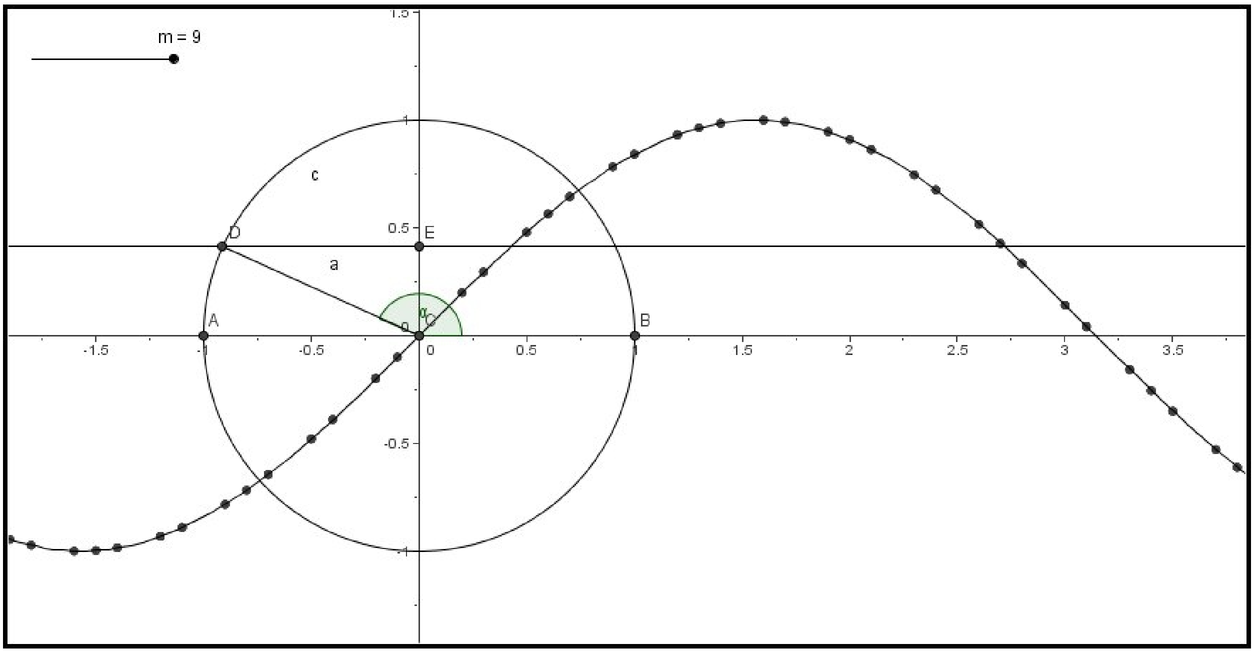
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ
της
ΕΥΑΓΓΕΛΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΣΜΥΡΝΗΣ

ΕΤΟΣ ΙΔΡΥΣΗΣ 1733

http://lyk-evsch-n-smyrn.att.sch.gr

Μαθηματικά με την Geogebra



Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

Σχολικό Έτος 2007-2008

Πειραματικο Λυκειο Ευαγγελικης Σχολης Σμυρνης

Μαθηματικα με την Geogebra

Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

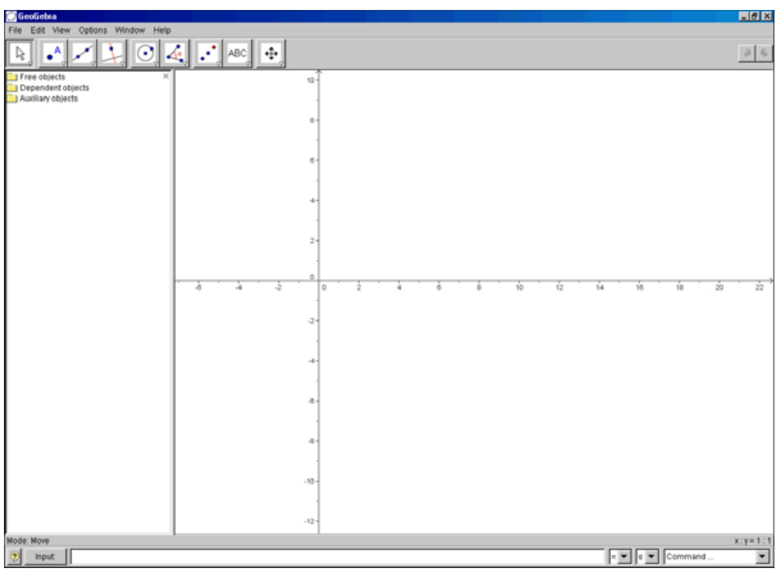
5 Δεκεμβρίου 2007
Στοιχειοθετήθηκαν με το LaTeX.

1 Τι είναι η Geogebra

Η Geogebra[1] είναι ένα πρόγραμμα Μαθηματικών που ενώνει την Γεωμετρία την Άλγεβρα και την Ανάλυση. Αναπτύχθηκε από τον Markus Hohenwarter στο Πανεπιστήμιο του Salzburg για να βοηθηθεί η μαθηματική εκπαίδευση στα σχολεία. Από τη μία μεριά η Geogebra είναι ένα σύστημα δυναμικής Γεωμετρίας. Μπορείτε να κάνετε γεωμετρικές κατασκευές με σημεία, διανύσματα, ευθύγραμμα τμήματα, ευθείες, κωνικές τομές όπως επίσης και με συναρτήσεις και στη συνέχεια να τα αλλάζετε δυναμικά. Από την άλλη μεριά μπορούν απευθείας να εισαχθούν εξισώσεις και συντεταγμένες. Έτσι η Geogebra έχει την ικανότητα να χειρίζεται μεταβλητές που εκφράζουν αριθμούς, διανύσματα, και σημεία, να υπολογίζει παραγώγους και ολοκληρώματα και διαθέτει εντολές όπως `root` (ρίζα) ή `Extremum` (Ακρότατο). Αυτές οι δύο όψεις είναι χαρακτηριστικές στην Geogebra: μία παράσταση στο παράθυρο της Άλγεβρας αντιστοιχεί σε ένα αντικείμενο στο παράθυρο της Γεωμετρίας και αντίστροφα.

2 Γνωριμία με τη Geogebra

Υποθέτουμε ότι έχετε εγκαταστήσει στο σύστημα σας την Geogebra από το CD που σας έχει δοθεί δηλαδή έχετε εγκατεστημένη την έκδοση 2.7.1.0. Ξεκινώντας το πρόγραμμα θα εφανισθεί στην οθόνη σας η εικόνα:



Εκτός από τη γραμμή εντολών και τη γραμμή εργαλείων υπάρχουν τρεις ευδιάκριτες περιοχές:

1. Το παράθυρο Άλγεβρας (αριστερά)
2. Το παράθυρο Γεωμετρίας (δεξιά)

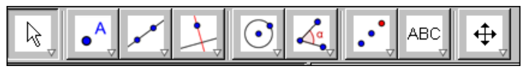
[1] Το περιεχόμενο αυτής της παραγράφου λήφθηκε από το εγχειρίδιο του προγράμματος

3. Το παράθυρο της γραμμής εντολών (κάτω)

Η βασική ιδέα της Geogebra είναι η ακόλουθη: Τα σχήματα που επεξεργαζόμαστε (γεωμετρικά αντικείμενα, γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων) θα εμφανίζονται στο παράθυρο της Γεωμετρίας και ατο παράθυρο της Άλγεβρας θα εμφανίζονται οι εξισώσεις και οι άλλες σχέσεις που τα περιγράφουν. Εμείς εισάγουμε τα σχήματα μας και επιδρούμε σε αυτά

- Από τον κατάλογο επιλογών:

- Από τη γραμμή εργαλείων:



- Από το παράθυρο εντολών:

Κάθε Αλλαγή που πραγματοποιούμε στο παράθυρο της Γεωμετρίας αυτομάτως εμφανίζεται στο παράθυρο της άλγεβρας και αντιστρόφως.

3 Ας πιάσουμε δουλειά!

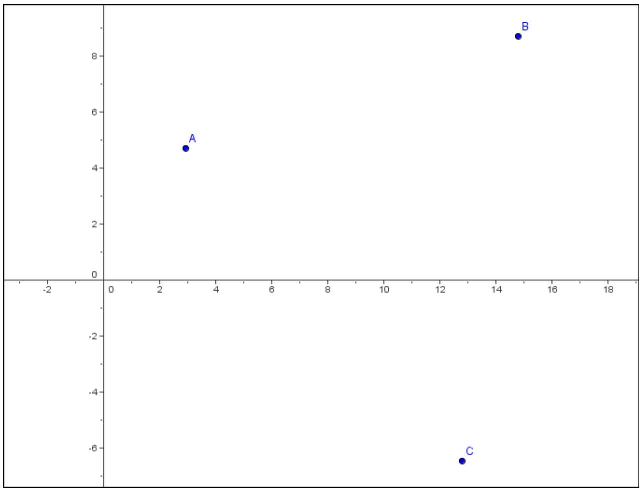
Στο πρώτο μας παράδειγμα θα κάνουμε τα εξής πράγματα:

- Θα σχεδιάσουμε ένα τρίγωνο ABC (αργότερα θα δούμε πως θα χρησιμοποιούμε ελληνικούς χαρακτήρες).
- Θα σχεδιάσουμε τη διχοτόμο της γωνίας A και το σημείο τομής της με την ΒΓ.
- Θα σχεδιάσουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου.
- Θα σχεδιάσουμε την εφαπτομένη του κύκλου αυτού στο A.

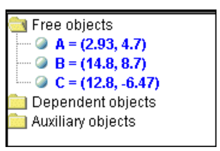
3.1 Πως σχεδιαζουμε ενα τριγωνο

Χρειάζεται να εισάγουμε πρώτα τρία σημεία. Αυτό γίνεται από τη γραμμή εργαλείων επιλέγοντας διαδοχικά:

Στη συνέχεια με το ποντίκι δίνουμε αριστερό κλικ στο παράθυρο γεωμετρίας τρεις φορές σε τρεις διαφορετικές θέσεις. Κάθε φορά η Geogebra εισάγει και από ένα σημείο το οποίο και ονομάζει A, B, C.

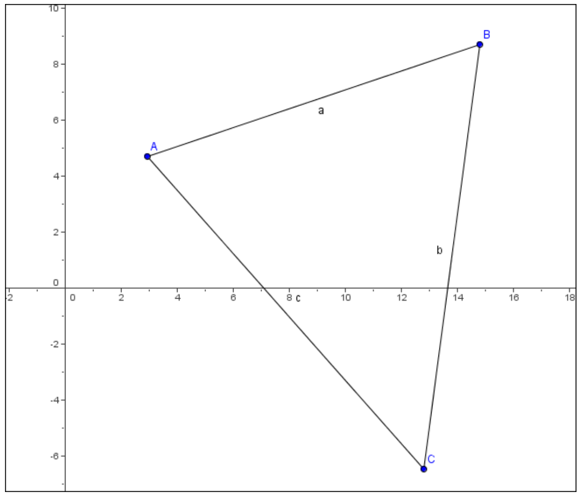


Προσέξτε ότι μόλις εισάγετε τα σημεία στο παράθυρο της Άλγεβρας θα εμφανισθούν κάτω από την τιτλίδα Free Objects τα ονόματα των σημείων μαζί με τις συντεταγμένες τους (ασφαλώς και δεν είναι απαραίτητο να έχετε και σεις τους ίδους αριθμούς αφού εξαρτώνται από το πού βάλατε τα σημεία).

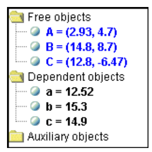


Free Objects σημαίνει **Ελεύθερα Αντικείμενα** και θα δούμε αμέσως μετά τη σημασία αυτής της ονομασίας. Έχουμε τις κορυφές του τριγώνου και χρειαζόμαστε πλευρές δηλαδή απαιτείται τρεις φορές να σχεδιάσουμε ευθύγραμμο τμήμα με δοθέντα άκρα. Αυτό γίνεται από τη γραμμή εργαλείων πατώντας

Η επιλογή αυτή μας επιτρέπει να σχηματίσουμε το ευθύγραμμο τμήμα AB αν μεταβούμε στο παράθυρο Γεωμετρίας, δώσουμε αριστερό κλικ στο A, σύρουμε έως το B και δώσουμε πάλι αριστερό κλικ. Κάνοντας το ίδιο και για το τμήμα BC και το CA θα έχουμε το τρίγωνο μας. Προσέξτε ότι η Geogebra έχει δώσει ονόματα a,b,c στα τρία τμήματα ακολουθώντας τη σειρά που τα σχεδιάσαμε. Δεν ονομάζει μία πλευρά με βάση την απέναντι κορυφή.



Τοποθετώντας τα σημεία η Geogebra ενημερώνει και το παράθυρο Άλγεβρας:



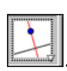
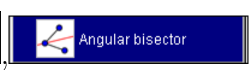
τοποθετώντας κάτω από την τιτλίδα Dependent Objects (εξαρτημένα αντικείμενα) τα μήκη των τμημάτων a,b,c. Η διάκριση ελεύθερα-εξαρτημένα είναι κατανοητή από το εξής γεγονός: Από τη στιγμή που επιλέξουμε τα A, B, C (που μπορούμε να τα επιλέξουμε όπως θέλουμε, δηλαδή ελεύθερα), τα αντίστοιχα ευθύγραμμα τμήματα είναι εντελώς εξαρτημένα από την επιλογή των άκρων τους. Μπορείτε να δείτε πως αλλάζουν τα μήκη αν αρχίσετε να μετακινείτε μία κορυφή του τριγώνου. Αυτό γίνεται με την επιλογή από την γραμμή εργαλείων:

,

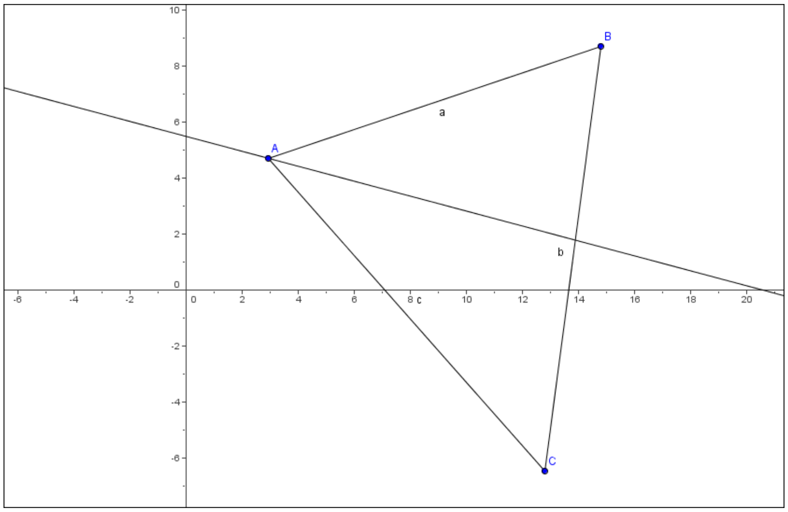
όπου κατόπιν επιλέγουμε με το ποντίκι το αντικείμενο που θέλουμε να μετακινήσουμε το οποίο και μετακινούμε σύροντας το ποντίκι.

