότι

$P(a) = P'(a) = 0 \Rightarrow P(x) = (x-a)^k R(x), k \geq 2, R(a) \neq 0$ [1] δηλαδή το P έχει τουλάχιστον διπλή ρίζα το a[8]

Δίνεται ότι $P(x) = Q(x)P''(x)$ [2]

με deg(Q)=2 και μεγιστοβάθμιο συντελεστή το $c=\frac{1}{n(n-1)} > 0$ [3]

Αντικαθιστούμε την [1] στην [2] και μετά τις παραγωγίσεις και απλοποίηση με το $(x-a)^{k-2}$ θέτουμε όπου x=a Θα προκύψει

$Q(a)R(a) = 0 \Rightarrow Q(x) = (x-a)W(x)$ [4] συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο δηλαδή αντικαθιστούμε την [1] και [4] στην [2] παραγωγίζουμε δυο φορές το δεξί μέλος της [1] απλοποιούμε με το $(x-a)^{k-1}$ και βάζουμε όπου x το a θα βγει W(a)=0 οπότε από [3],[4]

$Q(x) = c(x-a)^2 \geq 0$

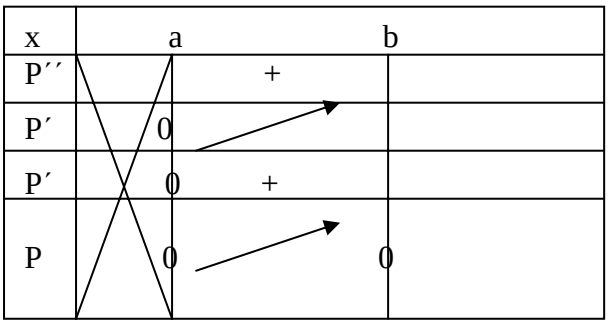
Μεγάλη σημασία δεν έχει η μορφή του Q όσο το γεγονός ότι

$Q(x) \geq 0$

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι το P έχει και άλλες ρίζες εκτός του a

Επειδή το σύνολο των ριζών του είναι πεπερασμένο υπάρχει η κοντινότερη ρίζα προς την a, έστω η b με b>a

Στο (a,b) το P(x) άρα και το $P''(x)$ λόγω [2] διατηρεί σταθερό πρόσημο π,χ θετικό



Δεδομένου ότι P΄(a)=0 προέκυψε το πρόσημο της παραγώγου και άρα η μονοτονία του P. Το άτοπο προκύπτει από το γεγονός ότι το P είναι γνήσια αύξουσα συνάρτηση στο [a,b], ενώ P(a)=P(b)=0. Έτσι το πολυώνυμο δεν έχει άλλη ρίζα εκτός της a.'Άρα $P(x)=k(x-a)^n$.

7Δ3

Α)Έχουμε: $g(x)=\frac{1}{2}x(4-x)$ άρα g΄(x)=2-x , g΄΄(x)=-1 οπότε με αντικατάσταση προκύπτουν τα ζητούμενα

Β)Η h είναι παραγωγίσιμη στα [0,2] και [2,4] και επιπλέον h(0)=h(2)=h(4)=0 .Από το θεώρημα Rolle προκύπτει άμεσα το ζητούμενο

Γ)Έχουμε: $h''(x)=f''(x)+1\geq 0$ στο [0,4] άρα και στο $[\xi_1,\xi_2]$ οπότε η h΄ είναι αύξουσα στο $[\xi_1,\xi_2]$. Επειδή όμως $h'(\xi_1)=h'(\xi_2)=0$ προκύπτει αμέσως το ζητούμενο

Δ)Από το προηγούμενο συμπεραίνουμε ότι η h είναι σταθερή στο $[\xi_1,\xi_2]$.Ακόμη το 2 βρίσκεται στο εσωτερικό του $[\xi_1,\xi_2]$ και είναι h(2)=0. Τότε h(x)=0 στο$[\xi_1,\xi_2]$

Ε)Αφού h΄ αύξουσα στο [0,4] ,άρα και στο $[0,\xi_1]$,τότε για $0\leq x\leq\xi_1$είναι $h'(x)\leq h'(\xi_1)=0$

άρα h φθίνουσα και αντίστοιχα στο $[\xi_2,4]$ για $\xi_2\leq x\leq 4$ θα είναι $0=h'(\xi_2)\leq h'(x)$ άρα η h είναι αύξουσα στο $[\xi_2,4]$

ΣΤ)Επειδή h(0)=0 από το πρώτο,h(ξ_1)=0 από το τέταρτο και h φθίνουσα στο [0,ξ_1] από το Πέμπτο,h είναι η μηδενική συνάρτηση [0,ξ_1] και αντίστοιχα στο [ξ_2,4] . Τελικά h είναι η μηδενική συνάρτηση στο [0,4] οπότε $f(x)=\frac{1}{2}x(4-x)$

7Δ4

Δίνεται ότι

$f(x)>0,\forall x\in R\Rightarrow f(f(x))>0,\forall x\in R\Rightarrow f'(x)>0,\forall x\in R\Rightarrow f$ γνήσια αύξουσα στο R άρα

$f(f(x))>f(0)\Rightarrow f'(x)>f(0)\Rightarrow \left(f(x)-xf(0)\right)'>0\Rightarrow f(x)-xf(0)$ γνήσια αύξουσα στο R [1] αλλά αν πάρουμε

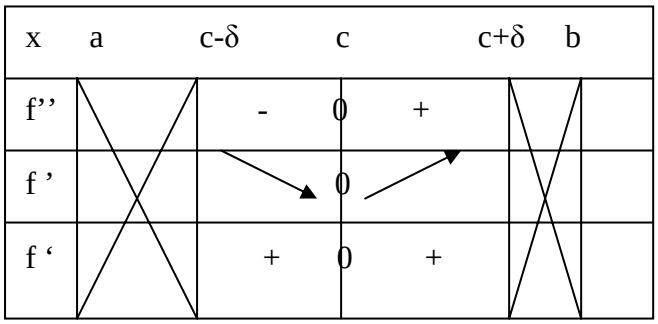
$x<0\overset{[1]}{\Rightarrow} f(x)-xf(0)<f(0)-0\Rightarrow f(x)<(1+x)f(0)$ [2]

Επειδή όμως είχαμε $f(x)>0,\forall x\in R\Rightarrow f(0)>0\Rightarrow (1+x)f(0)<0$ για x<-1 οπότε f(x)<0 για x<-1 λόγω της [2], άτοπο διότι $f(x)>0,\forall x\in R$

7Δ5

$f'(x)=f''(x)e^{f'(x)}=f''(x)f(x)$ και έστω f όχι σταθερή

Επειδή f συνεχής σε κλειστό διάστημα θα πρέπει να έχει και μέγιστο και ελάχιστο στο [a,b] και αφού f(a)=f(b) ένα τουλάχιστον θα βρίσκεται στο εσωτερικό του διαστήματος ,έστω στο c τότε εκατέρωθεν του c η $f'(x)$ θα αλλάζει πρόσημο και θα μηδενίζεται στο c . Άρα θα αλλάζει πρόσημο και η $f''(x)f(x)$ και δεδομένου ότι $f(x)=e^{f'(x)}>0$ θα αλλάζει πρόσημο η $f''(x)$ με ίδιο τρόπο με την $f'(x)$



Φαίνεται σαφώς γιατί η f ΄ αντί να έχει διαφορετικό πρόσημο εκατέρωθεν του c έχει το ίδιο. Άτοπο οπότε τα μέγιστο πρέπει να ταυτίζεται με το ελάχιστο που σημαίνει ότι $f(x)=1, \forall x \in [a,b]$

Αν

$f'(x)=0 \forall x \in (d,d+\delta), f'(d)>0 \Rightarrow f''(d)>0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to d+} \dfrac{f'(x)-f'(d)}{x-d} > 0 \Rightarrow \dfrac{f'(x)-f'(d)}{x-d} > 0$

$-f'(d)>0$ άτοπο αφού όταν το x είναι κοντά στο d+ είναι $f'(x)=0$

7Δ6

Έχει αποδειχθεί ξανά ότι

$$f(x)=f(0)+\frac{x-0}{1!}f'(0)+\frac{(x-0)^2}{2!}f''(\xi). \text{ με } 0<\xi<x$$

Τότε αφού f ΄΄>0 για 0<k<x θα είναι

$$xf'(x)>xf'(k)=f(x)-f(0)=xf'(0)+\frac{x^2}{2}f''(\xi).$$

Όμως f ΄΄ γνήσια αύξουσα και 0<ξ<x

$$\Rightarrow xf'(x)>xf'(0)+\frac{x^2}{2}f''(\xi).>xf'(0)+\frac{x^2}{2}f''(0)\geq m$$ μια που το m

είναι το ελάχιστο του τριωνύμου $xf'(0)+\dfrac{x^2}{2}f''(0)$

Έτσι $xf'(x) > m \overset{x>0}{\Leftrightarrow} f'(x) > \frac{m}{x} \Rightarrow \left(f(x) - m\ln x\right)' > 0 \Rightarrow f(x) - m\ln x$

γνήσια αύξουσα στο $(0,+\infty)$

7Δ7

Η $f(x) - Mx$ είναι αύξουσα στο[0,1] ενώ η f(x) είναι γνήσια αύξουσα στο [0,1]

Ξεκινάμε με την εις άτοπο απαγωγή, δηλαδή

Ας υποθέσουμε ότι σε κάθε διάστημα της μορφής [α.α+1/4]

$, 0 \le a \le 3/4$ υπάρχει $x_i : |f(x_i)| < M/4$

Συμπεραίνουμε ότι το ελάχιστο της $|f(x)| < M/4$ σε κάθε τέτοιο διάστημα

Αν $f(0) \ge 0 \Rightarrow f(x) \ge 0$ σε όλο το [0,1] λόγω μονοτονίας της f

Ακόμη αφού η f(x) είναι γνήσια αύξουσα στο [0,1] ελάχιστο της f στο [1/4,1/2] είναι το $f(1/4) < M/4$

Όμως

$f(1/4) - M/4 \ge f(0) \Rightarrow f(1/4) - f(0) \ge (M/4) - 0 \Rightarrow f(1/4) \ge M/4$

άτοπο

Αν $f(1) \le 0 \Rightarrow f(x) \le 0$ σε όλο το [0,1] Τότε αντίστοιχα θα είναι

$-f(3/4) < M/4$ διότι το ελάχιστο της $|f(x)| < M/4$

Και $f(1) - f(3/4) \ge M/4 \Rightarrow -f(3/4) \ge M/4$ άτοπο

Αν $f(0) \le 0, f(1) \ge 0$ θα υπάρχει μοναδικό ξ: f(ξ)=0 και δυο διαστήματα της μορφής [α.α+1/4], $a \in \{0,1/4,1/2,3/4\}$ στα οποία η f θα διατηρεί σταθερό πρόσημο χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι αυτά είναι τα [1/2,3/4] , [3/4,1]

Τότε $f(3/4) < M/4$ επειδή το $f(3/4) = \min f(x), x \in [3/4,1]$ αλλά η $f(x) - Mx$ είναι αύξουσα στο [1/2,3/4] οπότε

$f(3/4) - f(1/2) \geq M/4 \Rightarrow f(3/4) \geq M/4$ και πάλι άτοπο

8Γ1

Έχουμε από την αρχική ότι για $x \neq 0 \Rightarrow p(x) \neq 0$ άρα το πολυώνυμο έχει σταθερό πρόσημο στα $(0,+\infty)$, $(-\infty,0)$ δεν γνωρίζουμε ακόμη αν το πρόσημο αυτό είναι ίδιο στα δυο διαστήματα. Αν σκεφτούμε όμως ότι το p είναι άρτιου βαθμού οπότε λόγω ορίων έχει ίδιο πρόσημο κοντά στο + και το – άπειρο, εξασφαλίζουμε ότι το πολυώνυμο έχει σταθερό πρόσημο στο R* ας πούμε θετικό.

Άρα

$$p(x) > 0, \forall x \in R^* \ , \ p(0) = 0\} \Rightarrow p(x) \geq 0 = p(0), \forall x \in R \overset{\text{Fermat}}{\Rightarrow} p'(0) = 0$$

Τώρα

$P(0)=0 \Leftrightarrow P(x)=xW(x)$ [1]

$P'(0)=0 \Leftrightarrow P'(x)=xH(x)$ [2]

[1]΄ : $P'(x)=\left[xW(x)\right]'$ ==$W(x)+xW'(x)$ [3]

Άρα $\overset{[2]}{[3]}$: $xH(x)=W(x)+xW'(x)$ άρα $x(H(x)-W'(x))=W(x)$ [4]

[1],[4]: $P(x)=x^2(H(x)-W'(x))$

Θέτω $Q(x)=H(x)-W'(x)$= πολυώνυμο Άρα $P(x)=x^2Q(x)$

8Γ2

Έστω ότι $f(x_0)>0$ επειδή $f(a)=f(b)=0$, f συνεχής στο [a,b] θα έχει μέγιστο στο x_0 του (a,b) .Όμως αφού $f(x_0)>0$ θα είναι $f''(x_0)>0$. Άτοπο από το κριτήριο της β΄ παραγώγου

8Γ3

Το ολικό min της f στο [0,1] βρίσκεται στα α,b

Από Fermat $f'(a)=f'(b)=0$ και από Rolle $f'(c)=0, a<c<b$

Μετά δυο Rolle για την f ΄ στα [α,c] , [c,b] και πάλι Rolle για την f΄΄…

8Γ4

$d(x)=\sqrt{(x_k-x)^2+(y_k-f(x))^2}$ Το υπόριζο δεν μηδενίζεται. Άρα παραγωγίσιμη

β) Θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής στη συνέχεια

γ) Fermat . Την καθετότητα εξασφαλίζουμε με εσωτερικό γινόμενο

8Γ5

Θέτουμε h=f-g Για x=1,x=2 βγαίνει h(1)=h(2), Rolle στο [1,2] , Fermat στα 1 και 2 , μετά διαδοχικά Rolle

8Δ1

$g(x)=f(x)-kx \Rightarrow g'(a)=f'(a)-k<0<f'(b)-k=g'(b)$ άρα

$\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}>0 \Rightarrow \exists x_1 : g(x_1)>g(a)$ και αντίστοιχα

$\exists x_2 : g(x_2)>g(b)$ οπότε το MAX της συνεχούς g στο [a,b] βρίσκεται στο εσωτερικό, συνεπώς λόγω Fermat…

8Δ2

$$g(x)=\begin{cases} f(x)-2x^2\ , & 0\le x<1/2 \\ f(x)-2(x-1)^2\ , & 1/2\le x\le 1 \end{cases} \qquad h(x)=\begin{cases} f(x)+2x^2\ , & 0\le x<1/2 \\ f(x)+2(x-1)^2\ , & 1/2\le x\le 1 \end{cases}$$

Μπορούμε εύκολα (με όρια) να δείξουμε ότι: οι f, g είναι συνεχείς στο [0,1], αλλά όχι παραγωγίσιμες στο ½.

Ακόμη έχουμε:

$$g'(x)=\begin{cases} f'(x)-4x\ ,\ 0\le x<1/2 \\ f'(x)-4(x-1),\ 1/2<x\le 1 \end{cases}$$ και

$$g''(x)=\begin{cases} f''(x)-4,\ 0\le x<1/2 \\ f''(x)-4,\ 1/2<x\le 1 \end{cases}$$

$$h'(x)=\begin{cases} f'(x)+4x\ ,\ 0\le x<1/2 \\ f'(x)+4(x-1),\ 1/2<x\le 1 \end{cases}$$ και

$$h''(x)=\begin{cases} f''(x)+4,\ 0\le x<1/2 \\ f''(x)+4,\ 1/2<x\le 1 \end{cases}$$

Έστω τώρα ότι: $|f''(x)|<4\ ,\ \forall x\in[0,1]\Leftrightarrow -4<f''(x)<4\ ,\ \forall x\in[0,1]$

Μπορούμε να κατασκευάσουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	0		½		1
g''		-		-	
g'	0	↘		↘	0
g'	0	-		+	0
g					1
	0	↘		↗	

διότι:

$$g''(x)<0\ \ \forall x\in[0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1]\Rightarrow$$

$$g'(x)\downarrow\forall x\in[0,\frac{1}{2})\ \ ,\ \ g'(x)\downarrow\forall x\in(\frac{1}{2},1]\Rightarrow$$

$$g'(x)<g'(0)=0,\forall x\in(0,\frac{1}{2})\ \ ,\ \ g'(x)>g'(1)=0,\forall x\in(\frac{1}{2},1)$$

και επειδή η g είναι συνεχής στο ½ προκύπτει ότι:

$$g\downarrow\forall x\in[0,\frac{1}{2}]\ \ ,\ \ g\uparrow\forall x\in[\frac{1}{2},1]$$ οπότε τελικά

$$g(\frac{1}{2})<g(0)=0\Leftrightarrow f(\frac{1}{2})<\frac{1}{2}\ \ [1]$$

Αντίστοιχα τώρα ο πίνακας για την h είναι:

x	0		½		1
h''		+		+	
h'	0	↗		↗	0
h'		+		-	
h	0	↗		↘	1

Από όπου με ίδιο τρόπο προκύπτει $f(\frac{1}{2}) > \frac{1}{2}$ [2]

Και έτσι από τις [1] και [2] καταλήξαμε σε άτοπο που σημαίνει ότι $\exists \xi \in [0,1] : |f''(\xi)| \geq 4$

Παρατήρηση: Αν f ' συνεχής στο [0,1] και υπάρχει η f '' στο (0,1) ισχύουν τα ίδια συμπεράσματα και μάλιστα το ξ βρίσκεται στο ανοικτό

8Δ3

Έστω f στο [-2,0] από το ΘΜΤ έχουμε

$$\exists a \in (-2,0) : f'(a) = \frac{f(0) - f(-2)}{2} \Rightarrow |f'(a)| \leq \frac{|f(0)| + |f(-2)|}{2} \leq 1 \text{ και}$$

όμοια πάλι με ΘΜΤ $\exists b \in (0,2) : |f'(b)| \leq 1$

Τώρα η g είναι συνεχής [a,b] άρα έχει μέγιστο στο διάστημα αυτό (και ΜΙΝ αλλά μας ενδιαφέρει το ΜΑΧ λόγω της φοράς της ανίσωσης που δίνεται για την f στην εκφώνηση)

Είναι όμως $g(0) = 4, g(a) \leq 1^2 + 1^2 = 2, g(b) \leq 1^2 + 1^2 = 2$ με a<0<b άρα το μέγιστο της g βρίσκεται στο εσωτερικό του [a,b] . Ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ Fermat για την g σε κάποιο σημείο ξ του (a,b) άρα $g'(\xi) = 0 \Rightarrow 2f'(\xi)[f(\xi) + f''(\xi)] = 0$

Αν $f'(\xi)=0 \Rightarrow g(\xi)=f^2(\xi)+0 \le 1$ άτοπο γιατί $g(\xi)=\max \ge 4$ οπότε

$\exists \xi \in (a,b): f(\xi)+f''(\xi)=0$

10B8

f άρτια .Έτσι είναι

$f(r)=0 \Rightarrow r^2=|3\sigma\upsilon\nu r-2r\eta\mu r| \le 3|\sigma\upsilon\nu r|+2|r||\eta\mu r| \le 3+2|r| \Rightarrow$

$|r|^2-2|r|-3 \le 0 \Rightarrow 0<|r| \le 3$

συμπεραίνουμε ότι οποιαδήποτε θετική ρίζα της f βρίσκεται στο (0,3] [1]Τώρα

$f'(x)=2x(1-\sigma\upsilon\nu x)+5\eta\mu x>0 \forall x \in (0,\pi) \supset (0,3] \Rightarrow f \uparrow \forall x \in (0,3]$

άρα η f έχει το πολύ μια θετική ρίζα λόγω της [1]

Όμως $f(0)f(\pi)=-3(\pi^2+3)<0$ οπότε η συνεχής f έχει μια ακριβώς θετική ρίζα και λόγω συμμετρίας δυο ακριβώς πραγματικές ρίζες

10B17

$x^{x+2}=(x+2)^x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x}=\frac{\ln(x+2)}{x+2} \Leftrightarrow f(x)=f(x+2)$

Παραγωγίζουμε και $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$ που έχει μοναδική ρίζα το e

Έτσι αν $0<x<x+2 \le e$ από το ΘΜΤ $f(x+2)-f(x)=2f'(a) \ne 0$

αφού a<e

αν $0<e \le x<x+2$ πάλι από το ΘΜΤ $f(x+2)-f(x)=2f'(b) \ne 0$

αφού b>e

Άρα οι μόνες πιθανές λύσεις υπάρχουν όταν x<e<x+2 αλλά τότε η f(x+2) είναι γνήσια αύξουσα ενώ η f(x) είναι γνήσια φθίνουσα, άρα η f(x+2)-f(x) είναι γνήσια αύξουσα που σημαίνει ότι αν έχει ρίζα στο διάστημα αυτό είναι μοναδική. Παρατηρούμε ότι το 2 είναι μια προφανής λύση που είναι τελικά η μόνη λύση της εξίσωσης

10Γ1

Θεωρούμε την $f(t)=t^x, t>0$ έχουμε $f(3)+f(6)=f(4)+f(5)\Leftrightarrow$

$f(6)-f(5)=f(4)-f(3)\Leftrightarrow (6-5)xa^{x-1}=(4-3)xb^{x-1}\Leftrightarrow x(a^{x-1}-b^{x-1})=0$

Η εξίσωση αυτή έχει μοναδικές λύσεις τα 0 και 1 αφού

3<b<4<5<a<6

10Γ2

Θεωρούμε την εξίσωση :

$$x^3-kx^2+12x-8=0\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} k=\frac{x^3+12x-8}{x^2}=f(x)$$

Για x>0 αυτές πρέπει να είναι 3

Επειδή όμως

$$f'(x)=\frac{(x-2)^2(x+4)}{x^3}>0,\forall x\in(0,+\infty),\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,\lim_{x\to 0+}f(x)=-\infty$$

υπάρχει μοναδικό σημείο τομής. Άρα οι ρίζες πρέπει να ταυτίζονται σε μια τριπλή. Τότε όμως το πολυώνυμο γράφεται στην μορφή $(x-r)^3$ απ' όπου βρίσκουμε εύκολα το r=2 και το k=6

10Γ3

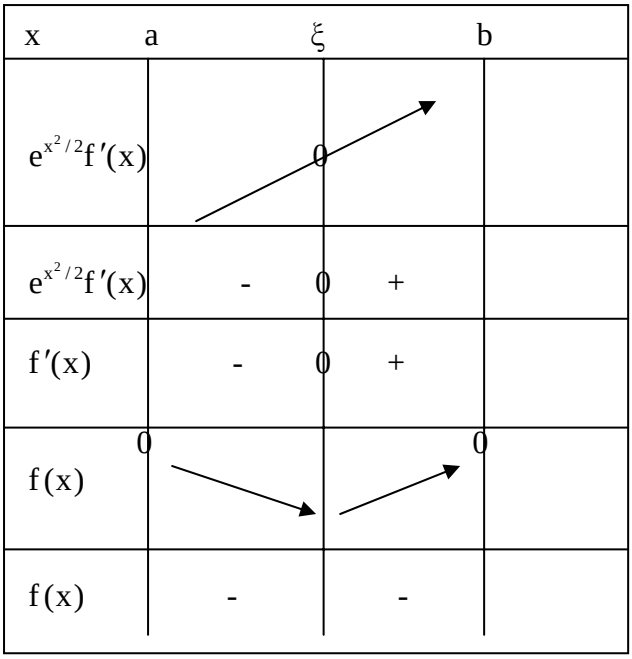
Έστω $f(x)\neq 0,\forall x\in(a,b)$

Τότε η συνεχής f θα διατηρεί σταθερό πρόσημο πχ $f(x)>0$ στο (a,b). Έτσι

$$f''(x)+xf'(x)>0\Rightarrow e^{x^2/2}f''(x)+xe^{x^2/2}f'(x)>0\Rightarrow\left(e^{x^2/2}f'(x)\right)'>0\Rightarrow$$

$e^{x^2/2}f'(x)\uparrow\ \forall x\in(a,b)$

Λαμβάνοντας υπ' όψη το θ . Rolle συμπληρώνουμε τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας



Καταλήξαμε σε αντίφαση για το πρόσημο της συνάρτησης

10Γ4

Είναι $p(x)=a(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)$

$\Rightarrow |p(x)|=|a||x-a_1||x-a_2|...|x-a_n| \Rightarrow$

$\ln|p(x)|=\ln|a|+\ln|x-a_1|+\ln|x-a_2|+...+\ln|x-a_n| \Rightarrow$

$$\frac{p'(x)}{p(x)}=\frac{1}{x-a_1}+\frac{1}{x-a_2}+...+\frac{1}{x-a_n}$$

Παραγωγίζουμε ακόμη μια φορά και παίρνουμε

$$\frac{p''(x)p(x)-[p'(x)]^2}{p^2(x)}=-\frac{1}{(x-a_1)^2}-\frac{1}{(x-a_2)^2}-...-\frac{1}{(x-a_n)^2}\Rightarrow$$

$$[p'(x)]^2-p''(x)p(x)>0$$

Βέβαια τα προηγούμενα ισχύουν για $x\neq a_1,a_2,...,a_n$

Μένει να δούμε αν μπορεί κάποιο από τα a_k να είναι ρίζα

του $[p'(x)]^2-p''(x)p(x)$ δηλαδή αν

$[p'(a_k)]^2 - p''(a_k)p(a_k) = 0 \overset{p(a_k)=0}{\Rightarrow} p'(a_k) = 0$ τότε όμως το a_k θα είναι κοινή ρίζα του πολυωνύμου και της παραγώγου του, οπότε ως γνωστόν θα είναι τουλάχιστον διπλή ρίζα του p(x) άτοπο αφού όλα τα a_k είναι διαφορετικά μεταξύ τους

10Γ5

Η εξίσωση γράφεται $(2x^8 - 4x) + (3x^6 - 5x^3 + 6) = 0$

Άρα $3x^6 - 5x^3 + 6 \geq \frac{47}{12}$

Αν $f(x) = 2x^8 - 4x$ τότε $f'(x) = 16x^7 - 4$ Εύκολα διαπιστώνουμε μέσω του πίνακα μονοτονίας ότι η f έχει ελάχιστο στο $x_0 = \sqrt[7]{\frac{1}{4}} < 1$

το $f(x_0) = 2x_0(x_0^7 - 2) = -\frac{7x_0}{2}$ αφού $x_0^7 = \frac{1}{4}$

Αρκεί να δειχθεί λοιπόν ώστε η αρχική εξίσωση να είναι αδύνατη ότι $\frac{47}{12} - \frac{7x_0}{2} > 0 \Leftrightarrow x_0 < \frac{47}{42}$ που ισχύει διότι $x_0 < 1 < \frac{47}{42}$

10Γ6

Αρκεί να δείξουμε ότι $2x^8 + x^6 > -2x^6 + 3x^3 + 2x - 9$ και επειδή $2x^8 + x^6 \geq 0$ αρκεί $2x^6 + 9 > 3x^3 + 2x \Leftrightarrow f(x) + 4 > g(x)$ όπου

Θέτω $f(x) = 2x^6 + 5, g(x) = 3x^3 + 2x$ και θα δείξω ότι $f(x) \geq g(x)$ και άρα το ζητούμενο

Αν $x \leq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0 \geq g(x)$

Αν $x \geq 1$ έχουμε

$f'(1) = 17 > 11 = g'(1), f''(x) = 60x^4 > 18x = g''(x)$ οπότε θα ισχύει

$f'(x) - g'(x) \uparrow \Rightarrow f'(x) - g'(x) \geq f'(1) - g'(1) = 6 > 0$ άρα

$f'(x) > g'(x)$ και επειδή είναι $f(1) - g(1) = 2 > 0$ θα έχουμε

$f(x) > g(x)$

Για $0 \le x \le 1$ η g είναι κυρτή αφού $g''(x) = 18x > 0$ και χορδή της είναι η $y = 5x$ οπότε $5x \ge 3x^3 + 2x$ άρα για $0 \le x \le 1$ αρκεί

$2x^6 + 5 \ge 5x \Leftrightarrow 2x^6 \ge 0 \ge 5(x-1)$ που ισχύει

Τότε η $f(x) \ge g(x)$ ισχύει $\forall x \in R$

10Γ7

Θέτουμε $f(x) = \eta\mu(\sigma\upsilon\nu x) - x, g(x) = \sigma\upsilon\nu(\eta\mu x) - x, x \in [0, \pi/2]$ και θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχουν $a < b \in (0, \pi/2) : f(a) = g(b) = 0$

Έχουμε $f'(x) = -\eta\mu x \sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x) - 1 < 0$ αφού

$\sigma\upsilon\nu x \in (0,1) \subset (0, \pi/2)$ οπότε συν(συνx)>0 και κατά συνέπεια

$f'(x) < 0$ που σημαίνει ότι η f έχει μια το πολύ ρίζα

Ακόμη $g'(x) = -\sigma\upsilon\nu x \eta\mu(\eta\mu x) - 1 < 0$ για τους ίδιους λόγους ,άρα και η g έχει μια το πολύ ρίζα

Επειδή $f(0) = \eta\mu 1 > 0, f(\pi/2) = -\pi/2 < 0$ και

$g(0) = 1 > 0, g(\pi/2) = 1 - \pi/2 < 0$ από το θεώρημα Bolzano και τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν μοναδικά

$a, b \in (0, \pi/2) : f(a) = g(b) = 0$

Για να δείξουμε ότι $a < b$ θα χρησιμοποιήσουμε την βασική ανισότητα $\eta\mu x < x, x \in (0, \pi/2)$ [1]τότε

$\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x) < \sigma\upsilon\nu x$ [2]

Όμως η συνx είναι γνήσια φθίνουσα άρα από την [1] παίρνουμε $\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x) > \sigma\upsilon\nu x$ [3]

Τελικά $\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x) < \sigma\upsilon\nu x < \sigma\upsilon\nu(\eta\mu x)$ [4]

Αν $b \le a \Rightarrow \sigma\upsilon\nu a \le \sigma\upsilon\nu b \Rightarrow \eta\mu(\sigma\upsilon\nu a) < \sigma\upsilon\nu(\eta\mu b) \Rightarrow a < b$ άτοπο

