

# GeoGebra

## Γρήγορη Εκκίνηση

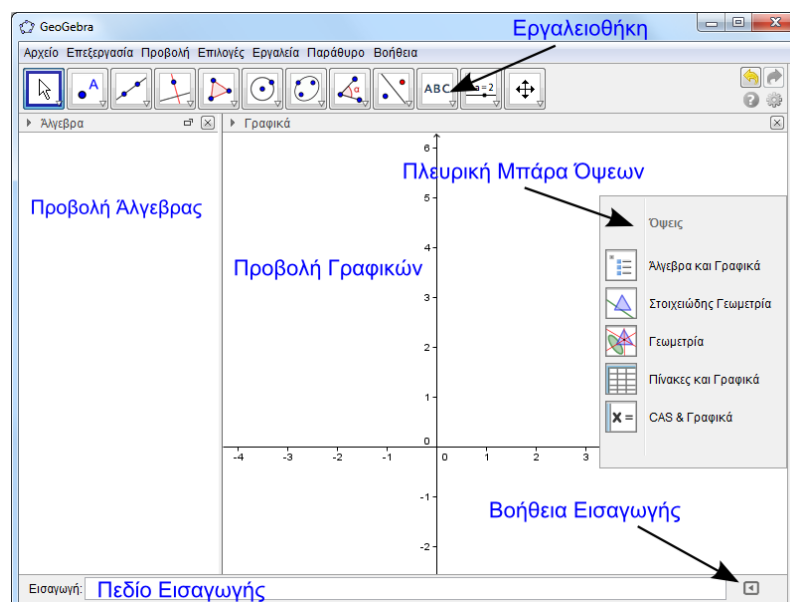
### Τι είναι το GeoGebra;

- Λογισμικό Δυναμικών Μαθηματικών σε ένα - απλό στη χρήση - πακέτο
- Για την εκμάθηση και τη διδασκαλία σε όλα τα επίπεδα της εκπαίδευσης
- Συνδυάζει διαδραστικά γεωμετρία, άλγεβρα, πίνακες, γραφικά, απειροστικό λογισμό και στατιστική
- Είναι λογισμικό ανοικτού κώδικα, που διατίθεται ελεύθερα από το [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)

### Γνωριμία

- Το GeoGebra διευκολύνει τους μαθητές στη δημιουργία μαθηματικών κατασκευών και μοντέλων. Επιτρέπει διαδραστικές διερευνήσεις μετακινώντας αντικείμενα και αλλάζοντας παραμέτρους.
- Το GeoGebra αποτελεί για τους καθηγητές εργαλείο συγγραφής για τη δημιουργία αλληλεπιδραστικών φύλλων εργασίας. Βρείτε δωρεάν έργα για την τάξη και μοιραστείτε τα δικά σας στο [www.geogebraTube.org](http://www.geogebraTube.org).

Όταν ξεκινήσετε το GeoGebra, εμφανίζεται το παρακάτω παράθυρο:

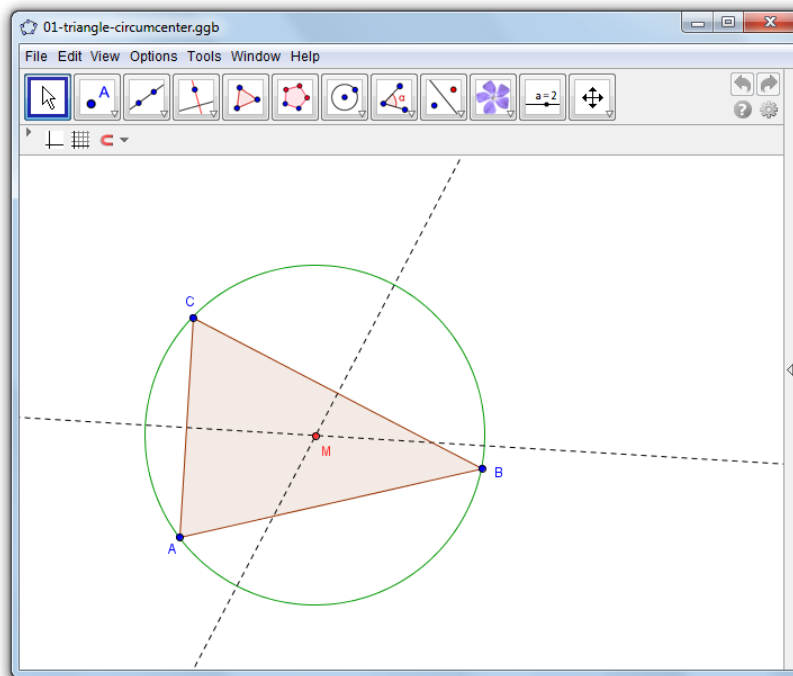


Χρησιμοποιώντας τα εργαλεία στην **Εργαλειοθήκη** μπορείτε να πραγματοποιήσετε κατασκευές στην **Προβολή Γραφικών** με το ποντίκι. Ταυτόχρονα, οι αντίστοιχες

συντεταγμένες και εξισώσεις εμφανίζονται στην **Προβολή Άλγεβρας**. Το **Πεδίο Εισαγωγής** χρησιμοποιείται για την απευθείας εισαγωγή συντεταγμένων, εξισώσεων, εντολών και συναρτήσεων, αντικείμενα που εμφανίζονται αμέσως μετά το πάτημα του Enter στις Προβολές Γραφικών και Άλγεβρας. Στο GeoGebra, η γεωμετρία και η άλγεβρα συνεργάζονται παράλληλα.

## Παράδειγμα 1: Περιγεγραμμένος Κύκλος Τριγώνου

**Εφαρμογή:** Να κατασκευάσετε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τον περιγεγραμμένο σε αυτό κύκλο, χρησιμοποιώντας το GeoGebra.



### Κατασκευή χρησιμοποιώντας το ποντίκι

#### Προετοιμασία




- Κάνετε κλικ στο βελάκι που βρίσκεται στη δεξιά πλευρά της Προβολής Γραφικών και επιλέξτε τη



Στοιχειώδη Γεωμετρία από την πλευρική μπάρα όψεων.


#### Βήματα Κατασκευής





1		Επιλέξτε το εργαλείο <i>Πολύγωνο</i> από την εργαλειοθήκη. Κάνετε τρεις φορές κλικ στην Προβολή Γραφικών ώστε να δημιουργήσετε τις κορυφές A, B και Γ. Κλείστε το τρίγωνο κάνοντας ξανά κλικ στο σημείο A.
2		Στη συνέχεια, επιλέξτε το εργαλείο <i>Μεσοκάθετη Τμήματος</i> (κάνετε κλικ στο μικρό βελάκι που βρίσκεται κάτω δεξιά στο τέταρτο από αριστερά εικονίδιο και δημιουργήστε δυο Μεσοκαθέτους κάνοντας


		διαδοχικά κλικ σε δυο πλευρές του τριγώνου.
3		Χρησιμοποιώντας το εργαλείο <i>Τομή δυο αντικειμένων</i> μπορείτε να κάνετε κλικ στην τομή των δυο μεσοκαθέτων ώστε να θέσετε το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου. Για να το ονομάσετε «M» πληκτρολογήστε «M» προκειμένου να ανοίξετε το διάλογο <i>Μετονομασίας</i> .
4		Για να ολοκληρώσετε την κατασκευή, επιλέξτε το εργαλείο <i>Κύκλος με κέντρο που διέρχεται από ένα σημείο</i> και κάνετε κλικ αρχικά στο κέντρο, και μετά σε οποιαδήποτε από τις κορυφές του τριγώνου.
5		Χρησιμοποιώντας το εργαλείο <i>Μετακίνηση</i> μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το ποντίκι για να σύρετε τις κορυφές του τριγώνου σε διαφορετικές θέσεις – η κατασκευή σας θα αλλάζει δυναμικά στις νέες θέσεις.


### Μερικές Συμβουλές


 Δοκιμάστε τα κουμπιά **Αναίρεση/Ακύρωση Αναίρεσης** στη δεξιά πλευρά της εργαλειοθήκης.


 Μπορείτε να **κρύψετε ένα αντικείμενο**, κάνοντας δεξί κλικ επάνω του (Mac OS: ctrl-κλικ) και εξαιρώντας την επιλογή *Δείξε το Αντικείμενο*.