3.2 Πως σχεδιαζουμε τη διχοτομο μιας γωνιας του τριγωνου

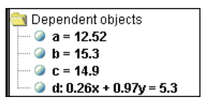
Για να φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας A πρέπει να θυμηθούμε ότι μία γωνία ορίζεται από τις δύο πλευρές της αλλά *ορίζεται εξ' ίσου καλά και από ένα σημείο μίας πλευράς, την κορυφή και ένα σημείο της άλλης πλευράς*. Θα χρειασθεί να επιλέξουμε από την εργαλειοθήκη διαδοχικά:

,

και στη συνέχεια να κάνουμε αριστερό κλικ στο σημείο B μετά στο A και μετά στο C. Η Geogebra αντιλαμβάνεται ότι της δίνουμε ένα σημείο μίας πλευράς, την κορυφή και ένα σημείο της άλλης πλευράς. Θα μπορούσαμε να δώσουμε και τη σειρά C, A, B. Του ουσιώδες είναι η κορυφή να είναι το μεσαίο σημείο. Στο παράθυρο της Γεωμετρίας θα εμφανισθεί η διχοτόμος:

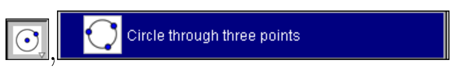


Το παράθυρο της Άλγεβρας θα ‘ένημερωθεί” στα Εξαρτημένα Αντικείμενα με την εξίσωση της διχοτόμου:

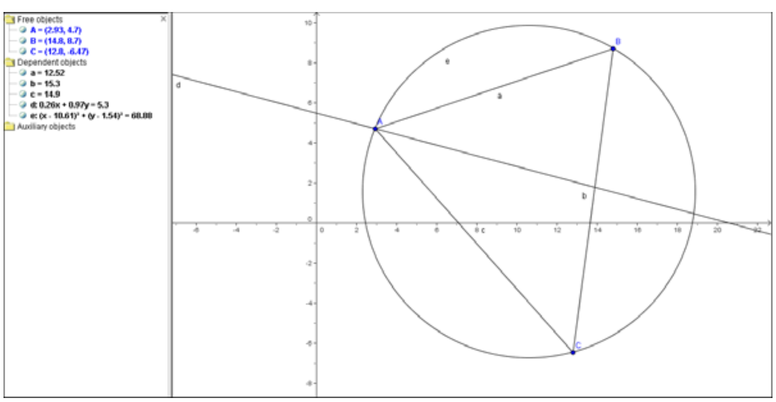


3.3 ΠΩΣ ΣΧΕΔΙΑΖΟΥΜΕ ΤΟΝ ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟ ΚΥΚΛΟ ΕΝΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Για να σχεδιασθεί ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ABC επιλέγουμε διαδοχικά:



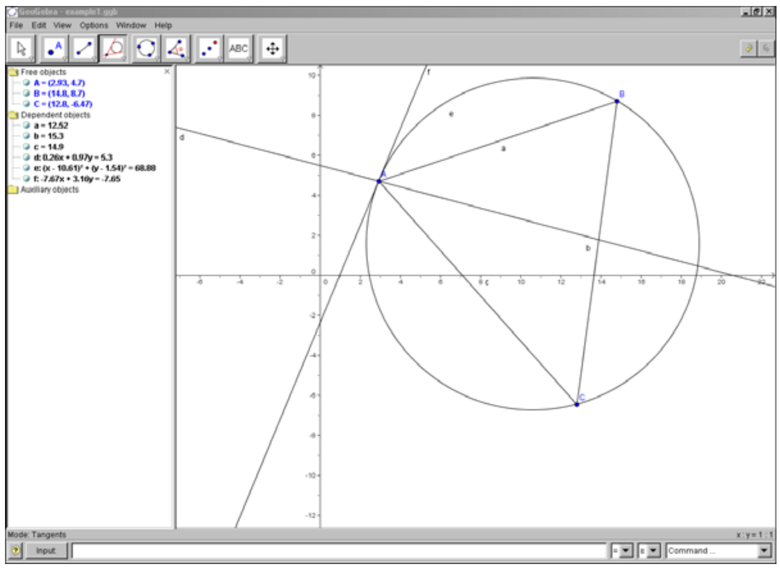
και κατόπιν δίνουμε από ένα αριστερό κλικ σε κάθε κορυφή του τριγώνου. Στο παράθυρο της Γεωμετρίας θα εμφανισθεί ο κύκλος και στο παράθυρο της Άλγεβρας θα εμφανισθεί η εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου:



3.4 Πως σχεδιαζουμε την εφαπτομενη ενος κυκλου σε καποιο σημειο του

Έχοντας ήδη τον κύκλο μπορούμε να βρούμε την εφαπτομένη στο σημείο του A επιλέγοντας από τα εργαλεία:

δίνουμε αριστερό κλικ πάνω στον κύκλο και αριστερό κλικ πάνω στο σημείο A και θα έχουμε:



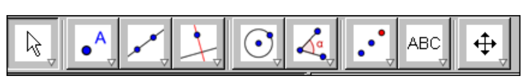
3.5 Μια μικρη συνοψη

Θα παρατηρήσατε ότι:

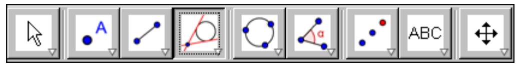
1. Όταν δημιουργούμε ένα αντικείμενο στο παράθυρο της Γεωμετρίας η Geogebra το ονομάζει με κάποιο γράμμα και ταυτόχρονα γράφει κάποιο στοιχείο του στο παράθυρο της Άλγεβρας.

2. Όταν επιλέγουμε ένα εργαλείο που κάνει κάποια δουλειά η δουλειά αυτή ολοκληρώνεται αν "υποδείξουμε" στη Geogebra σε ποια αντικείμενα θα εφαρμοσθεί το εργαλείο. Συνήθως αυτό γίνεται με αριστερό κλικ.

3. Όταν ξεκινάει η Geogebra η εργαλειοθήκη έχει τη μορφή

   Η μορφή αυτή αλλάζει. Κάθε φορά παραμένει εμφανές το εργαλείο που έχουμε χρησιμοποιήσει την τελευταία φορά. Λογικά αν δεν έχετε ενδιαμέσως χρησιμοποιήσει άλλα εργαλεία η γραμμή εργαλείων θα παρουσιάζει την ακόλουθη εικόνα:

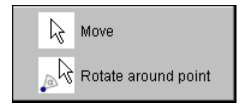


Στην επόμενη ενότητα θα μάθουμε περισσότερα για την εργαλειοθήκη:

4 Η εργαλειοθήκη

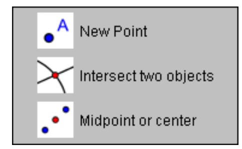
Αν ξεδιπλώσουμε τα εργαλεία θα βρούμε:

4.1 Εργαλεια επιλογησ-μετακινησησ



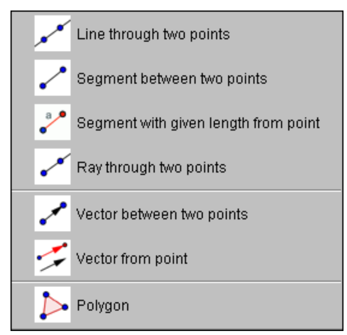
Με το εργαλείο **`Move`** μπορούμε να επιλέξουμε και να μετακινήσουμε ένα ελεύθερο αντικείμενο. Το εργαλείο **`Rotate around point`** περιστρέφει γύρω από ένα σημείο. Επιλέγουμε ένα σημείο και μετά ένα ελεύθερο αντικείμενο. Σύροντας το αντικείμενο θα δούμε ότι *δεν μετακινείται* αλλά *περιστρέφεται* γύρω από το αρχικά επιλεγέν σημείο.

4.2 Εργαλεια για σημεια



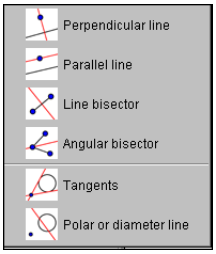
Το **`New point`** εισάγει με αριστερό κλικ ένα σημείο, όπου θέλουμε, στο παράθυρο της Άλγεβρας. Με το εργαλείο **`Intersect two objects`** βρίσκουμε τα σημεία τομής δύο αντικειμένων, λ.χ. ευθείας - κύκλου, κάνοντας κλικ στο καθένα τους. Με το **`Midpoint`** βρίσκουμε το μέσο ενός τμήματος αλλά και το κέντρο μίας κωνικής τομής.

4.3 Εργαλεια για ευθυγραμμα τμηματα



Το **`Line through two points`** προεκτείνει ένα ευθύγραμμο τμήμα και προς τις δύο κατευθύνσεις δηλαδή δημιουργεί την ευθεία που ορίζουν τα άκρα του. Το **`Segment between two points`** δημιουργεί το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα δοθέντα σημεία. Ευθύγραμμο τμήμα δημιουργούμε και με το εργαλείο **`Segment with given length from point`** μόνο που το τμήμα έχει δοθέν άκρο (το επιλέγουμε με το ποντίκι) και δοθέν μήκος (η Geogebra θα μας ρωτήσει πόσο) το δε άλλο άκρο μπορούμε να το αλλάξουμε με το εργαλείο της μετακίνησης. Αν ένα τμήμα το προεκτείνουμε προς μία μόνο κατεύθυνση θα πάρουμε μία ημιευθεία. Αυτό επιτυγχάνεται με το εργαλείο **`Ray through two points`**. Σημειώστε ότι ή σειρά με την οποία επιλέγουμε τα σημεία παίζει ρόλο. Δύο σημεία ορίζουν και ένα διάνυσμα το οποίο η Geogebra το σχεδιάζει αν χρησιμοποιήσουμε το εργαλείο **`Vector between two points`** όπου και εδώ η σειρά έχει σημασία. Μπορούμε να δημιουργήσουμε και έφαρμοστά διανύσματα δηλαδή διανύσματα που έχουν δοθείσα αρχή. Γιαυτό χρειαζόμαστε να έχουμε ένα σημείο και ήδη ένα έτοιμο διάνυσμα σε κάποια θέση του παραθύρου Γεωμετρίας. Με το εργαλείο **`Vector from point`** κάνοντας, ως συνήθως, αριστερό κλικ στο σημείο και στο διάνυσμα θα αποκτήσουμε ένα ίσο διάνυσμα με αρχή το σημείο. Τέλος διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα ώστε η αρχή του πρώτου να είναι το πέρας του τελευταίου δημιουργούν ένα πολύγωνο. Η Geogebra το δημιουργεί αρκεί να κάνουμε κλικ σε όλα τα σημεία (στο τελευταίο που θα είναι και το αρχικό θα κάνουμε κλικ δύο φορές μία στηην αρχή και μία στο τέλος). Η Geogebra θα το γραμμοσκιάσει σημειώνοντας στο παράθυρο της Άλγεβρας το εμβαδόν του.

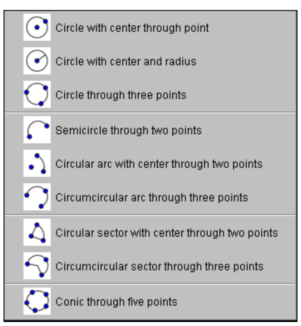
4.4 Εργαλεια για ευθειες



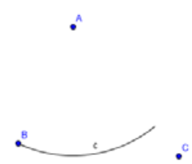
Με αυτά μπορούμε να φέρνουμε κάθετη από σημείο σε ευθεία (με το `Perpendicular line`) παράλληλη από σημείο σε ευθεία (`Parallel line`), τη μεσοκάθετο ένός ευθυγράμμου τμήματος (`Line bisector`) τη διχοτόμο γωνίας (`Angular bisector`) που έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει και να φέρνουμε εφαπτόμενη σε σημείο κωνικής τομής ή από σημείο προς κωνική τομή (`Tangents`) που επίσης έχουμε χρησιμοποιήσει. Στην ομάδα αυτή η Geogebra διαθέτει και το εργαλείο κατασκευής πολικής ή διαμέτρου μίας κωνικής (`Polar or diameter line`). [2]

4.5 Εργαλεια για κυκλους και κωνικες

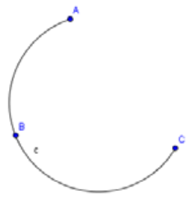
Με το εργαλείο `Circle with center through point` γράφουμε κύκλο με δοθέν κέντρο που, επιπλέον, ρυμθίζεται να διέρχεται και από ένα σημείο που θα επιλέξουμε. Το εργαλείο `Circle with center and radius` γράφει κύκλο που έχει κέντρο που εμείς θα επιλέξουμε και ακτίνα που θα ζητήσει η Geogebra να δώσουμε. Αν θέλουμε να γράψουμε κύκλο που διέρχεται από τρία σημεία θα χρησιμοποιήσουμε το `Circle through three points`. Το εργαλείο `Semicircle` γράφει το ημικύκλιο με άκρα δοθέντα σημεία (το ποιό από τα δύο ημικύκλια καθορίζεται από τη σειρά με την οποία θα κάνουμε κλικ στα σημεία).



Αν ενεργοποιήσουμε το `Circular arc with center through two points` και κάνουμε αριστερό κλικ σε τρία σημεία Α, Β, Γ τότε η Geogebra γράφει τόξο κύκλου που έχει κέντρο Α, το ένα άκρο του τόξου είναι το Β και το άλλο βρίσκεται στην ευθεία ΑΓ.

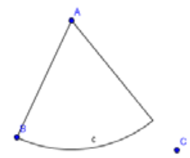


[2] Ο ορισμός της πολικής είναι αρκετά τεχνικός και η εξέταση της ξεφεύγει από το σκοπό αυτών των σημειώσεων. Ωστόσο ένας ορισμός της πολικής σημείου ως προς κύκλο είναι ο ακόλουθος: Έστω (O, R) ένας κύκλος και Α ένα σημείο. Ενώνουμε το Α με το Ο και στην ημιευθεία ΟΑ παίρνουμε σημείο Α′ τέτοιο ώστε το γινόμενο των μηκών των τμημάτων ΟΑ, ΟΒ να είναι R^2. Η ευθεία που είναι κάθετη στην ευθεία ΟΑ στο σημείο της Α′ λέγεται *πολική του Α ως προς τον* (O, R). *Μπορεί κανείς, μάλλον εύκολα, να αποδείξει ότι όταν το Α είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου η πολική του είναι η ευθεία που συνδέει τα σημεία επαφής των εφαπτομένων που άγονται από το Α στον κύκλο.* Η έννοια της διαμέτρου μίας κωνικής ως προς ευθεία ή διάνυσμα είναι πιο απλή: Θεωρούμε όλες τις χορδές της κωνικής που είναι παράλληλες προς την ευθεία ή το διάνυσμα και παίρνουμε τα μέσα τους. Αποδεικνύεται ότι όλα αυτά τα μέσα ανήκουν σε μία ευθεία που λέγεται διάμετρος ως προς την ευθεία ή το διάνυσμα

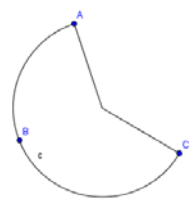


Αν θέλουμε τόξο κύκλου που διέρχεται από τρία σημεία θα χρησιμοποιήσουμε το `Circumcircular sector through three points` κάνοντας κλικ σε αυτά τα σημεία. Σημειώστε ότι η σειρά έχει σημασία.