άρα $a < b$

10Γ8

$g(x)=\left(f(x)+xf'(x)\right)\left(f'(x)-xf(x)\right)$

Διότι $\left(f(x)+xf'(x)\right)=\left(xf(x)\right)'$, $\left(f'(x)-xf(x)\right)=\left(e^{-x^2/2}f(x)\right)'e^{x^2/2}$

Η συνάρτηση $xf(x)$ έχει k+1 ρίζες απλές ,τις k του f και το 0 που δεν είναι ρίζες της παραγώγου της αφού είναι απλές. Από Rolle λοιπόν η $\left(xf(x)\right)'$ θα έχει τουλάχιστον k ρίζες

Η συνάρτηση $e^{-x^2/2}f(x)$ έχει τις k απλές ρίζες της f άρα η $\left(e^{-x^2/2}f(x)\right)'$ πάλι από Rolle έχει τουλάχιστον k-1 ρίζες. Το ίδιο και η $\left(e^{-x^2/2}f(x)\right)'e^{x^2/2}$

Θα δείξουμε πως οι συναρτήσεις $\left(f(x)+xf'(x)\right),\left(f'(x)-xf(x)\right)$ δεν έχουν κοινή ρίζα οπότε αφού η $1^{η}$ έχει τουλάχιστον k και η $2^{η}$ τουλάχιστον k-1 ρίζες τότε η $g(x)=\left(f(x)+xf'(x)\right)\left(f'(x)-xf(x)\right)$ θα έχει τουλάχιστον k+k-1=2k-1 ρίζες

Πράγματι αν υπήρχε r: $f(r)+rf'(r)=0, f'(r)-rf(r)=0$ τότε $f(r)\neq 0$ αλλιώς $f(r)=f'(r)=0$ άτοπο αφού το r είναι απλή ρίζα και $\frac{f'(r)}{f(r)}=r=-\frac{1}{r}\Rightarrow r^2=-1$ άτοπο

10Δ1

Θέτουμε $\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots+\frac{x}{1!}+1=f_n(x)$

Παρατηρούμε ότι $f''_{n+2}(x)=f'_{n+1}(x)=f_n(x)$

Θα δείξουμε επαγωγικά ότι $f_{2n}(x)>0,\forall x\in R$ Για n=0 είναι προφανής. Δεχόμαστε πως $f_{2n}(x)>0,\forall x\in R$ και θα δείξουμε πως

$f_{2n+2}(x) > 0, \forall x \in R$. Πράγματι το

$f'_{2n+1}(x) = f_{2n}(x) > 0, \forall x \in R \Rightarrow f_{2n+1}(x) \uparrow$ στο R άρα έχει μοναδική ρίζα r ως πολυώνυμο περιττού βαθμού Από εδώ προκύπτει το πρόσημο του όπως στον παρακάτω πίνακα

x	r
$f''_{2n+2} = f_{2n}$	+
$f'_{2n+2} = f_{2n+1}$	
$f'_{2n+2} = f_{2n+1}$	- 0 +
f_{2n+2}	$f_{2n+2}(r)$

Σύμφωνα με αυτόν τον πίνακα ολικό ελάχιστο του f_{2n+2} προέκυψε το $f_{2n+2}(r)$ όπου r είναι η ρίζα του f_{2n+1}. Αν δείξουμε ότι $f_{2n+2}(r) > 0$ θα έχουμε αποδείξει το επαγωγικό μας βήμα , ότι δηλαδή

$f_{2n+2}(x) > 0 \Rightarrow f_{2n}(x) > 0, \forall n \in N, x \in R$

Έχουμε λοιπόν $f_{2n+2}(r) = \frac{r^{2n+2}}{(2n+2)!} + f_{2n+1}(r) = \frac{r^{2n+2}}{(2n+2)!}$

Αρκεί $r \neq 0 \Rightarrow \frac{r^{2n+2}}{(2n+2)!} > 0$ Εάν το r=0 θα έπρεπε $f_{2n+1}(0) = 0$ άτοπο διότι $f_{2n+1}(0) = 1$ όπως προκύπτει από τον αρχικό τύπο του πολυωνύμου

Δείξαμε λοιπόν ότι $f_{2n}(x) > 0, \forall n \in N, x \in R$ που σημαίνει ότι όταν n άρτιος το f_n δεν έχει ρίζα

Όμως το f_{2n+1} έχει μια τουλάχιστον ρίζα ως πολυώνυμο περιττού βαθμού. Η ρίζα αυτή είναι μοναδική διότι

$f'_{2n+1}(x) = f_{2n}(x) > 0, \forall x \in R \Rightarrow f_{2n+1}$ γνήσια αύξουσα στο R πράγμα που ολοκληρώνει την απόδειξη

10Δ2

Έστω πχ ότι ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής του P είναι >0

Θα δείξουμε ότι

1.P αρτίου βαθμού τότε το P έχει ολικό ελάχιστο

2. $\exists x_0 : \forall x > x_0 \Rightarrow 0 < P(x)$ και P γνήσια αύξουσα

Πράγματι αφού $\lim_{x\to-\infty} P = +\infty$ θα υπάρχει a κοντά στο $-\infty: P(x) \geq P(a), \forall x \leq a$ και αφού $\lim_{x\to+\infty} P = +\infty$ θα υπάρχει b κοντά στο $+\infty: P(x) \geq P(b), \forall x \geq b$ ακόμη από το θ.max-min τιμής για συνεχείς συναρτήσεις θα $\exists c \in [a,b] : P(x) \geq P(c), \forall x \in [a,b]$ Τότε ολικό ελάχιστο είναι ο μικρότερος από τους P(a),P(b),P(c) έστω $P(x_0)$

Τώρα αν r,r΄ οι μεγαλύτερες των ριζών του P και της παραγώγου του P΄ για $x > d = \max\{r, r'\}$ τα P,P΄ θα έχουν σταθερό πρόσημο και μάλιστα θετικό λόγω του ορίου τους στο +άπειρο που αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας

Αν ονομάσουμε με $s = [d]$ για αρκετά μεγάλο κ το q γράφεται

$$q(x) = P(x) + ... + P(x+s) + P(x+s+1) + ... + P(k)$$
$$q(x) \geq (s+1)P(x_0) + P(x+s+1) + ... + P(k)$$

Αφού ολικό ελάχιστο των όλων των P(x),…,P(x+s) είναι το $P(x_0)$

Ακόμη το x+s+1>d που σημαίνει ότι

$$P(x+s+1) > 0$$
$$P(x+s+1) < P(x+s+2) < ... < P(x+k)$$

Άρα

$q(x) \geq (s+1)P(x_0) + P(x+s+1) + ... + P(k) \Rightarrow$
$q(x) > (s+1)P(x_0) + (k-s)P(x+s+1)$

Συνεπώς μπορούμε να επιλέξουμε το κ : $k > s - \frac{(s+1)P(x_0)}{P(x+s+1)}$ που

σημαίνει ότι το q>0 οπότε δεν θα έχει καμιά ρίζα

10Δ3

Αν n περιττός τότε η εξίσωση είναι πολυωνυμική περιττού βαθμού άρα για οποιεσδήποτε τιμές των a,b έχει ρίζα

Αν n=2k άρτιος τότε αρκεί το b να ανήκει στο σύνολο τιμών της

$f(x) = x^{2k} - 2ax$

Είναι $f'(x) = 2kx^{2k-1} - 2a$

Αν α>0 εύκολα από τον πίνακα μονοτονίας προκύπτει ότι η f έχει

ελάχιστο για $x_0 = (\frac{a}{k})^{\frac{1}{2k-1}}$ το $f(x_0) = x_0(x_0^{2k-1} - 2a) = 2ax_0(\frac{1}{2k} - 1)$

Θέτω $g(k) = 2ax_0(\frac{1}{2k} - 1) = 2a(\frac{a}{k})^{\frac{1}{2k-1}}(\frac{1}{2k} - 1)$

Τώρα θέλουμε $b \geq f(x_0)$ ώστε το b να ανήκει στο σύνολο τιμών της f

δηλαδή $b \geq g(k), \forall k \in N$ άρα το $b \geq \max g(k)$ ώστε η ανισότητα να ισχύει για όλα τα k

Θεωρούμε το κ πραγματικό, $k = x \geq 1$, προκειμένου να βρούμε το μέγιστο της g και κατόπιν θα περιοριστούμε αν χρειαστεί στους ακεραίους. Να σημειώσουμε ότι $a \geq 1$ αφού είμαστε στην περίπτωση $a > 0, a \in Z$

Μετά τις πράξεις είναι $g'(x)=\dfrac{\left(\dfrac{a}{x}\right)^{\frac{1}{2x-1}}\ln\left(\dfrac{a}{x}\right)}{x(2x-1)}, x\geq 1, a\geq 1$ γίνεται

φανερό ότι η g παρουσιάζει μέγιστο για x=a το $g(a)=1-2a$ και επειδή το α είναι ακέραιος, και η g(k) με k ακέραιο παρουσιάζει το ίδιο μέγιστο

Παρατηρούμε ότι αν στην g βάλουμε όπου α το –α ο τύπος παραμένει ίδιος άρα τα προηγούμενα ισχύουν και όταν α<0

Για α=0 πρέπει $b\geq 0$ ώστε το b να ανήκει στο σύνολο τιμών της f που είναι το $[0,+\infty)$ αφού τώρα $f(x)=x^{2k}$

Τελικά πρέπει $a=0, b\geq 0$ ή $b\geq 1-2a$

10Δ4

Αν $b=p_2=2k+1, a=p_1=2m+1$ η εξίσωση γράφεται

$k^{2m+1}+(k+1)^{2m+1}=a^n \Leftrightarrow (k+k+1)Q(k)=c^n$ όπου Q πολυώνυμο του κ

Τότε ο πρώτος $2k+1/c^n \Rightarrow 2k+1/c \Rightarrow c^n=(2k+1)^n A(k)$

Έτσι η εξίσωση γίνεται

$k^{2m+1}+(k+1)^{2m+1}=(2k+1)Q(k)=(2k+1)^n A(k)$ που σημαίνει ότι το Q έχει παράγοντα το 2k+1 (αφού n>1)

Άρα το πολυώνυμο $P(k)=k^{2m+1}+(k+1)^{2m+1}$ θα έχει παράγοντα τουλάχιστον το $(2k+1)^2$

Αναγκαστικά λοιπόν από γνωστή πρόταση θα έπρεπε

$P(-\frac{1}{2})=P'(-\frac{1}{2})=0$

Όμως $P'(x)=(2m+1)(x^{2m}+(x+1)^{2m})\neq 0 \quad \forall x\in R$,άτοπο που σημαίνει ότι η εξίσωση δεν έχει ποτέ ακέραιες λύσεις

11Β3

$\frac{x+y}{a+b}=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{x}{a}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{x}{b}=\ldots$ μετά Jensen

11Β6

Έστω Α,Β σημεία της f και Γ σημείο της y=x : ΑΓ//x΄x, ΓΒ//y΄y με τυχαίο Α στο [0,1]. Ισχύει η ανίσωση |ημα-ημβ|<|α-β| . Συμπεράνετε ότι ΑΓ>ΓΒ. Δείξτε ότι ΑΓ=f^{-1}(x)-x , ΒΓ=x-f (x)

11Β7

Μονοτονία της f(x)-ημx και της f(-x)-ημx σε κατάλληλα διαστήματα

11Β16

$a\le x<b\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f(a)\le f(x)\Rightarrow 1\le f(x)$

Θέτουμε

$$g(x)=x+\frac{1}{f(x)}\Rightarrow g'(x)=1-\frac{f'(x)}{f^2(x)}\Rightarrow g'(x)\ge 0\Rightarrow g\uparrow^{a\le x<b}\Rightarrow$$

$$g(a)\le g(x)\le\lim_{x\to b}g(x)\Rightarrow a+\frac{1}{f(a)}\le x+\frac{1}{f(x)}\le b+0\Rightarrow a+1\le b$$

11Β20

$\frac{b-a}{a+b}=\frac{a}{a+b}\cdot(-1)+\frac{b}{a+b}\cdot 1=\ldots$ μετά Jensen

11Β21

Δείξτε ότι λόγω της μονοτονίας της f και επειδή f(x)>0 θα είναι $\lim_{x\to+\infty}f(x)=k\in R$. Μετά δείξτε, ότι f(x-1)-f(x)<f ΄(x)<f(x+1)-f(x).

11Γ1

Αποδεικνύεται εύκολα με πίνακα μονοτονίας

ότι $(1-k)^x\le 1-kx, k, x\in(0,1)$. Είναι

$$a^{1-b}=(1-(1-a))^{1-b}\le 1-(1-a)(1-b)=a+b-ab<a+b\Rightarrow a^b>\frac{a}{a+b}$$

και όμοια $b^a > \frac{b}{a+b}$ προσθέτοντας κατά μέλη τις δυο ανισότητες προκύπτει το ζητούμενο

11Γ2

Θέτουμε $\frac{b}{a} = x > 0$ οπότε διαιρώντας με a^4 την ζητούμενη αρκεί να δείξουμε ότι $(8+x^2)^2 > 16x, \forall x > 0$. Ονομάζουμε

$f(x) = (8+x^2)^2, x > 0$ τότε f κυρτή αφού $f''(x) = 12x^2 + 32 > 0$

Εφαπτομένη στο 1 είναι $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = 18x + 63$

Αλλά η f είναι κυρτή

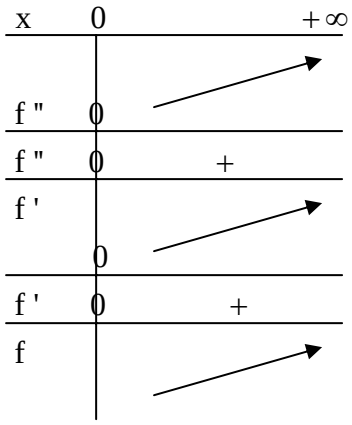
$\Rightarrow f(x) \geq y \Rightarrow f(x) \geq 18x + 63 > 18x > 16x, \forall x > 0$

11Γ3

Θέτουμε $f(x) = \eta\mu x - x + \frac{x^3}{6}$ και θα δείξουμε ότι $f(x) > 0, \forall x > 0$

$D_f = [0, +\infty)$

f παραγωγίσιμη με $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x - 1 + \frac{x^2}{2}$, $f''(x) = -\eta\mu x + x$, $f'''(x) = 1 - \sigma\upsilon\nu x$



Επειδή f " γνήσια αύξουσα στο $[0, +\infty)$ για $x > 0$ παίρνουμε:

$f''(x) > f''(0) = 0$. Επιπλέον η f ΄ είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ άρα f '

γνήσια αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και συνεχίζουμε έτσι μέχρι να συμπληρωθεί ο προηγούμενος πίνακας. Τελικά η συνάρτησή μας είναι γνήσια αύξουσα στο $[0,+\infty)$ άρα $f(x) > f(0)=0, \forall x > 0$

Θέτουμε όπου x το 1/x και παίρνουμε

$$\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} \Rightarrow x\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) > 1 - \frac{1}{6x^2}, \forall x > 0$$

Οπότε αρκεί

$(1+\frac{1}{x^2})(1-\frac{1}{6x^2}) > 1, \forall x \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$ Αν θέσουμε $y = \frac{1}{x^2}, 0 < y < 5$ μετά τις πράξεις αρκεί να δειχθεί ότι : $5y - y^2 > 0$ που ισχύει αφού $0 < y < 5$

11Γ4

πρέπει $f(x) \geq y \Leftrightarrow f(x) \geq y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ αρκεί

$f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow (x - x_0)f'(\xi) \geq f'(x_0)(x - x_0)$

έστω $x > x_0 \Rightarrow \xi > x_0 \Rightarrow f'(\xi) > f'(x_0)$ οπότε η προηγούμενη ισχύει

αν $a \leq x_0 \leq b \Leftrightarrow 0 \leq x_0 - a \leq b - a \Leftrightarrow 0 \leq \frac{x_0 - a}{b - a} \leq 1$ θέτουμε

$t = \frac{x_0 - a}{b - a} \Rightarrow x_0 = tb + (1-t)a, n = t, m = 1 - t$ και ισχύουν τα ζητούμενα

$$\begin{cases} f(x_0) \leq f(a) \Rightarrow mf(x_0) \leq mf(a) \\ f(x_0) \leq f(b) \Rightarrow nf(x_0) \leq nf(b) \end{cases} \Rightarrow (m+n)f(x_0) \leq mf(a) + nf(b)$$

$$f(kx+\lambda y+mz)=f((kx+\lambda y)+mz))=f\left((1-m)(\frac{kx+\lambda y}{1-m})+mz\right)=$$

$$=f\left((1-m)(\frac{kx+\lambda y}{k+\lambda})+mz\right)=$$

$$\le(1-m)f(\frac{kx+\lambda y}{k+\lambda})+mf(z)=(k+l)f(\frac{kx+\lambda y}{k+\lambda})+mf(z)=$$

$$=(k+\lambda)f(\frac{k}{k+\lambda}x+\frac{\lambda}{k+\lambda}y)+mf(z)\le(k+\lambda)\left(f(\frac{k}{k+\lambda}x)+f(\frac{\lambda}{k+\lambda}y)\right)+mf(z)$$

$$\le(k+\lambda)\left(\frac{k}{k+\lambda}f(x)+\frac{\lambda}{k+\lambda}f(y)\right)+mf(z)=kf(x)+\lambda f(y)+mf(z)$$

I) $5=\frac{1}{3}\cdot 2+\frac{1}{3}\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot 5$

II)

$$a^a b^b c^c \ge (abc)^{\frac{a+b+c}{3}} \Leftrightarrow a\ln a+b\ln b+c\ln c\ge\frac{a+b+c}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)$$

Παρουσιάζεται η συνάρτηση $f(x)=x\ln x$ η οποία είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$. Η ανίσωση Jensen δίνει λοιπόν ότι

$$\frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3}\ge f(\frac{a+b+c}{3})\Leftrightarrow f(a)+f(b)+f(c)\ge 3f(\frac{a+b+c}{3})\Leftrightarrow$$

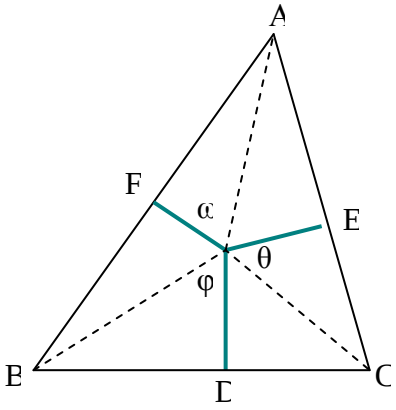
$$a\ln a+b\ln b+c\ln c\ge 3\frac{a+b+c}{3}\ln(\frac{a+b+c}{3})=(a+b+c)\ln(\frac{a+b+c}{3})\ [1]$$

Αλλά από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου του Cauchy είναι

$$\frac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[3]{abc}\Leftrightarrow\ln(\frac{a+b+c}{3})\ge\frac{\ln a+\ln b+\ln c}{3}\ [2]$$

Από τις [1] και [2] προκύπτει άμεσα το ζητούμενο

11Γ5



Έστω

$x = PD \perp BC, y = PE \perp AC, z = PF \perp AB, PA = k, PB = m, PC = n$

Ονομάζω $\widehat{BPD} = \theta, \widehat{CPE} = \varphi, \widehat{APF} = \omega$ τότε από τα εγγράψιμμα τετράπλευρα PFBD, PDCE και PEAF προκύπτουν οι γωνίες $\widehat{BPF} = \pi - \phi - B, \widehat{CPD} = \pi - \theta - C, \widehat{EPA} = \pi - \omega - A$,όλες οξείες μαζί με τις φ, θ, ω , ως γωνίες ορθογωνίων τριγώνων

Από τα ορθογώνια τρίγωνα BPD και CPD παίρνουμε

$$\frac{x^2}{mn} = \frac{x}{m}\frac{x}{n} = \sigma\upsilon\nu\phi\sigma\upsilon\nu(\pi - \theta - C)$$

Και αντίστοιχα κυκλικά

$$\frac{y^2}{nk} = \sigma\upsilon\nu\theta\sigma\upsilon\nu(\pi - \omega - A) \ , \ \frac{z^2}{km} = \sigma\upsilon\nu\omega\sigma\upsilon\nu(\pi - \phi - B)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις τρεις τελευταίες σχέσεις κατά μέλη παίρνουμε

$$\left(\frac{xyz}{kmn}\right)^2 = \sigma\upsilon\nu\phi\sigma\upsilon\nu(\pi - \theta - C)\sigma\upsilon\nu\theta\sigma\upsilon\nu(\pi - \omega - A)\sigma\upsilon\nu\omega\sigma\upsilon\nu(\pi - \phi - B)$$

Αρκεί λοιπόν να βρούμε το μέγιστο της παράστασης

$$L = \sigma\upsilon\nu\phi\sigma\upsilon\nu(\pi - \theta - C)\sigma\upsilon\nu\theta\sigma\upsilon\nu(\pi - \omega - A)\sigma\upsilon\nu\omega\sigma\upsilon\nu(\pi - \phi - B)$$

Για τον λόγο αυτό θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x)=\ell n(\sigma\upsilon\nu x), x\in(0,\frac{\pi}{2})$$

Έχουμε $f''(x)=-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}<0, \forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$ οπότε είναι κοίλη στο διάστημα αυτό τότε

$$\frac{\ell n(\sigma\upsilon\nu x_1)+\ell n(\sigma\upsilon\nu x_2)+...+\ell n(\sigma\upsilon\nu x_6)}{6}\le \ell n(\sigma\upsilon\nu(\frac{x_1+x_2+...+x_6}{6}))\Leftrightarrow$$

$$\ell n(\sigma\upsilon\nu x_1\sigma\upsilon\nu x_2...\sigma\upsilon\nu x_6)\le \ell n(\sigma\upsilon\nu^6(\frac{x_1+x_2+...+x_6}{6}))\Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu x_1\sigma\upsilon\nu x_2...\sigma\upsilon\nu x_6\le \sigma\upsilon\nu^6(\frac{x_1+x_2+...+x_6}{6})$$

Για $x_1=\phi, x_2=\pi-\theta-C, x_3=\theta, x_4=\pi-\omega-A, x_5=\omega, x_6=\pi-\phi-B$ και επειδή $A+B+C=\pi$ αντικαθιστώντας στην προηγούμενη προκύπτει

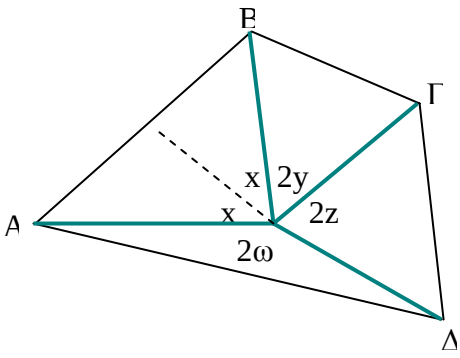
$$L^2=\sigma\upsilon\nu x_1\sigma\upsilon\nu x_2...\sigma\upsilon\nu x_6\le \sigma\upsilon\nu^6(\frac{2\pi}{6})=\frac{27}{64}\Rightarrow L\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Η ισότητα ισχύει όταν τα x_k είναι ίσα μεταξύ τους δηλαδή όταν το Ρ είναι το κέντρο του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒC

11Γ6

Αν Ο το κέντρο του κύκλου ΑΒΓΔ θα είναι ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ=ΟΔ=1

Ονομάζουμε τις γωνίες των κορυφών των Ισοσκελών τριγώνων ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΔ , ΔΟΑ αντίστοιχα 2x , 2y , 2z , 2ω όπως στο σχήμα



Τότε οι x ,y ,z, ω είναι προφανώς οξείες και $\frac{AB}{2}=OA\eta\mu x\Leftrightarrow AB=2\eta\mu x$

Οπότε κυκλικά παίρνουμε

$B\Gamma=2\eta\mu y, \Gamma\Delta=2\eta\mu z, \Delta A=2\eta\mu\omega$

Επειδή $AB\cdot B\Gamma\cdot\Gamma\Delta\cdot\Delta A\ge 4$ αντικαθιστώντας

τις προηγούμενες σχέσεις προκύπτει η ανισότητα :

$$\eta\mu x \cdot \eta\mu y \cdot \eta\mu z \cdot \eta\mu\omega \geq \frac{1}{4} \qquad [1]$$

Θεωρούμε λοιπόν την συνάρτηση $f(x) = \ell n(\eta\mu x)$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Είναι

$$f''(x) = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$$

Συνεπώς η f είναι κοίλη στο διάστημα αυτό .

Εφαρμόζουμε λοιπόν την ανίσωση Jensen για τους αριθμούς x,y,z και ω

$$\frac{\ell n(\eta\mu x) + \ell n(\eta\mu y) + \ell n(\eta\mu z) + \ell n(\eta\mu\omega)}{4} \leq \ell n(\eta\mu(\frac{x+y+z+\omega}{4})) \Leftrightarrow$$

$$\ell n(\eta\mu x \cdot \eta\mu y \cdot \eta\mu z \cdot \eta\mu\omega) \leq \ell n(\eta\mu^4(\frac{x+y+z+\omega}{4})) \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x \cdot \eta\mu y \cdot \eta\mu z \cdot \eta\mu\omega \leq \eta\mu^4(\frac{x+y+z+\omega}{4}) \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x \cdot \eta\mu y \cdot \eta\mu z \cdot \eta\mu\omega \leq \eta\mu^4(\frac{\pi}{4})$$

Τελικά δηλαδή $\eta\mu x \cdot \eta\mu y \cdot \eta\mu z \cdot \eta\mu\omega \leq \frac{1}{4}$ [2]

Από τις [1], [2] συμπεραίνουμε ότι ισχύει η ισότητα. Αλλά είναι γνωστό ότι η ισότητα στην Jensen ισχύει όταν x=y=z=ω πράγμα που σημαίνει ότι καθεμιά από τις γωνίες x,y,z,ω είναι 45^0 οπότε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο

11Γ7

Από Jensen

$$\eta\mu(\frac{A+B+\Gamma}{3}) \geq \frac{\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma}{3} \Leftrightarrow 3\eta\mu(\frac{\pi}{3}) \geq \eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma \Leftrightarrow$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} \geq \eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma$$

Η ισότητα ισχύει όταν Α=Β=Γ δηλαδή το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

Άρα η τιμή $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, είναι η μέγιστη τιμή του αθροίσματος

ημΑ+ημΒ+ημΓ

11Γ8

Θέτουμε στην ανίσωση Jensen

$$f(\frac{k_1x_1+k_2x_2+...+k_nx_n}{k_1+k_2+...+k_n}) \le \frac{k_1f(x)+k_2f(x_2)+...+k_nf(x_n)}{k_1+k_2+...+k_n},$$

$k_i > 0, x_i \in \Delta, f$ κυρτή

όπου $f(x)=x^{-n}$ =κυρτή στο $(0,+\infty)$ και $k_i=a^2, x_i=\frac{b+c}{2a}$ και κυκλικά

τα a,b,c και έχουμε

$$\frac{k_1f(x_1)+k_2f(x_2)+k_3f(x_3)}{k_1+k_2+k_3}=\frac{2^n}{a^2+b^2+c^2}[\frac{a^{n+2}}{(b+c)^n}+\frac{b^{n+2}}{(c+a)^n}+\frac{c^{n+2}}{(a+b)^n}]$$

$$f(\frac{k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3}{k_1+k_2+k_3})=f(\frac{ab+bc+ba}{a^2+b^2+c^2}) \ge f(1)=1$$ αφού f γνήσια

φθίνουσα και είναι γνωστό ότι $ab+bc+ca \le a^2+b^2+c^2$

΄Έτσι προκύπτει άμεσα το ζητούμενο

11Γ9

Αρχικά θα δείξουμε ότι

$$b^ac^ba^c \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^a\left(\frac{b+c}{2}\right)^b\left(\frac{c+a}{2}\right)^c \Leftrightarrow$$

$$a\ln b+b\ln c+c\ln a \le a\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)+b\ln\left(\frac{b+c}{2}\right)+c\ln\left(\frac{c+a}{2}\right)$$

Εφαρμόζουμε την ανίσωση Jensen(17) για την κοίλη $\ln x$ οπότε αρκεί να δειχθεί ότι

$$a\ln b + b\ln c + c\ln a \le a\frac{\ln a + \ln b}{2} + b\frac{\ln b + \ln c}{2} + c\frac{\ln c + \ln a}{2} \Leftrightarrow$$
$$a(\ln a - \ln b) + b(\ln b - \ln c) + c(\ln c - \ln a) \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$a(\ln a - \ln b) + b(\ln b - \ln c) \ge c(\ln a - \ln c)$$

Επειδή η ανισότητα είναι κυκλικά συμμετρική[19] δεχόμαστε ότι

$c \le b \le a$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ για την $\ln x$ στα [b,a],[c,b] και [c,a]

$$\frac{a(a-b)}{x} + \frac{b(b-c)}{y} \ge \frac{c(a-c)}{z}$$

Επειδή $0 < c < y < b < x < a$ αρκεί

$1(a-b) + 1(b-c) \ge \frac{c(a-c)}{z} \Leftrightarrow 1 \ge \frac{c}{z}$ που ισχύει από το τρίτο ΘΜΤ

στο [c,a]

Τώρα θα δείξουμε την

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^a \left(\frac{b+c}{2}\right)^b \left(\frac{c+a}{2}\right)^c \le a^a b^b c^c \Leftrightarrow$$
$$a(\ln a - \ln\frac{a+b}{2}) + b(\ln b - \ln\frac{b+c}{2}) \ge c(\ln\frac{a+c}{2} - \ln c)$$

Και πάλι με ΘΜΤ στα αντίστοιχα διαστήματα αρκεί

$a(\frac{a-b}{2k}) + b(\frac{b-c}{2m}) \ge c(\frac{a-c}{2n})$ με

$$\frac{b+c}{2} < m < b, \frac{a+b}{2} < k < a, c < \frac{a+c}{2} < n < a$$

Αρκεί λοιπόν

$(\frac{a-b}{2}) + (\frac{b-c}{2}) \ge c(\frac{a-c}{2n}) \Leftrightarrow \frac{a-c}{2} \ge \frac{c}{n}\frac{a-c}{2} \Leftrightarrow 1 \ge \frac{c}{n}$ που ισχύει .