 Μπορείτε να αλλάξετε την **εμφάνιση των αντικειμένων** (χρώμα, τύπος γραμμής, ...) εύκολα χρησιμοποιώντας τη *Μπάρα Αλλαγής Στυλ*: κάνετε κλικ στο βέλος  στην κορυφή της Προβολής Γραφικών για να εμφανίσετε ή να αποκρύψετε τη μπάρα του στυλ. Για περισσότερες επιλογές, κάνετε κλικ στο εικονίδιο *Ιδιότητες* του GeoGebra  και επιλέξτε  *Αντικείμενα* στο αναδυόμενο μενού.

 Οι **άξονες** και το **πλέγμα** μπορούν να εμφανίζονται ή μη χρησιμοποιώντας τη *Μπάρα Αλλαγής Στυλ*.


 Μπορείτε να εμφανίσετε διαφορετικές προβολές όπως **Άλγεβρα**, **Γραφικά**, **Λογιστικό Φύλλο** και **CAS** χρησιμοποιώντας το μενού *Προβολή* ή την πλευρική μπάρα *Όψεων* (στα δεξιά της *Προβολής Γραφικών*).

 Προκειμένου να **μετακινήσετε την κατασκευή** σας στην Προβολή Γραφικών, επιλέξτε το εργαλείο *Μετακίνηση της Προβολής Γραφικών* και μετακινήστε με το ποντίκι.

 Το **Πρωτόκολλο στοιχείων κατασκευής** (στο μενού *Προβολή*) παρέχει έναν πίνακα με όλα τα βήματα της κατασκευής. Χρησιμοποιώντας τα κουμπιά μπορείτε να πλοηγηθείτε βήμα-βήμα στα στάδια της κατασκευής σας ξανά. Επιπλέον, μπορείτε να μετακινήσετε τις γραμμές προς τα επάνω ή προς τα κάτω προκειμένου να αλλάξετε τη σειρά της κατασκευής.

## Κατασκευή χρησιμοποιώντας το Πεδίο Εισαγωγής

### Προετοιμασία

- Πρόκειται να κάνουμε την ίδια κατασκευή του περιγεγραμμένου κύκλου όπως παραπάνω χρησιμοποιώντας το Πεδίο Εισαγωγής, έτσι θα ξεκινήσουμε από την αρχή χρησιμοποιώντας την επιλογή *Νέο* από το μενού *Αρχείο*.
- Κάνετε κλικ στο βέλος στα δεξιά της προβολής *Γραφικών* και επιλέξτε *Άλγεβρα & Γραφικά* από την *πλευρική μπάρα Όψεων*. 

### Βήματα Κατασκευής

Πληκτρολογήστε τις παρακάτω εντολές στο Πεδίο Εισαγωγής που βρίσκεται στο κάτω μέρος της οθόνης και πιάστε το πλήκτρο Enter στο τέλος κάθε γραμμής.

$$A = (2, 1)$$

$$B = (12, 5)$$

$$\Gamma = (8, 11)$$

Πολύγωνο [A, B, Γ]

$\sigma$  = Μεσοκάθετη Τμήματος [α]

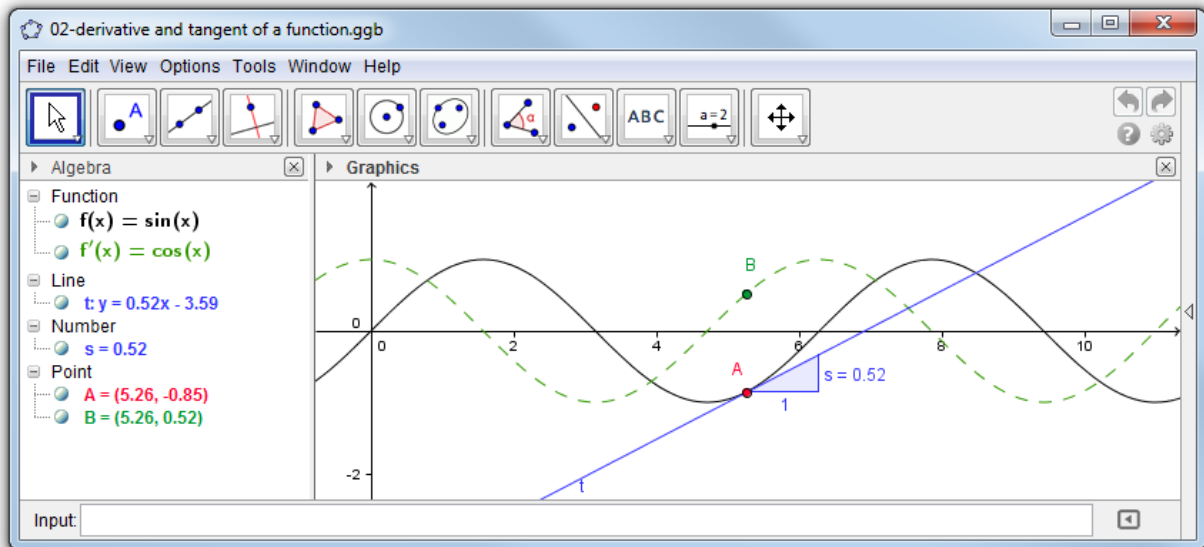
$\tau$  = Μεσοκάθετη Τμήματος [β]