Εκτός από τόξα ή Geogebra επιτρέπει τη σχεδίαση κυκλικών τομέων. Το εργαλείο `Circular sector with center through two points` παράγει κυκλικό τομέα με κέντρο το πρώτο σημείο που θα επιλέξουμε που θα διέρχεται από το δεύτερο σημείο που θα επιλέξουμε και θα περατώνεται στην ημιευθεία που θα συνδέει το κέντρο με το τρίτο σημείο επιλογής μας.

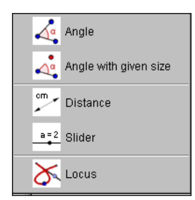


Επίσης όπως ακριβώς γίνεται με το τόξο που διέρχεται από τρία σημεία η Geogebra παράγει τομέα από τρία σημεία.

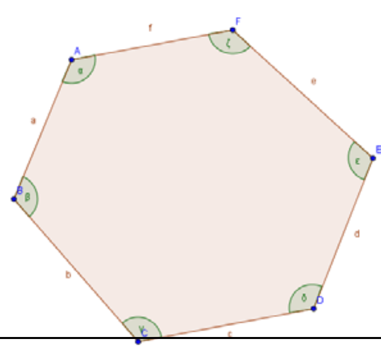


Αν έχουμε 5 σημεία του επιπέδου, γενικά, από αυτά διέρχεται μία κωνική τομή. Το είδος της (έλλειψη, παραβολή, υπερβολή κτλ) καθορίζεται από τη θέση των σημείων. Το εργαλείο `Conic through 5 points` σχεδιάζει αυτή την κωνική τομή.

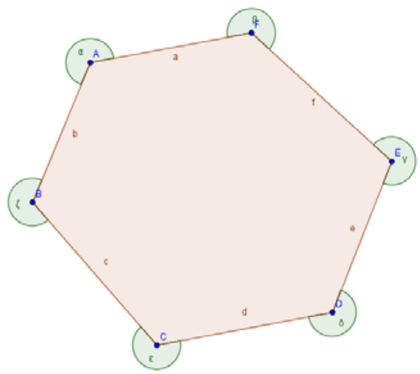
4.6 Γωνιες, αποστασεις, τοποι και δρομεις



Αυτή η ομάδα περιέχει διάφορα ανόμοια εργαλεία. Το εργαλείο `Angle` παράγει γωνίες με κλικ σε αντικείμενα που μπορούν να δημιουργήσουν γωνίες: Σε τρία σημεία, σε δύο ευθύγραμμα τμήματα, σε δύο ευθείες, σε δύο διανύσματα και σε ένα πολύγωνο. Ειδικά στην τελευταία περίπτωση η Geogebra θα δημιουργήσει τις εσωτερικές ή τις εξωτερικές γωνίες του πολυγώνου ανάλογα με το αν το πολύγωνο έχει δημιουργηθεί κατά την θετική ή την αρνητική φορά.



Το πολύγωνο δημιουργήθηκε με τη σειρά A, B, C,... και μετά χρησιμοποιήθηκε το εργαλείο της γωνίας.



Το πολύγωνο δημιουργήθηκε με τη σειρά A, F, E, ... και μετά χρησιμοποιήθηκε το εργαλείο της γωνίας.

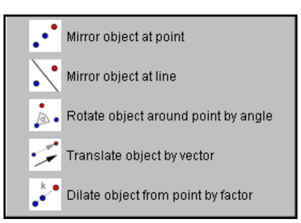
Αν θέλουμε να δημιουργήσουμε γωνία δοθέντος μέτρου χρησιμοποιούμε το εργαλείο `Angle with given size`. Κάνοντας αριστερο κλικ σε δύο σημεία έστω Ξ, Υ η Geogebra θα ζητήσει να δώσουμε έν αριθμό έστω x. Θα δημιουργηθεί ένα σημείο Ζ έτσι ώστε τα Χ, Υ, Ζ να είναι κορυφές ισοσκελούς τριγώνου με βάση ΥΖ και γωνία κορυφής ίση την x.

Το εργαλείο `Distance` υπολογίζει αποστάσεις: δύο σημείων δύο ευθειών και σημείου από ευθεία. Το μέτρο γωνιας και το μήκος είναι δύο μεγέθη η Geogebra μας επιτρέπει να αλλάζουμε. Ένας τρόπος για να επιφέρουμε αλλαγές είναι ο *δρομέας*. Ο δρομέας, που είσάγεται με το εργαλείο `Slider`, συνδέεται με ένα μέγεθος συνήθως μήκος ή γωνία που θέλουμε να αλλάζουμε. Αργότερα θα δούμε πως.

Στην Geogebra μπορούμε να μετακινούμε σημεία, τα ελεύθερα σημεία. Κάποια άλλα σημεία που είναι εξαρτημένα σε αυτά μετακινούνται και αυτά διαγράφοντας κάποια γραμμή. Υποθέτουμε ότι το Α εξαρτάται από το σημείο Β. Αν επιλέξουμε το εργαλείο `Locus`και κάνουμε κλικ στο Α και μετά στο Β η Geogebra *θα προσπαθήσει* να υπολογίσει και να αποτυπώσει τη γραμμή που γράφει το Β.

4.7 Μετασχηματισμοι

Η Geogebra μας επιτρέπει να εφαρμόζουμε σε σημεία αλλά και σύνολα σημείων δηλαδή σχήματα ορισμένους σημειακούς μετασχηματισμούς:



- Με το εργαλείο `Mirror object at point` βρίσκουμε το συμμετρικό ενός αντικειμένου ως προς κέντρο συμμετρίας κάποιο σημείο: Μετά την επιλογή του εργαλείου κάνουμε κλικ στο αντικείμενο και στο σημείο

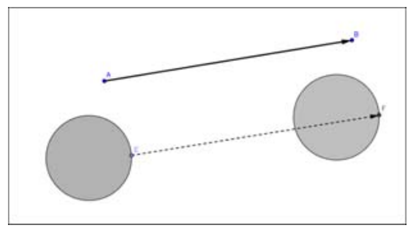
- Με το εργαλείο `Mirror object at point` βρίσκουμε το συμμετρικό ενός αντικειμένου ως προς άξονα συμμετρίας εργαζόμενοι όπως στην περίπτωση της συμμετρίας ως προς κέντρο. Η Geogebra αντιλαμβάνεται ως άξονα τον φορέα και θα δώσει συμμετρικό αν ως άξονα επιλέξουμε ευθεία ημιευθεία ή ευθύγραμμο τμήμα.

- Αν επιλέξουμε το εργαλείο `Rotate object around point` και στη συνέχεια ένα αντικείμενο $\mathcal{S}$ και ένα σημείο A η Geogebra θα μας ζητήσει ένα αριθμό. Έστω ότι δώσουμε x. Τότε η Geogebra θα περιστρέψει το αντικείμενο $\mathcal{S}$ κατά γωνία x γύρω από το A. Έχουμε δύο επιλογές όταν εισάγουμε το x:

  `counter clockwise` Η περιστροφή θα γίνει *αντίθετα* προς τους δείκτες του ρολογιού δηλαδή κατά την θετική φορά.

  `clockwise` Η περιστροφή θα γίνει κατά την φορά των δεικτών του ρολογιού (αρνητική φορά)

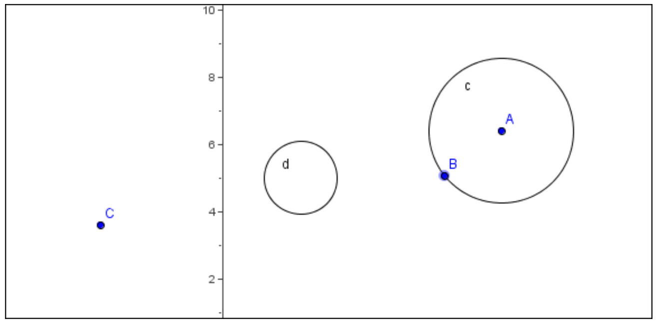
- Με το εργαλείο `Translate object by vector` επιλέγουμε ένα αντικείμενο και ένα διάνυσμα και το αντικείμενο θα μεταφερθεί παράλληλα κατά το διάνυσμα:



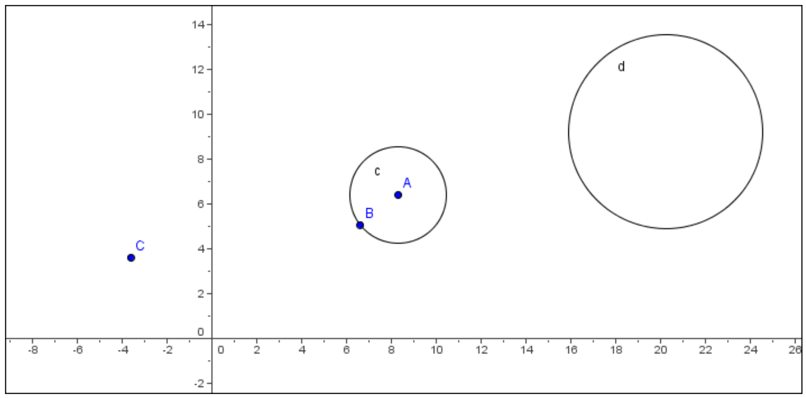
- Το εργαλείο `Dilate object from point` μας δίνει τη δυνατότητα να βρίσκουμε το ομοιόθετο ενός σχήματος. Έστω ένα σταθερό σημείο O (κέντρο της ομοιοθεσίας) και λ ένας σταθερός πραγματικός αριθμός. Η απεικόνιση της *ομοιοθεσίας με κέντρο O και λόγο ομοιοθεσίας* λ αντιστοιχεί σε κάθε σημείο M ένα σημείο N, *το ομοιόθετο του M* τέτοιο ώστε

$$\overrightarrow{ON} = \lambda \overrightarrow{OM}$$

  Το *ομοιόθετο ενός σχήματος* ως προς μία ομοιοθεσία προκύπτει αν βρούμε τα ομοιόθετα όλων των σημείων του σχήματος. Η Geogebra σχεδιάζει το ομοιόθετο ενός αντικειμένου ως εξής: Επιλέγουμε πρώτα το εργαλείο `Dilate object from point` και στη συνέχεια κάνουμε κλικ στο αντικείμενο του οποίου θέλουμε να βρούμε το ομοιόθετο και μετά κλικ στο κέντρο ομοιοθεσίας. Θα εμφανισθεί ένα παράθυρο διαλόγου στο οποίο πρέπει να συμπληρώσουμε το λόγο ομοιοθεσίας. Μετά από αυτό η Geogebra θα μας δώσει το ομοιόθετο. Σημειώστε ότι ο λόγος ομοιοθεσίας μπορεί να είναι και αρνητικός. Ειδικά η τιμή $\lambda = -1$ μας δίνει το συμμετρικό σημείου.

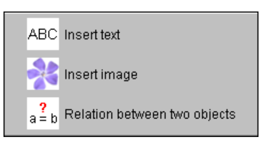


Ο κύκλος d είναι ομοιόθετος του κύκλου c με κέντρο C και λόγο ομοιοθεσίας $\lambda = \frac{1}{2}$.



Ο κύκλος d είναι ομοιόθετος του κύκλου c με κέντρο C και λόγο ομοιοθεσίας $\lambda = 2$.

4.8 Εισαγωγη κειμενου, εικονων και συγκριση αντικειμενων



Η Geogebra μπορεί να εισάγει κείμενο στο παράθυρο Γεωμετρίας. Το κείμενο μπορεί να περιλαμβάνει σύντομα σχόλια, επιγραφές κ.α. Αυτό γίνεται με το εργαλείο `Insert Text`. Μετά την επιλογή του εργαλείου αυτού και κάνοντας αριστερό κλικ στο σημείο του παραθύρου Γεωμετρίας που θέλουμε να εισαχθεί το κείμενο θα εμφανισθεί ένα παράθυρο διαλόγου στο οποίο πρέπει να γράψουμε το κέιμενο μας. Στο παράθυρο αυτό υπάρχει και η επιλογή `Latex Formula`. Η επιλογή αυτή μας επιτρέπει να εισάγουμε τύπους χρησιμοποιώντας τον κώδικα LaTeX. Στο αρχείο βοηθείας του προγράμματος και στη διαδρομή `Help, Contents, Text, LATEX Formulas` υπάρχει ένας υποτυπώδης οδηγός εντολών για να εισάγουν τύπους όσοι δεν είναι εξοικειωμένοι με το LaTeX.

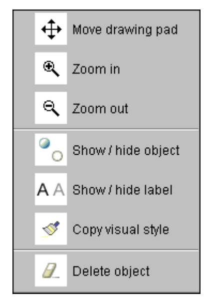
Με το εργαλείο `Insert image` και ένα κλικ στο παράθυρο Γεωμετρίας θα ανοίξει ένα παράθυρο διαλόγου στο οποίο πρέπει να πληροφορήσουμε την Geogebra που βρίσκεται η εικόνα που θέλουμε να εισάγουμε. Η εικόνα θα εισαχθεί ώς έχει με την κάτω αριστερή γωνία τοποθετημένη στο σημείο που επιλέξαμε. Σημειώστε ότι η Geogebra έχει πολύ περιορισμένες δυνατότητες τροποποίησης εικόνων (θα τις δείτε αν κάνετε δεξί κλικ σε μια εικόνα που έχετε εισάγει και επιλέξετε `Properties`. Επομένως οι εικόνες θα πρέπει να προετοιμασθούν κατάλληλα σε κάποιο πρόγραμμα από τα πολλά που υπάρχουν προτού εισαχθούν στην Geogebra.

Τέλος σε αυτή την ομάδα εργαλείων υπάρχει και το εργαλείο `Relation between two objects`. Αν επιλέξουμε αυτό το εργαλείο και στη συνέχεια με αριστερό κλικ δύο αντικείμενα η Geogebra θα προσπαθήσει να μας δώσει πληροφορίες για τη σχέση μεταξύ αυτών των αντικειμένων. Για παράδειγμα αν με το εργαλείο αυτό επιχειρήσουμε να συγκρίνουμε δύο ευθείες τότε η Geogebra θα μας απαντήσει αν οι ευθείες τέμνονται είναι παράλληλες ή συμπίπτουν. Πειραματισθείτε με αυτό το εργαλείο για να δείτε ποιές είναι οι δυνατότητες του.

4.9 Ρυθμισεις

Το παράθυρο Γεωμετρίας, συχνά, απεικονίζει ένα μόνο μέρος όσων σχεδιάζει η Geogebra. Μπορούμε να μετακινούμεθα στο σχέδιο χρησιμοποιώντας το εργαλείο `Move Drawing Pad`. Τα εργαλεία `Zoom in` και `Zoom out` ·έκτελούν τις προφανείς λειτουργίες. Με τα εργαλεία `Show/Hide Object` και `Show/Hide Label` μπορούμε να εμφανίσουμε ή να αποκρύψουμε αντικέιμενα ή επιγραφές αντικειμένων και με το εργαλείο `Delete Object` να διαγράψουμε αντικέιμενα.