11Γ10

Θέτουμε

$$f(x)=\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\left(\frac{y}{y-1}\right)^2+\left(\frac{1}{xy-1}\right)^2-1 \text{ με } x\neq 1, x\neq\frac{1}{y}\neq 1$$

Έτσι το D(f) αποτελείται από την ένωση τριών διαστημάτων με άκρα τα $\pm\infty,1,1/y$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0, \lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1/y} f(x)=+\infty$

Ακόμη

$$f'(x)=\frac{(1-x^2y)(x^2y^2+x(1-3y)+y)}{(x-1)^3(xy-1)^3}$$

Η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει το πολύ τέσσερεις λύσεις οι οποίες μαζί με τα άκρα του πεδίου ορισμού αποτελούν θέσεις πιθανών ελαχίστων και μόνον αυτές

Τα άκρα του D(f) αποκλείονται λόγω των ορίων, άρα τα ελάχιστα πρέπει να αναζητηθούν σε 4 θέσεις τις

$$a=-\sqrt{\frac{1}{y}}, b=+\sqrt{\frac{1}{y}}, c=\frac{-1+3y-\sqrt{1-6y+3y^2-4y^3}}{2y^2},$$

$$d=\frac{-1+3y+\sqrt{1-6y+3y^2-4y^3}}{2y^2}$$

Είναι $f(a)=\left(\frac{1-2\sqrt{y}}{y-1}\right)^2, f(b)=\left(\frac{1+2\sqrt{y}}{y-1}\right)^2, f(c)=f(d)=0$

Ακόμη τα a,b υφίστανται αν y>0 ενώ τα c,d αν y<0 η συνάρτηση παίρνει μια τουλάχιστον από τις 4 τιμές που η ελάχιστη τιμή τους είναι το 0 και κατά συνέπεια ελάχιστη τιμή της συνάρτησής μας είναι το 0

11Γ11

Είναι $z=1-y-x$, άρα αρκεί

$x^3+y^3+(1-x-y)^3+4xy(1-x-y)\le\frac{9}{32}$ που μετά τις πράξεις δίνει

$(3-7y)x^2+(-7y^2+10y-3)x+(3y^2-3y+1)\le\frac{9}{32}$

Με

$x=1-y-z\in[\frac{1}{2}-y,1-y]\cap[0,\frac{1}{2}]=[\frac{1}{2}-y,1-y]\cap[0,\frac{1}{2}]=[\frac{1}{2}-y,\frac{1}{2}]$

$\forall y\in[0,\frac{1}{2}]$

Θέτω

$f(x)=(3-7y)x^2+(-7y^2+10y-3)x+(3y^2-3y+1), x\in[\frac{1}{2}-y,\frac{1}{2}]$

$\forall y\in[0,\frac{1}{2}]$

Παρατηρώ ότι για $y=\frac{3}{7}\Rightarrow f(x)=\frac{13}{49}$ Για $3-7y<0$ είναι τριώνυμο

με μέγιστο το $\frac{-\Delta}{4a}$, $y\in(\frac{3}{7},\frac{1}{2}]$ μετά τις πράξεις

$-\frac{\Delta}{4a}=g(y)=\frac{1}{4}(7y^3-5y^2+y+1)$ που εύκολα βρίσκουμε, αφού

g'=τριώνυμο ότι έχει μέγιστο το $\frac{9}{32}$

Για $3-7y>0$ είναι κυρτή με μέγιστο σε ένα από τα δύο άκρα ½ ή

½-y του πεδίου ορισμού της

Έχουμε λοιπόν $f(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2}-y)=\frac{1}{4}(-2y^2+y+1)$ με max τιμή το

$\frac{9}{32}$ σε οποιοδήποτε διάστημα του R

Τελικά πάντοτε $(3-7y)x^2+(-7y^2+10y-3)x+(3y^2-3y+1)\le\frac{9}{32}$

που είναι το ζητούμενο

11Γ12

Αφού $x>0, y>0, z>0$, $x+y+z=1$ το z μπορεί να είναι οποιοδήποτε σημείο του διαστήματος (0,1) . Για κάθε y του(0,1) το x μεταβάλλεται στο (0,1-y). Έτσι αν στην S αντικαταστήσουμε το z με 1-x-y μετά τις πράξεις παίρνουμε μια συνάρτηση του x με παράμετρο το οποιοδήποτε y του (0,1) και με πεδίο ορισμού το (0,1-y).

$$S=(3y-1)[x^2+(y-1)x-\frac{3y-2}{9}]+\frac{2}{9}=(3y-1)f(x)+\frac{2}{9},\ x\in(0,1-y)$$

Αφού η f είναι τριώνυμο στο (0,1-y) εύκολα βρίσκουμε ότι

$f(\frac{1-y}{2})\le f(x)<f(1-y)$ για κάθε x του (0,1-y) διότι το f έχει το ελάχιστό του στο δοθέν διάστημα και το f είναι κυρτή συνάρτηση στο (0,1-y). Άρα $-\frac{(3y-1)^2}{36}\le f(x)<-\frac{3y-2}{9}$, $\forall x\in(0,1-y)$

Μετά διακρίνουμε δυο περιπτώσεις

Α) Αν $0<y<\frac{1}{3}$ τότε άμεσα προκύπτει ότι

$S\le-\frac{(3y-1)^3}{36}+\frac{2}{9}=\frac{(1-3y)^3}{36}+\frac{2}{9}=g(y)$ και επειδή η

$g\downarrow\ \Rightarrow g(y)<\lim\limits_{x\to0}g(y)=\frac{1}{36}+\frac{2}{9}=\frac{1}{4}$ οπότε $S<\frac{1}{4}$

Β) Αν $\frac{1}{3} \le y < 1$ όπως και πριν είναι

$S < -\frac{(3y-1)(3y-2)}{9} + \frac{2}{9} = -y^2 + y = h(y)$ τότε το τριώνυμο h έχει μέγιστο στο δοσμένο διάστημα το $h(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

(Αν δινόταν ότι τα x,y,z ήταν μη αρνητικά τότε θα υπήρχε μέγιστο. Εξ άλλου η συνάρτηση S(x,y,z) είναι κυρτή στο ανοικτό $(0,1)^3$οπότε δεν μπορεί να έχει μέγιστο γιατί αυτό θα βρισκόταν στο άκρο του $(0,1)^3$,το οποίο όμως είναι ανοικτό)

11Γ13

Από την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου είναι

$A \ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2}(a+1)(b+1)(c+1)} = 3\frac{a+1}{a^{2/3}}\frac{b+1}{b^{2/3}}\frac{c+1}{c^{2/3}} = 3f(a)f(b)f(c)$

όπου $f(x) = \frac{x+1}{x^{2/3}}, x \in (0,+\infty)$,A η δοσμένη παράσταση και η ισότητα ισχύει όταν a=b=c Είναι $f'(x) = \frac{x-2}{3x^2}$ και από τον πίνακα μονοτονίας προκύπτει ότι η f έχει ελάχιστο για x=2 το $f(2) = 3(2)^{-2/3}$ Τότε

$A_{min} = 3^4\left(3(2)^{-2/3}\right)^3 = \left(\frac{9}{2}\right)^2$

11Γ14

Για y=σταθερό και a<0 $\lim\limits_{x\to 0+} x^a y^b = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+} K(x+y) = Ky \ne +\infty$ άρα δεν μπορεί να ισχύει η $x^a \cdot y^b \le K\cdot(x+y)$ [1] οπότε $a \ge 0$ Ομοίως και $b \ge 0$

Θέτουμε $y = zx \overset{[1]}{\Rightarrow} x^{a+b}z^b \le Kx(1+z) \Rightarrow x^{a+b-1} \le Kz^{-b}(1+z)$ [2] θεωρώντας πάλι το z σταθερό αν a+b-1>0 τότε

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{a+b-1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} Kz^{-b}(1+z)=Kz^{-b}(1+z)$ αδύνατον να ισχύει η [2] άρα $a+b-1\le 0$, ενώ αν a+b-1<0 παίρνοντας όρια της [2] όταν $x\to 0+$ καταλήγουμε πάλι σε άτοπο άρα $a+b-1\ge 0$. Τελικά a+b-1=0

Τώρα ήρθε η ώρα για το αντίστροφο. Δηλαδή αν

$a,b\ge 0, a+b-1=0$ θα δείξουμε ότι υπάρχει K= max{a,b}:

$x^a\cdot y^b\le K\cdot(x+y)$

Πράγματι θέλουμε $x^a\cdot y^b\le ax+by\Leftrightarrow a\ln x+b\ln y\le \ln(ax+by)$ που είναι η ανίσωση Jensen για την κοίλη συνάρτηση lnx στο $(0,+\infty)$ αφού $a,b\ge 0, a+b-1=0$

Όμως αν K= max{a,b}τότε $x^a\cdot y^b\le ax+by\le Kx+Ky=K(x+y)$

11Δ1

Θέτουμε $f(x)=\varepsilon\phi(\eta\mu x)-\eta\mu(\varepsilon\phi x)$, $\forall x\in[0,\pi/2)$

Επειδή $f(0)=0$ αρκεί $f'(x)>0$, $\forall x\in(0,\pi/2)$

Αλλά

$$f'(x)>0,\forall x\in(0,\pi/2)\Leftrightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^2(\eta\mu x)}>\frac{\sigma\upsilon\nu(\varepsilon\phi x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\ \forall x\in(0,\pi/2)\Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^3 x>\sigma\upsilon\nu^2(\eta\mu x)\sigma\upsilon\nu(\varepsilon\phi x)\ \forall x\in(0,\pi/2)\Leftrightarrow$$

$$\ln(\sigma\upsilon\nu x)>\frac{\ln(\sigma\upsilon\nu(\varepsilon\phi x))+2\ln(\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x))}{3}$$

Όμως αν $g(x)=\ln(\sigma\upsilon\nu x)\Rightarrow g'(x)=-\varepsilon\phi x\Rightarrow g''(x)=-1-\varepsilon\phi^2 x$

Άρα η g είναι γνήσια φθίνουσα και κοίλη στο $(0,\pi/2)$

Η ανισότητα που θέλουμε να δείξουμε γίνεται

$$g(x)>\frac{g(\varepsilon\phi x)+2g(\eta\mu x)}{3}\ \text{στο}\ (0,\pi/2)$$

Από την ανίσωση Jensen έχουμε $g(\frac{\varepsilon\phi x+2\eta\mu x}{3})>\frac{g(\varepsilon\phi x)+2g(\eta\mu x)}{3}$

στο $(0,\pi/2)$

Οπότε αρκεί να δειχθεί ότι $x<\frac{\varepsilon\phi x+2\eta\mu x}{3}\Leftrightarrow 3x<\varepsilon\phi x+2\eta\mu x$ στο

$(0,\pi/2)$

Θέτουμε $h(x)=\varepsilon\phi x+2\eta\mu x-3x, x\in[0,\pi/2)$

Επειδή $h(0)=0$ αρκεί $h'(x)>0$, $\forall x\in(0,\pi/2)$

Αλλά

$$h'(x)>0,\forall x\in(0,\pi/2)\Leftrightarrow\frac{\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}{3}>1\ \ \forall x\in(0,\pi/2)$$

Όμως από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου έχουμε

$$\frac{\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}{3}>\sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu x\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}=1$$

11Δ2

Έχουμε $f(x)+f''(x)>0\overset{f>0}{\Rightarrow}1+\frac{f''(x)}{f(x)}>0$, $\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'=\frac{f''(x)}{f(x)}-\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2$

για $x\in(a,b)$ αντικαθιστώντας παίρνουμε $1+\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2+\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'>0$

Θέτουμε $\frac{f'(x)}{f(x)}=g(x)$ οπότε παίρνουμε $1+g^2(x)+g'(x)>0$

Ξανά θέτω $\frac{f'(x)}{f(x)}=g(x)=\varepsilon\phi(h(x))$ Αν αντικαταστήσουμε τότε

Προκύπτει

$1+h'(x)>0 \Rightarrow x+h(x)$ γνήσια αύξουσα δηλαδή για $x \in (a,b)$ η

$x+\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ είναι γνήσια αύξουσα οπότε $a+\lim\limits_{x\to a+} h(x) \le b+\lim\limits_{x\to b-} h(x)$

Όμως $f'(a)<0$ επειδή η f΄ είναι συνεχής (αφού υπάρχει η f΄΄) θα ήταν $f'(x)<0$ κοντά στο a+ δηλαδή σε διάστημα (a,a+δ) οπότε η f θα ήταν γνήσια φθίνουσα και αφού f(a)=0 θα ίσχυε f(x)<0 στο (a,a+δ) που είναι άτοπο αφού f(x)>0 στο (a,b). Συνεπώς $f'(a)\ge 0$ και αντίστοιχα $f'(b)\le 0$ και λόγω συνέχειας της f΄ τα ίδια πρόσημα θα έχει κοντά στα a+,b-

Αν $f'(b)f'(a)\ne 0$ τότε

$$\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a+}\varepsilon\phi(h(x))=\varepsilon\phi\left(\lim_{x\to a+}h(x)\right)\Rightarrow \frac{A}{0+}=+\infty=$$

$$=\varepsilon\phi\left(\lim_{x\to a+}h(x)\right)\Rightarrow \lim_{x\to a+}h(x)=\frac{\pi}{2}$$

αφού A>0 και υπάρχει η $f'(a)=A$ και ανάλογα δείχνουμε ότι

$\lim\limits_{x\to b-} h(x)=-\dfrac{\pi}{2}$ συνεπώς προκύπτει άμεσα το ζητούμενο από την

$a+\lim\limits_{x\to a+} h(x) \le b+\lim\limits_{x\to b-} h(x)$

Αν πάλι κάποιο από τα $f'(b), f'(a)$ ήταν μηδέν για να βρούμε το

$\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f'(x)}{f(x)} \overset{DLH}{=} \lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f''(x)}{f'(x)}=\dfrac{f''(a)}{0+}=+\infty$ αφού

$f(a)+f''(a)>0 \Rightarrow f''(a)>0$

11Δ3

Από Taylor στα $[x,x+1]$, $[x-1,x]$ έχουμε

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{f''(x)}{2!}+\frac{f'''(u)}{3!}>f(x)+f'(x)+\frac{f''(x)}{2!}+\frac{f'''(x)}{3!}\alpha$$

φού $x<u, f'''$ γνήσια αύξουσα

$$f(x-1)=f(x)-f'(x)+\frac{f''(x)}{2!}-\frac{f'''(v)}{3!}>f(x)-f'(x)+\frac{f''(x)}{2!}-\frac{f'''(x)}{3!}\alpha$$

φού $x>v, f'''$ γνήσια αύξουσα

Προσθέτουμε κατά μέλη τις δυο ανισότητες και προκύπτει το ζητούμενο

11Δ4

$f(x)<f(a)+f'(a)\cdot(x-a)+\frac{f''(a)}{2}\cdot(x-a)^2 \ ,\forall x<a$ [1] Πράγματι έχουμε δείξει σε προηγούμενη άσκηση ότι

$f(b)=f(a)+\frac{b-a}{1!}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(\xi).$ για ξ ανάμεσα στα a,b για b=x<ξ<a και με δεδομένο ότι $f''\uparrow$ αφού $f'''>0$ και επιπλέον $\frac{(x-a)^2}{2}\geq 0$ δείξαμε το ζητούμενο

Μπορούμε να θεωρήσουμε το δεύτερο μέλος της [1] σαν τριώνυμο του x-a=y και να παρατηρήσουμε ότι όταν $y\geq 0$ οι συντελεστές του είναι θετικοί άρα το τριώνυμο είναι >0 ενώ για y<0 τριώνυμο>f(x)>0 οπότε το τριώνυμο είναι θετικό στο R που σημαίνει ότι η $\Delta_1<0$ [2]

Χρησιμοποιούμε πάλι την ίδια τεχνική όπως πριν ,μόνο όπου f βάζουμε την f ‘ και παίρνουμε την

$$f'(x)<f'(a)+f''(a)\cdot(x-a)+\frac{f'''(a)}{2}\cdot(x-a)^2 \ ,\forall x<a \overset{f'''(a)<f(a)}{\Rightarrow}$$

$$f'(x)<f'(a)+f''(a)\cdot(x-a)+\frac{f(a)}{2}\cdot(x-a)^2 \ ,\forall x<a \quad [3]$$

Ακριβώς με τα ίδια επιχειρήματα όπως πριν το δεξί μέλος της [3] είναι τριώνυμο του y με διακρίνουσα $\Delta_2<0$ [4]

Έτσι αν θέσουμε A=f(a), B=f ‘(a), C=f ‘’(a) οι [2] και [4] γίνονται $B^2<2AC$, $C^2<2AB$ οπότε τελικά B<2A που είναι το ζητούμενο γιατί το a ήταν τυχαίο

11Δ5

Από την $-B \le f''(x) \le B \Rightarrow \begin{cases} f'(x)+Bx \uparrow \\ f'(x)-Bx \downarrow \end{cases}, -a \le x \le a$ συνεπώς

$f'(x)+Bx \ge f'(x_0)+Bx_0$ για $x_0 \le x \le a$ [1] ενώ

$f'(x)-Bx \ge f'(x_0)-Bx_0$ για $-a \le x \le x_0$ [2]

Όμως μπορούμε τις [1],[2] να τις γράψουμε

$[f(x)-(x-x_0)f'(x_0)+\frac{B}{2}(x-x_0)^2]' \ge 0$ για $x_0 \le x \le a$ που σημαίνει

ότι η $g(x)=f(x)-(x-x_0)f'(x_0)+\frac{B}{2}(x-x_0)^2 \uparrow$ για $x_0 \le x \le a$ και

όμοια η $h(x)=f(x)-(x-x_0)f'(x_0)-\frac{B}{2}(x-x_0)^2 \uparrow$ για $-a \le x \le x_0$

οπότε προκύπτει ότι

$g(a) \ge g(x_0)\ , -h(-a) \ge -h(x_0)\} \Rightarrow$

$g(a)-h(-a) \ge g(x_0)-h(x_0) \Leftrightarrow$

$f(a)-(a-x_0)f'(x_0)+\frac{B}{2}(a-x_0)^2-f(-a)-(a+x_0)f'(x_0)+$

$+\frac{B}{2}(a+x_0)^2 \ge 0 \Leftrightarrow$

$f(a)-f(-a)-2af'(x_0)+B(a^2+x_0^2) \ge 0 \Leftrightarrow$

$f(a)-f(-a) \ge 2af'(x_0)-B(a^2+x_0^2) \ge 2af'(x_0)-2Ba^2 \Rightarrow$

$2A \ge |f(a)|+|f(-a)| \ge |f(a)-f(-a)| \ge f(a)-f(-a) \ge$

$\ge 2af'(x_0)-2Ba^2 \Rightarrow$

$\frac{A}{a}+Ba \ge f'(x_0)$

Ανάλογα αν θεωρήσουμε την $-f(x)$ αφού ισχύουν τα ίδια δεδομένα

γι' αυτήν θα είναι $\frac{A}{a}+Ba\geq -f'(x_0)$ που δίνει το ζητούμενο

$|f'(x_0)|\leq \frac{A}{a}+Ba$

Το ελάχιστο της $q(a)=\frac{A}{a}+Ba, a>0$ από την ανίσωση Α-Μ,Γ-Μ

είναι το $2\sqrt{\frac{A}{a}Ba}=2\sqrt{AB}$ και επιτυγχάνεται όταν $a=\sqrt{\frac{A}{B}}$

Ένας πολύ πιο σύντομος τρόπος είναι Από Taylor στο $[x,x+2a]$

έχουμε

$f(x+2a)=f(x)+2af'(x)+2a^2f''(\theta), x<\theta<x+2a$ οπότε

$f'(x)=\frac{f(x+2a)-f(x)}{2a}-af''(\theta)\Rightarrow |f'(x)|\leq \frac{2A}{2a}+aB\Rightarrow$

$|f'(x)|\leq \min(\frac{2A}{2a}+aB)=2\sqrt{AB}$

11Δ6

Έχουμε

$g'(x)-g(x)>c>0\Rightarrow e^{-x}(g'(x)-g(x))>ce^{-x}\Rightarrow (e^{-x}g(x))'>(-ce^{-x})'$
$\Rightarrow (e^{-x}g(x)+ce^{-x})'>0\Rightarrow e^{-x}g(x)+ce^{-x}$
δηλαδή $e^{-x}g(x)+ce^{-x}$ γνήσια αύξουσα

Αρα για $x<0\Rightarrow e^{-x}g(x)+ce^{-x}<g(0)+c\Rightarrow g(x)+c<(g(0)+c)e^{x}$

Επειδή υπάρχει το $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=L$ παίρνοντας όρια στην προηγούμενη

όταν $x\to-\infty$ προκύπτει $L<-c<0$

Άρα κοντά στο $-\infty$ ($x<x_1$) θα ισχύει : $-\frac{3c}{2}<g(x)<-\frac{c}{2}$ [1]

δηλαδή $g(x)+\frac{3c}{2}>0\Rightarrow g(x)+c+\frac{c}{2}>0$

Από την αρχική όμως είναι $g'(x) > g(x) + c$

Συνεπώς από τις δυο τελευταίες $g'(x) + \frac{c}{2} > 0 \Rightarrow g'(x) > -\frac{c}{2}$ [2]

Όμως αφού η αρχική ισχύει για κάθε n τα προηγούμενα και ειδικότερα η [1] θα ισχύει και για την $g'(x)$!!! κοντά στο $-\infty$ ($x<x_2$)

πιθανώς για κάποιο άλλο $L' < -c < 0$ αλλά πάντοτε $g'(x) < -\frac{c}{2}$ [3]

Τώρα για $x < \min\{x_1, x_2\}$ οι [2] και η [3] δίνουν την επιθυμητή αντίφαση

12B12

Η f διατηρεί σταθερό πρόσημο άρα και η f΄΄ πχ $f(x) > 0 \Rightarrow f''(x) < 0$

Η f έχει εφαπτομένη που δεν είναι οριζόντια, αλλιώς $f''(x) = 0$.

Αφού όμως η f είναι κοίλη θα είναι κάτω από την εφαπτομένη της οπότε $f(x_0) < 0$ άτοπο

12B13

Θέτουμε $g(x) = f(x) - M = \text{κυρτή}$ και $g(x) < 0$ μετά ίδια με την προηγούμενη

12B14

Η f΄ είναι φθίνουσα. Αν δεν σταθερή τότε η f έχει εφαπτομένη που δεν είναι οριζόντια και θα βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της οπότε $f(x_0) < 0$ άτοπο άρα $f(x) = 1, \forall x \in R$

12B15

Οι ρίζες της f είναι μεμονωμένα σημεία. Έστω a,b δυο διαδοχικές ρίζες και πχ $f(x) > 0, \forall x \in (a,b) \Rightarrow f''(x) \forall x \in (a,b)$ Τότε με Rolle και πίνακα μονοτονίας καταλήγουμε σε αντίφαση $f(x) < 0, \forall x \in (a,b)$ οπότε και η f΄΄ έχει το πολύ μια ρίζα άρα το πολύ ένα σημείο καμπής

Όμως $f'''(x)=5f'(x),\forall x\in R$ οπότε λόγω των προηγουμένων η $f'(x)$ έχει το πολύ μια ρίζα άρα το πολύ ένα ακρότατο

12Β17

$$f''(x)+f'(x)>f'(x)+f(x)\overset{g=f+f'}{\Rightarrow} g'(x)>g(x)\Rightarrow$$

$$e^{-x}g'(x)-e^{-x}g(x)>0\Rightarrow\left(e^{-x}g(x)\right)'>0\Rightarrow e^{-x}g(x)\uparrow$$

$$\overset{x>0}{\Rightarrow}e^{-x}g(x)>0\Rightarrow g(x)>0\Rightarrow f'(x)+f(x)>0\Rightarrow$$

$$\left(e^{x}f(x)\right)'>0\overset{x>0}{\Rightarrow}e^{x}f(x)>0\Rightarrow f(x)>0\overset{f''>f}{\Rightarrow}f''(x)>0$$

12Γ1

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $f'(x)\uparrow\ \forall x\in R$ Άρα η f είναι κυρτή στο R Έστω ότι η $f'(x)$ αλλάζει πρόσημο

Επειδή είναι συνεχής από Bolzano $\exists x_0: f'(x_0)=0$ με x_0 μοναδικό αφού είναι γνήσια μονότονη Για $x_1>x_0\Rightarrow f'(x_1)>0$ και επειδή η f είναι κυρτή θα είναι «πάνω από την εφαπτομένη της . Δηλαδή

$f(x)>f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1)\ \ \forall x>x_1$

Όμως επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1))=+\infty$ προκύπτει ότι

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ Άτοπο

Άρα η $f'(x)$ δεν αλλάζει πρόσημο (οπότε δεν θα έχει και ρίζα αφού είναι γνήσια μονότονη)

Αν ήταν $f'(x)>0$ με ίδιο τρόπο καταλήγουμε σε άτοπο

Άρα $f'(x)<0\Rightarrow f(x)\downarrow$ στο R

Τότε όμως η συνάρτηση $f'(x)-f(x)\uparrow$ στο R με συνέπεια η εξίσωση $f'(x)-f(x)=0$ να έχει το πολύ μια ρίζα

12Γ2

Με 2 ΘΜΤ στα [x-1,x],[x,x+1] και επειδή η f ΄ είναι γνήσια φθίνουσα…

$f(x+1)-a(x+1)-b-\left(f(x)-ax-b\right)=f(x+1)-f(x)-a\to 0$

από το προηγούμενο και το κριτήριο παρεμβολής…

12Γ3

Θα δείξουμε ότι $f'(x)>a,\forall x\in R$. Αν

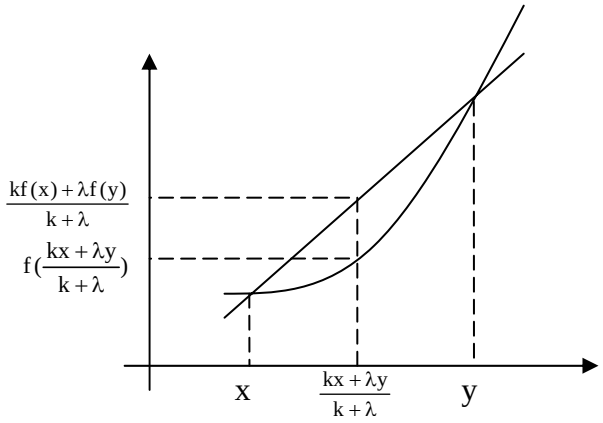
$g(x)=f'(x)-a\Rightarrow g'(x)=f''(x)<0$ άρα g γνήσια φθίνουσα οπότε

$g(x)>\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(f'(x)-a)=a-a=0$ λόγω της προηγούμενης

12Γ4

Το Α το έχουμε δει ξανά στις ανισότητες. Έχουμε επίσης δει ότι «χορδή μιας κυρτής βρίσκεται πιο ψηλά από την συνάρτηση» πάλι στις ανισότητες το $f(\frac{kx+\lambda y}{k+\lambda})$ είναι η τεταγμένη της Cf στο[x,y] ενώ

Το $\frac{kf(x)+\lambda f(y)}{k+\lambda}$ είναι η αντίστοιχη τεταγμένη της χορδής όπως στο σχήμα



12Γ5

1) $f(x)=x^2, k_1=k_2=k_3=1$

2) $f(x)=x^n, k_1=k_2=1$

3) $f(x)=x\ln x, k_1=k_2=1$

12Γ6

Ο πίνακας μονοτονίας της f ξεκινώντας από την f΄΄ εξασφαλίζει την ύπαρξη και μοναδικότητα του c

Είναι γνωστό ότι

$$f(x)>f(b)+m(x-b)\Rightarrow \frac{f(x)-f(b)}{x-b}<m\Rightarrow \lim_{x\to b-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}\le m$$

$$\Rightarrow f'(b)\le m$$

Αν

$$w(x)=f(x)-g(x)\Rightarrow w(a)=0, w'(a)=f'(a)-k>0 \overset{\lim}{\Rightarrow} \exists x_1: w(x_1)>0$$

η $w'(x)=f'(x)-k\Rightarrow w'(b)=f'(b)-k<f'(b)-m<0$

Από τον πίνακα μονοτονίας της w και επειδή

$w(a)=0, w(b)=(b-a)(m-k)<0$ προκύπτουν τα ζητούμενα

12Δ1

Θέτω

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}-f'(c), x\neq c\\ 0\qquad\qquad\quad , x=c\end{cases}$$

Και παρατηρώ ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο R και δεν έχει ρίζα στο $(-\infty,c)\cup(c,+\infty)$ λόγω της αρχικής μας υπόθεσης για $y=c$ α θα έχει σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα δυο διαστήματα πράγμα που εύκολα σημαίνει ότι η C_f είναι σταθερά πάνω ή κάτω από την εφαπτομένη της στο c

Πχ έστω ότι για $x > c$ έχουμε $g(x) > 0$ δηλαδή C_f είναι σταθερά πάνω από την εφαπτομένη της στο c

Για $x < c$ θα αποκλείσουμε την περίπτωση η C_f να είναι και αυτή σταθερά πάνω από την εφαπτομένη της στο c

Πράγματι αν ήταν έτσι θα υπήρχε $x_2 < c : g(x_2) < 0$ οπότε αν θεωρήσουμε και ένα $x_1 > c$ και φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την εφαπτομένη από την MIN από τις δυο αποστάσεις $f(x_1) - y, f(x_2) - y$ όπου y η εφαπτομένη της C_f στο c , δηλαδή $y = f(c) + f'(c)(x - c)$ τότε αυτή η παράλληλη θα τέμνει την C_f σε κάποιο $(x_3, f(x_3))$ λόγω του Θ. Ενδιαμέσων τιμών οπότε θα είχαμε

$$\frac{f(x_{1,2}) - f(x_3)}{x_{1,2} - x_3} = f'(c) \text{ άτοπο από υπόθεση}$$

Μένει λοιπόν η δεύτερη περίπτωση να είναι για $x < c : g(x) > 0$.