M = Τομή [ $\sigma$ ,  $\tau$ ]

Κύκλος [M, A]

## Παράδειγμα 2: Παράγωγος και Εφαπτομένη Συνάρτησης

**Εφαρμογή:** Να ορίσετε τη συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu(x)$ , την παράγωγό της, την εφαπτομένη της σε ένα σημείο της γραφικής παράστασης, καθώς και την κλίση της στο σημείο αυτό.








### Πρώτος Τρόπος: Σημείο στη Γραφική Παράσταση της Συνάρτησης

#### Προετοιμασία

- Ανοίξτε ένα νέο παράθυρο χρησιμοποιώντας το  **Νέο Παράθυρο** από το μενού *Αρχείο*.


#### Βήματα Κατασκευής

1		Πληκτρολογήστε στο Πεδίο Εισαγωγής τον ορισμό της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu(x)$ και πατήστε το πλήκτρο Enter.
2		Επιλέξτε το εργαλείο <i>Νέο Σημείο</i> και κάνετε κλικ στη γραφική παράσταση της $f$ . Θα δημιουργηθεί ένα σημείο που θα ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$ .
3		Επιλέξτε το εργαλείο <i>Εφαπτόμενες</i> και κάνετε κλικ στο σημείο A και στη συνέχεια στη συνάρτηση $f$ . Μετονομάστε την εφαπτομένη σε «ε» πληκτρολογώντας «ε». Θα ανοίξει ο διάλογος <i>Μετονομασία</i> .
4		Πληκτρολογήστε την εντολή $\lambda = \text{Κλίση}[\varepsilon]$ .
5		Χρησιμοποιώντας το εργαλείο <i>Μετακίνηση</i> , σύρετε το A σε διαφορετικές θέσεις και παρατηρήστε την κίνηση της εφαπτομένης.
6		Πληκτρολογήστε $B = (x(A), \lambda)$ <u>Συμβουλή:</u> Το $x(A)$ δίνει την τετμημένη του σημείου A.
		Ενεργοποιήστε το ίχνος του σημείου B κάνοντας δεξί κλικ στο B (Mac OS: ctrl-κλικ) και επιλέγοντας <i>Ίχνος Ενεργό</i> .
7		Χρησιμοποιώντας το εργαλείο <i>Μετακίνηση</i> , σύρετε το σημείο A με το ποντίκι – το σημείο B θα αφήσει το ίχνος της «συνάρτησης κλίσης».


8	Πληκτρολογήστε την εντολή Παράγωγος [ $f(x)$ ] για να πάρετε και την εξίσωση.
---	---

### Μερικές Συμβουλές

Πληκτρολογήστε μια διαφορετική συνάρτηση, πχ  $f(x) = x^3 - 2x^2$ , στο *Πεδίο Εισαγωγής*. Θα ανανεωθεί αυτόματα η παράγωγος και η εφαπτομένη. Επίσης δοκιμάστε την εντολή Ολοκλήρωμα [  $f(x)$  ] .

 Επιλέξτε το εργαλείο *Μετακίνηση* και σύρετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης με το ποντίκι. Παρατηρήστε τις αλλαγές στις εξισώσεις της συνάρτησης και της παραγώγου της.