Η Geogebra μας επιτρέπει να κάνουμε κάποιες ρυθμίσεις στην εμφάνιση ενός αντικειμένου. Αυτό γίνεται κάνοντας δεξί κλικ στο αντικείμενο και στη συνέχεια, από τον κατάλογο που θα εμφανισθεί, επιλέγοντας `Properies`. Μεταξύ άλλων μπορούμε να αλλάξουμε χρώματα είδος και πάχος γραμμών, γέμισμα, αν θα εμφανίζεται το όνομα του αντικειμένου κ.α. Πιθανόν αυτές τις ρυθμίσεις που θα κάνουμε σε κάποιο αντικείμενο να θέλουμε να τις μεταφέρουμε σε άλλα αντικείμενα. Η Geogebra το επιτυγχάνει αυτόματα με το εργαλείο `Copy visual style`: Επιλέγουμε το εργαλείο και μετά κάνουμε πρώτα αριστερό κλικ στο αντικείμενο **από το οποίο** θέλουμε να μεταφέρουμε ιδιότητες και κατόπιν κάνουμε κλικ στο ή στα αντικείμενα **στα οποία** θέλουμε να μέταφέρουμε αυτές τις ιδιότητες.



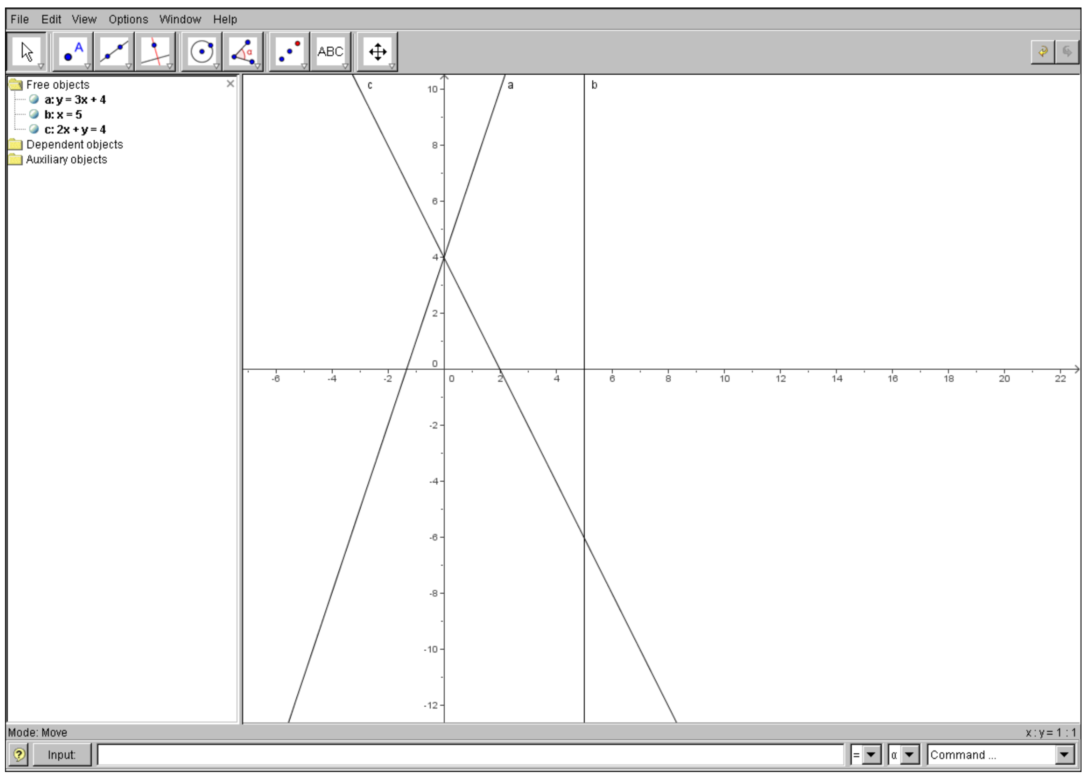
5 Η γραμμή εντολών

Είδαμε ότι το πρόγραμμα εμφανίζει τρία παράθυρα και έχουμε αναφερθεί στα δύο. Το τρίτο η γραμμή των εντολών δίνει την δυνατότητα να δίνουμε εντολές στην Geogebra. Πολλές από τις εργασίες της εργαλειοθήκης αλλά και άλλες ακόμη μποροούν να γίνουν από τη γραμμή εντολών και μάλιστα με μεγαλύτερη ακρίβεια. Στην πραγματικότητα η γραμμή εντολών είναι εκείνη με την οποία μπορούμε να αξιοποιήσουμε στο έπακρο της ιδιότητες της Geogebra. Την γραμμή εντολών θα τη γνωρίσουμε αναλυτικότερα στα παραδείγματα. Ας δούμε όμως τρία παραδείγματα.

- Στο παράθυρο Γεωμετρίας μπορούμε να εισάγουμε ένα σημείο με με το κατάλληλο εργαλείο και ένα κλίκ του ποντικιού. Στη γραμμή εντολών αρκεί να δώσουμε το όνομα του και τις συντεταγμένες του. Για να εισάγουμε το σημείο $A(2,3)$ αρκεί στη γραμμή των εντολών να πληκτρολογήσουμε: `A=(2,3)` και να δώσούμε `Enter`. Η Geogebra θα σχεδιάσει το παράθυρο

Γεωμετρίας και θα ενημερώσει το παράθυρο Άλγεβρας.

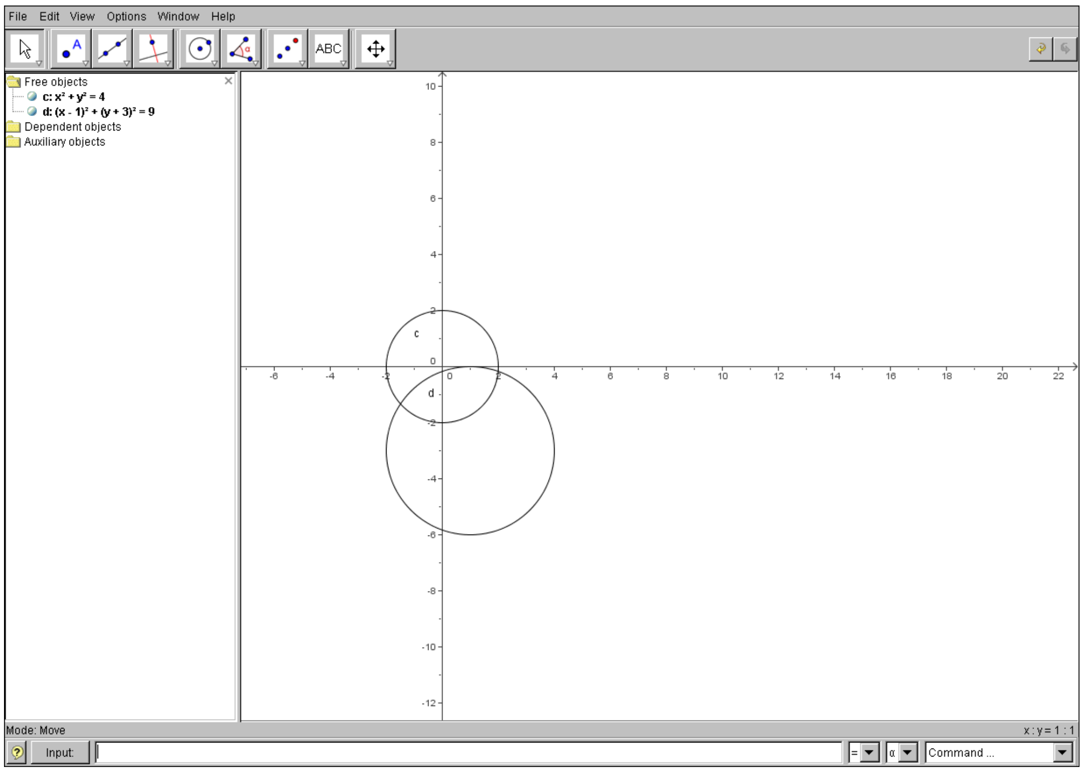
- Είδαμε τρόπους με τους οποίους εισάγουμε ευθείες. Όμως μία ευθεία περιγράφεται και από την εξίσωση της. Αν γράψουμε την εξίσωση στη γραμμή των εντολών η Geogebra θα της δώσει ένα όνομα και θα την εμφανίσει στο παράθυρο Γεωμετρίας και στο παράθυρο Άλγεβρας. Για να εισάγουμε τις ευθείες $y = 3x + 4$, $x = 5$ και $2x + y = 4$ δεν έχουμε παρά να δώσουμε στη γραμμή εντολών τις εξισώσεις τους και μετά από κάθε μία `Enter`. Δίνοντας λοιπόν
  y=3x+4
  Enter
  x=5
  Enter
  2x+y=4
  Enter
  θα έχουμε τελικά



- Όπως και με τις ευθείες μπορούμε να εισάγουμε κύκλους και με τις εξισώσεις τους. Οι εκθέτες εισάγονται όπως στη γλώσσα Basic δηλαδή με το σύμβολο ^. Έτσι για να εισάγουμε τους κύκλους $x^2 + y^2 = 16$, $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 9$ θα δώσουμε:

```
x^2+y^2=4
Enter
(x-1)^2+(y+3)^2=9
Enter
```

και θα εμφανισθεί:



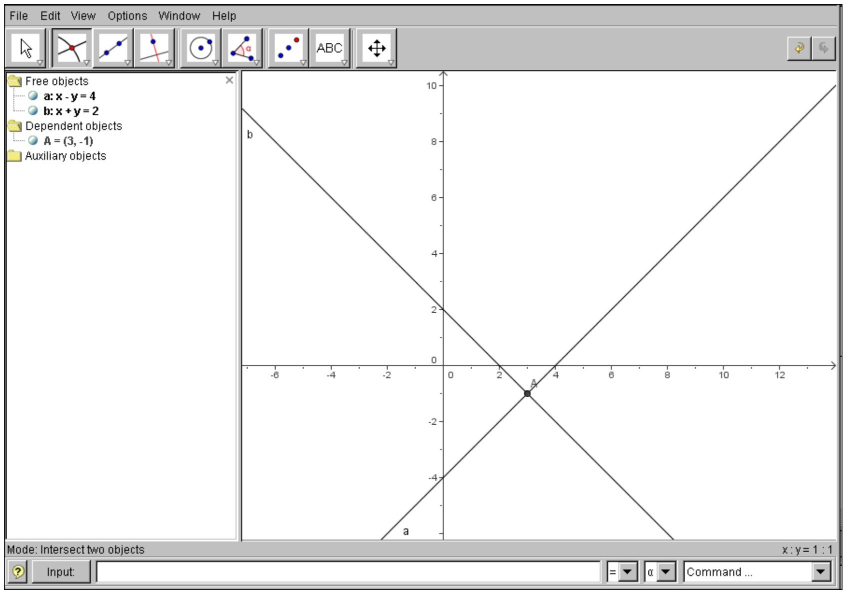
6 Σημεία, Ευθείες και Κύκλοι

6.1 Συστηματα Α ′ Βαθμου

Ένα αριθμητικό παράδειγμα. Στην άσκηση Α.2 σελ. 103 της Άλγεβρας της Α′ Λυκείου ζητείται να λυθεί γραφικά το σύστημα:

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Κάθε μία από τις εξισώσεις του συστήματος παριστάνεται στο επίπεδο με μία ευθεία. Κάνουμε τη γραφική παράσταση των δύο ευθειών βρίσκουμε το κοινό σημείο τομής τους. Το ζεύγος των αυντεταγμένων αυτού του σημείου, αν υπάρχει βέβαια, είναι και η λύση του συστήματος. Αν στην Geogebra εισάγουμε τις εξισώσεις των δύο ευθειών και στη συνέχεια βρούμε το σημείο τομή τους με το εργαλείο  θα έχουμε το ακόλουθο σχήμα:



Η Geogebra έχει ονομάσει με A το σημείο τομής τους και στο παράθυρο της Άλγεβρας γράφει `A(3,-1)` που σημαίνει ότι η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $x = 3,\ y = -1$

Ένα παράδειγμα με παράμετρο. Στην άσκηση B.2 σελ. 109 της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου ζητείται να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} (\lambda - 1)\,x - 2y = 1 \\ 4x - (\lambda + 1)\,y = -2 \end{cases}$$

Εδω σε κάθε τιμή του λ αντιστοιχεί και ένα συγκεκριμένο σύστημα που θα έχει μία καμμία ή άπειρες λύσεις. Για να εισάγουμε στην Geogebra το σύστημα πρέπει να δώσουμε μία αριθμητική τιμή στο λ ας πούμε $\lambda = 0$ που μετά θα την αλλάζουμε. Στη γραμμή εντολών πληκρολογούμε `λ=0` και δίνουμε `Enter`

Προσοχή: Το σύμβολο λ όπως και κάθε άλλο ελληνικό χαρακτήρα δεν θα το εισάγετε γυρίζοντας στα Ελληνικά το πληκτρολόγιο αλλά από το ειδικό πεδίο που διαθέτει η Geogebra στο δεξί μέρος της γραμμής εντολών: λ Εισαγουμε τώρα τις εξισώσεις μας. Μη ξεχνάτε ότι έχουμε δηλώσει ότι $\lambda = 0$ επομένως ενώ εμείς πληκτρολογούμε:

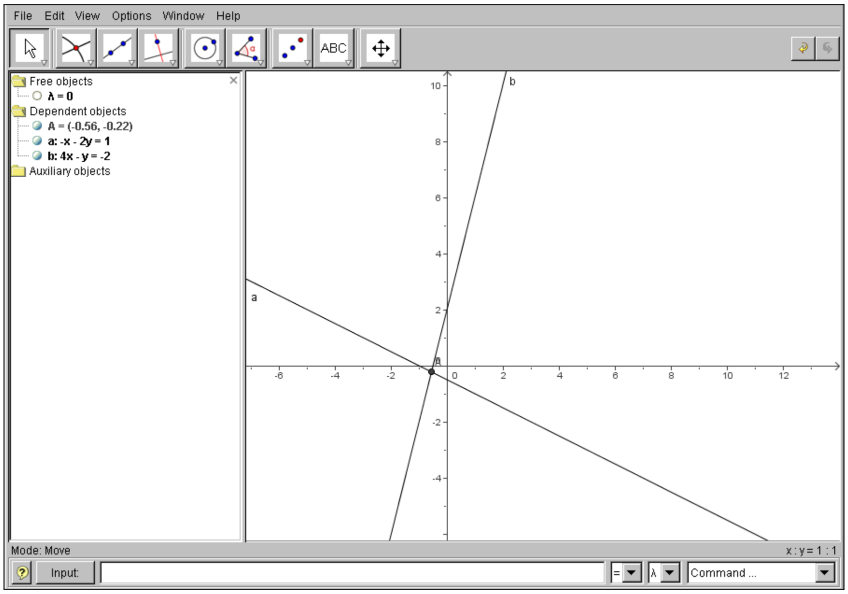
```
(λ-1)x-2y=1
Enter
4x-(λ+1)y=-2
Enter
```