Έτσι έχουμε $g(x) \geq 0 = g(c), \forall x \in R$, από Fermat λοιπόν θα είναι

$$0 = g'(c) = \lim_{x \to c} \frac{\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c) - f'(c)(x - c)}{(x - c)^2} \overset{\frac{0}{0}, DLH}{=}$$

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{2(x - c)} = \frac{f''(c)}{2}$$

Άρα $f''(c) = 0$

13Γ1

Αν Λ η προβολή του Α στην ΚΜ από τα όμοια τρίγωνα ΜΑΛ,ΜΒΚ με ΟΜ=x, $\widehat{AOK} = \omega$ προκύπτει $x(\omega) = R\frac{\eta\mu\omega - \omega\sigma\upsilon\nu\omega}{\omega - \eta\mu\omega}, \omega \in (0, \pi)$

Με δυο φορές DLH το όριο προκύπτει ίσο με 2R. Θα δείξουμε ότι x(ω)<2R. Θέτω f(ω)=3ημω-συνω-2ω με $0 \leq \omega \leq \pi$ Βρίσκουμε

$f'(\omega)=\ldots= 4\varepsilon\phi\frac{\omega}{2}[\frac{\omega}{2}-\varepsilon\phi\frac{\omega}{2}]<0$ Άρα $f(\omega)< f(0)=0$ για $0<\omega<\pi$. Ισχύει λοιπόν $x(\omega)<2R$ αλλά το 2R δεν είναι μέγιστο λόγω ανοικτού διαστήματος Αν ορίσουμε $f(0)=2R$ τότε έχουμε

13Γ2

$$f'(x)+f(x)=\frac{e^x(f'(x)+f(x))}{e^x}=\frac{(e^xf(x))'}{(e^x)'}\to\lambda\in R$$ οπότε

$|e^x|=e^x\to+\infty$

$$\frac{e^xf(x)}{e^x}=f(x)\to\lambda\Rightarrow f'(x)\to 0$$

13Δ1

$$\left(f(x)e^{\frac{x^2}{2}}\right)''=\left((f'(x)+xf(x))e^{\frac{x^2}{2}}\right)'=\left(f''(x)+2xf'(x)+(x^2+1)f(x)\right)e^{\frac{x^2}{2}}$$

Σκεπτόμαστε τον κανόνα De L' Hospital στον οποίο δεν απαιτείται το όριο του αριθμητή Έτσι

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)e^{\frac{x^2}{2}}}{e^{\frac{x^2}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(f(x)e^{\frac{x^2}{2}}\right)'}{\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(f'(x)+xf(x))e^{\frac{x^2}{2}}}{xe^{\frac{x^2}{2}}}$$

αφού η $e^{\frac{x^2}{2}}$ είναι μονότονη κοντά στο άπειρο και τείνει σε αυτό όταν το $x\to+\infty$. Ακόμη είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(f'(x)+xf(x))e^{\frac{x^2}{2}}}{xe^{\frac{x^2}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left((f'(x)+xf(x))e^{\frac{x^2}{2}}\right)'}{\left(xe^{\frac{x^2}{2}}\right)'}=$$

$$\lim_{x\to a}\frac{(f''(x)+2xf'(x)+(x^2+1)f(x))e^{\frac{x^2}{2}}}{(x^2+1)e^{\frac{x^2}{2}}}=$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f''(x)+2xf'(x)+(x^2+1)f(x)}{x^2+1}=0$$

αφού $\left|f''(x)+2xf'(x)+(x^2+1)f(x)\right|\le 1, \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+1}=0$

13Δ2

Αρχικά θα δείξουμε ότι αν $\lim_{x\to+\infty}\left(g'(x)+kg(x)\right)=A$, $k>0$, $A\in R$

με g' συνεχή στο R, τότε $\lim_{x\to+\infty}\left(g'(x)\right)=0$ και $\lim_{x\to+\infty}\left(g(x)\right)=\frac{A}{k}$

Πράγματι έχουμε

$$g'(x)+kg(x)=\frac{e^{kx}\left(g'(x)+kg(x)\right)}{e^{kx}}=\frac{\left(e^{kx}g(x)\right)'}{\left(\frac{e^{kx}}{k}\right)'}=\frac{\left(e^{kx}kg(x)\right)'}{\left(e^{kx}\right)'}$$

Άρα $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(e^{kx}kg(x)\right)'}{\left(e^{kx}\right)'}\right)=A$ ακόμη $\lim_{x\to+\infty}\left|e^{kx}\right|=+\infty$ αφού k>0 και η

e^{kx} είναι γνήσια μονότονη με παράγωγο που δεν μηδενίζεται «κοντά» στο άπειρο οπότε θα ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(e^{kx}kg(x)\right)}{\left(e^{kx}\right)}\right)=A\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(kg(x)\right)=A\ .[*]$$

Όμως έχουμε ότι $\lim_{x\to+\infty}\left(g'(x)+kg(x)\right)=A$ συνεπώς αφαιρώντας κατά μέλη τις δυο τελευταίες σχέσεις είναι $\lim_{x\to+\infty}\left(g'(x)\right)=0$ και

τότε $\lim_{x\to+\infty}\left(kg(x)\right)=A\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(g(x)\right)=\frac{A}{k}$

Τώρα αφού $a>0, b>0, a^2>4b$ υπάρχουν μοναδικοί θετικοί πραγματικοί λ,μ ώστε να είναι $a=\lambda+\mu, b=\lambda\mu$. Έτσι η δοσμένη σχέση στην εκφώνηση γίνεται

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f''(x)+af'(x)+bf(x)\right)=c \Leftrightarrow$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(f''(x)+(\mu+\lambda)f'(x)+\mu\lambda f(x)\right)=c \Leftrightarrow$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(f''(x)+\mu f'(x)+\lambda(f'(x)+\mu f(x))\right)=c$$

Θέτουμε $f'(x)+\mu f(x)=h(x)$ στην προηγούμενη και έχουμε

Άρα $\lim_{x\to+\infty}\left(h'(x)+\lambda h(x)\right)=c$ οπότε

$$\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}\left(h'(x)\right)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(f''(x)+\mu f'(x)\right)=0 \Rightarrow \begin{cases}\lim_{x\to+\infty} f''(x)=0\\ \lim_{x\to+\infty} f'(x)=0\end{cases}\\ \lim_{x\to+\infty}\left(h(x)\right)=\frac{c}{\lambda} \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(f'(x)+\mu f(x)\right)=\frac{c}{\lambda} \Rightarrow \begin{cases}\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0\\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=c/\lambda\mu\end{cases}\end{cases}$$

Τελικά είναι $\lim_{x\to+\infty} f''(x)=\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{c}{b}$

Η [*] είναι ο κανόνας De L' Hospital στον οποίο δεν απαιτείται το όριο του αριθμητή

14Β2

$$f(2x)-f(x)=xf'(\xi)$$
$$x<\xi<2x \Rightarrow f'(x)>f'(\xi)>f'(2x) \Rightarrow xf'(x)>xf'(\xi)>xf'(2x) \Rightarrow$$
$$xf'(x)>f(2x)-f(x)>xf'(2x) \overset{x\to x/2}{\Rightarrow}$$
$$f(2x)-f(x)<xf'(x)<2(f(x)-f(\frac{x}{2}))$$

Και $\lim_{x\to+\infty} f(x)=a$ …

14Β3

Αν υπήρχε $x_0 : f'(x_0) \geq 0 \Rightarrow f'(x) > 0, x > x_0$ τότε για $a > x_0$ είναι

$f(x) > f(a) + f'(a)(x-a) \overset{f'(a)>0}{\rightarrow} +\infty$ άτοπο…

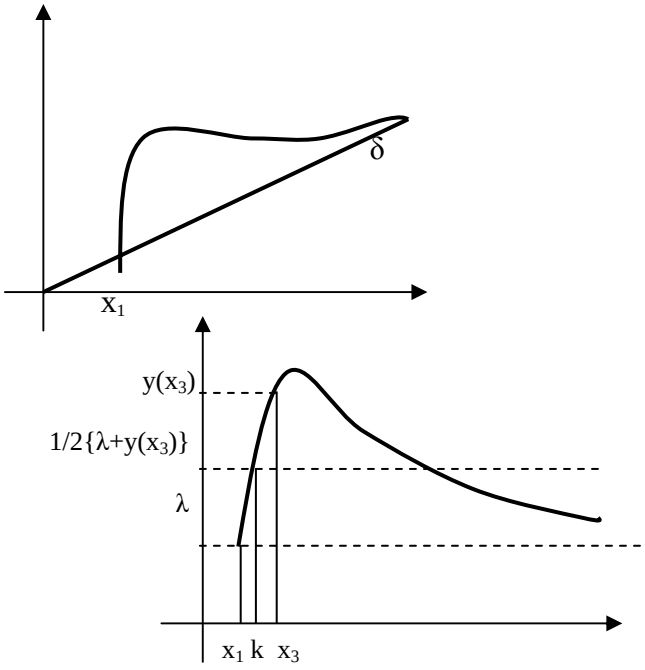
14Γ1

Αφού $\exists f'(x)$ εξίσωση εφαπτομένης είναι

$\varepsilon : y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),\ x_0 \in \Delta = (0, +\infty)$

$y = f'(x_0)x + f(x_0) - x_0 f'(x_0)$

Αν $(0,0) \in (\varepsilon) \Leftrightarrow 0 = 0 + f(x_0) - x_0 f'(x_0) \Leftrightarrow x_0 f'(x_0) = f(x_0)$



Θέτω $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $\delta : y = y(x) = \lambda x$ Έχω $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lambda$ αφού (δ)

ασύμπτωτος της f Έχω $\dfrac{f(x_1)}{x_1} = \lambda \Leftrightarrow y(x_1) = \lambda x_1$ (αφού η C_f τέμνει

την δ, έστω στο Α)ακόμη $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lambda$.Έστω $g(x) > \lambda$ στο

$(x_1, +\infty)$ αλλιώς αν $g(x_2) = \lambda,\ x_2 > x_1$ με Rolle για την g στο

$[x_1, x_2]$ είναι $g'(\xi)=0,\ \xi\in(x_1,x_2)$ που αποδεικνύει το ζητούμενο

αφού $g'(\xi)=0\Rightarrow \xi f'(\xi)-f(\xi)=0$

Έστω $x_3>x_1,\ g(x_3)>\lambda\ \ (y(x_1)=\lambda)$

Αφού g συνεχής στο $[x_1,x_3]$ παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ λ και

$\lambda+y(x_3)$ άρα και την $\dfrac{y(x_3)+\lambda}{2}=g(\kappa)$

Αν $y(x)\neq\dfrac{y(x_3)+\lambda}{2},\ \forall x>\kappa$ επειδή η g είναι συνεχής η

$g(x)-\dfrac{g(x_3)+\lambda}{2}$ θα διατηρεί σταθερό πρόσημο και δεδομένου ότι

$g(x_3)-\dfrac{g(x_3)+\lambda}{2}>0$ θα είναι

$$g(x)-\frac{g(x_3)+\lambda}{2}>0,\ \forall x>\kappa\Rightarrow g(x)>\frac{g(x_3)+\lambda}{2}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to\infty}g(x)\geq\frac{g(x_3)+\lambda}{2}\Rightarrow$$

$$\lambda\geq\frac{g(x_3)+\lambda}{2}\Rightarrow\lambda\geq g(x_3)$$

άτοπο,(πράγμα που περιμέναμε λόγω ασυμπτώτου)

άρα υπάρχει $\mu>x_3: g(\mu)=\dfrac{g(x_3)+\lambda}{2}=g(\kappa)$ με Rolle προκύπτει

άμεσα το ζητούμενο.

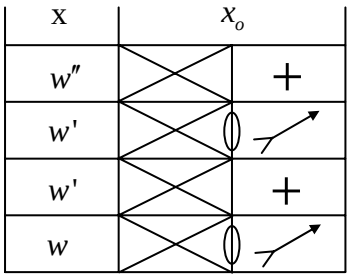
14Γ2

Από τα δεδομένα και την προηγούμενη άσκηση έχω

$$\lambda=\frac{f(x_o)}{x_o}=f'(x_o),\ \lim_{x\to\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=0$$

Θέτω $w(x)=f(x)-\lambda x$, w'' συνεχής στο $(0,+\infty)$

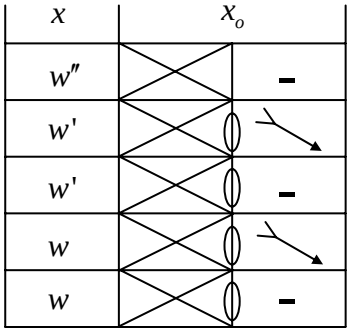
Αν $w''(x) > 0 \ \forall x \geq x_o$



(πίνακας 1)

Άτοπο αφού $\lim_{x\to\infty} w(x) = 0$ και μια γνήσια αύξουσα συνάρτηση με θετικές τιμές δεν μπορεί να έχει όριο στο άπειρο το 0(απόδειξη εύκολη)

Αν $w''(x) < 0 \ \forall x \geq x_o$



(πίνακας 2)

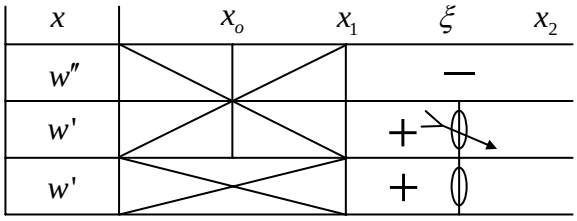
Πάλι άτοπο για τους ίδιους λόγους

Άρα w'' δεν έχει σταθερό πρόσημο και επειδή είναι συνεχής

$w''(x_1) = 0$, και έστω π.χ. $w''(x) > 0, \forall x < x_1$ και

$w''(x) < 0 \ \forall x > x_1$ αφού δεν μπορεί $w''(x) = 0$ σε διάστημα.

τότε $w'(x_1) > 0, \ w(x_1) > 0$ από τον πίνακα 1 αν υποθέσουμε ότι εξακολουθεί να ισχύει $w''(x) < 0 \ \forall x > x_1$ τότε κατασκευάζουμε τον επόμενο πίνακα που τελικά θα μας οδηγήσει σε άτοπο.



(πίνακας 3)

Αν $w'(x) \geq 0 \ \forall x > x_1$, w γνησίως αύξουσα δεδομένου ότι δεν υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα στην γραφική παράσταση της συνάρτησης και ακόμη είναι και $w(x_1) > 0$ άτοπο αφού

$\lim\limits_{x\to\infty} w(x) = 0$ άρα $\exists\ x_2 > x_1 : w'(x_2) < 0$ τότε w'(ξ)=0 και αν

$w'(x) < 0$ για $x > x_2 > \xi$ από το θεώρημα μέσης τιμής θα είναι

$$\left.\begin{array}{l} w(x) = w(x_2) + (x - x_2)w'(n), \quad x_2 < n < x \\ \lim\limits_{x\to\infty} w(x) = -\infty, \quad \text{ατοπο} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

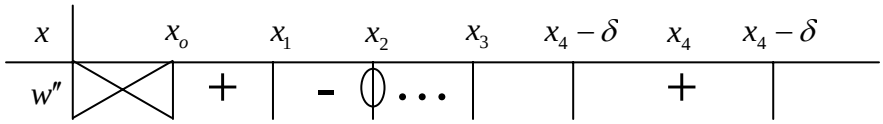
$w'(y_3) > 0$ με $y_3 > x_2$

Ομως $w'(x) < 0 \ \ \forall x > \xi\ (y_3 > \xi)$ άτοπο

$$\left.\begin{array}{l} \text{άρα } \exists\ x_3 > x_1 : w''(x_3) \geq 0 \\ \text{όμως } w'' \text{ δεν μηδενίζεται σε διάστημα} \\ w'' \text{ συνεχής} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \exists x_4 : w''(x_4) > 0 \\ w'' \text{ συνεχής} \end{array}\right\} \Rightarrow w''(x) > 0 \text{ σε περιοχή του } x_4$$

Τα παραπάνω αποτελέσματα συνοψίζονται στον επόμενο πίνακα



τότε στο x_1 έχω σημείο καμπής και ανάμεσα στα x_1, x_4 δηλ. στο (x_1, x_4) άλλο ένα σημείο καμπής που σημαίνει ότι η συνάρτηση έχει τουλάχιστον δύο σημεία καμπής

15Γ1

$P(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

$P(x)=(x^2-\beta x-\alpha x+\alpha\beta)(x-\gamma)$

$P(x)=x^3-x^2\gamma-x^2+\beta\gamma x-\alpha x^2+\alpha\gamma x+\alpha\beta x-\alpha\beta\gamma$

$P(x)=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma$

$P(x)=x^3-7x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-9$

Θέτω $\lambda=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$. Άρα $\exists\lambda: P(x)=x^3-7x^2+\lambda x-9$ να έχει ρίζες τα α, β, γ.Θέτω $f(x)=-x^2+7x+\frac{9}{x}$, $x>0$ $A_f=(0,+\infty)$,f συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$

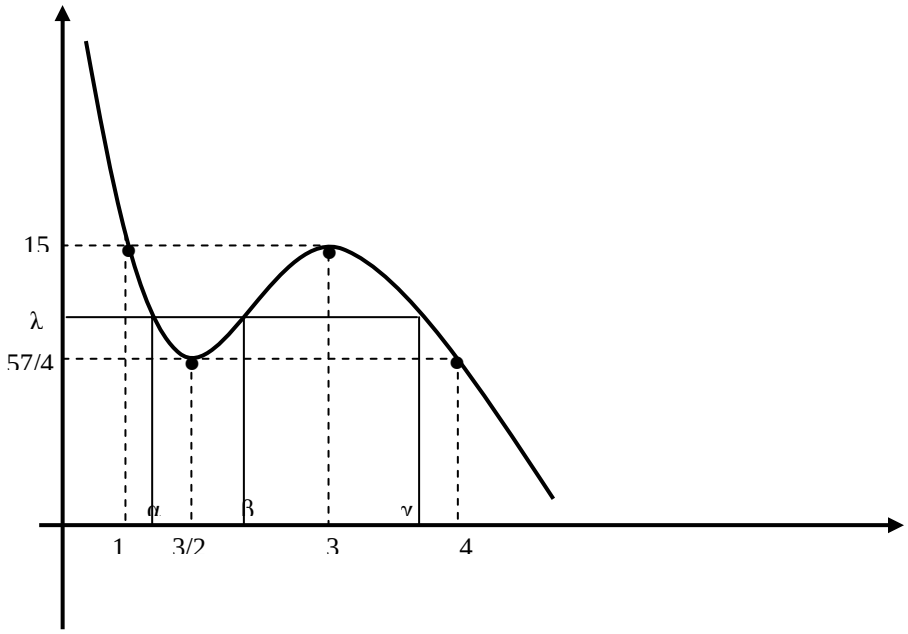
$$f'(x)=-2x+7-\frac{9}{x^2}=\frac{-2x^3+7x^2-9}{x^2}=\frac{(x+1)(-2x^2+9x-9)}{x^2}=$$

$$=\frac{-2(x+1)(x-3/2)(x-3)}{x^2}$$

$$f''(x)=-2+2\frac{9}{x^3}=2\left(\frac{9-x^3}{x^3}\right) \quad (-\sqrt[3]{9},\sqrt[3]{9},0)$$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ Έχω κατακόρυφη ασύμπτωτη $x=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty\notin\mathbb{R}$ άρα δεν έχω πλάγια ασύμπτωτο



Θεωρώ την εξίσωση

$P(x)=0 \Leftrightarrow x^3+7x^2+\lambda x-9=0 \Leftrightarrow \lambda x=-x^3+7x^2-9 \Leftrightarrow \lambda=-x^2+7x+\frac{9}{x} \Leftrightarrow$

$\lambda=f(x)$

Οι 3 λύσεις α, β, γ της P(x) = 0 είναι εκείνα τα x για τα οποία η f(x) = λ έχει 3 διαφορετικές λύσεις (σημεία τομής…). Παρατηρώ ότι αφού

$0<\alpha<\beta<\gamma$ τότε $\alpha \in \left(1, \frac{3}{2}\right), \beta \in \left(\frac{3}{2}, 3\right), \gamma \in (3,4)$.

Δ. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

(1) ΑΟΡΙΣΤΑ

(2) ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

(3) ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ Κ.Λ.Π

(4) ΕΥΡΕΣΗ ΤΥΠΩΝ ΜΕ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

(5) ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ

(6) ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΥΠΑΡΞΗΣ

(7) ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

(8) ΟΡΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

(9) ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ

(10) ΑΠΟΛΥΤΑ-ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ

(11) ΕΜΒΑΔΑ

(12) ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δ

2Γ1

$$A(x)=\int_0^x f(t)(x-t)^2dt \Rightarrow$$

$$A'(x)=\left(x^2\int_0^x f(t)dt-2x\int_0^x tf(t)dt+\int_0^x t^2f(t)dt\right)'=...$$

$$B(x)=2!\int_0^x\left(\underbrace{\int_0^{\upsilon_2}\left(\int_0^{\upsilon_1}f(t)dt\right)d\upsilon_1}_{f_2}\right)d\upsilon_2 \Rightarrow$$

$$B'(x)=\left(\int_0^x f_2(t)dt\right)'=...$$

Όσες φορές χρειαστεί (2) A(0)=B(0)…

2Γ2

Θέτουμε

$$g(x)-\sum_{k=0}^{n}a_k\frac{x^k}{k!}=h(x)\Rightarrow\begin{cases}h^{(n)}(x)=g^{(n)}(x)\\ h^{(n)}(0)=0\end{cases}$$ που το δείχνουμε

επαγωγικά Αρκεί τώρα

$$h(x)=\int_0^x f(t)(x-t)^n dt \Leftrightarrow h(x)=n!\int_0^x\left(\underbrace{\int_0^{\upsilon_n}...\left(\int_0^{\upsilon_1}f(t)dt\right)d\upsilon_1...}_{f_n}\right)d\upsilon_n$$

που είναι η επανάληψη της προηγούμενης άσκησης αν ολοκληρώσουμε ν+1 φορές

2Γ3

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}>0\Rightarrow\exists f^{-1}\Rightarrow f'(f^{-1}(x))=\frac{1}{\sqrt{1+(f^{-1}(x))^3}}$$

$$f(f^{-1}(x))=x\Rightarrow f'(f^{-1}(x))=\frac{1}{\left(f^{-1}(x)\right)'}=\frac{1}{\sqrt{1+(f^{-1}(x))^3}}$$

Παραγωγίζοντας προκύπτει το ζητούμενο

3Β1

Δείξτε ότι $g'(x)=\dfrac{x^{n-1}f(x)\int_0^x t^{n-1}(x-t)f(t)dt}{(+)}$ …

3Β2

Δείξτε ότι $w'(x)=\dfrac{f(x)h(x)\int_0^x f(t)h(t)\left(\dfrac{g(x)}{h(x)}-\dfrac{g(t)}{h(t)}\right)dt}{(+)}$ …

3Γ1

Α. $f'(x)>0...,f'(-x)=f'(x)\overset{f(0)=0}{\Rightarrow}-f(-x)=f(x)$

Β. $f'(x+\pi)-f'(x)=0\Rightarrow f(x+\pi)-f(x)=c\overset{x=-\frac{\pi}{2}}{\Rightarrow}2f(\dfrac{\pi}{2})=c$

Γ. θέτουμε $g(x)=f(x)-2(\sqrt{1+x}-1),x\geq 0$ μονοτονία και για το όριο κριτήριο παρεμβολής

3Γ2

Α. εύκολο

Β. θέτουμε $g(x)=f(x)-f(1/x)$…

Γ. $f(1/x)=\int_1^{1/x}\dfrac{\ln t}{1+t}dt\overset{u=1/t}{=}-\int_1^x\dfrac{-\ln t}{1+\frac{1}{u}}\dfrac{1}{u^2}du=...$ για το όριο είναι

Από την μονοτονία $2f(x)\geq f(x)+f(1/x)\Rightarrow f(x)\geq\dfrac{(\ln x)^2}{4}\to+\infty$

4Β13

Παραγωγίστε 2 φορές. Στην $f''(x)$ θα εμφανιστεί η $f(x)$…

4Β14

Ολοκληρώνουμε την $(f(x)-1)^2\geq 0$ …

4Β15

Εισάγουμε την $f(x)-x=g(x)$ στα δυο ολοκληρώματα…

4Γ1

Παραγωγίστε 2 φορές.

$f''(x)=f(x)\Rightarrow f''(x)+f'(x)=f'(x)+f(x)\Rightarrow ...$

$f(0)=1, f'(0)=0$

4Γ2

Παραγωγίστε 2 φορές. $f''(x)=f(x)+2 \overset{g=2+f}{\Rightarrow} g''(x)=g(x)\Rightarrow ...$

4Γ3

Ολοκληρώνουμε την δοσμένη από α ως β και καταλήγουμε στην

$$\left(f(a)+\frac{1}{2}\right)^2+\left(f(b)-\frac{1}{2}\right)^2\le 0\Rightarrow f(a)=-1/2, f(b)=1/2$$

Ολοκληρώνουμε την $(b-a)f'(x)\le 1$ από α ως x και από x ως β θα φτάσουμε στην $f(x)=\dfrac{2x-a-b}{2(b-a)}$

4Γ4

$$\int_0^1 f(t)(t-a)^2dt=...=0 \overset{f(x)\ge 0}{\Rightarrow} f(x)(x-a)^2=0\ldots$$

4Γ5

Πρώτα απ’ όλα θα εξασφαλίσουμε την παραγωγισιμότητα της f

i. f συνεχής: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\ (I)\quad \forall x_0>0$

f^3 παραγωγίσιμη: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f^3(x)-f^3(x_0)}{x-x_0}=\kappa\in\mathbb{R}\quad \forall x_0>0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\left(f(x)^2+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)\right)=\kappa\in\mathbb{R}\quad (II)$$

όμως $\lim\limits_{x\to x_0}[f^2(x)+f(x_0)f(x)+f^2(x_0)]\overset{(1)}{=}3f^2(x_0)\neq 0$ (III)

$$(II)\div(III)\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\kappa}{3f^2(x_0)}\in\mathbb{R}\ \ \forall x_0>0$$

άρα f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και όμοια για το $(-\infty,0)$

ii. $f(0)=0$

εάν η f^3 μη παραγωγίσιμη η εξίσωση είναι αδύνατη

εάν η f^3 παραγωγίσιμη $x\in(0,+\infty):3\int_0^x f^2(t)dt=f^3(x)$

επειδή f δεν είναι σταθερή σε κανένα διάστημα τότε για x>0 είναι:

$$\int_0^x f^2(t)dt>0\ \ \forall x>0\Rightarrow f^3(x)>0\Rightarrow f(x)>0\Rightarrow f(x)\neq 0\ ,\ x>0$$

f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ οπότε παραγωγίζοντας την αρχική έχουμε

$3\int_0^x f^2(x)dt=f^3(x)\Rightarrow 3f^2(x)=3f^2(x)\cdot f'(x)\Rightarrow f'(x)=1\Rightarrow$ Αν $f'(x)=x'\Rightarrow f(x)=x+c_1, x>0$

$x\in(-\infty,0)$: ομοίως $f(x)=x+c_2$

όμως f συνεχής στο 0: $f(0)=\lim\limits_{x\to o^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\Rightarrow 0=c_1=c_2$

Τελικά f(x)=x για κάθε x στο R

4Γ6

Για $x>0\Rightarrow t\geq 0\Rightarrow |f(t)|\frac{t}{1+t^2}\geq 0\overset{f\neq ct}{\Rightarrow}\int_a^b|f(t)|\frac{t}{1+t^2}dt>0$ άρα f $\Rightarrow f^2(x)>0\Rightarrow f(x)\neq 0$

παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ οπότε παραγωγίζοντας την αρχική έχουμε

$|f(x)|\frac{x}{1+x^2}=2f(x)f'(x)$ δεδομένου ότι $f(x)\neq 0$ η f διατηρεί σταθερό

πρόσημο στο $(0,+\infty)$ άρα $f'(x)=\pm\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}\Rightarrow f(x)=\pm\frac{1}{4}\ln(1+x^2)$

Παρόμοια για x<0 είναι $f(x)=\mp\frac{1}{4}\ln(1+x^2)$ και f(0)=0 από την

αρχική. Άρα

$$f(x)=\frac{1}{4}\ln(1+x^2)\quad,\quad f(x)=-\frac{1}{4}\ln(1+x^2),$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}\ln(1+x^2),x\geq 0\\ -\frac{1}{4}\ln(1+x^2),x<0\end{cases},f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{4}\ln(1+x^2),x\geq 0\\ \frac{1}{4}\ln(1+x^2),x<0\end{cases}$$

4Γ7

$$\int_0^{f(x)}f(t)dt=xf(x)-\int_0^x f(t)dt\Leftrightarrow f'(x)f(f(x))=f(x)+xf'(x)-f(x)\Rightarrow$$

$f(f(x))=x, f\uparrow\Rightarrow f(x)=x$

Αποτέλεσμα που έχουμε δει ξανά στο $1^{ο}$ κεφάλαιο

4Γ8

έστω ότι $f(1)=1$

Παρατηρώ ότι $f(0)=f(1)$

Αν η f δεν ήταν παραγωγίσιμη στο [0,1] άτοπο

οπότε είναι παραγωγίσιμη στο [0,1] με $f'(x)=\ln(f(x))$

Η f έχει και μέγιστο και ελάχιστο στο [0,1] ως συνεχής

αν το ελάχιστο το λαμβάνει στα άκρα του [0,1] και δεν είναι σταθερή

το μέγιστο θα υφίσταται σε κάποιο α με 0<α<1 και θα είναι f(a)>1

Λόγω Fermat $f'(a)=0\Leftrightarrow f(a)=1$ άτοπο

ομοίως αν το μέγιστο ήταν στο άκρο

Απομένει η περίπτωση που τα ακρότατα υφίστανται στο εσωτερικό του [0,1] αλλά και εκεί για τον ίδιο λόγο προκύπτει άτοπο αν η f θεωρηθεί μη σταθερή (1=f(a)>1>f(b)=1)

4Γ9

Από το ΘΜΤ υπάρχει

$\xi \in (0,1) : 2 = 5 - 3 = f(1) - f(0) = (1-0)f'(\xi) = f'(\xi)$

Η δοσμένη για x=ξ γίνεται $f'(\xi) = f'(\xi) + f(c)\int_0^{\xi} e^{tf(t)}dt$ και επειδή

$\xi \in (0,1) \Rightarrow \xi > 0 \Rightarrow \int_0^{\xi} e^{tf(t)}dt > 0$ άρα $f(c) = 0 \Rightarrow f'(x) = 2$ οπότε