**Αυτόματη συμπλήρωση εντολών:** όταν πληκτρολογήσετε τα δυο πρώτα γράμματα μιας εντολής, αυτή θα συμπληρωθεί αυτόματα. Εάν θέλετε να υιοθετήσετε την προτεινόμενη συμπλήρωση, πατήστε το πλήκτρο Enter, διαφορετικά συνεχίστε να πληκτρολογείτε.

 Η **Βοήθεια Εισαγωγής** βρίσκεται στο δεξί μέρος του *Πεδίου Εισαγωγής* και παρέχει τη λίστα με όλες τις διαθέσιμες εντολές του GeoGebra.

### Δεύτερος Τρόπος: Σημείο με τετμημένη «α»

#### Προετοιμασία

- Πρόκειται να δημιουργήσουμε μια άλλη έκδοση της προηγούμενης κατασκευής χρησιμοποιώντας το *Πεδίο Εισαγωγής*. Επιλέξτε Αρχείο – Νέο ώστε να δημιουργήσετε ένα νέο παράθυρο.

#### Βήματα Κατασκευής

Πληκτρολογήστε τις παρακάτω εντολές στο *Πεδίο Εισαγωγής* και πατήστε Enter μετά από κάθε γραμμή.

$f(x) = \eta\mu(x)$

$\alpha = 2$

$T = (\alpha, f(\alpha))$


$t = \text{Εφαπτομένη}[\alpha, f]$


$s = \text{Κλίση}[t]$

$B = (x(T), s)$

Παράγωγος [  $f$  ]

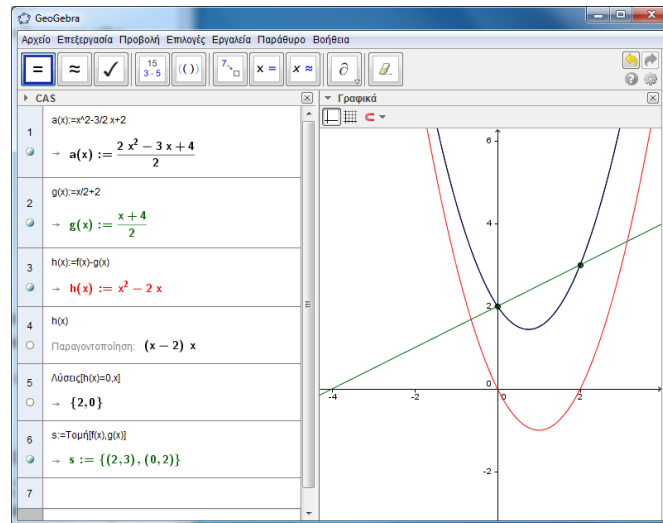
#### Μερικές Συμβουλές

 Επιλέξτε το εργαλείο *Μετακίνηση* και κάνετε κλικ στον αριθμό  $\alpha$ . Μπορείτε να αλλάξετε την τιμή του πατώντας τα πλήκτρα με τα βέλη. Αυτόματα, το σημείο T και η εφαπτομένη θα κινηθούν επάνω στη συνάρτηση f.


- Μπορείτε επίσης να αλλάξετε τον αριθμό  $\alpha$  εμφανίζοντας το δρομέα: κάνετε κλικ στα αριστερά του  $\alpha$   στην προβολή Άλγεβρας. Αλλάξτε τιμή στο δρομέα σύροντας με το ποντίκι το σημείο.

## Παράδειγμα 3: Τομή Πολυωνυμικών Συναρτήσεων

**Εφαρμογή:** Να βρεθεί η τομή μιας παραβολής με μια ευθεία εντοπίζοντας τις ρίζες της διαφοράς τους.




### Προετοιμασία

- Κάνετε κλικ στο βέλος που βρίσκεται στη δεξιά πλευρά της Προβολής Γραφικών και επιλέξτε από την Πλευρική Μπάρα Όψεων επιλέξτε  CAS & Γραφικά (CAS = computer algebra system).
- Σημειώστε ότι η Προβολή CAS είναι διαθέσιμη από την έκδοση 4.2 του GeoGebra και μετά.