η Geogebra αντιλαμβάνεται τις εξισώσεις για $\lambda = 0$ δηλαδή τις

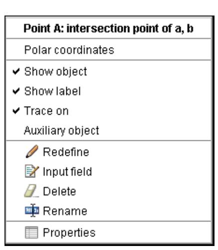
$$-x - 2y = 1,\ 4x - y = -2$$

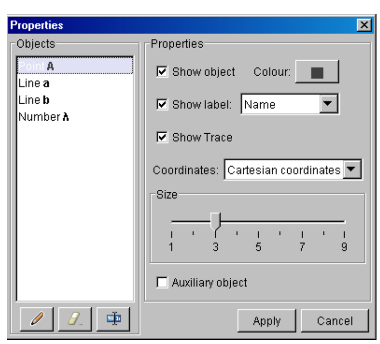
Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα αν ζητήσουμε από την Geogebra να βρεί το σημείο τομής των δύο ευθιών θα το ονομάσει A και στο παράθυρο

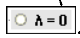
Άλγεβρας θα δώσει κατά προσέγγιση τις συντεταγμένες του: -0,56 και -0,22. Οι ακριβείς συντεταγμένες που προκύπτουν από τη λύση του συστήματος $-x-2y=1,\ 4x-y=-2$ είναι $x=-\frac{5}{9}=-0,55556$ και $y=-\frac{2}{9}=-0,22222$. Η εικόνα που θα παρουσιάζεται μετά από όλα αυτά θα είναι:



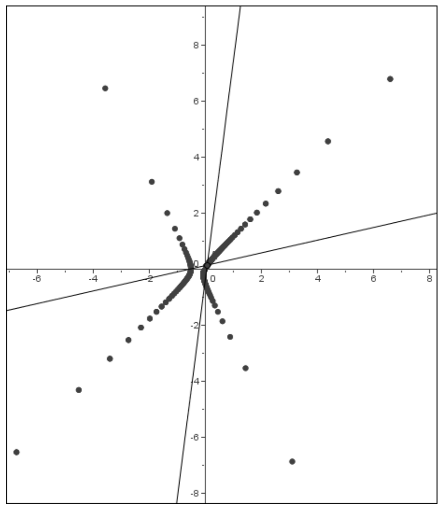
Τι γίνεται όμως με τις άλλες τιμές του λ; Μπορούμε να αλλάζουμε τις τιμές του λ ως εξής. Από την εργαλειοθήκη επιλέγουμε το εργαλείο και κάνουμε διπλό αριστερό κλικ στο παράθυρο της Άλγεβρας στην περιοχή που γράφει `λ=0`. Η περιοχή θα μετατραπεί σε ένα πλαίσιο διαλόγου. Αν λοιπόν πληκτρολογήσουμε μία τιμή του λ και δώσουμε `Enter` θα έχουε τη νέα θέση των ευθειών για αυτή την τιμή του λ. Μπορούμε όμως να πάρουμε μία ιδέα πως μεταβάλλεται το σημείο τομής των δύο ευθειών ως εξής. Με το εργαλείο επιλέγουμε από το παράθυρο Γεωμετρίας το σημείο A και δίνουμε δεξί κλικ. Από τις επιλογές που θα εμφανισθούν επιλέγουμε `Properties` και στο νέο παράθυρο που θα εμφανισθεί ενεργοποιούμε το `Show Trace` και δίνουμε `Apply`. Έτσι έχουμε δηλώσει στη Geogebra *να δείχνει το ίχνος του σημείου μας όταν αυτό μετακινείται.*





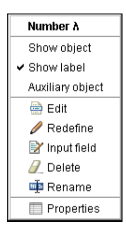
Κατόπιν στο παράθυρο της Άλγεβρας δίνουμε αριστερό κλικ στην περιοχή που γράφει `λ=0`. Η περιοχή θα γκριζάρει χωρίς αυτή τη φορά να εμφανιθεί πλαίσιο διαλόγου: 

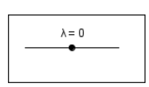
. Αν κρατήσουμε πατημένο κάποιο από τα πλήκτρα `Shift` και συγχρόνως πατάμε καποιο από τα βελάκια του πληκτρολογίου θα δούμε ότι η τιμή του λ αλλάζει και το σημείο Α μετακινείται αφήνοντας ένα ίχνος. Αν πατήσουμε αρκετή ώρα διάφορα βελάκια θα έχουμε, περίπου, την ακόλουθη εικόνα που μας δίνει μία ιδέα της γραμμής που γράφει το κοινό σημείο των ευθειών όταν η παράμετρος αλλάζει:



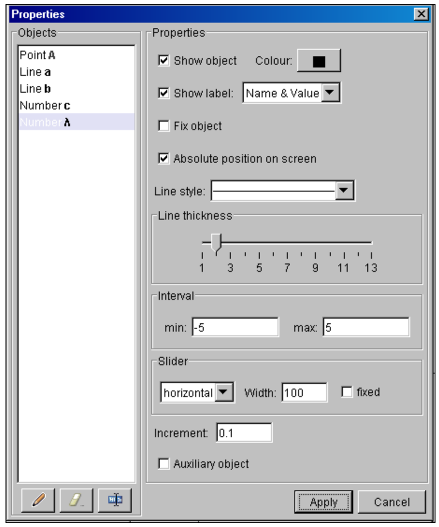
Αν θέλουμε να σβήσει η γραμμή αρκεί να μετακινήσουμε ελαφρά την επιφάνεια σχεδίασης με το εργαλείο .

Ένας άλλος τρόπος για να επιφέρουμε μεταβολές στο λ είναι να το συνδέσουμε με κάποιο δρομέα. Δίνοντας δεξί κλικ στην περιοχή που γράφει `λ=0` από τον κατάλογο των επιλογών που θα εμφανισθούν επιλέγουμε `Show Object`. Στο πάνω αριστερό μέρος του πραθύρου Γεωμετρίας θα εμφανισθεί ένας δρομέας για το λ:





Μπορούμε να αλλάξουμε ιδιότητες του δρομέα κάνοντας δεξί κλικ και από τον κατάλογο επιλέγοντας `Properties`. Θα εμφανισθεί ένας πίνακας με ιδιότητες του δρομέα:

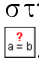


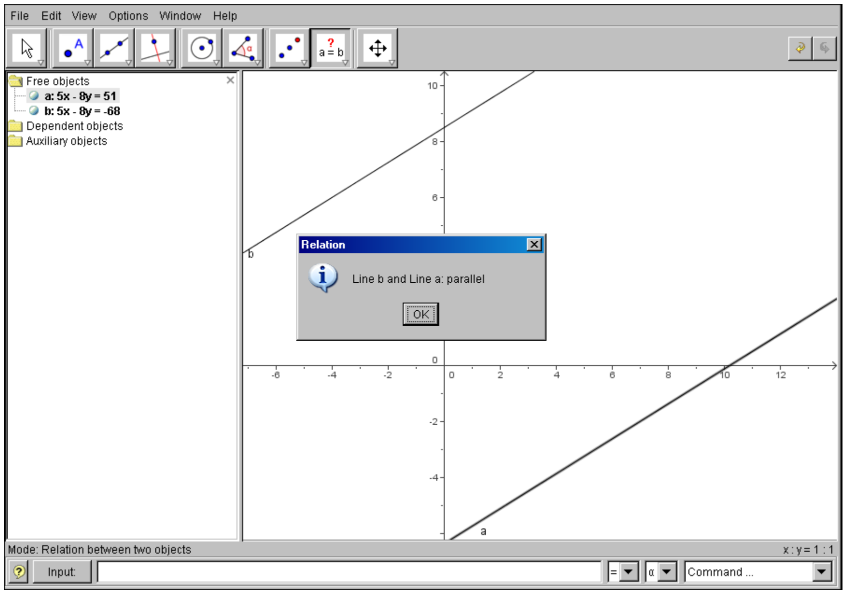
Ο πίνακας αυτός είναι τυπικός πίνακας ιδιοτήτων και εμφανίζεται με παραλλαγές σε κάθε αντικείμενο της Geogebra. Μπορούμε να αλλάξουμε τα χρώματα τις γραμμές τη θέση κ.α. Ειδικά για το δρομέα ενδιαφέρον έχουν οι παρακάτω ιδιότητες:

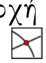
Διάστημα: Κάτω από την επιλογή `Interval` μπορούμε να καθορίσουμε τις τιμές (ελάχιστη και μέγιστη) εντός των οποίων θα μεταβάλλεται η παράμετρος που ρυθμίζει ο δρομέας.

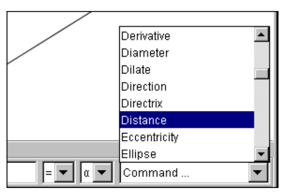
Βήμα: Η επιλογή `Increment` μας επιτρέπει να μα καθορίζουμε την αύξηση δηλαδή το βήμα με το οποίο θα αυξάνεται η παράμετρος. Μικρό βήμα σημαίνει ότι η παράμετρος αυξομειώνεται με μικρές τιμές π.χ. βήμα 0,1 σημαίνει ότι μετατοπίζοντας το δρομέα η παράμετρος αυξομειώνεται κατά 1/10. Σημειώστε ότι μικρές τιμές καθυστερούν τη χάραξη του ίχνους ενός σημείου αλλά παράλληλα δίνουν πιο ακριβή αποτελέσματα.

6.2 ΔΥΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΥΘΕΙΩΝ

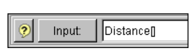
Απόσταση Παραλλήλων Η άσκηση Α2 σελίδα 75 του βιβλίου κατεύθυνσης της Β′ Λυκείου ζητάει να δειχθεί ότι οι ευθείες $5x - 8y - 51 = 2$ και $5x - 8y + 68 = 0$ και στη συνέχεια να βρεθεί η απόσταση τους. Αν εισάγουμε στην Geogebra τις δύο ευθείες μπορούμε να τις συγκρίνουμε με το εργαλείο . Θα εμφανισθεί ένα παράθυρο που μας πληροφορεί ότι οι ευθείες μας είναι παράλληλες:



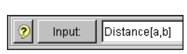
Η απόσταση των δύο ευθειών μπορεί να βρεθεί με πολλούς τρόπους. Ένας είναι αυτός που υποδυκνείει η εκφώνηση της άσκησης. Πρώτα με το ποντίκι και το εργαλείο  σημειώνουμε την αρχή των αξόνων.Μετά με το εργαλείο  φέρνουμε ευθεία από την αρχή των αξόνων κάθετη σε μία ευθεία άρα και στην άλλη και με το εργαλείο  σημειώνουμε τα σημεία τομής. Αν τώρα με το εργαλείο  ορίσουμε το τμήμα των σημείων τομής στο παράθυρο της Άλγεβρας θα εμφανισθεί, ***κατά προσέγγιση***, το μήκος του **d = 12.61**. Ασφαλώς θα έχετε προσέξει ότι η Geogebra χρησιμοποιεί τελεία αντί για υποδιαστολή στα δεκαδικά ψηφία. Ένα άλλο τρόπο μπορεί να μας δώσει η γραμμή εντολών. Η Geogebra έχει ονομάσει τις ευθείες μας `a` και `b`. Επιλέγουμε την εντολή `Distance`:



και δίνουμε αριστερό κλικ. Στην γραμμή εντολών εμφανίζεται η εντολή:

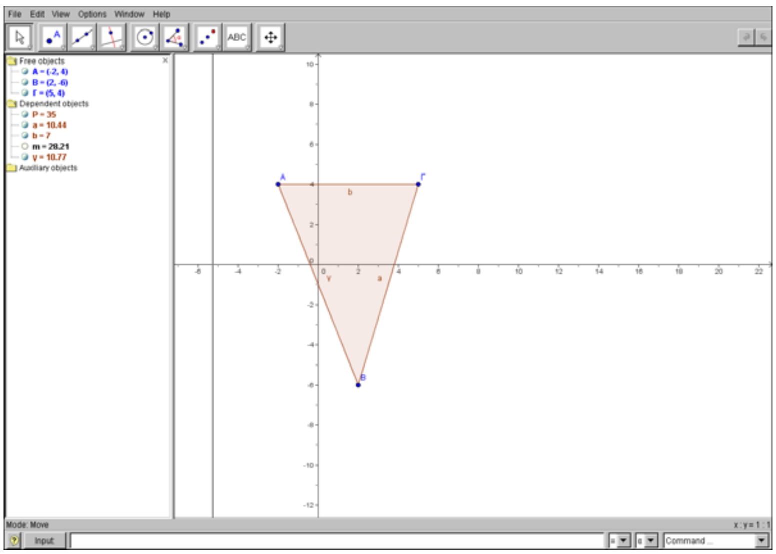


Συμπληρώνουμε τον κενό χώρο ανάμεσα στα άγκιστρα δηλαδή εκεί που είναι ο κέρσορας με τα ονόματα των δύο ευθειών χωρισμένων με κόμμα. Η εντολή θα γίνει:

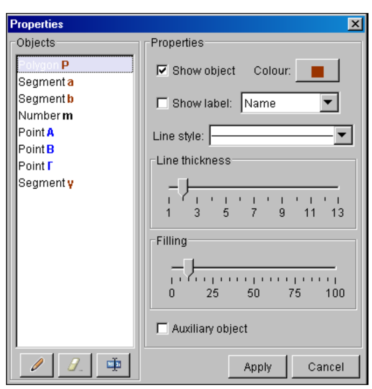


και δίνουμε `Enter`. Η Geogebra θα μας δώσει στο παράθυρο της Άλγεβρας την απόσταση των δύο ευθειών.

Περίμετρος και Εμβαδόν Τριγώνου. Από το βιβλίο κατεύθυνσης της Β′ Τάξης παίρνουμε τα δεδομένα της άσκησης Α7(ii) σελίδα 75. Εισάγουμε τις κορυφές γράφοντας στη γραμμή εντολών `A=(-2,4)`, `B=(2,-6)` και `Γ=(5,4)`. Στη συνέχεια με το εργαλείο  σχηματίζουμε το πολύγωνο, εν προκειμένω τρίγωνο, με κορυφές αυτά τα σημεία (Η κορυφή με την οποία αρχίζουμε θα χτυπηθεί δύο φορές). Στο παράθυρο της Άλγεβρας θα εμφανισθεί το εμβαδόν του τριγώνου με τη μορφή p=35 και τα μήκη των πλευρών του τριγώνου που η Geogebra τα έχει ονομάσει `a, b, γ`. Ας πούμε ότι η περίμετρος είναι `m`. Γράφουμε στη γραμμή εντολών a+b+γ η Geogebra θα μας δώσει στο παράθυρο της Αλγεβρας την περίμετρο του ΑΒΓ: m = 28.21.



Έχουμε αναφέρει ότι μπορούμε να αλλάζουμε μερικές ιδιότητες ενός αντικειμένου. Αυτό γίνεται με αριστερό κλικ στο αντικείμενο. Στο συγκεκριμένο σχήμα αν για παράδειγμα κάνουμε κλικ στο τρίγωνο και επιλέξουμε `Properies` θα έχουμε το παρακάτω παράθυρο:

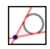


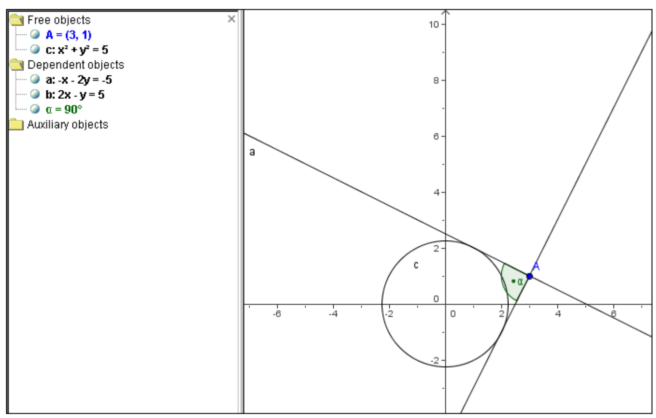
Μπορείτε να πειραματισθείτε αλλάζοντας το χρώμα το είδος των γραμμών το γέμισμα κ.α.