επειδή $f(0) = 3, f(1) = 5 \Rightarrow f(x) = 2x + 3$ άρα

$f(c) = 2c + 3 = 0 \Rightarrow c = -\frac{3}{2}$

4Γ10

Θέτω

$g(x) = ax + b\int_0^x f(t)dt$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο R με $g'(x) = a + bf(x)$ [1]

Η δοσμένη στην εκφώνηση γίνεται $f(g(x)) = ax + b$ [2]

θέτω στην [1] όπου x το g(x) οπότε

$g'(g(x)) = a + bf(g(x)) = abx + b^2 + a$ [3]

αν $b \neq 0$ τότε η [3] δείχνει εύκολα ότι η g είναι 1-1 και σαν συνεχής θα είναι και γνήσια μονότονη πχ αύξουσα οπότε θα έπρεπε η $g'(x) \geq 0$ άρα και $g'(g(x)) \geq 0$ άτοπο λόγω της [3] η οποία παίρνει και θετικές και αρνητικές τιμές στο R

Συνεπώς b=0 και εύκολα από την αρχική σχέση $f(x) = x, \forall x \in R$

4Γ11

Αν F μια αρχική της f τότε $\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(F(b)-F(a))$ παίρνουμε

όρια όταν $b\to a$ με $F'=f=$συνεχή

οπότε $F'(a)=F'(F(a)-F(a))=F'(0)=c\Rightarrow f(x)=c$ που επαληθεύει…

4Γ12

$$f(x)=x+\int_x^{f(x)}\frac{\eta\mu t}{2t}dt\Leftrightarrow f(x)-\int_1^{f(x)}\frac{\eta\mu t}{2t}dt=x-\int_1^x\frac{\eta\mu t}{2t}dt$$

Θέτουμε $x-\int_1^x\frac{\eta\mu t}{2t}dt=g(x)\Rightarrow g(f(x))=g(x)$ αλλά

$$g'(x)=1-\frac{\eta\mu x}{2x}>0\Rightarrow g:1-1 \text{ οπότε } f(x)=x$$

4Γ13

Αν F μια αρχική της f τότε $\frac{F(y)-F(x)}{y-x}\geq F'(x)$

Η σχέση αυτή για y>x γράφεται $F(y)\geq F(x)+F'(x)(y-x)$ και ανάποδη ανισότητα αν y<x

Με γεωμετρικά λόγια η C_F βρίσκεται δεξιά του x πιο "ψηλά" από την εφαπτομένη της στο σημείο $(x,F(x))$ και αριστερά του x η C_F βρίσκεται πιο "κάτω" από την εφαπτομένη της στο σημείο $(x,F(x))$ (οπότε το τυχαίο σημείο (άρα όλα) είναι σημείο καμπής για τον λόγο αυτό η C_F είναι ευθεία άρα η f σταθερή)

Έστω ε η εφαπτομένη της F σε σημείο Κ

Με μεταφορά και στροφή των αξόνων μπορούμε να θεωρήσουμε το Κ σαν αρχή και την ε σαν άξονα χ οπότε για την καινούργια G που φτιάχνουμε έτσι θα είναι $G(0)=G'(0)=0$ και λόγω του προηγουμένου $x>0\Rightarrow G(x)>0$

Υπάρχει $a>0: G'(a) \geq \frac{G(a)}{a}$ αλλιώς θα έπρεπε για

$\forall x>0: G'(x) < \frac{G(x)}{x}$ που εύκολα μας δίνει ότι η $\frac{G(x)}{x}$ είναι γνήσια

φθίνουσα κι επειδή το $\lim_{x\to 0}\frac{G(x)}{x} = G'(0) = 0$ μας οδηγεί σε

$G(x) < 0$ για $x > 0$ που είναι άτοπο

αν δ η εφαπτομένη της G στο A(a,G(a)) δείξαμε ότι η κλίση της δ είναι μεγαλύτερη ή ίση από την κλίση του ΚΑ και αν δεν ίσχυε το "ίσον " η δ θα έκοβε τον άξονα χ στο Β ανάμεσα στο Κ και το Ε(α,0) με συνέπεια το σημείο Κ που βρίσκεται "αριστερά" του Κ να είναι πιο "ψηλά" από την δ άτοπο από τον αρχικό συλλογισμό . Τότε ισχύει το ίσον που μας εξασφαλίζει το επιθυμητό αποτέλεσμα

G(x)=0 αρα F(x)=cx+d δηλαδή f(x)=c

4Δ1

Προφανώς η f^2 είναι παραγωγίσιμη $[0,+\infty)$ στο,f συνεχής στο $[0,+\infty)$ άρα

$$\exists k \in R: k = \lim_{x\to x_0}\frac{f^2(x)-f^2(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(f(x)+f(x_0))\right)$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)+f(x_0)\right) = 2f(x_0)$$

Διακρίνουμε 3 περιπτώσεις

Α) $f(x_0)\neq 0\ \forall x_0>0$ τότε f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ διαιρώντας

Β) Η συνάρτηση να έχει θετική ρίζα. Συνεχίζουμε με δυο υποπεριπτώσειςΎΕστω a>0 η ελάχιστη Τότε στο (0,a) f παραγωγίσιμη, όπως πριν αφού $f(x)\neq 0$ στο (0,a) και συνεχής στο [0,a]. Παραγωγίζοντας στο (0,a) παίρνουμε

$2f(x)f'(x) = f(x)(2x+2) \overset{f(x)\neq 0}{\Rightarrow} f'(x) = x+1 > 0 \Rightarrow f$ γνήσια αύξουσα στο [0,a] Όμως $f(a) = f(0) = 0$ άτοπο

ιι) Να μην υπάρχει ελάχιστη θετική ρίζα παρόλο που f έχει θετική ρίζα. Τότε για κάθε a>0 : f(a)=0 θα υπάρχει r στο (0,a) : f(r)=0

Θα δείξουμε ότι f είναι η μηδενική συνάρτηση στο [0,r] πράγμα άτοπο από την εκφώνηση

Έστω ότι αυτό δεν συμβαίνει τότε θα υπάρχει b με 0<b<r : $f(b) \neq 0$

Επειδή $f^2(b) = \int_0^b f(t)(2t+2)dt$ από το ΘΜΤολ έχουμε

$f^2(b) = b(\xi+1)f(\xi)$ για κάποιο ξ στο (0,b) που σημαίνει ότι $f(\xi) > 0$

Αλλά η f είναι συνεχής οπότε κοντά στο ξ δηλαδή σε διάστημα $(\xi-\delta,\xi+\delta)$ $f(x) > 0$

Ας είναι τώρα c η πρώτη ρίζα που συναντάμε μετά το ξ+δ (c>ξ+δ) που σίγουρα υπάρχει τουλάχιστον μία (είναι η r, μια που το δ είναι όσο θέλουμε μικρό)

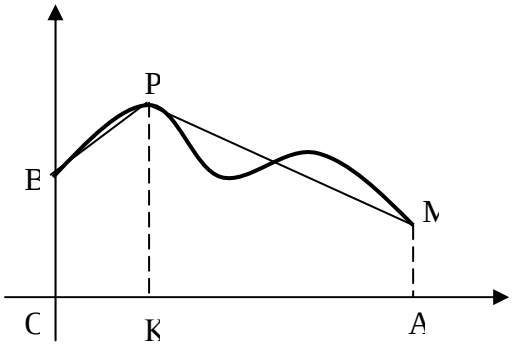
Στο (ξ,c) η συνάρτηση δεν μηδενίζεται αφού c είναι η πρώτη ρίζα μετά το ξ και $f(\xi) > 0$ Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση η f προκύπτει γνήσια αύξουσα στο [ξ,c] άρα $f(\xi) < f(c) = 0$ άτοπο αφού $f(\xi) > 0$ Η περίπτωση Βι) , Βιι) μας οδήγησε σε άτοπο οπότε απομένει η Α στην οποία εξηγήσαμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και βρήκαμε ότι

$f'(x) = x+1$, $\forall x > 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2} + x + C$ Όμως επειδή f συνεχής

$0 = f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = C \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2} + x$

4Δ2

Αφού η f είναι συνεχής στο κλειστό [0,a] , θα έχει μέγιστο y_0 σε κάποιο x_0 ,του διαστήματος αυτού. Έστω $P(x_0,y_0)$



Αν ονομάσουμε με L(C,D) το μήκος της καμπύλης C_f μεταξύ δυο σημείων της C , D τότε θα ισχύουν:

$BP \leq L(B,P)$ (εδώ η ευθεία είναι η μικρότερη απόσταση που ενώνει δυο σημεία)

$PM \leq L(P,M)$ (ομοίως)

Τότε

$OB+BP \leq OB+L(B,P)$

$AM+MP \leq AM+L(P,M)$

Από την τριγωνική ανίσωση όμως έχουμε :

$OP \leq OB+BP \leq OB+L\{B,P)$

$AP \leq AM+MP \leq AM+L(P,M)$

Επειδή οι OP και AP είναι υποτείνουσες στα ορθογώνια τρίγωνα OPK και APK είναι

$y_0=PK \leq OP \leq OB+BP \leq OB+L(B,P)$

$y_0=PK \leq AP \leq AM+MP \leq AM+L(P,M)$

Προσθέτουμε κατά μέλη και προκύπτει

$2y_0 \leq OB+L(B,P)+ AM+L(P,M)$

Οπότε : $a+2y_0 \leq x_0+OB+L(B,P)+ AM+L(P,M)=L(f,a)$

Ακόμη είναι φανερό ότι :$E(f,a) \le ay_0$

Άρα $a+2y_0 \le L(f,a)= E(f,a) \le ay_0$ δηλαδή $0<a \le (a-2)y_0$

Άμεσα προκύπτει ότι $a>2$

Για το δεύτερο ερώτημα αφού $P(f,a)= E(f,a)+\Omega$ για κάθε τιμή του $a \ge 0$ θα έχουμε

$$\int_0^x \sqrt{1+(f'(t))^2}dt + f(0) + x + f(x) = \int_0^x f(t)dt + \Omega \ , \ \forall x \ge 0$$

Για x=0 προκύπτει $\Omega=2f(0)$ οπότε η εξίσωση γίνεται :

$$\int_0^x \sqrt{1+(f'(t))^2}dt - f(0) + x + f(x) = \int_0^x f(t)dt \quad x \ge 0$$

Παραγωγίζοντας παίρνουμε

$$\sqrt{1+(f'(x))^2} = f(x) - f'(x) - 1 \ , \ x \ge 0$$

Άρα υψώνοντας στο τετράγωνο και κρατώντας τους περιορισμούς είναι

$1+(f'(x))^2 = f^2(x) + (f'(x))^2 + 1 - 2f(x)f'(x) + 2f(x) + 2f'(x)$, $x \ge 0$ με $f(x) > f'(x) + 1$

Μετά τις πράξεις έχουμε

$$2f'(x)\big(f(x)-1\big) = f^2(x) - 2f(x) \quad \forall x \ge 0 \qquad \textbf{[1]}$$

$$f(x) > f'(x) + 1 \qquad \textbf{[2]}$$

Αν υπάρχει x_0 : $f(x_0)=1$ από την [1] προκύπτει 0=-1 Άτοπο.

Οπότε $f(x) \ne 1 \quad \forall x \ge 0$ και επειδή η f είναι συνεχής τότε η f(x)-1 θα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Συνεπώς διακρίνουμε δυο περιπτώσεις

Α) $f(x)-1<0$ ή $f(x)<1$ **[3]**

Από την [1] είναι : $f'(x) = \dfrac{f^2(x) - 2f(x)}{2(f(x)-1)}$ αντικαθιστούμε στην [2]

και παίρνουμε $f(x) > \dfrac{f^2(x) - 2f(x)}{2(f(x)-1)} + 1$. Λαμβάνοντας υπ' όψη μας την [3] μετά τις πράξεις έχουμε $f^2(x) - 2f(x) + 2 < 0$ αδύνατον

Β) f(x)>1 **[4]**

Αντίστοιχα καταλήγουμε $f^2(x)-2f(x)+2>0$ αληθές οπότε συνεχίζουμε ξέροντας ότι ισχύει η [4]

Στην [1] θέτουμε g(x)=f(x)-1>0 λόγω της [4] **[5]**

και μετά τις πράξεις έχουμε $(g^2(x))'=g^2(x)-1,\ x\geq 0$ **[6]**

Στην [6] θέτουμε $h(x)=g^2(x)-1$ **[7]**

Καταλήγουμε στην $h'(x)=h(x)\quad x\geq 0$ οπότε όπως είναι γνωστό

$h(x)=ce^x$ **[8]**

Από την [7] $g^2(x)=1+ce^x$ με $c\geq 0$ διότι αλλιώς πάντα υπάρχει $x_1>0$: $g^2(x_1)<0$. Αυτό συμβαίνει διότι για c<0 είναι

: $g^2\downarrow$ στο $[0,+\infty)$ και $g^2(0)=1+c,\ \lim\limits_{x\to+\infty} g^2(x)=-\infty$ άτοπο. Τώρα από την [6] και αφού g(x)>0 θα είναι : $g(x)=\sqrt{1+ce^x}$ και από την [5] προκύπτει :

$f(x)=1+\sqrt{1+ce^x}\quad x\geq 0, c\geq 0$ **[9]**

Που επαληθεύει την [2] και [4] και την αρχική σχέση του ερωτήματος, η οποία επίσης επαληθεύεται και για x=0, πράγμα απαραίτητο προκειμένου να ισχύει η ισοδυναμία. Τελικά

$2f(0)=\Omega=2(1+\sqrt{1+c})\geq 4$, $c\geq 0$ και $c=(f(0)-1)^2-1$

4Δ3

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο R το β΄ μέλος παριστάνει και αυτό παραγωγίσιμη συνάρτηση ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, άρα και το α΄ μέλος , οπότε η συνάρτηση είναι δυο φορές παραγωγίσιμη κ.ο.κ που τελικά σημαίνει ότι η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο R

Αν η f είναι σταθερή θα έπρεπε $f(x)=f(0)=1,\forall x\in R$ και επιπλέον $f'(x)=0$. Τότε από την αρχική σχέση προκύπτει : $0=(2-1)e^1$ άτοπο, οπότε η f δεν είναι σταθερή στο R

Αν $\exists x_0 : f(x_0)=2$ αφού f όχι σταθερή και συνεχής τότε θα υπάρχει διάστημα Δ με a άκρο του Δ ώστε $f(x)\neq 2,\forall x\in\Delta$ και $f(a)=2$ άρα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $x\to a : f(a)=2, f(x)\neq 2\ \forall x\in\Delta$.

Από την αρχική δοσμένη σχέση παίρνουμε :

$\int_b^x \frac{-f'(t)}{2-f(t)}dt=-\int_b^x e^{f(t)}dt$, $\forall x\in\Delta, b\in\Delta$ δηλαδή

$\ell n\left|\frac{2-f(x)}{2-f(b)}\right|=-\int_b^x e^{f(t)}dt$, $\forall x\in\Delta, b\in\Delta$.Παίρνουμε το κατάλληλο πλευρικό όριο όταν $x\to a$ της προηγούμενης σχέσης και καταλήγουμε στην

$-\infty=-\int_a^b e^{f(t)}dt\in R$ άτοπο. Συνεπώς $f(x)\neq 2,\forall x\in R$

Αφού $f(x)\neq 2,\forall x\in R$,f συνεχής, $f(0)=1$,συμπεραίνουμε ότι $f(x)<2,\forall x\in R$, άρα από την αρχική σχέση προκύπτει ότι :

$f'(x)>0,\forall x\in R\Rightarrow f\uparrow$ στο R

Παραγωγίζοντας την αρχική σχέση έχουμε την :

$f''(x)=f'(x)e^{f(x)}(1-f(x))$ που σημαίνει ότι η f είναι κυρτή όταν $1>f(x)\Leftrightarrow f(0)>f(x)\Leftrightarrow 0>x$ αφού η συνάρτηση είναι γνήσια αύξουσα στο R. Τελικό συμπέρασμα είναι ότι : Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ και κοίλη στο $[0,+\infty)$

Τώρα αφού $f\uparrow,\forall x\in R$ και $f(x)<2,\forall x\in R$ τότε είτε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ είτε θα είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A<2$.Θα αποδείξουμε ότι η

τελευταία σχέση οδηγεί σε αντίφαση οπότε υποχρεωτικά θα ισχύει η

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Πράγματι : Από το Θ.Μ.Τ με x<0 είναι

$f(x) - f(0) = xf'(\xi) \Leftrightarrow \dfrac{f(x)-1}{x} = f'(\xi) > f'(x) > 0$ αφού 0>ξ>x και f ΄

γνήσια αύξουσα και θετική για x<0. Τώρα αν υποθέσουμε ότι ισχύει

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A < 2$ από την ανισότητα $\dfrac{f(x)-1}{x} > f'(x) > 0$ παίρνοντας

όρια όταν το $x \to -\infty$ άμεσα προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = 0$. Έτσι αν

και πάλι πάρουμε όρια όταν το $x \to -\infty$ της αρχικά δοσμένης σχέσης

προκύπτει $0 = (2-A)e^A$ πράγμα άτοπο αφού A<2

Ακόμη από την αρχική έχουμε

$\int_0^x \dfrac{-f'(t)}{2-f(t)}dt = -\int_0^x e^{f(t)}dt$, $\forall x \in R$ ή

$\ell n(2-f(x)) = -\int_0^x e^{f(t)}dt, \forall x \in R$ δηλαδή

$0 < 2-f(x) = e^{-\int_0^x e^{f(t)}dt}$, $\forall x \in R$. Θεωρούμε x>0 και εφαρμόζουμε το

Θ.Μ.Τ για ολοκληρώματα οπότε είναι

$0 < 2-f(x) = e^{-\int_0^x e^{f(t)}dt} = e^{-xf(k)} < e^{-x}$ αφού 0<k<x , f(0)=1 και f

γνήσια αύξουσα. Τότε αν πάρουμε όρια όταν το $x \to +\infty$ της

ανισότητας $0 < 2-f(x) < e^{-x}, \forall x > 0$ προκύπτει ότι : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

Αφού η f είναι συνεχής στο R, γνήσια αύξουσα και

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$, σύνολο τιμών της f είναι το

$f(R) = (-\infty, 2)$

Τέλος πάλι από την αρχική έχουμε

$\frac{f'(x)e^{-f(x)}}{2-f(x)}=1\Rightarrow\int_0^x\frac{f'(t)e^{-f(t)}dt}{2-f(t)}=x$, με την αλλαγή μεταβλητής

$f(t)=u$, η προηγούμενη γίνεται

$$x=\int_1^{f(x)}\frac{e^{-u}}{2-u}du,\forall x\in R$$

Με δεδομένο ότι f αντιστρέψιμη και $f(R)=(-\infty,2)$ αν θέσουμε όπου x , το $f^{-1}(x)$, παίρνουμε :

$$f^{-1}(x)=\int_1^x\frac{e^{-u}}{2-u}du,\forall x<2$$

5Γ1

$$\int_0^x e^{-t}t^\nu dt=\nu!e^{-x}\left\{e^x-1-x-\frac{x^2}{2!}-...-\frac{x^\nu}{\nu!}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\int_0^x e^{x-t}t^\nu dt=\nu!\left\{e^x-1-x-\frac{x^2}{2!}-...-\frac{x^\nu}{\nu!}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\int_0^x e^u(x-u)^\nu du=\nu!\left\{e^x-1-x-\frac{x^2}{2!}-...-\frac{x^\nu}{\nu!}\right\}$$

Σχετικές ασκήσεις στην 2Γ…

6Β8

Rolle για την $(x-b)\int_a^x f+(x-a)\int_b^x f$

6Β9

Rolle για την $(b-x)\int_a^x f+(a-x)\int_b^x g$

6Β10

Rolle για την $(x-b)(x-a)\int_a^x f$

6Β11

Έστω και τρίτη ρίζα της *g* στο (α,β). Δυο φορές Rolle άτοπο γιατί g΄ γνήσια μονότονη

6Β12

$g=\int_0^x f - x^2\int_0^1 f$ Δυο Rolle για την g , g΄

6Β13

Rolle για την F(x)-g(x)

6Β14

$g=\int_0^x(\int_0^x f)$ g(0)=g(1)…g΄(0)=g΄(ξ)…

6Β15

g=F-x^2/2 έστω g΄(x)>g(1) τότε . H(x)=g΄(x)-xg(1) Η μονότονη

H(0)=H(1) άτοπο

6Β16

g=F-x^2 Rolle – ΘΜΤ , Rolle για την g΄΄

6Β19

Παραγοντική (x)΄f((x)=… Θ.Μ.Τολ

6Β20

παραγοντική Rolle, θεώρημα ενδιαμέσων τιμών στην $f'(x)$

6Β21

Παραγωγίστε, x=0 , Ξαναπαραγωγίστε, κάντε παραγοντική

6Β22

Παραγοντική , Θ.Μ.Τ

6Β23

Ξεκινάμε από το $\int_a^b (x-a)^2 f''(x)dx$ και συνεχίζουμε με

παραγοντικές. Στο αρχικό Θ.Μ.Τ ολ

6Γ1

$$m \le f(x) \le M \overset{g(x)\ge 0}{\Rightarrow} mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x) \Rightarrow$$

$$m\int_a^b g(t)dt \le \int_a^b f(t)g(t)dt \le M\int_a^b g(t)dt$$

Αν η g δεν είναι παντού μηδέν $\int_a^b g(t)dt > 0$ οπότε διαιρώντας

$m \le \frac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b g(t)dt} \le M$ από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών…

6Γ2

Η $1-x$ έχει σταθερό πρόσημο στο [0,1] και $\int_0^1 (1-t)\,dt = 1/2$ …

6Γ3

Η x έχει σταθερό πρόσημο στο [0,1], $\int_0^1 x dx = 1/2$ και

$\int_0^1 f(t)\,dt = [tf(t)]_0^1 - \int_0^x tf'(t)\,dt = f(1) - \frac{1}{2}f'(\xi)$

6Γ4

$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt = \int_a^b (x-b)'f'(t)dt = [(x-b)f'(t)]_a^b ...$

συνεχίζουμε έτσι μέχρι την τρίτη παράγωγο. Στο τελευταίο ολοκλήρωμα χρησιμοποιούμε το εν λόγω ΘΜΤ

6Γ5

$x\int_1^x f(xt)dt \le x^3 - x \Leftrightarrow \int_1^x f(xt)xdt \le x^3 - x$, $\forall x \in R$ Θέτω y=xt

τότε dy=xdt και για t=1 y=x , για t=x $y=x^2$ οπότε η σχέση

$x\int_1^x f(xt)dt \le x^3 - x$, $\forall x \in R$ γίνεται $\int_x^{x^2} f(y)dy \le x^3 - x, \forall x \in R$

Θέτω $g(x) = \int_x^{x^2} f(y)dy - x^3 + x$, $\forall x \in R$ και ξέρω ότι

$g(x) \le 0$ $\forall x \in R$ Αλλά g(0)=g(1)=0 οπότε η g παρουσιάζει δυό τοπικά ακρότατα στο 0 και στο 1 εσωτερικά του R . Επιπλέον η g είναι παραγωγίσιμη στο R άρα από Fermat προκύπτει

$g'(0) = g'(1) = 0$ Όμως $g'(x) = 2xf(x^2) - f(x) - 3x^2 + 1$ οπότε f(0)=1 και f(1)=2

Για την f(x) ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο[0,1]

$$\exists \xi_0 \in (0,1) : f'(\xi_0) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{2-1}{1} = 1$$

Θέτω $h(x) = f(x) - \frac{x^2}{2} \Rightarrow h'(x) = f'(x) - x \ , \ x \in [\xi_0, 1] \subseteq [0,1]$

ισχύουν τότε : $h'(\xi_0) = f'(\xi_0) - \xi_0 = 1 - \xi_0 > 0 \ , \ h'(1) < 0$

του $[\xi_0, 1]$.Άρα θα βρίσκεται σε εσωτερικό σημείο του $[\xi_0, 1]$

Άρα από Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει ξ στο $(\xi_0, 1)$ άρα και στο (0,1) έτσι ώστε $h'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) = \xi$

6Γ6

F=αρχική τότε $F(1) - F(0) = \ln(1+\sqrt{2})$ αν δεν ισχύει το ζητούμενο

τότε $F - \frac{x}{\sqrt{2}} \downarrow \Rightarrow ... \Rightarrow \ln(1+\sqrt{2}) \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ άτοπο άρα $\exists a : f(a) > \frac{1}{\sqrt{2}}$

όμοια $\exists b : f(b) < \frac{\sqrt{2}}{1+b}$ (θα χρειαστεί η επόμενη ανισότητα

$\ln(1+\sqrt{2}) < \ln(2+\sqrt{2}) = \ln\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}) < \ln 2 < \sqrt{2}\ln 2$)

Όμως το σύνολο τιμών της $g(x) = \frac{\sqrt{2}}{1+x}$ είναι το $[\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}]$ που έχει

πάντα κοινά σημεία με το σύνολο τιμών της f

6Δ1

$$\int_x^y f(t)dt \le f'(x) - f'(y) \overset{y \leftrightarrow x}{\Leftrightarrow} \int_y^x f(t)dt \le f'(y) - f'(x) \Leftrightarrow \int_x^y f(t)dt \ge f'(x) - f'(y) \Rightarrow$$

$$\int_x^y f(t)dt = f'(x) - f'(y) \overset{y=\sigma\tau\alpha\theta}{\Rightarrow} -f(x) = f''(x) \Leftrightarrow f''(\tau) + f(\tau) = 0 \ \forall \tau \in R \quad [1]$$

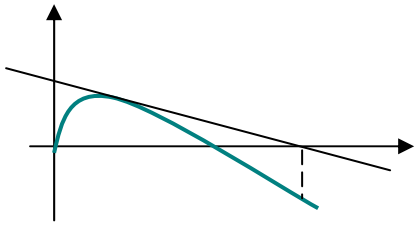
Έστω ότι η f δεν έχει ρίζα στο $(0, +\infty)$. Επειδή είναι συνεχής θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό και μάλιστα θετικό διότι

$$f'(0)=1 \Rightarrow \lim_{\tau\to 0^+}\frac{f(\tau)-f(0)}{\tau-0}=1 \Rightarrow \lim_{\tau\to 0^+}\frac{f(\tau)}{\tau}=1 \Rightarrow \frac{f(\tau)}{\tau}>0$$

σε διάστημα της μορφής (0,δ). Τότε $\tau>0$ άρα και $f(\tau)>0$ στο διάστημα αυτό και , επειδή η συνάρτησή μας διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,+\infty)$, θα είναι $f(\tau)>0 \quad \forall \tau\in(0,+\infty)$.

Επειδή $f''(\tau)=-f(\tau)<0$ συμπεραίνουμε ότι η f θα είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$ μια που είναι συνεχής και στο 0. Άρα η C_f θα βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της.

Επιπλέον τώρα, αν υπήρχε $\tau_0>0: f'(\tau_0)<0$, η εφαπτομένη θα έτεμνε σε κάποιο σημείο τον θετικό ημιάξονα των τ και κατόπιν θα συνέχιζε στο κάτω αρνητικό ημιεπίπεδο, οπότε και η C_f που βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της θα έπαιρνε αρνητικές τιμές . Άτοπο εξ' υποθέσεως .



Τελικά συμπεραίνουμε ότι θα έπρεπε να ισχύει : $f'(\tau)>0$, $\forall \tau>0$

Έτσι η f' έχει τιμές θετικές , είναι γνήσια φθίνουσα αφού $f''<0$ και επιπλέον είναι κοίλη διότι $f'''(\tau)=-f'(\tau)<0$. Αυτή η τελευταία σχέση προκύπτει αν παραγωγίσουμε την $f''(\tau)=-f(\tau)$. Η παραγώγιση επιτρέπεται αφού αν f παραγωγίσιμη τότε και f'' παραγωγίσιμη.

Όμως τότε η γραφική παράσταση της f' θα βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της, η οποία έχει αρνητική κλίση ($f''<0$) με συνέπεια τελικά η f' να γίνεται αρνητική, πράγμα άτοπο, αφού αποδείξαμε ότι η f' έχει μόνο θετικές τιμές.