### Βήματα Κατασκευής

Πληκτρολογήστε τις παρακάτω εντολές στις γραμμές της Προβολής CAS. Κάθε φορά κάνετε υπολογισμό της εισόδου..

1		Εισάγετε $f(x) := x^2 - 3/2 * x + 2$ στην πρώτη γραμμή ώστε να ορίσετε την $f(x)$ . Κάνετε υπολογισμό πατώντας το πλήκτρο Enter. <u>Συμβουλή:</u> Το $:=$ χρησιμοποιείται για αναθέσεις (ορισμούς).
2		Εισάγετε $g(x) := x/2 + 2$ στη δεύτερη γραμμή.
3		Ορίστε την $h(x)$ ως $h(x) := f(x) - g(x)$ στην τρίτη γραμμή.
4		Εισάγετε $h(x)$ στην τέταρτη γραμμή και παραγοντοποιήστε χρησιμοποιώντας το εργαλείο Παράγοντοποίηση. Αμέσως φαίνονται οι ρίζες.
5		Χρησιμοποιήστε την εντολή Λύσε $[h(x)=0, x]$ για να επιβεβαιώσετε τις ρίζες.
6		Δημιουργήστε τα σημεία τομής πληκτρολογώντας $s := \text{Τομή}[f(x), g(x)]$ .

### Μερικές Συμβουλές

Η Προβολή CAS επιτρέπει στους μαθητές να εργαστούν με κλάσματα, εξισώσεις και τύπους που περιλαμβάνουν **μεταβλητές**.

$\frac{15}{3 \cdot 5}$

Μπορείτε επίσης να χειριστείτε ένα μέρος μόνο κάποιας έκφρασης επιλέγοντάς την με το ποντίκι και στη συνέχεια κάνοντας κλικ σε κάποιο εργαλείο όπως αυτό της Παραγοντοποίησης.

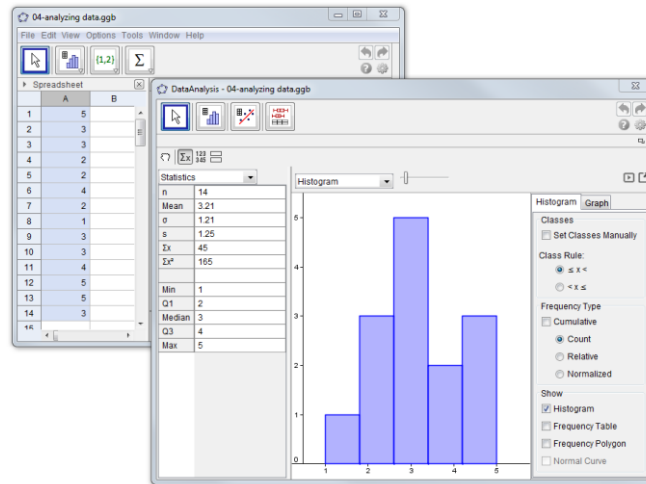
$x =$

Η λύση θα μπορούσε να έχει βρεθεί αμέσως ορίζοντας όπως παραπάνω τις  $f(x)$  και  $g(x)$ , επιλέγοντας και τις δυο γραμμές και εφαρμόζοντας το εργαλείο *Λύση*.




## Παράδειγμα 4: Ανάλυση Δεδομένων



**Task:** Δημιουργήστε ένα ιστόγραμμα και υπολογίστε μέση τιμή, διάμεσο, ελάχιστη και μέγιστη τιμή ενός πλήθους τιμών.



### Προετοιμασία

- Κάνετε κλικ στο βέλος που βρίσκεται στη δεξιά πλευρά της Προβολής Γραφικών και από την Πλευρική Μπάρα Όψεων επιλέξτε  Πίνακες και Γραφικά.