6.3 Τρια προβληματα με κυκλους

Εφαπτομένη κύκλου από σημείο εκτός αυτού. Στο βιβλίο κατεύθυνσης της Β′ τάξης στην εφαρμογή της σελίδας 85 ζητείται να αχθούν εφαπτόμενς του κύκλου $x^2 + y^2 = 5$ από το σημείο $\mathrm{A}(3, 1)$. Για να γίνει αυτό με την Geogebra αρκεί να εισάγουμε το σημείο και τον κύκλο όπως έχουμε μάθει:

```
x^2+y^2=5
Enter
A=(3,1)
Enter
```

Κατόπιν επιλέγουμε το εργαλείο  και κάνουμε αριστερό κλικ στο σημείο και τον κύκλο. Η Geogebra θα σχεδιάσει τις δύο εφαπτομένες και στο παράθυρο της Άλγεβρας θα δώσει και τις εξισώσεις τους (συγκρίνετε με τις εξισώσεις που δίνει το βιβλίο). Μπορούμε τώρα να βρούμε τη γωνία τους με το εργαλείο  και θα έχουμε τη γωνία τους και το μέτρο της. Η Geogebra επιβεβαιώνει ότι οι εφαπτόμενες είναι κάθετες.

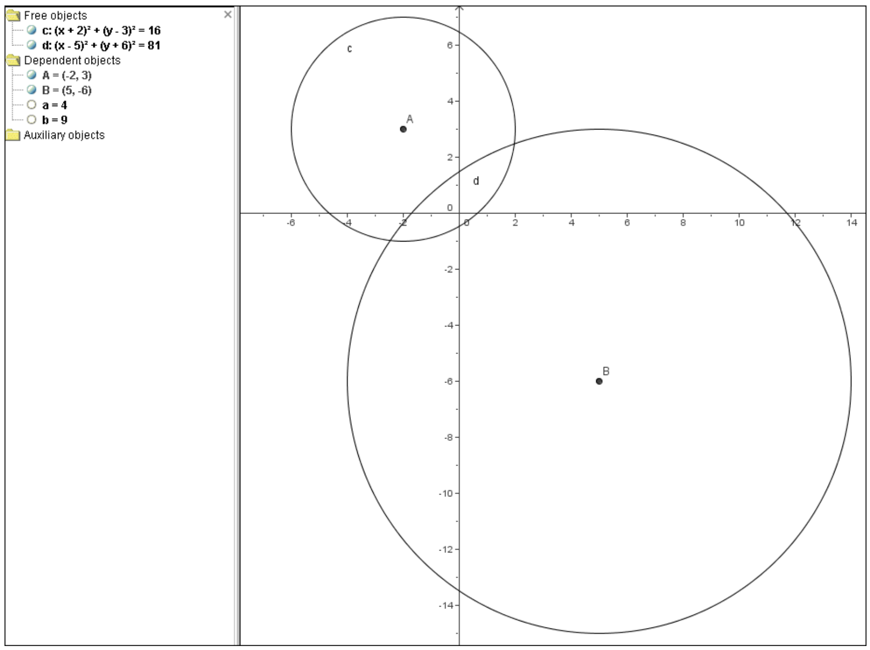


Κέντρα και ακτίνες κύκλων. Στην άσκηση Α6 του βιβλίου κατεύθυνσης της Β′ τάξης σελίδα 88 ζητείται να βρούμε κέντρο και ακτίνα των κύκλων $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ και $x^2 + y^2 - 10x + 12y - 20 = 0$. Εισάγουμε τις εξισώσεις απότην γραμμή εντολών γράφοντας:

```
x^2+y^2+4x-6y-3=0
Enter
x^2+y^2-10x+12y-20=0
Enter
```

Η Geogebra θα σχεδιάσει τους κύκλους και θα τους ονομάσει c και d. Ενδέχεται οι κύκλοι να μην εμφανίζεται ολόκληροι στο παράθυρο Γεωμετρίας οπότε θα χρειασθεί να μετακινήσετε την επιφάνεια σχεδίασης και να αλλάξετε την μεγέθυνση. Η Geogebra ενώ εισάγαμε τις εξισώσεις σε ανηγμένη μορφή τις παρουσιάζει στο παράθυρο της Άλγεβρας έχοντας κάνει συμπλήρωση τετραγώνου.

Ήδη μπορούμε να βρούμε κέντρα και ακτίνες. Ωστόσο ας χρησιμοποιήσουμε την γραμμή των εντολών. Αν επιλέξουμε την εντολή `Center` δύο φορές και κάθε φορά γράψουμε τα ονόματα των κύκλων δηλαδή `c` και `d` θα εμφανισθούν στο παράθυρο Άλγεβρας αλλά και της Γεωμετρίας τα κέντρα. Αν κάνουμε το ίδιο με την εντολή `Radius` θα έχουμε και τις ακτίνες.



Μία μάλλον μόνιμη επαφή. Στην άσκηση B2 σελίδα 88 του βιβλίου κατεύθυνσης της Β Λυκείου ζητείται να αποδείξουμε ότι η ευθεία

$$x\sigma\upsilon\nu\varphi + y\eta\mu\varphi = 4\eta\mu\varphi - 2\sigma\upsilon\nu\varphi + 4$$

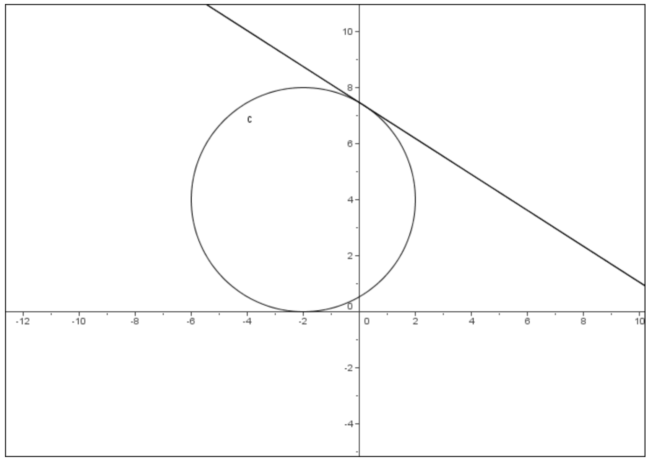
εφάπτεται στον κύκλο

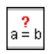
$$x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4 = 0$$

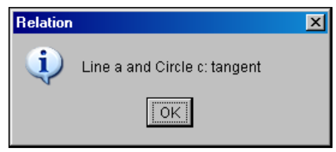
Θα δούμε παρακάτω πως η Geogebra μπορεί να χειρισθεί αυτό το ζήτημα. Εισάγουμς πρώτα την εξίσωση του κύκλου και μία ενδεικτική τιμή της παραμέτρου ϑ και τέλος την εξίσωση της ευθείας. Ως τιμή της φ επιλέγουμε την τιμή φ=1 (1 σημαίνει 1 ακτίνιο που είναι περίπου 57 μοίρες). Η σειρά των εντολών είναι η ακόλουθη:

```
x^2+y^2+4x-68y+4=0
Enter
θ=1
Enter
x * cos (φ)+ y * sin (φ)=4 * sin(φ)-2 * cos(φ) +4
Enter
```

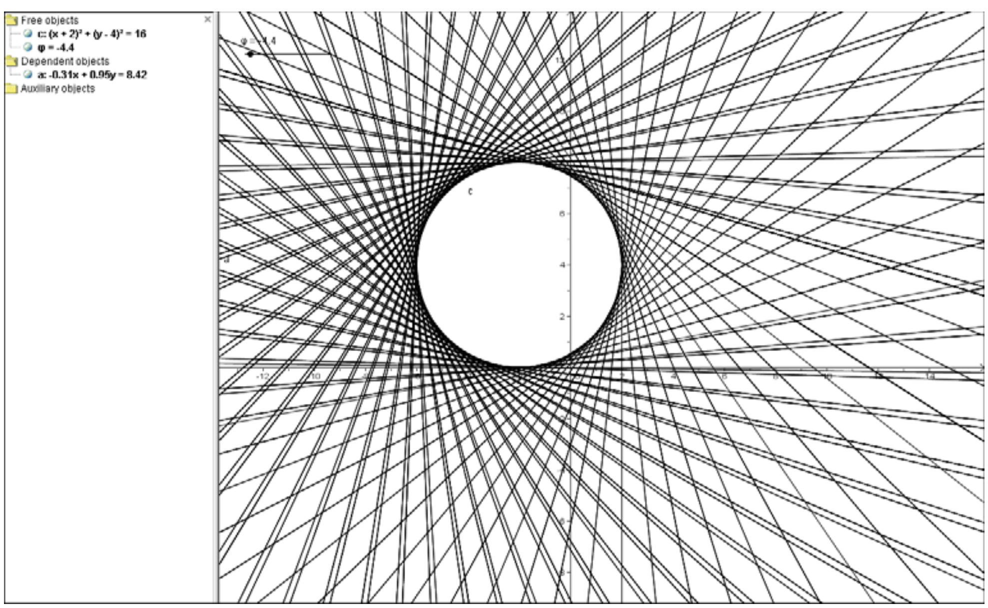
Η Geogebra θα σχεδιάσει την ευθεία και τον κύκλο:



Αν με το εργαλείο  ζητήσουμε από την Geogebra να συγκρίνει ευθεία - κύκλο θα μας πληροφορήσει ότι η ευθεία και ο κύκλος εφάπτονται.



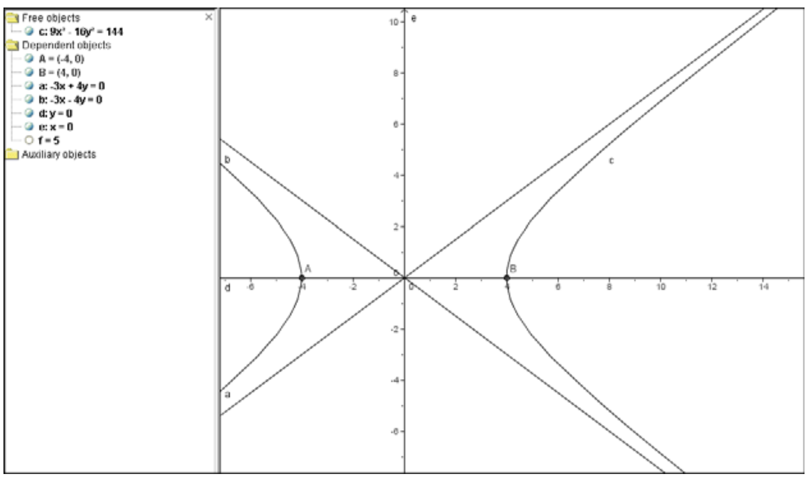
Βέβαια αυτό το συμπέρασμα αφορά μόνο μία ειδική θέση της ευθείας που αντιστοιχεί στην τιμή φ=1. Για να πάρουμε μία ιδέα για τις άλλες τιμές μπορούμε να μεταβάλλουμε το φ συνδέοντας αυτή την παράμετρο με ένα δρομέα οπότε η ευθεία θα αλλάζει θέση. Ενδιαφέρον είναι κάνοντας δεξί κλικ στην ευθεία να δηλώσουμε στις ιδιότητες ότι θέλουμε το ίχνος να είναι ενεργό. Αν το κάνουμε αυτό και αυξομειώσουμε το ϑ θα έχουμε την ακόλουθη ενδιαφέρουσα εικόνα:



7 Κωνικές Τομές

7.1 Στοιχεια κωνικων τομων

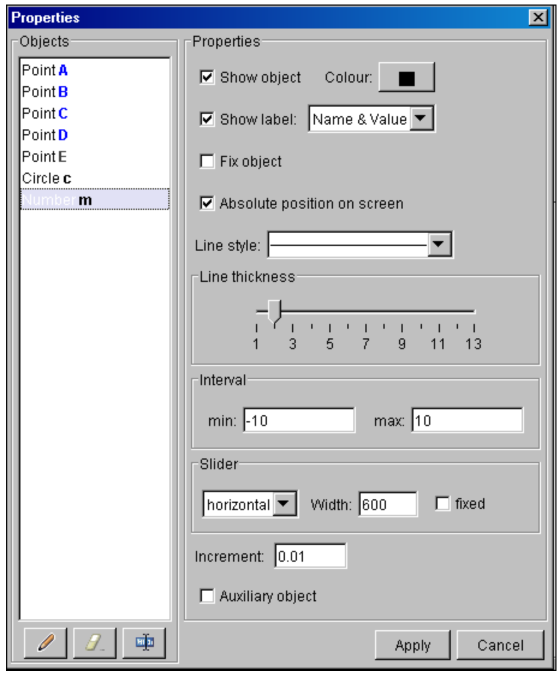
Εύρεση βασικών στοιχείων μίας κωνικής τομής. Αν εισάγουμε στην Geogebra μία πολυωνυμική εξίσωση β′ βαθμού με δύο μεταβλητές το πράγραμμα αντιλαμβάνεται ότι πρόκειται για εξίσωση κωνικής τομής, κάτι που προβλέπεται από τη θεωρία και έχει τη δυνατότητα να υπολογίζει τα στοιχεία της. Εισάγουμε την υπερβολή $9x^2-16y^2=144$. Η Geogebra θα της δώσει ένα όνομα που αν είναι η πρώτη καμπύλη που επεξεργαζόμαστε θα είναι `c`. Αν τώρα εφαρμόσουμε στην `c` τις εντολές `Asymptote`, `Axes`, `Vertex`, `Eccentricity` η Geogebra θα σχεδιάσει και θα γράψει τις εξισώσεις των ασυμπτώτων, θα σχεδιάσει και θα γράψει τις εξισώσεις των αξόνων (ως προς το σχεδιάσμα δεν θα παρατηρήσετε καμμία διαφορά διότι οι άξονες είναι ήδη σχεδιασμένοι), θα σημειώσει και θα δώσει τις συντεταγμένες των κορυφών και τέλος θα γράψει στο παράθυρο της Άλγεβρας την εκκεντρότητα:

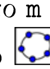


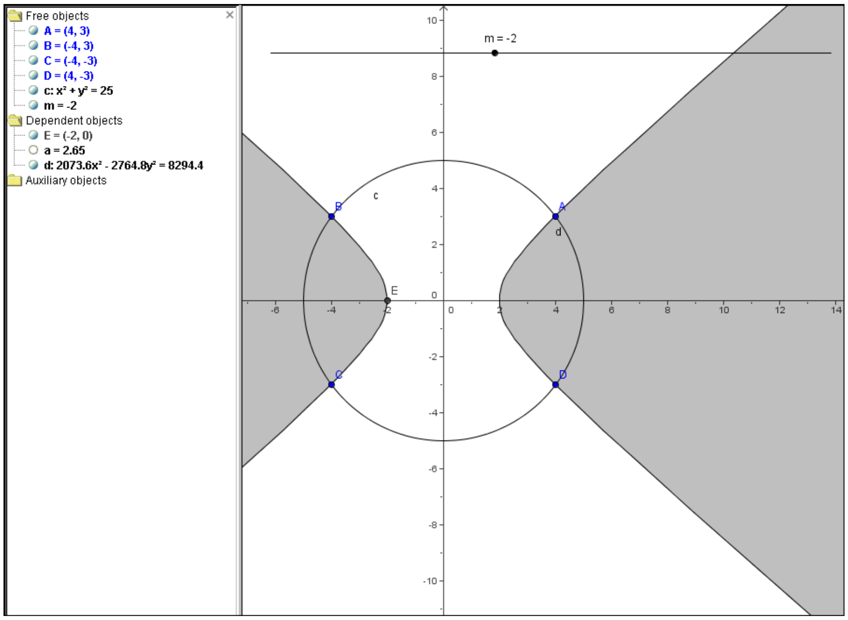
Προσδιορισμός Κωνικής Τομής από 5 σημεία. Είναι γνωστό ότι από 5 σημεία διέρχεται μία κωνική τομή. Η Geogebra μπορεί να υπολογίζει την εξίσωση αυτής της κωνικής τομής καθώς και να την σχεδιάσει. Βέβαια ανάλογα με τη επιλογή των σημείων η κωνική δεν θα είναι σε κανονική θέση δηλαδή οι άξονες της δεν θα είναι κατ′ ανάγκην οι άξονες $x'x$ και $y'y$ ούτε η εξίσωση της θα είναι σε μία από τις μορφές που έχουμε γνωρίσει. Θα εμφανίζεται στην γενική μορφή:

$$ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$$

Στο επόμενο παράδειγμα θα εισάγουμε εμείς τα 5 σημεία διατηρώντας κάποιο είδος συμμετρίας. Τα 4 από αυτά θα τα επιλέξουμε να ανήκουν στον κύκλο $x^2+y^2=25$. Εισάγουμε τον κύκλο και μετά δίνουμε `A=(4,3)`, `B=(-4,3)`, `C=(-4,-3)` και `D=(4,-3)`. Το 4ο σημείο θα είναι ένα μεταβλητό σημείο του $x'x$. Για το σκοπό αυτό εισάγουμε μία παράμετρο m με αρχική τιμή `m=5` και το σημείο `E=(m,0)` το οποίο θα ανήκει ασφαλώς στον κύκλο $x^2 + y^2 = 25$. Στο παράθυρο της Άλγεβρας με δεξί κλικ στο `m` ζητάμε από την Geogebra να εμφανίσει το αντικείμενο και πάλι με δεξί κλικ στο δομέα που θα εισαχθεί, στις ιδιότητες, κάνουμε τις ακόλουθες ρυθμίσεις:



δηλαδή έχουμε αλλάξει σε 600 το μέγεθος του δρομέα, έχουμε βάλει -10 και 10 ελάχιστη και μέγιστη τιμή για το `m` και έχουμε ρυθμίσει το βήμα στο 1/100. Κατόπιν ενεργοποιούμε το εργαλείο  και κάνουμε κλικ σε κάθε ένα από τα πέντε σημεία. Η Geogebra θα σχεδιάσει ένα πανομοιότυπο κύκλο με τον αρχικό θα τον ονομάσει `d` και θα ενημερώσει το παράθυρο Άλγεβρας **στα εξαρτημένα αντικείμενα**. Κάνουμε δεξί κλικ στο `d` στο παράθυρο Άλγεβρας και από τις ιδιότητες επιλέγουμε γέμισμα (`Filling`) ίσο με 25. Τέλος ζητάμε από την Geogebra να μας υπολογίσει την εκκεντρότητα της κωνικής τομής `d` με την εντολή `Eccentricity[d]`. Το παράθυρο της Άλγεβρας θα ενημερωθεί με την τιμή `a=0` διότι η εκκεντρότητα ενός κύκλου είναι 0. Μετακινώντας τώρα το δρομέα (λογικά πρέπει να έχει παραμείνει στην τιμή 5) ελέγχουμε την κίνηση του σημείου E και παρακολουθούμε τις μεταβολές της κωνικής που διέρχεται από τα 5 σημεία. Σημειώστε ότι το γραμμοσκιασμένο μέρος παρουσιάζει πάντα το **εσωτερικό** της κωνικής. Το **εξωτερικό** απαρτίζεται από τα σημεία από τα οποία μπορούν να αχθούν εφαπτομένες στην κωνική.

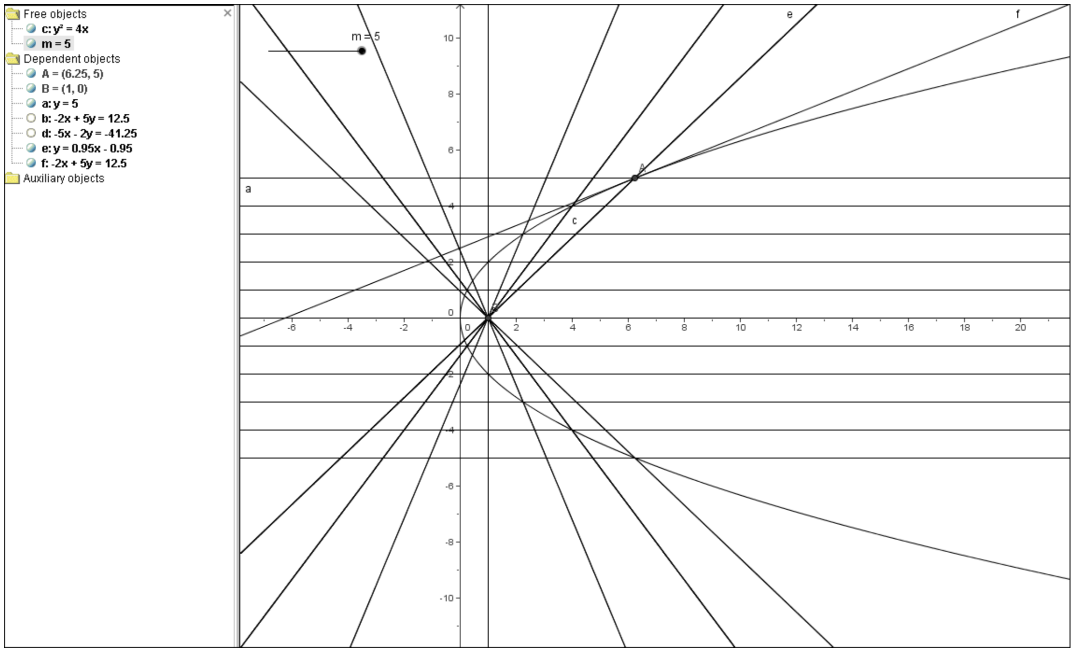


7.2 Η ΑΝΑΚΛΑΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟΜΩΝ.

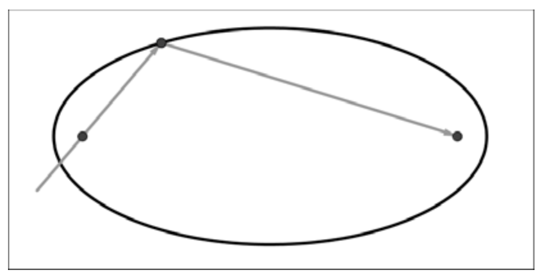
Η ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής. Εισάγουμε:

- την παραβολή $y^2 = 4x$
- την παράμετρο m με αρχική τιμή $m = 2$
- ένα δρομέα για την m
- την ευθεία $y = m$

και στη συνέχεια βρίσκουμε το σημείο τομής της $y = m$ με την παραβολή, την εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο αυτό καθώς και την κάθετη στην εφαπτομένη. Τέλος βρίσκουμε την συμμετρική ευθεία της $y = m$ ως προς την κάθετη. Έτσι η ευθεία $y = m$ έχει ανακλασθεί στην παραβολή. Ζητάμε από την Geogebra να βρεί την εστία της παραβολής. Αυτό γίνεται με την εντολή `Focus`. Μετακινώντας τον δρομέα θα επαληθεύσουμε ότι οι ανακλώμενες διέρχονται από την εστία. Το παρακάτω σχήμα έγινε με απόκρυψη κάθετης και εφαπτόμενης (δεξί κλικ και απενεργοποίηση του `Show object` και με αποτύπωση του ίχνους της $y = m$ και της συμμετρικής της δηλαδή της προσπίπτουσας και της ανακλώμενης. Το βήμα στο δρομέα έχει ρυθμισθεί σε 1.



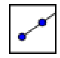
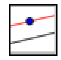
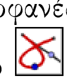
Η ανακλαστική ιδιότητα της έλλειψης. Είναι γνωστό ότι αν ακτίνα που διέρχεται από μία εστία της έλλειψης και ανακλασθεί στην έλλειψη θα διέλθει από την άλλη εστία. Μπορείτε να κάνετε ένα διάγραμμα παρόμοιο με εκείνο της παραβολής για να επαληθεύσετε αυτό το γεγονός.

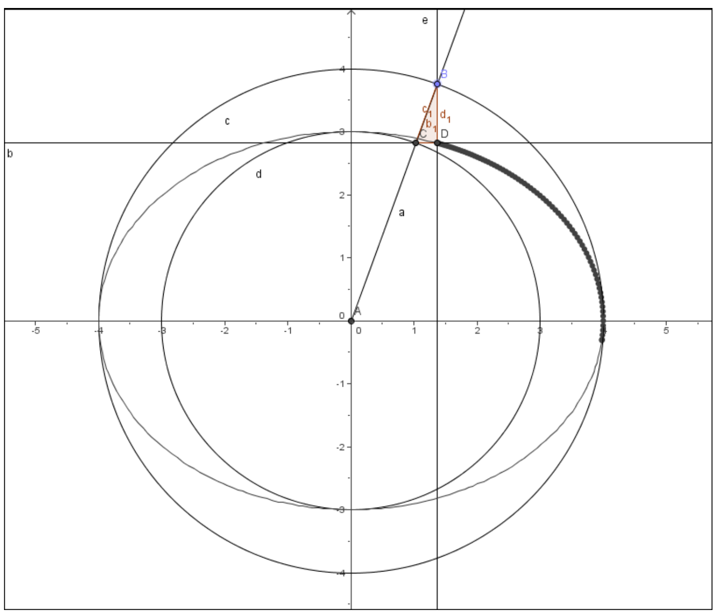


7.3 Δυο γεωμετρικοι τοποι

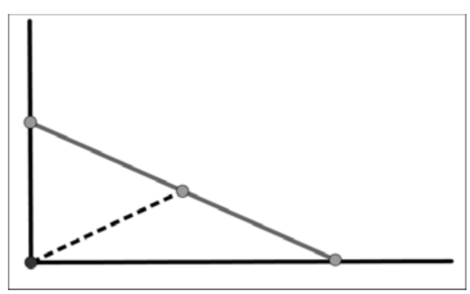
Οι παραμετρικές εξισώσεις μίας έλλειψης. Είναι γνωστό ότι η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ μπορεί να περιγραφεί με τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$\boxed{x = \alpha\sigma\upsilon\nu\varphi \qquad y = \beta\eta\mu\varphi}$$

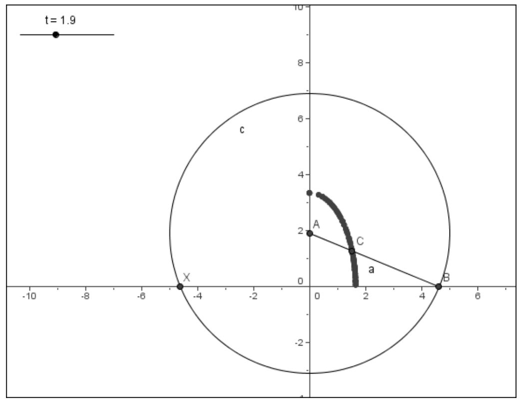
όπου $\varphi \in [0,\, 2\pi)$. Αυτό σημαίνει ότι κάθε σημείο $\varphi \in [0,\, 2\pi)$ της παραπάνω μορφής ανήκει στην έλλειψη και αντιστρόφως κάθε σημείο της έλλειψης μπορεί να πάρει την παραπάνω μορφή. Το βιβλίο κατεύθυνσης της Β′ Λυκείου στην σελίδα 106 δίνει μία γεωμετρική ερμηνεία των τύπων. Άς δούμε πως μπορούμε να πετύχουμε αυτή την κατασκευή με την Geogebra. Μεταφέρουμε την επιφάνεια σχεδίασης ώστε η αρχή να είναι στο κέντρο. Δίνουμε δύο τιμες στους ημιάξονες τις οποίες εισάγουμε: `a=5`, `b=3`. Κατόπιν αφού τοποθετήσουμε ένα σημείο A στην αρχή των αξόνων με το εργαλείο  γραφουμε δύο ομόκεντρους κύκλους με κέντρο αυτό το σημείο, και ακτίνες α και β. Τοποθετούμε ένα σημείο στον μεγάλο κύκλο έστω B και με το εργαλείο  κατασκευάζουμε ημιευθεία με αρχή το A που διέρχεται από το B. Ζητάμε από την Geogebra να βρεί το σημείο τομής της ημιευθείας με τον μικρό κύκλο. Λογικά η Geogebra θα ονομάσει αυτό το σημείο C. Με το εργαλείο  σχεδιάζουμε δύο ευθείες παράλληλες στους άξονες και βρίσκουμε το σημείο τομής τους D. Με το σχετικό εργαλείο δημιουργούμε και το τρίγωνο BCD. Είναι προφανές ότι το σημείο D εξαρτάται από το B. Τώρα ενεργοποιούμε το εργαλείο  με το οποίο η Geogebra βρίσκει γεωμετρικούς τόπους και κάνουμε κλικ πρώτα το D και μετά το B. Η Geogebra θα σχεδιάσει τον γεωμετρικό τόπο του D που είναι έλλειψη. Αν για το σημείο D ενεργοποιήσουμε την αποτύπωση ίχνους και επιλέξουμε το B τότε μπορούμε με τα βελάκια του πληκτρολογίου να κινήσουμε το B και η αποτύπωση να μας δώσει μερικά στιγμιότυπα της κίνησης πάνω στην έλλειψη.

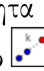


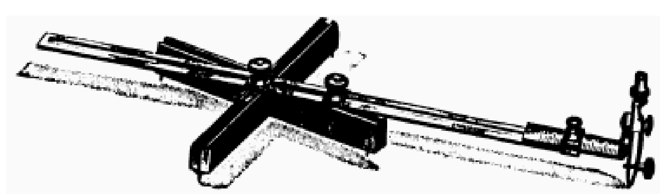
Ο Ελλειψογράφος. Ας υποθέσουμε ότι ένα ευθύγραμμο τμήμα σταθερού μήκους ολισθαίνει σε δύο κάθετες ημιευθείες. Δηλαδή αλλάζει θέση αλλά το ένα άκρο του βρίσκεται στη μία ευθεία και το άλλο στην άλλη. Μία κλασική άσκηση είναι να ζητείται ό γεωμετρικός τόπος του μέσου του.