Έτσι προκύπτει ότι η f έχει μια τουλάχιστον θετική ρίζα. Την μικρότερη από αυτές ονομάζουμε ξ. .Η ύπαρξη μικρότερου ξ τεκμηριώνεται πιο αυστηρά, αν σκεφτούμε ότι: αποδείξαμε την ύπαρξη θετικής ρίζας η οποία δεν μπορεί να βρίσκεται «κοντά» στο 0 αφού $f(0)=0, f'(0)=1>0$ που σημαίνει ότι θα είναι

$f(x)\neq 0, \forall x\in(0,\delta)$

6Δ2

Α)

Θέτω $A(x)=e^{-x}F(x)$, $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, $R(x)=\int_0^x tf(t)dt$ Τότε

$R'(x)=xF'(x)\Rightarrow R(1)-R(0)=\int_0^1 tF'(t)dt=[tF(t)]_0^1-\int_0^1 F(t)dt=$

$F(1)-(1-0)F(\xi)$

Όπου εφαρμόσαμε ΘΜΤολ στην τελευταία ισότητα

Όμως $R(1)=\int_0^1 tf(t)dt=\int_0^1 f(t)dt=F(1)$

Συμπεραίνουμε από τις δυο τελευταίες σχέσεις ότι $F(\xi)=0$ για κάποιο ξ του (0,1)

Συνεπώς αφού Α συνεχής και παραγωγίσιμη στο [0,1] άρα και στο [0,ξ] ισχύει Rolle από όπου παραγωγίζοντας προκύπτει το ζητούμενο

Β)Θέτω

$$w(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x F(t)dt}{x}=\dfrac{H(x)}{x}, x\in(0,1] \\ 0\ ,\ x=0\end{cases}, B(x)=e^{-x}R(x)=e^{-x}\int_0^1 tf(t)dt$$

Τότε $\lim\limits_{x\to 0} w(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\int_0^x F(t)dt)'}{(x)'}=F(0)=0$ άρα w συνεχής στο [0,1]

και παραγωγίσιμη στο (0,1) w(0)=0 και $w(1)=\int_0^1 F(t)dt$

Όμως

$$F(1)=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1 tf(t)dt=\int_0^1 tF'(t)dt=F(1)-\int_0^1 F(t)dt=F(1)-w(1)$$
$$\Rightarrow w(1)=0$$

άρα από Rolle παίρνουμε $\xi H'(\xi)-H(\xi)=0$ που σημαίνει

$\xi F(\xi)-\int_0^{\xi} F(t)dt=0$ δηλαδή R(ξ)=0 ή B(ξ)=0 από όπου με Rolle στο [0,ξ] στην B παίρνουμε το ζητούμενο

6Δ3

Αν a<x<b θα έχουμε f ΄(x)-0=f ΄΄(c)(x-a) και f ΄(x)-0=f ΄΄(d)(x-b) για κάποια c,d στο (a,b) οπότε |f ΄(x)|=|f ΄΄(c)|(x-a) και
|f ΄(x)|=|f ΄΄(d)|(b-x)
Το σύνολο τιμών της f ΄΄ είναι κλειστό διάστημα λόγω του θ Darboux, άρα και της |f ΄΄|, και έστω M το μέγιστο αυτού του συνόλου, τότε $|f'(x)|\le M(x-a)$, $|f'(x)|\le M(b-x)$ άρα

$$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(t)dt\le\int_a^b|f'(t)|dt\le M\int_a^x(t-a)dt+M\int_x^b(b-t)dt=$$
$$=M(x^2-(a+b)x+\frac{a^2+b^2}{2})\le M\frac{(b-a)^2}{2}$$

Η τελευταία ανίσωση προκύπτει από το γεγονός ότι το μέγιστο της συνάρτησης $x^2-(a+b)x+\frac{a^2+b^2}{2},\forall x\in[a,b]$ λαμβάνεται εύκολα για x=a ή x=b Έτσι $M=|f''(x_0)|\ge\frac{2(f(b)-f(a))}{(b-a)^2}$

7Β6

Ολοκληρώστε την $g(\xi_2)(x-a)\le f(x)\le g(\xi_1)(x-a)\ldots$

7Β8

Γ. $\ln t \le t-1$ και ΘΜΤολ…

Δ. t>1 χτίστε τον τύπο…

7Β11

α) f ΄/f =(lnf)΄…β) Θ.Μ.Τ.ολ και μονοτονία της $f(t)/2t^2$

γ)

$$F(x)=f(x)+\frac{1}{2}\int_1^x\left(-\frac{1}{t}\right)'e^{1-t^2}dt=f(x)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{e^{1-x^2}}{x}+\int_1^x\left(\frac{-2t}{t}\right)e^{1-t^2}dt\right)=$$

$$f(x)+\frac{1}{2}-\frac{e^{1-x^2}}{2x}-f(x)=\frac{1}{2}-\frac{e^{1-x^2}}{2x}$$

δ)Δείξαμε λοιπόν ότι

$$F(x)=\frac{1}{2}-\frac{e^{1-x^2}}{2x}\Leftrightarrow f(x)+\int_1^x\frac{1}{2t^2}e^{1-t^2}dt=\frac{1}{2}-\frac{e^{1-x^2}}{2x}\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}-f(x)=\frac{e^{1-x^2}}{2x}+\int_1^x\frac{1}{2t^2}e^{1-t^2}dt>0$$

7Β14

Χρησιμοποιήστε την $\int|f|\ge\left|\int f\right|$ αφού πρώτα πολλαπλασιάσετε με

$e^{-x}<1$ μέσα στο ολοκλήρωμα…

7Β21

Κάθε ανίσωση χωριστά. Το μεσαίο ολοκλήρωμα σπάστε το από α ως x και x ως β

7Γ1

Α. Με ΘΜΤολ

Β. Τιμές στην προηγούμενη και προσθέτουμε κατά μέλη

Γ. εφαρμογή για $f(x)=\frac{1}{x}$

7Γ2

Το τριώνυμο πρέπει να έχει $\Delta\le 0$

7Γ3

$F(x)=\sqrt{1+x^3}, G(x)=1$

7Γ4

$F(x)=G(x)=\sqrt{|f'(x)|}$

7Γ5

$F(x)=f'(x), G(x)=1$

7Γ6

$F(x)=f'(x), G(x)=x^2$

7Γ7

$F(x)=f(x), G(x)=\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}$

7Γ8

$F(x)=(f(x))^{\frac{n}{2}}, G(x)=(f(x))^{\frac{n-1}{2}}$

7Γ9

$F(x)=f(x), G(x)=\eta\mu x$

$F(x)=f(x), G(x)=\sigma\upsilon\nu x$

7Γ10

$F(x)=e^{\frac{x}{2}}\sqrt{f(x)}, G(x)=e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{f(x)}$

7Γ11

$$\int_0^{\alpha} f(t)dt+\int_0^{\beta} f^{-1}(t)dt=\int_0^{\alpha} f(t)dt+\int_{f(0)}^{f(a)} f^{-1}(t)dt+\int_{f(a)}^{\beta} f^{-1}(t)dt$$

οπότε αρκεί να δειχθεί $af(a)+[\beta-f(a)]f^{-1}(\xi)>\ldots$

7Γ12

Θέτουμε $h(x)=(A+\int_a^x f(t)g(t)dt)e^{-\int_a^x g(t)dt}$, $\forall x\in[a,b]$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο [a,b] με

$$h'(x) = g(x)e^{-\int_a^x g(t)dt}\left(f(x) - A - \int_a^x f(t)g(t)dt\right) \le 0$$

Αφού λοιπόν η h είναι φθίνουσα στο [a,b] τότε θα ισχύει

$h(x) \le h(a) = A$, $\forall x \in [a,b]$

Έτσι έχουμε :

$$(A + \int_a^x f(t)g(t)dt)e^{-\int_a^x g(t)dt} \le A \text{ , } \forall x \in [a,b] \text{ ή}$$

$$A + \int_a^x f(t)g(t)dt \le Ae^{\int_a^x g(t)dt} \text{ , } \forall x \in [a,b]$$

Όμως $f(x) \le A + \int_a^x f(t)g(t)dt$, $\forall x \in [a,b]$ οπότε

$$f(x) \le Ae^{\int_a^x g(t)dt} \text{ , } \forall x \in [a,b]$$

7Δ1

$$f:[0,a) \to R \text{ με } f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 2x - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 \text{ , } a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Προφανώς η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \frac{2x^3(x^2+x-1)}{x^2-1}$ και

επιπλέον είναι : f ΄(x)<0 στο (0,a) όπως εύκολα διαπιστώνει κανείς .

Όμως η f είναι και συνεχής στο [0,a) , άρα γνήσια φθίνουσα στο

[0,a) που σημαίνει ότι $f\left(\frac{1}{3}\right) < f(0)$ αφού 0<1/3<a

Επειδή f(0)=0 και

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\left(\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right) - 2\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\frac{1}{3}^3 - \frac{1}{2}\frac{1}{3}^4 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln(2) - \frac{113}{162} \text{ από την}$$

προηγούμενη προκύπτει ότι $\ln(2) < \frac{113}{162} < 0.7$

7Δ2

Αν υπήρχε $\beta \neq \alpha$: f(β)=0 θα δείξουμε ότι η f είναι σταθερή και ίση με το μηδέν στο [α,β] που είναι αδύνατο. Έστω λοιπόν $\beta \neq \alpha$: f(β)=0 Χωρίς βλάβη της γενικότητας δεχόμαστε ότι υπάρχει x_1 στο (α,β) : $f(x_1)>0$Η f είναι συνεχής στο [α,β]. Άρα θα έχει και μέγιστο και ελάχιστο. Επειδή $f(x_1)>0$ το μέγιστο της f ,έστω f(γ), θα είναι θετικό Συνεπώς δεν μπορεί να βρίσκεται στα άκρα του [α,β] αφού f(α)=f(β)=0Τότε f ΄΄(γ)= p(γ) f(γ)>0 , πράγμα άτοπο από το κριτήριο της β΄ παραγώγου. Έτσι συμπεραίνουμε από την εκφώνηση ότι μοναδική ρίζα της f είναι το α Από το θεώρημα σταθερού πρόσημου στο (α,+∞) και επειδή $f(x_0)>0$, $x_0>\alpha$ προκύπτει ότι θα είναι f(x)>0 στο (α,+∞)Για x>α είναι

$$\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' = \frac{f''(x)}{f(x)} - \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 = p(x) - \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 \Rightarrow$$

$$p(x) = \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' + \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\int_k^m p(x)dx = \left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]_k^m + \int_k^m \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 dx = 0 + \int_k^m \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 dx$$

$$(m-k)p(\xi) = \int_k^m \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 dx \quad \text{με } \alpha<k<\xi<m \qquad [1]$$

$$\int_k^m \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 dx \cdot \int_k^m 1^2 dx \geq \left(\int_k^m \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot 1 \cdot dx\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$(m-k)\int_k^m \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 dx \geq \left(\int_k^m (\ln f(x))' dx\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (m-k)\int_k^m \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 dx \geq \left([\ln f(x)]_k^m\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\int_k^m \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 dx \geq \frac{(\ln f(m) - \ln f(k))^2}{m-k} \quad [2]$$

Αντικαθιστώντας την προηγούμενη σχέση [1] στην [2] παίρνουμε :

$$p(\xi) \geq \frac{(\ln f(m) - \ln f(k))^2}{(m-k)^2} \Leftrightarrow \sqrt{p(\xi)} \geq \frac{\ln f(m) - \ln f(k)}{m-k}$$

Η ισότητα στην προηγούμενη ισχύει όταν ισχύει το «ίσον» στην ανίσωση CBS . Όμως είναι γνωστό ότι το ίσον ισχύει όταν $\frac{f'(x)}{f(x)} = \lambda$.

1. Η σχέση αυτή κατά τα γνωστά δίνει $f(x)=ce^{\lambda x}$. Αντικαθιστώντας στην αρχική προκύπτει ότι p(x)=σταθερή, άτοπο. Άρα η ανισότητα CBS είναι γνήσια οπότε

$$\sqrt{p(\xi)} > \frac{\ln f(m) - \ln f(k)}{m-k} \quad \mu\varepsilon \quad k < \xi < m$$

7Δ3

Θέτω $u = \frac{1+t}{2}$ στο 2° ολοκλήρωμα οπότε η [1] γίνεται

$$f(1/2) \leq 12\int_0^1 t^2 f(t)dt - 12\int_{1/2}^1 (2u-1)f(u)du$$

$$f(1/2) \leq 12\int_0^1 t^2 f(t)dt - 12\int_{1/2}^1 (2u-1)f(u)du \Leftrightarrow$$

$$f(1/2) \leq 12(\int_0^1 t^2 f(t)dt + \int_{1/2}^1 (-2u+1)f(u)du) \Leftrightarrow$$

$$f(1/2) \leq 12(\int_0^{1/2} t^2 f(t)dt + \int_{1/2}^1 t^2 f(t)dt + \int_{1/2}^1 (-2t+1)f(t)dt) \Leftrightarrow$$

$$f(1/2)\le 12(\int_0^{1/2} t^2 f(t)dt+\int_{1/2}^1 (t^2-2t+1)f(t)dt)\Leftrightarrow$$

$$f(1/2)\le 12(\int_0^{1/2} t^2 f(t)dt+\int_{1/2}^1 (t-1)^2 f(t)dt)$$

$g(x)=\begin{cases} x^2, 0\le x<1/2 \\ (x-1)^2, 1/2\le x\le 1 \end{cases}$ και παρατηρούμε ότι

g συνεχής στο

$$[0,1], g(1/2-t)=g(1/2+t)=, \int_0^1 g(t)dt=\frac{1}{12}=2\int_0^1 g(1/2-t)dt$$

Άρα η αποδεικτέα γίνεται

$$f(1/2)\le 12(\int_0^{1/2} g(t)f(t)dt+\int_{1/2}^1 g(t)f(t)dt)$$

Θέτοντας $t=\frac{1}{2}-u, t=\frac{1}{2}+u$ στο 1° και 2° ολοκλήρωμα ώστε να

εμφανιστεί η βολική για Jensen παράσταση παίρνουμε

$$f(1/2)\le 12(\int_0^{1/2} g(1/2-u)f(1/2-u)du+\int_0^{1/2} g(1/2+u)f(1/2+u)dt)\Leftrightarrow$$

$$f(1/2)\le 12(\int_0^{1/2} g(1/2-u)(f(1/2-u)+f(1/2+u))du)$$

Από Jensen είναι όμως

$$f(1/2-u)+f(1/2+u)\ge 2f(1/2)\Rightarrow$$

$$g(1/2-u)(f(1/2-u)+f(1/2+u))\ge 2f(1/2)g(1/2-u)\Rightarrow$$

$$\int_0^{1/2} g(1/2-u)(f(1/2-u)+f(1/2+u))du\ge 2f(1/2)\int_0^{1/2} g(1/2-u)du=f(1/2)\frac{1}{12}$$

που είναι η αποδεικτέα

7Δ4

$$\int_0^{1/2}(f'(t))^2dt\cdot\int_0^{1/2}t^2dt\ge\left(\int_0^{1/2}tf'(t)dt\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\int_0^{1/2}(f'(t))^2dt\cdot\frac{1}{24}\ge\left([tf(t)]_0^{1/2}-\int_0^{1/2}f(t)dt\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\int_0^{1/2}(f'(t))^2dt\ge 24\left(\int_0^{1/2}f(t)dt\right)^2$$

Θα εφαρμόσουμε την ανίσωση BCS άλλη μια φορά

$$\int_{1/2}^{1}(f'(t))^2dt\cdot\int_{1/2}^{1}(t-1)^2dt\geq\left(\int_{1/2}^{1}(t-1)f'(t)dt\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\int_{1/2}^{1}(f'(t))^2dt\cdot\frac{1}{24}\geq\left([(t-1)f(t)]_{1/2}^{1}-\int_{1/2}^{1}f(t)dt\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\int_{1/2}^{1}(f'(t))^2dt\geq 24\left(\int_{1/2}^{1}f(t)dt\right)^2$$

Προσθέτουμε κατά μέλη

$$\int_{0}^{1/2}(f'(t))^2dt+\int_{1/2}^{1}(f'(t))^2dt\geq 24\left(\left(\int_{1/2}^{1}f(t)dt\right)^2+\left(\int_{0}^{1/2}f(t)dt\right)^2\right)\Leftrightarrow$$

$$\int_{0}^{1}(f'(t))^2dt\geq 24\left(\left(\int_{1/2}^{1}f(t)dt\right)^2+\left(\int_{0}^{1/2}f(t)dt\right)^2\right)$$

Τώρα στο β΄ μέλος κάνουμε χρήση της ταυτότητας $a^2+b^2\geq\frac{(a+b)^2}{2}$

$$\int_{0}^{1}(f'(t))^2dt\geq 24\left(\left(\int_{1/2}^{1}f(t)dt\right)^2+\left(\int_{0}^{1/2}f(t)dt\right)^2\right)\geq 12\left(\int_{0}^{1/2}f(t)dt+\int_{1/2}^{1}f(t)dt\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\int_{0}^{1}(f'(t))^2dt\geq 12\left(\int_{0}^{1}f(t)dt\right)^2$$

7Δ5

$g(x+1)\geq g(x)-g(x-1)\Leftrightarrow$

$g(x+2)\geq g(x+1)-g(x)\Leftrightarrow$ (όπου x βάζουμε το x+1)

$g(x+3)\geq g(x+2)-g(x+1)$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δυο τελευταίες παίρνουμε

$g(x+3)+g(x)\geq 0$

Αν πάρουμε το $\int_{a}^{a+6}g(t)dt$ μπορούμε να εκμεταλλευτούμε το

προηγούμενο ώστε να αποκτήσουμε φράγμα ως εξής

$$\int_{a}^{a+6}g(t)dt=\int_{a}^{a+3}g(t)dt+\int_{a+3}^{a+6}g(t)dt=\int_{a}^{a+3}g(t)dt+\int_{a}^{a+3}g(t+3)dt=$$

$$=\int_{a}^{a+3}[g(t)+g(t+3)]dt\geq 0$$

Τότε αν χωρίσουμε σα εξάδες το 1 ως το 2005 μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το παραπάνω αποτέλεσμα

$$\int_1^{2005} g(t)dt = \int_1^7 g(t)dt + \int_7^{13} g(t)dt + ... + \int_{1999}^{2005} g(t)dt \geq 0 \Rightarrow$$

$$\int_1^{2005} f(t)dt = \int_1^{2005} [g(t)+t]dt \geq \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^{2005} = 2010012$$

Η ισότητα ισχύει όταν $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$

7Δ6

Για να αποφύγουμε τα ολοκληρώματα θέτουμε $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

οπότε έχουμε F(0)=F(1)=0, Fδυο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη παράγωγο και ας είναι $M = \max_{x\in[0,1]} |F''(x)|$ που σημαίνει ότι

$-M \leq F''(x) \leq M, \forall x \in [0,1]$ Θα δείξουμε ότι $-\frac{M}{8} \leq F(x) \leq \frac{M}{8}$ σε δυο φάσεις. Πρώτα θα δείξουμε $F(x) \leq \frac{M}{8}$ και μετά ότι $F(x) \geq -\frac{M}{8}$

$g(x) = \frac{M}{2}x(1-x)$ και $h(x) = -\frac{M}{2}x(1-x)$ οι οποίες ικανοποιούν το ζητούμενο αφού

$0 \leq g(x) \leq \frac{M}{8} \Leftrightarrow \frac{M}{2}x(1-x) \leq \frac{M}{8} \Leftrightarrow (2x-1)^2 \geq 0$ που ισχύει και αφού $0 \leq x \leq 1$

$0 \geq h(x) \geq -\frac{M}{8} \Leftrightarrow -\frac{M}{2}x(1-x) \geq -\frac{M}{8} \Leftrightarrow (2x-1)^2 \geq 0$ που και ισχύει διότι $0 \leq x \leq 1$ Υποθέτουμε ότι $\exists a \in (0,1) : F(a) > \frac{M}{8}$ τότε

ονομάζουμε με w την συνάρτηση με τύπο

$$w(x)=F(x)-\frac{F(a)}{g(a)}g(x)\Rightarrow w''(x)=F''(x)+\frac{F(a)}{g(a)}M>-M+\frac{M/8}{M/8}M$$
$$=0\Rightarrow w'\uparrow\Rightarrow w':1-1$$

Όμως είναι $w(0)=w(a)=w(1)=0$ άρα βάσει του θεωρήματος Rolle στα [0,α] , [α,1] θα υπάρχουν $\theta_1\neq\theta_2: w'(\theta_1)=w'(\theta_2)=0$ άτοπο διότι $w':1-1$ Με αντίστοιχο τρόπο δείχνουμε ότι δεν υπάρχει

$$b\in(0,1): F(b)<-\frac{M}{8}\ \text{Άρα}\ -\frac{M}{8}\le F(x)\le\frac{M}{8},\forall x\in[0,1]$$

7Δ7

Έστω ότι f κυρτή. Τότε από την ανισότητα Jensen είναι

$$f\left(\frac{x+t+x-t}{2}\right)\le\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\ ,\ 0\le t\le h\Leftrightarrow$$
$$2f(x)\le f(x+t)+f(x-t)\ ,\ 0\le t\le h\Rightarrow$$
$$2f(x)\int_0^h dt\le\int_0^h f(x+t)dt+\int_0^h f(x-t)dt\Rightarrow$$
$$2hf(x)\le\int_{-h}^h f(x+t)dt\Rightarrow$$
$$f(x)\le\frac{1}{2h}\int_{-h}^h f(x+t)dt\quad[1]$$

Έστω τώρα ότι ισχύει η [1]. Ας πάρουμε $[x,y]\subset(a,b)$ Η συνάρτηση f έχει max στο [x,y] ως συνεχής σε κλειστό, έστω στο c

Αν $c\in(x,y)\Rightarrow f(z)\le f(c), f(x)<f(c), f(y)<f(c)$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας δεχόμαστε ότι $h=c-x\le y-c$.Άρα η max τιμή της f στο [c-h,c+h] υφίσταται στο c και

$f(c-h)=f(x)<f(c)$ τότε $\int_{-h}^h f(c+t)dt<2hf(c)$ αλλά λόγω της [1]

είναι $\int_{-h}^{h} f(c+t)dt \geq 2hf(c)$ άτοπο από την προηγούμενη οπότε το max της f υφίσταται στο άκρο του διαστήματος [x,y]

Τότε θεωρούμε την συνάρτηση

$g: g(z) = f(x) + \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(z-x)$ (πρόκειται για την εξίσωση ευθείας που περνά από τα $(x, f(x)), (y, f(y))$)

Παρατηρούμε ότι $\int_{-h}^{h} g(z+t)dt = 2hg(z)$ Θέτουμε w=f-g οπότε

$\int_{-h}^{h} w(z+t)dt \geq 2hw(z)$ έχουμε υποθέσει όμως ότι η w παίρνει την μέγιστη τιμή της στα άκρα x ή y και αφού

$w(x) = w(y) = 0 \Rightarrow w(z) \leq 0 \Rightarrow f(z) \leq g(z)$ πράγμα που σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι κάτω από τη χορδή της δηλαδή όπως έχουμε αποδείξει παλιότερα η f είναι κυρτή.

8Β13

$f(x) > f(x_1) = m > f(x_0) = 0, x > x_1 > x_0 \Rightarrow$

$\int_a^x f(t)dt > \int_a^x mdt = m(x-a) \to +\infty$

8Γ1

Πρώτα να εξετάσουμε την συνέχεια στο 1 δηλαδή αν $\lim_{x\to 1} f(x) = \ln 2$

Πάλι θα πρέπει να πάμε με ανισότητες. Θα δείξουμε ότι

$\lim_{x\to 1}(\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} - \int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1}) = 0$ [1]

για

$t \neq 1 \Rightarrow -\ln t < \frac{1}{t} - 1 \Rightarrow \ln t > \frac{t-1}{t} \Rightarrow \frac{1}{\ln t} < \frac{t-1+1}{t-1} \Rightarrow \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1} < 1$

[2]

Χρειαζόμαστε όμως και δεύτερη ανισότητα για το κριτήριο παρεμβολής

$$t \neq 1 \Rightarrow \ln t < t-1 \Rightarrow \frac{1}{\ln t} > \frac{1}{t-1} \Rightarrow \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1} > 0 \ [3]$$

Από [2],[3] είναι

$$0 < \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1} < 1 \Rightarrow 0 < \int_x^{x^2} (\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1})dt < \int_x^{x^2} dt = x^2 - x \ [4]$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1}(x^2 - x) = 0$ από το κριτήριο παρεμβολής και την [4] παίρνουμε την [1]

$$\lim_{x\to 1}(\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} - \int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1}) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1}(\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} - \ln(\frac{x^2-1}{x-1})) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\lim_{x\to 1} f(x) = \ln 2$$

Για την παραγωγισιμότητα θέλουμε να υπολογίσουμε το

$$\lim_{x\to 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-\ln 2}{x-1} \overset{\text{DLH}}{\underset{x\to 1}{=}} \lim f'(x) = \lim_{x\to 1}(\frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln x})$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x} = 1$$

8Γ2

$$g(y) = \frac{\eta\mu y}{y},\ y \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$$

$$g'(y) = \frac{y\sigma\upsilon\nu y - \eta\mu y}{y^2},\quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

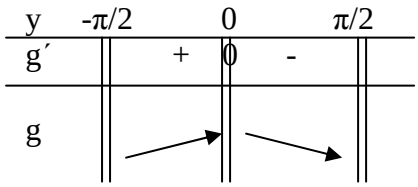
Θέτω $w(y) = y\sigma\upsilon\nu y - \eta\mu y,\quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$w'(y) = \cancel{\sigma\upsilon\nu y} - y\eta\mu y - \cancel{\sigma\upsilon\nu y} = -y\eta\mu y$$

y	-π/2		0		π/2
w΄		-	0	-	
w		↘	0	↘	

άρα με τον γνωστό τρόπο w(x)>0 στο [-π/2,0) και w(x)<0 στο (0,π/2]

και έτσι $g'(y) > 0,\ y \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ και $g'(y) < 0,\ y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$



Έχω $\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\eta\mu\left(\frac{xt}{\pi}\right)dt}{t} =$ θέτω $y = \frac{xt}{\pi}$ και $dy = \frac{x}{\pi}dt$

t	π	2π
y	x	2x

$= \int_{x}^{2x} \frac{\eta\mu y}{y} dy = \int_{x}^{2x} g(y)dy$, $x \neq 0$ Έτσι για 0< x <2x<π/2

$$\left.\begin{array}{l} x \le y \le 2x \\ g\downarrow \end{array}\right\} \Rightarrow g(2x) \le g(y) \le g(x)$$

$$\Rightarrow \int_{x}^{2x} g(2x)dy \le \int_{x}^{2x} g(y)dy \le \int_{x}^{2x} g(x)dy$$

$$\Rightarrow g(2x)(2x-x) \le \int_{x}^{2x} g(y)dy \le g(x)(2x-x)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \frac{\eta\mu 2x}{2} \le \int_{x}^{2x} g(y)dy \le \eta\mu x \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\eta\mu 2x}{2} = \lim\limits_{x\to 0^+} \eta\mu x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \int_{x}^{2x} g(y)dy = 0$$

Ομοίως εάν -π/2< 2x<x <0 $\lim\limits_{x\to 0^+} \int_{x}^{2x} g(y)dy = 0$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\eta\mu\left(\frac{xt}{\pi}\right)dt}{t} = 0 = f(0)$ δηλ f συνεχής στο 0

για $x \neq 0$ f συνεχής ως παραγωγίσιμη. Τελικά f συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_x^{2x} g(y)dy}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_x^{2x} g(y)dy\right)'}{1} \quad (1)$$

Να τονίσουμε ένα λεπτό σημείο Πρέπει να συνεχίσω με πλευρικά όρια γιατί σπάζοντας το $\int$ εισάγω μια σταθερά ,εδώ π.χ το 1/2 ,που προσδιορίζει το διάστημα. μια που το Α είναι ένωση

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(-\int_{1/2}^{x} g(y)dy+\int_{1/2}^{2x} g(y)dy\right)'}{1}=\lim_{x\to 0^+}[-g(x)+2g(2x)]$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-\eta\mu x}{x}+2\frac{\eta\mu 2x}{2x}\right)=-1+2=1$$

όμοια και το άλλο πλευρικό που τελικά σημαίνει $f'(0)=1$

8Γ3

$$g(y)=\frac{\eta\mu y}{y},\ y\in(-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2})$$

Θέτουμε

$$g(x)=\int_a^x f(t)dt \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x)=A\in R\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}[g(2x)-g(x)]=A-A=0\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\int_x^{2x} f(t)dt=0\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}[(2x-x)f(\xi)]=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,\ \lim_{x\to+\infty}[xf(\xi)]=0\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}[f(\xi)]=0 \text{ Με}$$

$x<\xi<2x\Rightarrow \xi\to+\infty$ οπότε λόγω της μοναδικότητας του ορίου

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

8Δ1

$$L=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\int_0^1\frac{e^{-x^2(1+t^2)}-e^{-x_0^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt}{x-x_0}$$

Θεωρούμε την συνάρτηση e^x , $A=-x^2(1+t^2)$, $B=-x_0^2(1+t^2)$ και έστω πχ ότι A<B , τότε από το ΘΜΤ έχουμε (ίδια απόδειξη και αν A>B)

$\exists k\in(A,B): e^A-e^B=(A-B)e^k=-(x^2-x_0^2)(1+t^2)e^k$. Με αντικατάσταση στο όριο φτάνουμε να αναζητούμε το

$$L=\lim_{x\to x_0}\left(-(x+x_0)\int_0^1 e^k dt\right)=-2x_0\lim_{x\to x_0}\int_0^1 e^k dt$$

Έχουμε από πριν ότι $k\in(A,B)\Rightarrow\int_0^1 e^A dt<\int_0^1 e^k dt<\int_0^1 e^B dt$

Θα βρούμε τα όρια των ακριανών παραστάσεων στην προηγούμενη ανισότητα όταν το $x\to x_0$

Παρατηρούμε ότι το B είναι ανεξάρτητο του x ($B=-x_0^2(1+t^2)$)

οπότε $\lim_{x\to x_0}\int_0^1 e^B dt=\int_0^1 e^B dt$

Το A εξαρτάται από το x. Όμως έχουμε

$\int_0^1 e^A dt-\int_0^1 e^B dt=\int_0^1(e^A-e^B)dt=-(x^2-x_0^2)\int_0^1(1+t^2)e^k dt$ από το αρχικό ΘΜΤ

Θα δείξουμε ότι το $\int_0^1(1+t^2)e^k dt$ είναι φραγμένο. Πράγματι

$0<\int_0^1(1+t^2)e^k dt<2\int_0^1 e^k dt<2\int_0^1 e^{-x_0^2}dt=C$ (διότι $0\le t\le 1$ και x_0 σταθερό)

Τότε το $\lim_{x\to x_0}\left(-(x^2-x_0^2)\int_0^1(1+t^2)e^k dt\right)=0$ ως μηδενική επί φραγμένη

Επειδή

$$\int_0^1 e^A dt = \int_0^1 e^B dt + (x^2 - x_0^2)\int_0^1 (1+t^2)e^k dt \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\int_0^1 e^A dt = \int_0^1 e^B dt$$

Συμπεραίνουμε από το κριτήριο παρεμβολής ότι

$$\lim_{x\to x_0}\int_0^1 e^k dt = \int_0^1 e^B dt \Rightarrow -2x_0 \lim_{x\to x_0}\int_0^1 e^k dt = -2x_0\int_0^1 e^B dt = -2x_0\int_0^1 e^{-x_0^2(1+t^2)}dt$$

$$L = f'(x_0) = -2x_0\int_0^1 e^{-x_0^2(1+t^2)}dt = -2e^{-x_0^2}\int_0^1 e^{-x_0^2 t^2}x_0 dt = -2e^{-x_0^2}\int_0^{x_0} e^{-u^2}du$$

Όπου στο τελευταίο ολοκλήρωμα κάναμε την αλλαγή μεταβλητής

$u = x_0 t$ Τελικά $f'(x) = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$

Τώρα έχουμε

$$g'(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt + f'(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt - 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt = 0$$

Άρα η g είναι σταθερή οπότε

$g(x) = g(0) = 0^2 + \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$ αν θέσουμε $t = \varepsilon\varphi y$ παίρνουμε

$$g(x) = \int_0^{\pi/4} dy = \frac{\pi}{4}$$

Θα χρειαστούμε ακόμη μια φορά το κριτήριο παρεμβολής

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt \Rightarrow 0 < f(x) < \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+t^2}dt = e^{-x^2}\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{4}e^{-x^2}$$

Τότε εύκολα $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ άρα

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2 + f(x)\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

8Δ2

Αν $f(x) = \int_a^b e^{xg(t)}dt, \forall x \in R$ όπου g μη αρνητική γνήσια μονότονη και συνεχής στο [a,b], η οποία έχει μέγιστο θετικό το A ,να δειχθεί ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ell n(f(x))}{x} = A$$

Πριν την απόδειξη προηγείται ένα λήμμα

Λήμμα *Έστω* $h:[a,b]\to R$ *συνεχής, γνήσια μονότονη συνάρτηση η οποία έχει μέγιστο θετικό. Να δείξετε ότι :* $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^b h(t)e^{xh(t)}dt=+\infty$

Απόδειξη του λήμματος

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι , $h\uparrow$ στο $[a,b]$

Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις

Α) Η h να διατηρεί σταθερό πρόσημο . Τότε το πρόσημο αυτό θα είναι θετικό αφού μια τιμή της, το μέγιστό της, είναι θετική. Δηλαδή $h(t)>0,\forall t\in[a,b]$

Τώρα έχουμε :

Από την γνωστή ανίσωση $e^y\geq 1+y>y,\forall y\in R$ θέτοντας $y=xh(t)$ παίρνουμε

$e^{xh(t)}\geq 1+xh(t)>xh(t)\overset{h>0}{\Rightarrow}h(t)e^{xh(t)}>xh^2(t)$. Ολοκληρώνουμε και είναι :

$$\left.\begin{array}{l}\int_a^b h(t)e^{xh(t)}dt>\int_a^b xh^2(t)dt=x\int_a^b h^2(t)dt\\ \text{αλλά είναι : } \lim\limits_{x\to+\infty}x\int_a^b h^2(t)dt=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\int_a^b h(t)e^{xh(t)}dt=+\infty$$

Β) Η h να μην διατηρεί σταθερό πρόσημο. Τότε επειδή $h\updownarrow$ στο $[a,b]$ θα υπάρχει $c\in(a,b):h(t)\leq 0,\forall t\in[a,c]$ και $h(t)\geq 0,\forall t\in[c,b]$ και βέβαια το c είναι η μοναδική ρίζα της h(t).