### Βήματα Κατασκευής

1		Εισάγετε κάποια δεδομένα στα κελιά της στήλης A του Λογιστικού Φύλλου, πχ δώστε στα A1 έως A14 τιμές όπως οι 5, 3, 3, 2, 2, 4, 2, 1, 3, 3, 4, 5, 5, 3.
2		Επιλέξτε τα κελιά και χρησιμοποιήστε το εργαλείο <i>Ανάλυση Μιας Μεταβλητής</i> . <u>Συμβουλή:</u> Στο συγκεκριμένο παράδειγμα. Επιλέξτε τα κελιά A1 έως A14 και κάνετε κλικ στο εργαλείο <i>Ανάλυση Μιας Μεταβλητής</i> . Στο διάλογο Πηγή Δεδομένων πατάτε <i>Ανάλυση</i> και εμφανίζεται ο διάλογος <i>Ανάλυση Δεδομένων</i> .
3		Επιλέξτε το κατάλληλο πλήθος Κλάσεων από το επάνω μέρος του παραθύρου. <u>Συμβουλή:</u> Για τους αριθμούς του συγκεκριμένου παραδείγματος, χρησιμοποιήθηκαν 5 κλάσεις, επειδή υπάρχουν πέντε διαφορετικές τιμές.
4	$\Sigma x$	Επιλέξτε το εικονίδιο <i>Δείξτε τα Στατιστικά</i> από την μπάρα ώστε να ανοίξει η καρτέλα των <i>Στατιστικών</i> . Βρείτε τη Μέση Τιμή, τη Διάμεσο, τη Μέγιστη και την Ελάχιστη τιμή των δεδομένων.
5		Κάνετε κλικ στο βέλος που βρίσκεται επάνω δεξιά και επιλέξτε <i>Θέσε τις Κλάσεις Χειροκίνητα στα δεξιά του Ιστογράμματος</i> . <u>Συμβουλή:</u> Πληκτρολογήστε Enter αφού θέσετε στην Αρχή την τιμή 0.5 και στο Πλάτος την τιμή 1 (τιμές για το συγκεκριμένο παράδειγμα).

### Μερικές Συμβουλές

Αλλάξτε μερικές τιμές στη στήλη  $A$  και δείτε πώς αυτό επηρεάζει το ιστόγραμμα και τις στατιστικές τιμές όπως η μέση τιμή, η διάμεσος η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή.

Αλλάξτε τον τύπο του διαγράμματος από Ιστόγραμμα σε Θηκόγραμμα χρησιμοποιώντας τη λίστα επάνω από το διάγραμμα.

## Περισσότερες Πληροφορίες

Μπορείτε να βρείτε περισσότερες πληροφορίες, υλικό και βοήθεια στις ιστοσελίδες μας:

Λογισμικό

[www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)

Εγχειρίδιο & Μαθήματα

[wiki.geogebra.org](http://wiki.geogebra.org)

Έργα & Φύλλα Εργασίας

[www.geogebra.org/tube](http://www.geogebra.org/tube)

Forum Χρηστών

[www.geogebra.org/forum](http://www.geogebra.org/forum)

The image shows two overlapping windows from the GeoGebra software. The top window, titled "Theorem of Pythagoras", displays a right-angled triangle with vertices A, B, and C. Squares are constructed on each side: a blue square on side AC (labeled  $b^2$ ), a green square on side AB (labeled  $c^2$ ), and a red square on side BC (labeled  $a^2$ ). Below the diagram, the side lengths and their squares are listed:

$a = 10.36$	$a^2 = 107.29$	$a^2$
$b = 6.01$	$b^2 = 36.15$	$107.2$
$c = 11.98$	$c^2 = 143.44$	$a^2$

At the bottom of this window, a question is posed: "How do the several surface areas of the three side c?"

The bottom window shows a dynamic geometry construction. It features a coordinate system with a blue curve and a red line. A point A1 is marked at x=0.34, and a point a is marked at x=3.88. The window also includes a spreadsheet with the following data:

	A	B	C	D
1	0.34	0.53	0.43	
2	0.87	0.43	0.52	
3	0.44	0.52	0.79	
4	0.95	0.79	0.37	
5	0.17	0.37	0.42	
6	0.54	0.42	0.82	
7	0.96	0.82	0.33	
8	0.14	0.33	0.5	
9	0.46	0.5	0.83	
10	0.97	0.83	0.31	
11	0.13	0.31	0.52	
12	0.44	0.52	0.79	
13	0.96	0.79	0.37	
14	0.16	0.37	0.44	
15	0.53	0.44	0.84	
16	0.97	0.84	0.3	
17	0.12	0.3	0.52	
18	0.42	0.52	0.75	
19	0.95	0.75	0.42	