Στην περίπτωση Α) δείξαμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^b h(t)e^{xh(t)}dt=+\infty$. Ισχύουν όμως οι ίδιες συνθήκες για την h στο [c,b]. Άρα

$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_c^b h(t)e^{xh(t)}dt=+\infty$

Ακόμη αφού $x \to +\infty$ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τελικά είναι $x > 0$. Έτσι στο διάστημα [a,c] θα έχουμε : $xh(t) \le 0 \Rightarrow 0 \le e^{xh(t)} \le 1$

Όμως είναι $h \uparrow \text{στο} [a,c]$ οπότε $0 \le -h(t) \le -h(a)$ στο [a,c]

Πολλαπλασιάζουμε τις δυο τελευταίες ανισότητες κατά μέλη και παίρνουμε

$$0 \le -h(t)e^{xh(t)} \le -h(a) \Rightarrow h(t)e^{xh(t)} \ge h(a) \Rightarrow \int_a^c h(t)e^{xh(t)}dt \ge (c-a)h(a) \Rightarrow$$

$$\int_a^c h(t)e^{xh(t)}dt + \int_c^b h(t)e^{xh(t)}dt \ge (c-a)h(a) + \int_c^b h(t)e^{xh(t)}dt \Rightarrow$$

$$\int_a^b h(t)e^{xh(t)}dt \ge (c-a)h(a) + \int_c^b h(t)e^{xh(t)}dt$$

Επειδή $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_c^b h(t)e^{xh(t)}dt = +\infty$ είναι και

$\lim\limits_{x \to +\infty} [(c-a)h(a) + \int_c^b h(t)e^{xh(t)}dt] = +\infty$ οπότε λόγω της προηγούμενης ανισότητας , άμεσα προκύπτει ότι και στην Β) περίπτωση

$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^b h(t)e^{xh(t)}dt = +\infty$$

Στην κύρια απόδειξη θα ακολουθήσουμε τα παρακάτω 4 βήματα

1.

Είναι $f(x) = \int_a^b e^{xg(t)}dt \ge \int_a^b (1 + xg(t))dt = b - a + x\int_a^b g(t)dt$ **[1]**

Επειδή g συνεχής στο [a,b] με μέγιστο το $A > 0$ η g δεν είναι παντού μηδέν στο $[a,b]$ οπότε $\int_a^b g(t)dt > 0$ **[2]**

Από [1], [2] προκύπτει άμεσα ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Με εντελώς ανάλογο τρόπο δείχνουμε ότι και $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$ **[3]** που θα το χρειαστούμε αργότερα

2. Αρκεί να δειχθεί ότι $\int_a^b (A - g(t))e^{xg(t)}dt \ge 0$ που ισχύει αφού $A - g(t) \ge 0$ και επιπλέον $e^{xg(t)} > 0$, $a < b$

3. Αρκεί να δείξουμε ότι

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x > \delta \Rightarrow A - \varepsilon < \frac{f'(x)}{f(x)} < A + \varepsilon$. Όμως η ανισότητα

$\frac{f'(x)}{f(x)} < A + \varepsilon$ ισχύει από το δεύτερο ερώτημα αφού εκεί δείξαμε ότι

$f'(x) \le Af(x) \overset{f>0}{\Leftrightarrow} \frac{f'(x)}{f(x)} \le A < A + \varepsilon$. Άρα αρκεί να δείξουμε

$\frac{f'(x)}{f(x)} > A - \varepsilon$ **[4]** Εάν $A - \varepsilon \le 0$ η [4] ισχύει για κάθε x>δ λόγω του πρώτου ερωτήματος και της [3] που εξασφαλίζουν το πρώτο μέλος της [4] να είναι καθαρά θετικό . Μπορούμε λοιπόν να θεωρούμε ότι $A - \varepsilon > 0$ **[5]**

Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι

$f'(x) > (A - \varepsilon) f(x) \Leftrightarrow \int_a^b g(t)e^{xg(t)}dt > (A - \varepsilon)\int_a^b e^{xg(t)}dt$ για x>δ ή ισοδύναμα αρκεί

$\int_a^b (g(t) - (A - \varepsilon))e^{xg(t)}dt > 0 \Leftrightarrow e^{-(A-\varepsilon)x}\int_a^b (g(t) - (A - \varepsilon))e^{xg(t)}dt > 0 \Leftrightarrow$

$\int_a^b (g(t) - (A - \varepsilon))e^{x(g(t)-(A-\varepsilon))}dt > 0$ **[6]**

Αν θέσουμε h(t)=g(t)-(A-ε) τότε η h είναι συνεχής και γνήσια μονότονη στο [a,b] και έχει μέγιστο θετικό, συνεπώς ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του λήμματος που σημαίνει ότι η [6] ισχύει τελικά για x>δ

4. Λόγω του πρώτου ερωτήματος και της [3] το όριο είναι της μορφής $\frac{+\infty}{+\infty}$ και ισχύουν οι υπόλοιπες προϋποθέσεις του κανόνα De l' Hospital αφού είναι $\frac{\ln(f(x))'}{(x)'} = \frac{f'(x)}{f(x)}$ και από το τρίτο ερώτημα

έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{f(x)}=A$, f παραγωγίσιμη διότι g συνεχής και

$(x)'=1\neq 0$ σε κάθε διάστημα $(\delta,+\infty)$ Τελικά συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(f(x))}{x}=A$$

9Β3

$x=\varepsilon\varphi u$ …

9Β6

$x=\eta\mu u$

9Γ1

$I_{\mu,\nu}=I_{\nu,\mu}$ [1] είναι εύκολο αν κάνουμε αλλαγή την μεταβλητής x=1-u

$I_{\mu+1,\nu}=\dfrac{\mu+1}{\nu+1}I_{\mu,\nu+1}$ [2]διότι

$$I_{\mu,\nu}=\int_0^1 x^{\mu}\left(-\frac{(1-x)^{\nu+1}}{\nu+1}\right)'dx=0+\frac{\mu}{\nu+1}\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu+1}dx\Rightarrow$$

$$I_{\mu,\nu}=\frac{\mu}{\nu+1}I_{\mu-1,\nu+1}\Rightarrow I_{\mu+1,\nu}=\frac{\mu+1}{\nu+1}I_{\mu,\nu+1}$$

$I_{\mu+1,\nu}+I_{\mu,\nu+1}=I_{\mu,\nu}$ [3] Πράγματι αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_0^1[x^{\mu+1}(1-x)^{\nu}+x^{\mu}(1-x)^{\nu+1}]dx=\int_0^1[x^{\mu}(1-x)^{\nu}]dx\Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 x^{\mu}(1-x)^{\nu}(x+1-x)dx=\int_0^1 x^{\mu}(1-x)^{\nu}dx$$

Από τις [2],[3] απαλείφοντας το $I_{\mu+1,\nu}$ παίρνουμε την

$I_{\mu,\nu+1}=\dfrac{\nu+1}{\mu+\nu+2}I_{\mu,\nu}$ [4] που είναι και η βασική μας επιδίωξη αφού οι δείκτες έχουν διαφορά 1

Για μ=0 έχουμε $(\nu+2)I_{0,\nu+!}=(\nu+1)I_{0,\nu}=\ldots=1I_{0,0}=1$

Τώρα για ν=μ στην [4] ,δίνοντας τιμές και πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη έχουμε το ζητούμενο λόγω [1]

Ε. ΓΕΝΙΚΕΣ

ΘΕΜΑΤΑ

ΜΕ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ

ΜΕ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

ΜΕ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΓΕΝΙΚΕΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ε

Θ1

1) Αν $x \in A \Leftrightarrow -x \in A$

2) Bolzano στην g(x)-x στο Α

3) Από το 1

4) Εύκολο

5) υπάρχει k:g(k)=a άρα $w(k) \geq 0$ αντίστοιχα υπάρχει m:g(m)=-a οπότε $w(m) \leq 0$ Bolzano για την w στο [-α,α]

6) Είναι $-a \leq g(x) \leq a$, $-a \leq g(-x) \leq a$, $\forall x \in A$ προσθέστε κατά μέλη., π.χ αν g άρτια

7) Αντίστοιχα το α και το –α

8) g(-a)=-a και g(a)=a τότε f(g(-a))+g(-a)+f(-a)=f(-a)+(-a)-f(a)=-[a+2f(a)] και αντίστοιχα για το α. Μετά Bolzano

9) Από το 5 υπάρχει ξ : g(-ξ)=-g(ξ) Αν f(g(x))+g(x)+f(x)=h(x) τότε h(ξ)+h(-ξ)=0 . Bolzano για την h, Αν h(ξ)=0 προφανές

10) Υπάρχει x_1: $f(x_1)=a$ άρα $f(-x_1)=-a$. Το x_1 δεν είναι το 0 και $g(f(-x_1))+ f(-x_1)= g(-f(x_1))-f(x_1)=g(-a)-a \leq 0$ και αντίστοιχα για το x_1. Μετά Bolzano.

Θ2

1) Από $f(x_1)= f(x_2)$ προκύπτει εύκολα $x_1= x_2$

2) Υπάρχει x_0 : $f(x_0)=c$ με αντικατάσταση στην αρχική

$f(c) = x_0 \Rightarrow f(f(c)) = f(x_0) = c$, τώρα όπου x=c πάλι στην αρχική **3)** x=a στην αρχική

4) εύκολο

5) Βρείτε ότι f(b)-f(a)=a+c-2b<0

6) αρκεί b=f(a)>f(c)=c

Θ3

1) Απλές πράξεις

2) Ολοκληρώστε την 1

3) Απλές πράξεις

4) Ολοκληρώστε την 3

5) Από 2 και 4 με αφαίρεση

6) *x=1/3*

Θ4

1) εύκολο

2) πίνακας μονοτονίας

3) εύκολο

4) ολοκληρώστε τις 2 προηγούμενες ανισότητες

Θ5

1) Ως πράξεις παραγωγίσιμων

2) Παραγωγίστε

3) εύκολο

4) Υποθέστε ότι δεν είναι σταθερή. Από τα 2 και 3 θα οδηγηθείτε σε άτοπο

Θ6

1) Άμεσα $f'(x) \geq 0$

2) Από το 1 και επειδή $x \geq 1$

3) $\frac{f'(x)}{f^2(x)}=\left(-\frac{1}{f(x)}\right)'\ldots$

4) $\int_1^a f=\int_a^3 f\ldots$

Θ7

1) εύκολο

2) Δείξτε ότι $f'(x)+x$ αύξουσα στο [0,4] οπότε μετά

$f(x)+\frac{x^2}{2}-f'(0)x$ αύξουσα στο [0,4] και τελικά $f'(0)\le 2$ και με αντίστοιχο τρόπο για το 4

3) Απλές πράξεις

4) Rolle για την h στα [0,2] και [2,4]

5) Είναι $h''(x)\ge 0$ και επειδή h΄ αύξουσα στο $[\xi_1,\xi_2]$ και ξ_1,ξ_2 ρίζες της είναι η μηδενική συνάρτηση στο $[\xi_1,\xi_2]$ οπότε η h είναι σταθερή στο $[\xi_1,\xi_2]$

6)το 2 ανήκει στο εσωτερικό του $[\xi_1,\xi_2]$ και h(2)=0 άρα h είναι η μηδενική συνάρτηση στο $[\xi_1,\xi_2]$

7) Αφού h΄ αύξουσα $h'(\xi_1)=0$ για $0\le x<\xi_1$ είναι $h'(x)\le h'(\xi_1)=0$ άρα h φθίνουσα και αντίστοιχα στο $[\xi_2,4]$

8) Επειδή $h(0)=h(\xi_1)=0$ και h φθίνουσα στο $[0,\xi_1]$, h είναι η μηδενική συνάρτηση $[0,\xi_1]$ και αντίστοιχα στο $[\xi_2,4]$. Τελικά h είναι η μηδενική συνάρτηση στο [0,4] οπότε $f(x)=\frac{1}{2}x(4-x)$

Θ8

1) Προφανείς οι: -1,0,1 και με Rolle η μοναδικότητα

2) Στον πίνακα λάβετε υπ' όψη ότι η παράγωγος έχει το πολύ δυο ρίζες , ενώ η β΄ παράγωγος ακριβώς μία. Ακόμη τα όρια στα άπειρα και για την f αλλά και για τις f ΄,f ΄΄ βρίσκονται εύκολα

3) Εύκολο από το 2 **4)** Η πρώτη είναι εκθετική η δεύτερη τριώνυμο…

5) $\int_{-1}^{1}|f|=...$

Θ9

1) Εύκολο

2) Μοναδική ρίζα το 0

3) f ΄΄(x)=…=<0 , θα έπρεπε $\lambda_{AB}=\lambda_{B\Gamma}$ κάντε Θ.Μ.Τ καταλήγετε σε άτοπο αφού η f ΄ είναι 1-1

4) f ΄(0)=1…

5) Από το 3 και το 4

6) Παραγωγίστε και τα δυο μέλη της ζητούμενης …, η σταθερά = 0

7) Αντικαταστήστε το 2x+1 από το 6

8) Από το 7

9) Απολογαριθμίστε και αντικαταστήστε το $e^{f(x)}$ από το 6

10) Από το 9

11) Είναι το R

12) Είναι συνεχής στο R

13) Απομονώστε το $e^{f(x)}$ από το 6 και πάρτε όρια

14) Με DLH λ=0 χρησιμοποιώντας την αρχική σχέση , ενώ $\beta=+\infty$

15) Όπου f(e/2)=w στην 6, προφανής ρίζα το 1 , μονοτονία.

16) Μπορούμε να βρούμε τον τύπο της αντίστροφης

Θ10

1) Φέρτε τα όλα στο πρώτο μέλος. Να θέσετε συνάρτηση.

Μελετείστε την μονοτονία της

2) Όμοια με το 1

3)Χρησιμοποιώντας το 1 και το κριτήριο παρεμβολής δείξτε ότι

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=-\infty$ και από τη 2 $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=+\infty$ Σκεφθείτε

Bolzano και μονοτονία για την f(x)-x

4) Δείτε ότι $e^t=(1+e^t)'$

5) Ολοκληρώστε την δοσμένη σχέση για x>0 , x<0. Θα προκύψουν δυο ανισότητες και η συνέχεια είναι παρόμοια με το ερώτημα 3

Θ11

1) εύκολο

2) Στηριχτείτε στην συμμετρία της f και της f^{-1}.Το πρώτο μέλος θα προκύψει σαν διαφορά εμβαδών δυο ορθογωνίων

3) Δείξτε ότι οι συναρτήσεις μέσα στα ολοκληρώματα είναι αντίστροφες και εφαρμόστε το 1.

4) Δείξτε ότι g(2)=0 και g αύξουσα στο R.

5) y=g(x)…Εύκολο

6)Εφαρμόστε το 1 και χρησιμοποιήστε το προηγούμενο

Θ12

1)Επαγωγικά δείξτε ότι $E_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$

2) Έστω $E_\eta(\rho)=E_{\eta+1}(\rho)=0$ Αφαιρέστε κατά μέλη οπότε ρ=0 καταλήξτε έτσι σε άτοπο

3) Πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει μια τουλάχιστον ρίζα

4) $E_{2\nu}(\xi)=E_{2\nu-1}(\xi)+\ldots$

5 Παρατηρήστε ότι πάντοτε ισχύει $E''_{2k+2}(x) = E'_{2k+1}(x) = E_{2k}(x)$ κάντε επαγωγή δεχθείτε ότι $E_{2k}(x) > 0$ και με πίνακα μονοτονίας λαμβάνοντας υπ' όψη και τα προηγούμενα καταλήγετε ότι $E_{2k+2}(x) > 0$

6) $E_{2v}>0$ ενώ E_{2v+1} περιττού βαθμού με παράγωγο θετική

Θ13

1) Συμπληρώστε την $(1+f(x))^2$, παραγωγίστε , από το f(0) και την μονοτονία

2) Παραγωγίστε και τα δύο μέλη της ζητουμένης σχέσης

3) Με μονοτονία. Λογαριθμίστε την σχέση του ερωτήματος 2

4) Από το 3 όριο είναι το $+\infty$ και f(A)=R

5) Εύκολο

6) Παραγωγίστε την f΄ και χρησιμοποιήστε το 5

7) Είναι γνήσια μονότονη , όπου x βάλτε το $f^{-1}(x)=\ldots=xe^x$

8) Εύκολο

9) Στο 2 βάλτε όπου x=e και θεωρείστε την εξίσωση που προκύπτει με άγνωστο το ω=f(e) , βρείτε το $f^{-1}(e)$

10) εύκολο

11) Από το 10 και το 5

12) $+\infty$ βγάζοντας κοινό παράγοντα τον ισχυρότερο όρο

Θ14

1) Για την συνέχεια τα όρια είναι εύκολα , για την παραγωγισιμότητα με D.L.H

2) f γν αυξ για x>0 και f γν φθιν για x<0.

3) Για το πρώτο όριο υπολογίστε το ολοκλήρωμα , για το δεύτερο ξεκινήστε από την $-1 \le \eta\mu t \le 1$ και χτίστε την παράσταση μέσα στο ολοκλήρωμα. Με το κριτήριο παρεμβολής το όριο θα βγει $+\infty$

4) $f(R)=[0,+\infty)$

5) Για $x>0$ δείξτε ότι το $f(x)$ ανήκει στο $f((-\infty,0))$

Θ15

1) Παραγωγίστε την αρχική σχέση και κάντε Bolzano στην g στο $[\alpha,\beta]$

2) Rolle στην $g(x)+2x$ στο $[\alpha,\beta]$, ή παραγωγίστε δυο φορές την αρχική σχέση και κάντε Rolle στην f

3) Με τον ορισμό μονοτονίας για την f ΄ στην σχέση : f ΄- g΄=2

4) Κάντε πίνακα μονοτονίας ξεκινώντας από το γεγονός ότι f ΄ είναι γνήσια αύξουσα.

5 $E = \int_0^1 |f - g| \, dx = ... = 1$

Θ16

1) Σε κάθε παραγώγιση μειώνεται κατά 1 ο βαθμός και ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου πολλαπλασιάζεται με τον προηγούμενο εκθέτη

2) Εφαρμόστε ν φορές DLH και χρησιμοποιήστε το προηγούμενο

3) Εύκολο

4) Το όριο στο $-\infty$ είναι $+\infty$ η $-\infty$. Το $-\infty$ απορρίπτεται λόγω μονοτονίας

5) Από το 4 προκύπτει $P(x)>0$.

6) Παραγωγίστε .Το P΄ θα προκύψει άρτιου βαθμού άρα το P περιττού οπότε θα είχε ρίζα . Άτοπο

Θ17

1) Με μονοτονία

2) Εύκολο

3) Αλλάζει στο 2 Ο παρονομαστής της f ΄ είναι πάντα θετικός λόγω του 1

4) Με Θ.Μ.Τ ολ.

5) lnt>0 χτίστε την παράσταση και ολοκληρώστε

6) Το όριο στο 0 είναι 0 λόγω του 4

Θ18

1)Εύκολο

2)Έχει ακρότατα στα $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

3) Προφανής το 0 και για x>0 είναι f(x)>0, αντίστοιχα για x<0 είναι f(x)<0

4) Έχει τρία

5) Ξεκινήστε από $x \le t \le 2x$ και χτίστε την παράσταση και ολοκληρώστε. Τελικά όριο είναι το 0

6) Αλλαγή μεταβλητής y=-t

7) Θα προκύψει $f(x)=u_2-u_1$ όπου $\varepsilon\varphi u_1=x$, $\varepsilon\varphi u_2=2x$. Βρείτε την $\varepsilon\varphi(u_2-u_1)=\ldots$

8) f(0)=0 και f συνεχής στο R. Δείξτε ότι $-\frac{1}{\sqrt{3}}<\frac{x}{1+2x^2}<\frac{1}{\sqrt{3}}\ldots$

Θ19

1) Βάλτε όπου x το y …

2) Παραγωγίστε , μετά εξασφαλίστε ότι η σταθερά είναι>0

3) Δείξτε ότι $-a \le f(x) \le a$ …

4) Bolzano για την f(x)-x στο [0,α]

5)Με άτοπο δείξτε ότι αν διατηρεί σταθερό πρόσημο τότε είναι θετική και κοίλη Στη συνέχεια θεωρείστε μια εφαπτομένη της και καταλήξτε σε αντίφαση

6) Λύστε ως προς σφφ και μετά προς Α. Παραγωγίστε την

$$\left(f(x)-A\eta\mu(x+\phi)\right)^2+\left(f'(x)-A\sigma\upsilon\nu(x+\phi)\right)^2$$

Θ20

1) x>0

2) Αλλάζει στο 1 στο οποίο έχει ολικό ελάχιστο το 0

3) Να θέσετε g(x)=f(x)-f(1/x) και να πάτε με μονοτονία

4) Παραγωγίστε και τα δύο μέλη. Η σταθερά θα βγει 0

5) Αντικαταστήστε το f(1/x) από το 4 στο 3 . Η ανίσωση θα δώσει όριο το $+\infty$

6) Με Bolzano

Θ21

1) Με τον ορισμό και χτίζοντας (Προσοχή! $0 \le t \le 1$)

2) Αρκεί f(x+1)=f(x)+c . Στο f(x+1) κάντε παραγοντική (Προσοχή $(t^x)'=xt^{x-1}$)

3) Η ανισότητα με Θ.Μ.Τ και $1=e^0$, μετά χτίστε την παράσταση στην μέση και ολοκληρώστε

4) Από το 3

5) Στο f(n+1) κάντε παραγοντική

6) n φορές DLH

7) Πάρτε όρια στο 5 Θα βγει Γ(n+1)=nΓ(n) Δώστε τιμές στο n και πολλαπλασιάστε κατά μέλη όπως στην απόδειξη της γεωμετρικής προόδου.

8) Ίδια απόδειξη

9) Με DLH κάποτε ο εκθέτης θα προκύψει μη θετικός

10) Πάρτε όρια στο 8

Θ22

1)Κ(3/4,9/8),Λ(1,1),Μ(1/4,-1/8)

2) $\int_0^{1/4}(A-D)dx+\int_{1/4}^{3/4}(A-C)dx+\int_{3/4}^{1}(B-C)dx$

3) P(1/2,1/2)

4) Αρκεί f<A , f<B , f>C , f>D στο [0,1]. Ξεκινήστε από f ΄΄(x)+4>0 δυο φορές μονοτονία με 0<x<1 θα καταλήξετε σε ανισότητα που αφορά την f και μια από τις A,B,C,D. Όμοια για τις υπόλοιπες τρεις ανισότητες

5) $C(x)\le f(x)\le A(x)$ στο [0,1]

6) Βρείτε τα ακρότατα των A,B,C,D σύμφωνα με το σχήμα

7) Είναι $h=\begin{cases}A\ ,\ 0\le x\le 3/4\\ B\ ,\ 3/4<x\le 1\end{cases}$, όχι διότι h μη παραγωγίσιμη στο 3/4

8) Αν f(t) η απομάκρυνση και υποθέσουμε ότι -4<f΄΄(t)<4 καταλήγουμε στο 4 χωρίς να ισχύουν τα «=». Από το 5 προκύπτει άτοπο

Θ23

1) Θεώρημα σταθερού προσήμου

2) Αν f κοίλη τότε βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της…

3) Ολικό MIN το 1

4) f κυρτή βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της…

5) Πολλαπλασιάστε με f ΄(x) την αρχική σχέση. Μετά σταθερό πρόσημο για την f ΄(x) σε διαστήματα

6) Βρείτε το όριο της f(x) / x

7) Πινακάκι για την f(x)-x

8) Υπάρχει χορδή που διέρχεται από το (0,0). Μετά κατάλληλο Rolle

9) Από το 5,αλλαγή μεταβλητής

10) χτίζοντας

Θ24

1) Έστω x_0:$f(x_0)>0$ Επειδή f συνεχής στο [α,β] θα έχει μέγιστο που δεν θα βρίσκεται στα άκρα αφού η f μηδενίζεται εκεί. Από το κριτήριο β΄ παραγώγου θα έπρεπε η f ΄΄ να ήταν αρνητική άτοπο αντίστοιχα για ελάχιστο. Τελικά σταθερή

2) Η f έχει μία ρίζα ακριβώς την α οπότε για x>α έχει σταθερό και μάλιστα θετικό πρόσημο

3) Εύκολο

4) Αν f΄(α)<0 επειδή f ΄ συνεχής και f(α)=0 προκύπτει f φθίνουσα και αρνητική για α<x<α+δ άτοπο

5) f ΄(α)<0 επειδή f ΄ συνεχής και f(α)=0 υπάρχει x_2:$f(x_2)<0$. Η f έχει σταθερό πρόσημο για x<α .Άρα f(x)<0 για x<α . Έτσι προκύπτει το πρόσημο της f ΄΄ να αλλάζει εκατέρωθεν του α… έχουμε σημείο καμπής στο α

6) Γράψτε την εξίσωση εφαπτομένης y=…στο α , χρησιμοποιήστε το 3 και πάρτε όρια Σύνολο τιμών Το R

7) Είναι f ΄ κυρτή κοντά στο +∞ και κοίλη στο -∞

8) Με Θ.Μ.Τ η ύπαρξη, με την μονοτονία της f ΄ η μοναδικότητα

9) $\lambda_{AB}=f'(\xi_1)$ με $\xi_1>α$ από Θ.Μ.Τ και η f ΄ είναι γνήσια αύξουσα **10)** γ<α τότε $\lambda_{\Gamma A}= f'(\xi_2)$ με $\xi_2<α$ η f ΄ είναι γνήσια φθίνουσα άρα $f'(\xi_2)>f'(α)$ ακόμη η f ΄ παίρνει όλες τις τιμές από f ΄(α) ως +∞

11) Παραγωγίστε την f ΄/ f ,σπάστε το κλάσμα και ολοκληρώστε

12) Από το 12 χρησιμοποιήστε την ανίσωση Cauchy- Swartz για ολοκληρώματα και το Θ.Μ.Τ ολ για το ολοκλήρωμα της p(x)

Θ25

1)Εύκολο

2) $f''=f \Leftrightarrow (f'+f)'=(f'+f)$ **…**

3-4-5) Εύκολη μελέτη

6) Να θέσετε $2g(x)=e^{x}+e^{-x}, 2h(x)=e^{x}-e^{-x}$

7) Καταλήγετε στο 2°

Θ26

1).Αρκεί για κάθε x>0 να δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό y στο (0,1) :

$g(y)=0$ όπου $g(y)=4y^3+2xy-x-1$

Είναι $g'(y)=12y^2+2x>0 \Rightarrow g\downarrow$ και

$g(0)g(1)=-(x+1)(3+2x)<0$ οπότε ισχύει το ζητούμενο

2)Αφού

$0<y<1 \Rightarrow y^3<y$

$4y^3+2xy=x+1 \Rightarrow 4y+2xy>x+1 \Rightarrow y(2x+4)>x+1 \Rightarrow \frac{x+1}{2x+4}<y$

Και

$0<y<1 \Rightarrow 0<4y^3$

$4y^3+2xy=x+1 \Rightarrow 2xy<x+1 \Rightarrow \frac{x+1}{2x}>y$

Από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει το ζητούμενο

3)Με $y_0=f(x_0)$ έχουμε

$y^3-y_0^3=(y-y_0)A, A\geq 0$ αλλά

$y^3-y_0^3+2xy-2x_0y_0=x-x_0 \Leftrightarrow \ldots \overset{x\neq x_0}{\Leftrightarrow} \frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{1-2y}{4A+2x_0}$ [*]

Επειδή

$0 < y < 1 \Rightarrow |1-2y| < 1$

$A > 0, x_0 > 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{4A + 2x_0} < \frac{1}{2x_0}$

Οπότε παίρνοντας απόλυτα και πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις δυο προηγούμενες προκύπτει η επιθυμητή ανισότητα μέσω της οποίας και του κριτήριου παρεμβολής αποδεικνύεται εύκολα ότι f συνεχής

4)Αν υπήρχε $b > 0 : 2f(b) \le 1$ τότε

$2bf(b) \le b, 4f^3(b) \le 1/2$ προσθέτοντας κατά μέλη $b+1 \le b + \frac{1}{2}$ άτοπο

άρα $y > \frac{1}{2}$

5)αν στην [*] πάρουμε όρια όταν x τείνει προς το x_0 το όριο του λόγου μεταβολής τείνει προς πραγματικό οπότε η y είναι παραγωγίσιμη και προκύπτει εύκολα το α) ζητούμενο παραγωγίζοντας ενώ το β) είναι άμεση συνέπεια του 4 και της σχέσης που μόλις αποδείξαμε

6)Το όριο της y όταν $x \to 0$ το ονομάζω z και αφού y φθίνουσα $z \ge 0 \Rightarrow xz \ge 0$ αν $z = +\infty$ το αριστερό μέλος της αρχικής τείνει στο +άπειρο ενώ το δεξί στο 1 άτοπο. Άρα $z \in R$ Με όρια στην αρχική $4z^3 = 1$ τότε το σύνολο τιμών προκύπτει απ τις τιμές των 2) και του z , την συνέχεια και την μονοτονία της y και είναι το ζητούμενο

7)όπου x την αντίστροφη στην αρχική και $f^{-1}(x) = \frac{4x^3 - 1}{1-x}$ με x να ανήκει στο σύνολο τιμών

Θ27

Α) Εύκολο

Β) Με σύνολα τιμών και μονοτονία $A=(1,+\infty)$ και επιπλέον θα είναι $(e-y)(e-x)\le 0,\ \ \forall x,y\in A$

Γ1) Προφανές λόγω μοναδικότητας

Γ2) Παραγωγίστε

Γ3) Είναι το A

Γ4) $x=e$

Γ5) Το $y'(e)$ με DLH

Γ6) Τις $y=1, x=1$

ΜΕ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ

- **(ΜΙ).1** z=x+i , x>0 ,Bolzano και μονοτονία
- **(ΜΙ).2** K^2=… όπου $y^2=1-x^2$, $-1\le x\le 1$
- **(ΜΙ).3** Είναι $\frac{d|u|}{dy}=\frac{d|1+iz^3|}{dy}=...$ με $\frac{dx}{dy}=-\frac{y}{x}=-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$
- **(ΜΙ).4** Υψώστε στο τετράγωνο την σχέση με τα μέτρα και κάντε Rolle στην f(x)g(x)
- **(ΜΙ).5** $X=f(a)=e^{-x}$,$Y=f(-a)=e^{x}$,XY=1 ,X>0, Y>0
- **(ΜΙ).6** Υψώστε στο τετράγωνο την σχέση με τα μέτρα και κάντε Rolle στην f(x)/g(x)
- **(ΜΙ).7** Υψώστε στο τετράγωνο την σχέση με τα μέτρα και κάντε δυο Θ.Μ.Τ στα [α, (α+β)/2] , [(α+β)/2,β]
- **(ΜΙ).8** Υψώστε στο τετράγωνο την σχέση με τα μέτρα και κάντε Fermat
- **(ΜΙ).9** Πράξεις , Bolzano στο [α,β]
- **(ΜΙ).10** Υψώστε στο τετράγωνο την σχέση με τα μέτρα και κάντε Rolle στην $f(x)/x^2$.

- **(ΜΙ).11** Πράξεις , Bolzano στο [α,β]
- **(ΜΙ).12** Έχουμε $w=\bar{w}$ … Πρέπει $\lambda_{AB}=\lambda_{B\Gamma}$ που προκύπτει από το προηγούμενο. Δυο Θ.Μ.Τ στα [α,β] , [β,γ] και μετά Rolle στην παράγωγο
- **(ΜΙ).13** Υψώστε στο τετράγωνο την σχέση με τα μέτρα και κάντε Bolzano
- **(ΜΙ).14** Μετά τις πράξεις Bolzano
- **(ΜΙ).15** Τριγωνικές ανισότητες και Bolzano
- **(ΜΙ).16** Αρκεί να ισχύει $f^2(a)\geq f^2(b)$.Ταυτότητα για το f(b) και αν z=u+iv τότε $1\geq u\geq -1$
- **(ΜΙ).17** Το όριο του αριθμητή είναι μηδέν και στα δυο Υψώστε στο τετράγωνο τις σχέσεις με τα μέτρα και κάντε Bolzano
- **(ΜΙ).18** Γεωμετρική ερμηνεία
- **(ΜΙ).19**Αν $P(z)=a(z-z_1)(z-z_2)...(z-z_n)$ τότε παραγωγίζοντας παίρνουμε

$$P'(z)=a[(z-z_2)(z-z_3)...(z-z_n)+(z-z_1)(z-z_3)...(z-z_n)+...$$
$$...+(z-z_1)(z-z_2)...(z-z_{n-1})]$$

Για ευκολία θέτουμε

$$A_1=a(z-z_2)(z-z_3)...(z-z_n)$$
$$A_2=a(z-z_1)(z-z_3)...(z-z_n)$$
$$\cdots$$
$$A_n=a(z-z_1)(z-z_2)...(z-z_{n-1})$$

Παρατηρούμε ότι

$$(z+z_1)A_1=(2z-(z-z_1))A_1=2zA_1-(z-z_1)A_1=2zA_1-P(z)$$

και όμοια

$$(z+z_2)A_2=2zA_2-P(z)$$
$$\cdots$$
$$(z+z_n)A_n=2zA_n-P(z)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις προηγούμενες προκύπτει ότι

$$\sum_{k=1}^{n}(z+z_k)A_k = 2z(A_1+A_2+...+A_n)-nP(z) = 2zP'(z)-nP(z)$$
$$= Q(z)$$

Τότε είναι

$$\frac{Q(z)}{P(z)} = \frac{\sum_{k=1}^{n}(z+z_k)A_k}{a(z-z_1)(z-z_2)...(z-z_n)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{z+z_k}{z-z_k} \quad \forall z \neq z_1, z_2, ..., z_n$$

Όμως από την εκφώνηση έχουμε ότι $|z_k| = 1 \quad k = 1,2,...,n$.Έτσι είναι

$$\frac{z+z_k}{z-z_k} = \frac{(z+z_k)(\overline{z}-\overline{z}_k)}{|z-z_k|^2} = \frac{|z|^2-1}{|z-z_k|^2} + i\frac{2\,\mathrm{Im}(z_k\overline{z})}{|z-z_k|^2}$$

Οπότε αντικαθιστώντας στην προηγούμενη έχουμε

$$\frac{Q(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{|z|^2-1}{|z-z_k|^2} + i\sum_{k=1}^{n}\frac{2\,\mathrm{Im}(z_k\overline{z})}{|z-z_k|^2} = (|z|^2-1)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{|z-z_k|^2} + 2i\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{Im}(z_k\overline{z})}{|z-z_k|^2}$$

φυσικά $\forall z \neq z_1, z_2, ..., z_n$

Αν r ρίζα του Q δεν μπορεί να είναι ρίζα και του P διότι

$$Q(r) = 0 \Rightarrow 2rP'(r) - nP(r) = 0 \Rightarrow 2rP'(r) = 0 \overset{|r|=1}{\Rightarrow} P'(r) = 0$$

Τότε επειδή τα P,P' έχουν κοινή ρίζα το r είναι γνωστό ότι το r θα είναι τουλάχιστον διπλή ρίζα του πολυωνύμου που είναι άτοπο από την εκφώνηση

Άρα στην προηγούμενη σχέση μπορούμε να θέσουμε όπου *z* το *r*

$$\frac{Q(r)}{P(r)} = (|r|^2-1)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{|r-z_k|^2} + 2i\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{Im}(z_k\overline{r})}{|r-z_k|^2} \Leftrightarrow$$

$$0 = (|r|^2-1)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{|r-z_k|^2} + 2i\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{Im}(z_k\overline{r})}{|r-z_k|^2} \Leftrightarrow$$

$$0 = (|r|^2-1)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{|r-z_k|^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{Im}(z_k\overline{r})}{|r-z_k|^2}$$

Επειδή όμως είναι

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{|r-z_k|^2}>0$$

άμεσα προκύπτει από την προηγούμενη ότι $|r|^2-1=0$ που δείχνει φανερά ότι η τυχαία ρίζα του Q ανήκει στον μοναδιαίο κύκλο

ΜΕ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

- **(ΠΙ).1** $\sum_{k=1}^{m}P(\omega_k)=1$ και Θ.Μ.Τ ολ
- **(ΠΙ).2** Είναι πάντα συνεχής (με ορισμό και όρια) και όταν 2β=α παραγωγίσιμη . Και οι δυο πιθανότητες είναι ίσες με μηδέν
- **(ΠΙ).3** Με άτοπο βρίσκοντας το σύνολο τιμών της P=[3/5,1]
- **(ΠΙ).4** Βρείτε το ελάχιστο της $\alpha^{\alpha}e^{\alpha}$ Η Πιθανότητα είναι 1/20. Βρείτε το σύνολο τιμών της f
- **(ΠΙ).5** $\sum_{k=1}^{m}P(\omega_k)=1$ και Θ.Μ.Τ
- **(ΠΙ).6** i)Εύκολο για την g(x)=f(x)-x ii) f(x)-x=κοίλη iii) Ολοκληρώστε τις ανισότητες των ι) και ιι) και επιπλέον δείξτε ότι $\sum_{k=1}^{m}P(\omega_k)=1$ iv) Έστω $P(x_1)=P(x_2)=P(x_3)=P(x_4)$. Κάντε
- 4 Θ.Μ.Τ ολ Τότε σε $f(\xi_1)-f(\xi_2)=\xi_1-\xi_2$ και $f(\xi_3)-f(\xi_4)=\xi_3-\xi_4$ και τελικά στην σχέση $g''(\kappa)=0$ άτοπο από την
- **(ΠΙ).7** Θ.Μ.Τ …Τελικά $(n-2)/n^2=8\%$...n=10

ΜΕ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

- **(ΓΕ).1** Δείξτε ότι $f^2(x)-g^2(x)=c\neq 0$ …
- **(ΓΕ).2** Από Fermat και τριγωνική τα διανύσματα προκύπτουν ομόρροπα. Επειδή έχουν ίσα μέτρα είναι ίσα

ΓΕΝΙΚΕΣ

ΓΕΝ 1

Απόδειξη του Α)

Αφού *f ΄* συνεχής στο κλειστό [a,b], τότε η f ΄ θα έχει και μέγιστο και ελάχιστο στο διάστημα αυτό. Άρα υπάρχουν m_1 , m_2 :

$m_1 \le f'(t) \le m_2 \quad \forall t \in [a,b]$, οπότε αν με M συμβολίσουμε τον μεγαλύτερο από τους αριθμούς $|m_1|,|m_2|$ θα ισχύει:

$|f'(t)| \le |M| \quad \forall t \in [a,b]$

Έχουμε :

$$\int_a^b f(t)\eta\mu(\omega t)dt = \int_a^b f(t)\left(-\frac{\sigma\upsilon\nu(\omega t)}{\omega}\right)' dt =$$

$$= \frac{f(a)\sigma\upsilon\nu(\omega a)}{\omega} - \frac{f(b)\sigma\upsilon\nu(\omega b)}{\omega} + \frac{1}{\omega}\int_a^b f'(t)\sigma\upsilon\nu(\omega t)dt$$

Ακόμη λόγω της τριγωνικής ανισότητας είναι:

$$\left|\int_a^b f(t)\eta\mu(\omega t)dt\right| = \left|\frac{f(a)\sigma\upsilon\nu(\omega a)}{\omega} - \frac{f(b)\sigma\upsilon\nu(\omega b)}{\omega} + \frac{1}{\omega}\int_a^b f'(t)\sigma\upsilon\nu(\omega t)dt\right|$$

$$\le \left|\frac{f(a)\sigma\upsilon\nu(\omega a)}{\omega}\right| + \left|\frac{f(b)\sigma\upsilon\nu(\omega b)}{\omega}\right| + \frac{1}{\omega}\left|\int_a^b f'(t)\sigma\upsilon\nu(\omega t)dt\right|$$

$$\le \left|\frac{f(a)\sigma\upsilon\nu(\omega a)}{\omega}\right| + \left|\frac{f(b)\sigma\upsilon\nu(\omega b)}{\omega}\right| + \frac{1}{\omega}\int_a^b |f'(t)||\sigma\upsilon\nu(\omega t)|dt$$

$$\le \left|\frac{f(a)\sigma\upsilon\nu(\omega a)}{\omega}\right| + \left|\frac{f(b)\sigma\upsilon\nu(\omega b)}{\omega}\right| + \frac{1}{\omega}\int_a^b |f'(t)|dt$$

$$\le \left|\frac{f(a)\sigma\upsilon\nu(\omega a)}{\omega}\right| + \left|\frac{f(b)\sigma\upsilon\nu(\omega b)}{\omega}\right| + \frac{M(b-a)}{\omega}$$

$$\le \frac{|f(a)| + |f(b)| + M(b-a)}{\omega}$$

Όμως $\lim\limits_{\omega\to+\infty} \frac{|f(a)| + |f(b)| + M(b-a)}{\omega} = 0$, οπότε από το κριτήριο

παρεμβολής και την προηγούμενη ανισότητα είναι:

$$\lim_{\omega\to+\infty}\int_a^b f(t)\eta\mu(\omega t)dt = 0$$

Απόδειξη του Β)

$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2}$ τότε $S_{n+1}-S_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$, άρα S_n γνήσια αύξουσα.

για κάθε φυσικό αριθμό k>1 είναι:

$0 < k-1 < k \Rightarrow 0 < k(k-1) < k^2 \Rightarrow \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$. Δίνουμε τιμές και προσθέτουμε κατά μέλη.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2}-\frac{1}{3}\\ \ldots\\ \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\end{array}\right\} \Rightarrow S_n - 1 < 1-\frac{1}{n} \Rightarrow S_n < 2-\frac{1}{n} \Rightarrow S_n < 2 \quad \forall n \in N^*$$

οπότε πράγματι η ακολουθία είναι άνω φραγμένη που τελικά σημαίνει ότι: $\lim S_n = r \in R \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = r$

Για να βρούμε το *r* θεωρούμε το Σ(x)=συνx+συν2x+ . . . +συνnx

!!! Θα χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα 2ημασυνβ=ημ(α+β)-ημ(α-β) . Έτσι, πολλαπλασιάζοντας με $\eta\mu(\frac{x}{2}) \neq 0$, έχουμε

$2\eta\mu(\frac{x}{2})\,\Sigma(x) = 2\eta\mu(\frac{x}{2})\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu(\frac{x}{2})\sigma\upsilon\nu 2x + \ldots + 2\eta\mu(\frac{x}{2})\sigma\upsilon\nu nx$

$= \eta\mu(3\frac{x}{2}) - \eta\mu(\frac{x}{2})$

$$+ \eta\mu(5\frac{x}{2}) - \eta\mu(3\frac{x}{2})$$

$$+ \ldots$$

$$+ \eta\mu((2n+1)\frac{x}{2}) - \eta\mu((2n-1)\frac{x}{2})$$

Τελικά : $\frac{1}{2} + \Sigma(x) = \frac{\eta\mu\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{2\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)}$

Για x=0 είναι Σ(0)=2n αποτέλεσμα που προκύπτει και από τον προηγούμενο τύπο ,αν πάρουμε όρια και εφαρμόσουμε τον κανόνα του De l' Hospital. Άρα δεν υπάρχει πρόβλημα αν θεωρήσουμε ότι

$x \in [0, \pi]$, αφού $\eta\mu(\frac{x}{2}) \neq 0$ στο (0,π].

Τώρα πολλαπλασιάζουμε με x και ολοκληρώνουμε από 0 έως π.

$$\int_0^\pi \frac{x}{2} dx + \int_0^\pi x\Sigma(x)dx = \int_0^\pi x \frac{\eta\mu\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{2\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)} dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{\pi^2}{4} + \int_0^\pi [x\sigma\upsilon\nu x + x\sigma\upsilon\nu(2x) + \ldots + x\sigma\upsilon\nu(nx)]dx =$$

$$\int_0^\pi \frac{x}{2\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)} \eta\mu\left((n+\frac{1}{2})x\right) dx$$

Το *0* στο κάτω όριο ολοκλήρωσης δεν δημιουργεί πρόβλημα, αφού το

$\lim_{x\to 0} \frac{x}{2\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)} = 1$ οπότε η συνάρτηση $\frac{x}{2\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)}$ επεκτείνεται σε

συνεχή στο [0,π].

Εκτελούμε παραγοντική ολοκλήρωση σε κάθε ολοκλήρωμα του πρώτου μέλους.

$$\int_0^{\pi} x\sigma\upsilon\nu(kx)dx = [0-0] - \frac{1}{k}\int_0^{\pi} \eta\mu(kx)dx = -\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k} - \frac{\sigma\upsilon\nu(k\pi)}{k}\right)$$

$$= \frac{1}{k^2}\left((-1)^k - 1\right)$$

για *κ* άρτιο το προηγούμενο είναι ίσο με 0 ενώ αν κ=2μ-1 ,όπου μ θετικός ακέραιος, το ολοκλήρωμα βγαίνει ίσο με $\frac{-2}{(2\mu-1)^2}$

Τότε αντικαθιστώντας έχουμε:

$$\frac{\pi^2}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\left((-1)^k - 1\right) = \int_0^{\pi} \frac{x}{2\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)} \eta\mu\left((n+\frac{1}{2})x\right)dx \quad (1)$$

Μπορούμε να πάρουμε όρια της (1), όταν το n τείνει στο άπειρο διότι από το λήμμα Α) είναι

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)}, 0 < x \le \pi \\ 1 \ , \ x = 0 \end{cases} \quad , \quad \omega = (n+\frac{1}{2}) \to +\infty \ \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left\{\int_0^{\pi} \frac{x}{2\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)} \eta\mu\left((n+\frac{1}{2})x\right)dx\right\} = 0$$

Ακόμη η

$$\ell\text{im}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\left((-1)^k - 1\right) = \ell\text{im}\sum_{k=1}^{n} \frac{-2}{(2k-1)^2} = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{-2}{(2\mu-1)^2} = -2\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\mu-1)^2}$$

που και αυτή συγκλίνει διότι $\ell\text{im}\, S_n = r \in R$ και επιπλέον ισχύει:

$$\lim S_n = r \in R \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = r$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = r$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=r$$

$$\Leftrightarrow \frac{r}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=r$$

$$\Leftrightarrow \frac{3r}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

Αντικαθιστώντας στην (1)

$$\frac{\pi^2}{4}+\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\left((-1)^k-1\right)=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\frac{x}{2\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)}\eta\mu\left((n+\frac{1}{2})x\right)dx$$

$$\frac{\pi^2}{4}-2\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{(2\mu-1)^2}=0$$

$$\frac{\pi^2}{4}-2\frac{3r}{4}=0$$

Αποτέλεσμα που δίνει ότι $r=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$!!!

Απόδειξη του Γ)

Για να υπολογίσουμε τώρα το $\int_0^1\frac{\ln t}{1+t}dt$ γράφουμε:

$$\int_0^1\frac{\ln t}{1+t}dt=\lim_{x\to0^+}\left\{\int_x^1\frac{\ln t}{1+t}dt\right\}$$

Επειδή $0<x\le t\le1$ μπορούμε να θεωρήσουμε το άθροισμα των απείρων όρων της γεωμετρικής προόδου, με πρώτο όρο το 1 και λόγο το *-t* , οπότε παίρνουμε :

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-t^3+\ldots\Rightarrow$$

$$\frac{\ln t}{1+t}=\ln t-t\ln t+t^2\ln t-t^3\ln t+\ldots$$

Τώρα ολοκληρώνουμε και τα δυο μέλη της προηγούμενης σχέσης από x ως 1 με x>0 .

$$\int_x^1 \frac{\ln t}{1+t}dt = \int_x^1 \ln t dt - \int_x^1 t\ln t dt + \int_x^1 t^2 \ln t dt - \int_x^1 t^3 \ln t dt + \ldots$$
$$= \int_x^1 (-t)^0 \ln t dt + \int_x^1 (-t)^1 \ln t dt + \int_x^1 (-t)^2 \ln t dt + \int_x^1 (-t)^3 \ln t dt + \ldots$$

Στο δεύτερο μέλος κάθε ένα ολοκλήρωμα υπολογίζεται με παραγοντική ολοκλήρωση, όπως αμέσως παρακάτω:

$$\int_x^1 (-t)^n \ln t dt = (-1)^n \int_x^1 \left(\frac{(t)^{n+1}}{n+1}\right)' \ln t dt =$$
$$(-1)^n \left(-\frac{x^{n+1}\ln x}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_x^1 t^n dt\right) =$$
$$= (-1)^n \left(-\frac{x^{n+1}\ln x}{n+1} - \frac{1-x^{n+1}}{(n+1)^2}\right)$$

Έτσι με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$\int_x^1 \frac{\ln t}{1+t}dt = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{(-1)^n x^{n+1}\ln x}{n+1} - \frac{(-1)^n(1-x^{n+1})}{(n+1)^2} =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{(-1)^n}{(n+1)^2} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{(-1)^n x^{n+1}\ln x}{n+1}$$

Αν πάρουμε όρια όταν το x τείνει προς το 0^+ , η καθεμιά από τις παραστάσεις $(-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$ τείνει και αυτή στο 0 . Ακόμη με χρήση του κανόνα De l' Hospital εύκολα προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^{n+1}\ln x\right) = 0$, άρα και όλες οι παραστάσεις $(-1)^n \frac{x^{n+1}\ln x}{n+1}$ τείνουν και αυτές στο 0. (Πιο αυστηρά θα επικαλεστούμε την ομοιόμορφη σύγκλιση των σειρών). Τελικά προκύπτει

$$\lim_{x\to 0^+}\int_x^1 \frac{\ln t}{1+t}dt = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2} \Leftrightarrow$$

:

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}dt = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} =$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

Αποδείξαμε πριν όμως ότι:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Αντικαθιστώντας αυτό το αποτέλεσμα προκύπτει η τελική σχέση:

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}dt = -\frac{\pi^2}{12}$$

ΓΕΝ 2

1. Αφού φ δυο φορές παραγωγίσιμη η φ΄ είναι συνεχής οπότε σε κλειστό διάστημα έχει και μέγιστο μ΄ και ελάχιστο μ. Άρα αν M=max{|μ΄|,|μ|}θα είναι $|\varphi(x)| \le M$ για κάθε $x \in [a,b]$
2. Έχει αποδειχθεί σε προηγούμενη άσκηση για ω=νx
3. Με τον ορισμό της παραγώγου και δυο φορές εφαρμογή του κανόνα DLH καταλήγουμε ότι και στο 0 θα είναι $g'(0) = \frac{\phi'(0)}{2}$

   Μετά την παραγώγιση βρίσκουμε

$$g'(x)=\begin{cases}\dfrac{x\phi'(x)-\phi(x)+\phi(0)}{x^2}, x\neq 0\\ \dfrac{\phi'(0)}{2}, x=0\end{cases}$$ Τώρα εύκολα διαπιστώνουμε με δυο φορές εφαρμογή του κανόνα DLH ότι η g΄ είναι συνεχής και στο 0

4. Τώρα βάση του $4^{ου}$ ερωτήματος είναι απλή εφαρμογή του $2^{ου}$ ερωτήματος

5. Έχουμε $\lim\int_0^b g(x)\eta\mu\nu x dx=\lim\int_0^b \frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}\eta\mu\nu x dx=0$ τότε

$$\lim\left(\int_0^b \frac{\phi(x)}{x}\eta\mu\nu x dx-\phi(0)\int_0^b \frac{\eta\mu\nu x}{x}dx\right)=0 \overset{\nu x=u}{\Rightarrow}$$

$$\lim\left(\int_0^b \frac{\phi(x)}{x}\eta\mu\nu x dx-\phi(0)\int_0^{\nu b} \frac{\eta\mu u}{u}du\right)=0$$

στην περίπτωση όπου το $\lim\int_0^{\nu b}\frac{\eta\mu y}{y}dy=C\in R$ η προηγούμενη γράφεται

$$\lim\int_0^b \frac{\phi(x)}{x}\eta\mu\nu x dx=\phi(0)\lim\int_0^{\nu b}\frac{\eta\mu u}{u}du=\phi(0)\int_0^{+\infty}\frac{\eta\mu u}{u}du$$

6. Για να αποδείξουμε τον προηγούμενο ισχυρισμό

$\lim\int_0^{\nu b}\frac{\eta\mu y}{y}dy=C\in R$ εφαρμόζουμε το κριτήριο Cauchy.Θέτουμε $F(y)=\int_0^y\frac{\eta\mu t}{t}dt$ Να τονίσουμε εδώ ένα σημείο

Αφού το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1\in R$ το ολοκλήρωμα $F(y)=\int_0^y\frac{\eta\mu t}{t}dt$ δεν είναι γενικευμένο διότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την συνεχή επέκταση της $\frac{\eta\mu t}{t}$ δηλαδή την $\begin{cases}\eta\mu t/t, t\neq 0\\ 1, t=0\end{cases}$ αντί της

$\frac{\eta\mu t}{t}$ που παρουσιάζει πρόβλημα στο μηδέν . Έτσι

$$F(y)-F(y')=\int_0^y \frac{\eta\mu t}{t}dt-\int_0^{y'} \frac{\eta\mu t}{t}dt=\int_{y'}^y \frac{\eta\mu t}{t}dt \overset{\text{παραγοντική}}{=}$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu y'}{y'}-\frac{\sigma\upsilon\nu y}{y}-\int_{y'}^y \frac{\sigma\upsilon\nu t}{t^2}dt$$

τότε

$$|F(y)-F(y')|=|\frac{\sigma\upsilon\nu y'}{y'}-\frac{\sigma\upsilon\nu y}{y}-\int_{y'}^y \frac{\sigma\upsilon\nu t}{t^2}dt|\le$$

$$\frac{1}{y'}+\frac{1}{y}+\int_{y'}^y \frac{1}{t^2}dt=\frac{2}{y'}+\frac{2}{y}$$

Θεωρώντας $y,y'\to+\infty$ προκύπτει ότι $F(y)-F(y')\to 0$ που

σημαίνει ότι το $\lim\limits_{y\to+\infty} F(y)=C\in R \Leftrightarrow$ το $\int_0^{+\infty}\frac{\eta\mu u}{u}du=C$ (λέμε ότι

το γενικευμένο ολοκλήρωμα υπάρχει ή συγκλίνει) ,άρα

$$\lim\int_0^b \frac{\phi(x)}{x}\eta\mu\nu x dx=C.\phi(0)$$

7. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\frac{\eta\mu(2\nu+1)x}{\eta\mu x}dx=\int_0^{\pi/2} f(\pi-x)\frac{\eta\mu(2\nu+1)x}{\eta\mu x}dx \Leftrightarrow$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\frac{\eta\mu(2\nu+1)x}{\eta\mu x}dx \overset{\pi-x=u}{=} \int_{\pi/2}^{\pi} f(u)\frac{\eta\mu((2\nu+1)\pi-(2\nu+1)x)}{\eta\mu(\pi-u)}du$$

$$=\int_{\pi/2}^{\pi} f(u)\frac{\eta\mu(2\nu+1)u}{\eta\mu u}du$$

Που ισχύει

8. Για $x\neq 0$ προφανώς η K(x) έχει συνεχή 2^{η} παράγωγο Για x=0 με το ορισμό και ε εφαρμογή του κανόνα DLH φορές βρίσκουμε

$$k'(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$$ και όμοια

$$k''(x)=\begin{cases}\dfrac{x\eta\mu^2x-\eta\mu 2x+x\sigma\upsilon\nu^2x}{\eta\mu^3x}, x\neq 0\\ 1/3\ ,\ x=0\end{cases}$$ από όπου προκύπτει

συνεχής με χρήση του κανόνα DLH Ακόμη η h(x) είναι το γινόμενο της k(x) και της

$a(x)=\begin{cases}f(x)+f(\pi-x), x\neq 0\\ f(0)+f(\pi), x=0\end{cases}=f(x)+f(\pi-x)$ η οποία έχει

συνεχή 2^{η} παράγωγο άρα και η h το ίδιο

9. Λόγω του $7^{ου}$ ερωτήματος είναι

$$\lim\int_0^{\pi/2}\frac{h(x)}{x}\eta\mu[(2\nu+1)x]dx=C.h(0)\Leftrightarrow$$

$$\lim\int_0^{\pi/2}\frac{f(x)+f(\pi-x)}{x}\frac{x}{\eta\mu x}\eta\mu[(2\nu+1)x]dx=C.h(0)\Leftrightarrow$$

$$\lim\int_0^{\pi/2}[f(x)+f(\pi-x)]\frac{\eta\mu[(2\nu+1)x]}{\eta\mu x}dx=C.h(0)\overset{8}{\Leftrightarrow}$$

$$\lim\int_0^{\pi}f(x)\frac{\eta\mu[(2\nu+1)x]}{\eta\mu x}dx=C.[f(0)+f(\pi)]$$

10. Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\frac{\eta\mu(2\nu+1)x}{\eta\mu x}=1+2\sum_{k=1}^{\nu}\sigma\upsilon\nu 2kx\Leftrightarrow\eta\mu(2\nu+1)x=$$

$$\eta\mu x+\sum_{k=1}^{\nu}2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu 2kx\Leftrightarrow$$

$$\eta\mu(2\nu+1)x=\eta\mu x+\sum_{k=1}^{\nu}\eta\mu((2k+1)x)-\eta\mu((2k-1)x)$$

πράγμα το οποίο αληθεύει

11. $\int_0^{\pi}\sigma\upsilon\nu 2kxdx=\left[\frac{\eta\mu 2kx}{2k}\right]_0^{\pi}=0$

12. $\int_0^{\pi}\frac{\eta\mu(2\nu+1)x}{\eta\mu x}dx=\int_0^{\pi}1dx+2\sum_{k=1}^{\nu}\int_0^{\pi}\sigma\upsilon\nu 2kxdx=\pi+0$ λόγω των11,12

13. Από το 10 για $f(x)=1 \Rightarrow \int_0^{\pi} \frac{\eta\mu(2\nu+1)x}{\eta\mu x}dx = C(1+1) \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$

οπότε και πάλι λόγω του $10^{ου}$ ερωτήματος είναι

$$\lim \int_0^{\pi} f(x)\frac{\eta\mu(2\nu+1)x}{\eta\mu x}dx = \frac{\pi}{2}\left(f(0)+f(\pi)\right)$$