Η απάντηση είναι εύκολη: Αν φέρουμε τη διάμεσο του ορθογωνίου τριγώνου αυτή θα είναι σταθερή αφού θα είναι ίση με το μισό της σταθερής υποτείνουσας του. Επομένως το μέσο θα γράφει ένα τεταρτοκύκλιο με κέντρο το κοινό σημείο των δύο καθέτων. Ένα πιο δύσκολο ερώτημα είνα το ακόλουθο. Τι συμβαίνει αν το σημείο δεν είναι μέσο άλλά κάποιο άλλο σταθερό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος; Το θέμα αυτό αξίζει τον κόπο να το μελετήσετε χρησιμοποιώντας συντεταγμένες. Ας δούμε πως μπορούμε να εξετάσουμε το θέμα με την Geogebra.

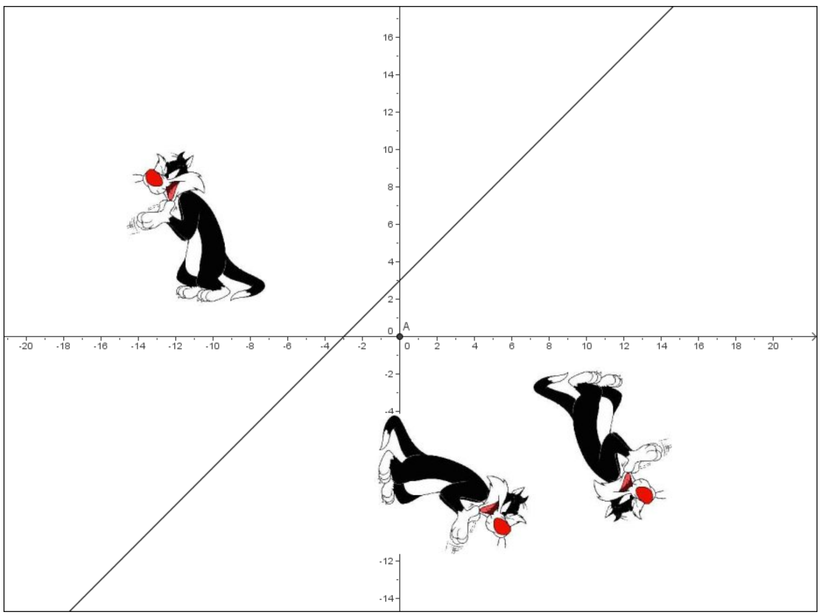


Ας ονομάσουμε $m = 5$ το σταθερό μήκος του τμήματος. Θα θεωρήσουμε ότι τα άκρα του ολισθαίνουν στους άξονες. Το άκρο του που θα κινείται στον $y'y$ θα είναι της μορφής $\mathrm{A}(0, \mathrm{t})$ όπου $0 \leq t \leq m$. Εισάγουμε λοιπόν τα $m = 5$ το t με αρχική τιμή $t = 3$, το A. Τοποθετούμε για το t ένα δρομέα στον οποίο από τις ιδιότητες ορίζουμε ελάχιστη τιμή για το t το 0 και μέγιστη το m. Για να βρούμε το άλλο άκρο του B αρκει να λάβουμε υπ΄ όψιν ότι θα ανήκει στον θετικό ημιάξονα $x'x$ και θα απέχει άπό το A απόσταση m. Μπορούμε να το βρούμε γράφοντας τον κύκλο με κέντρο A και ακτίνα m χρησιμοποιώντας το σχετικό εργαλείο. Ο κύκλος θα τμήσει τον $x'x$ σε δύο σημεία που τα μετονομάζουμε σε X,B κάνοντας δεξί κλικ και επιλέγοντας το `redefine` (B εκείνο με τις θετικές συντεταγμένες) Ας προσδιορίσουμε τώρα ένα σταθερό σημείο του AB παυ θα βρούμε τον τόπο του. Το σημείο αυτό έστω C καθορίζεται πλήρως από τον λόγο AC/AB έστω $s = 1/3$. Το σημείο C θα έχει την ιδιότητα $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. Επομένως μπορούμε να το βρούμε χρησιμοποιώντας το εργαλείο  με το οποίο θα βρούμε το ομοιόθετο του B με κέντρο ομοιοθεσίας A και λόγο ομοιοθεσίας s. Αν επιλέξουμε αποτύπωση του ίχνους του C θα δούμε τη γραμμή που γράφει η οποία όπως αποδεικνύεται είναι έλλειψη. Η ιδιότητα αυτή χρησίμευσε στην κατασκευή ελλειψογράφων που ήσαν όργανα για την σχεδίαση ελλείψεων.



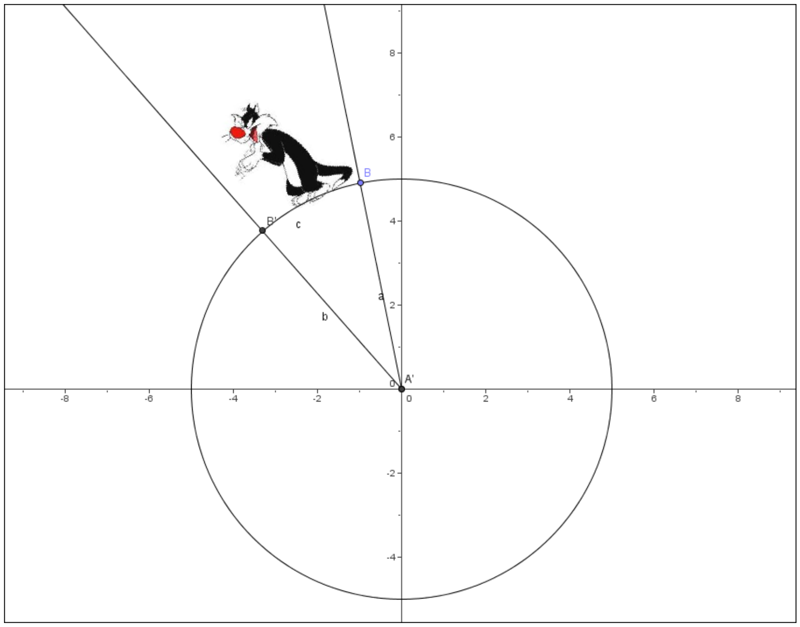
8 Περιπέτειες του Συλβέστρου.

Στην ενότητα αυτή υποθέτουμε ότι έχετε αποθηκευμένη στο δίσκο σας κάποια εικόνα, μικρού μεγέθους, του διάσημου συμπαθούς γάτου Sylvester. Αν δεν έχετε ή δε μπορείτε να βρείτε χρησιμοποιείστε κάποια άλλη εικόνα ζώου ή ανθρώπου. Με το εργαλείο τοποθετείστε την εικόνα σας στο δεύτερο τεταρτημόριο. Σχεδιάστε την ευθεία $y = x + 3$ και ονομάστε A την αρχή των αξόνων. Ενεργοποιείστε το εργαλειό και δώστε αριστερό κλικ στην εικόνα του γάτου και στο A. Θα πάρετε το συμμετρικό του ως προς A. Αλλάξτε εργαλείο ενεργοποιώντας το . Δώστε κλικ στην εικόνα και στην ευθεία. Θα έχετε το συμμετρικό του ως προς άξονα:



Μετακινείστε με το ποντίκι το γάτο για να δείτε πως συμπεριφέρονται τα συμμετρικά του.

Ανοίξτε ένα νέο παράθυρο της Geogebra (`File, New Window`). Τοποθετείστε ένα σημείο A στην αρχή των αξόνων και εισάγετε τον κύκλο $x^2 + y^2 = 25$. Τοποθετείστε μία ημιευθεία με αρχή την αρχή των αξόνων που διέρχεται από κάποιο σημείο B του κύκλου. Με το εργαλείο περιστρέψτε την ημιευθεία γύρω από το A κατά γωνία 30 μοιρών. Η Geogebra θα εμφανίσει μία νέα ημιευθεία από το A που τέμνει τον κύκλο στο B′. Εισάγετε πάλι την εικόνα του Συλβέστρου και κάντε δεξί κλικ πάνω της. Στις ιδιότητες επιλέξτε η γωνία `Corner` 1 είναι B′ και η 2 να είναι B. Κάντε τώρα αριστερό κλικ στο B και κρατώντας πατημένο το πλήκτρο κάντε μία βόλτα το γάτο γύρω από τον κύκλο.



9 Συναρτήσεις

9.1 Τα βασικα

Υπενθυμίσεις. Είστε ήδη από πολλά μαθήματα εξοικειωμένοι με την έννοια της συνάρτησης. Υπενθυμίζουμε ότι μία συνάρτηση είναι μία διαδικασία που σε αριθμούς αντιστοιχούμε αριθμούς έτσι ώστε σε κάθε αριθμό να αντιστοιχεί το πολύ ένας αριθμός. Αυτό σημαίνει ότι άν έχουμε μία συνάρτηση και ένα αριθμό δύο πράγματα μπορούν να συμβούν:

ή η συνάρτηση θα αντιστοιχίσει σε αυτό τον αριθμό ένα άλλο χωρίς όμως να αντιστοιχίσει και ένα δεύτερο

είτε η συνάρτηση δεν θα αντιστοιχίσει σε αυτό τον αριθμό κάποιο αριθμό

Συνήθως οι συναρτήσεις περιγράφονται με τύπους αν και αυτό δεν είναι απαραίτητο. Τύποι λοιπόν εφαρμόζονται σε αριθμούς και έχουμε συναρτήσεις. Ας πάρουμε τον τύπο

$$\boxed{y = 30 - x}$$

Αν δώσουμε μία τιμή στο x ας πούμε $x = 1$ τότε θα έχουμε και μία, μόνο, τιμή του y στην προκειμένη περίπτωση $y = 29$. Από τη στιγμή που αποφασίσουμε ποιά τιμή θα δώσουμε στο x δεν εχουμε καμμία αμφιβολία ποια τιμή θα πάρει ο y. Ο τύπος αυτός ορίζει μία συνάρτηση. Ποιές τιμές δα δίνουμε μπορεί να πάρει ο x; Μία γρήγορη απάντηση θα μπορούσε να ήταν: Αριθμοί. Ποιοί αριθμοί όμως; Αυτό εξαρτάται από το τί θέλει κανείς να εκφράσει με αυτό τον τύπο. Αν για παράδειγμα κάποιος ξεκινάει τη μέρα του με 30 ευρώ στην τσέπη ο παραπάνω τύπος μπορεί να εκφράσει το τι θα του απομείνει αν χαλάσει x ευρώ. Το x θα πρέπει να κυμαίνεται μεταξύ 0 και 30. Αν μάλιστα θέλουμε να είμαστε ρεαλιστές θα συμφωνήσουμε ότι το x δε μπορεί να πάρει όλες τις τιμές μεταξύ 0 και 30. Σκεφθείτε πώς μπορεί να ξοδέψει κανείς 13,333 ευρώ. Αν δούμε όμως τον τύπο αυτό ξερά ως μαθηματική έκφραση τότε μπορούμε να επιτρέψουμε στο x να πάρει όλες τις πραγματικές τιμές. Μιας και είστε εξοικειωμένοι με τους μιγαδικούς αριθμούς βλέπετε ότι δεν υπάρχει κανένα εμπόδιο να πάρει ό x και μιγαδικές τιμές.

Πεδίο ορισμού, σύνολο τιμών Στα λυκειακά Μαθηματικά δουλεύουμε με συναρτήσεις που παίρνουν και δίνουν πραγματικές τιμές δηλαδή συναρτήσεις που φέρουν τον γεμάτο επισημότητα τίτλο “ *Πραγματικές Συναρτήσεις μίας Πραγματικής Μεταβλητής* ”. Το *ποιές* τιμές θα “ εισάγουμε ” σε μία συνάρτηση εξαρτάται από το τί θέλουμε να εκφράσουμε με τη συνάρτηση. Οι επιτρεπτές τιμές απαρτίζουν ένα σύνολο το *πεδίο ορισμού* της συνάρτησης. Οι τιμές που θα δώσει η συνάρτηση στο παράδειγμα μας τα y απαρτίζουν ένα άλλο σύνολο το *σύνολο τιμών* (ή αλλιώς και πεδίο τιμών) της συνάρτησης. Στο παράδειγμα μας αν ο τύπος εκφράζει υπόλοιπο χρημάτων τότε το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο

$$\{0, \quad 0,01, \quad 0,02, \quad \ldots, 30\}$$

και σύνολο τιμών το

$$\{30, \quad 29,99, \quad 29,98, \quad \ldots, 0\}$$

Αν δε μας ενδιαφέρει κάποια συγκεκριμένη εφαρμογή του τύπου και τον εξετάζουμε ως μαθηματική έκφραση τότε ως πεδίο ορισμού θα πάρουμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

Γενικά αν έχουμε μία συνάρτηση που εκφράζεται με ένα τύπο και δεν έχουμε πληροφορίες για το πεδίο ορισμού της τότε το προσδιορίζουμε εμείς. Ο κανόνας που ακολουθούμε είναι απλός: Διαλέγουμε ως στοιχεία του πεδίου ορισμού εκείνα τα x από το $\mathbb{R}$ που “ επιτρέπεται” να αντικατασθούν στον τύπο χωρίς ο τύπος να “μπλοκάρει”. Οι συνηθισμένες προφυλάξεις που παίρνουμε είναι οι ακόλουθες:

Αν έχουμε	Φροντίζουμε να είναι
$\frac{1}{A}$	$A \neq 0$
$\sqrt{A}$	$A \geq 0$
$\ln A$	$A > 0$
$\log_A B$	$B > 0, \ A > 0, \ A \neq 1$
$\varepsilon\varphi A$	$A \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
$\sigma\varphi A$	$A \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

Άσκηση Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

1. $f\left(x\right)=\frac{1}{(x-1)(x-2)}$

2. $g\left(x\right)=\sqrt{\left(x-1\right)\left(x-2\right)}$

3. $h\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}}$

4. $t\left(x\right)=\ln\left(\left(x-1\right)\left(x-2\right)\right)$

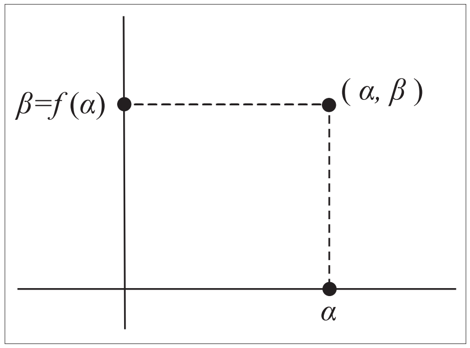
5. $s\left(x\right)=\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}$

Συμβολισμός των συναρτήσεων Συχνά δουλεύουμε με πολλές συναρτήσεις και γιαυτό είναι χρήσιμο να τις ξεχωρίζουμε δίνοντας τους διαφορετικά ονόματα. Οποιοδήποτε όνομα είναι κατάλληλο, συνηθίζεται όμως να χρησιμοποιούνται ονόματα με ένα γράμμα ενδεχομένως συνοδευόμενα με δείκτες. Πιο διαδεδομένη είναι η χρήση των ονομάτων f, g, h. Έτσι αν έχουμε τις συναρτήσεις $y=30-x$ και $y=50+x$ μπορούμε να ονομάσουμε την πρώτη f και την δεύτερη g και να γράψουμε $f\left(x\right)=30-x$ και $g\left(x\right)=50+x$. Ο συμβολισμός αυτός έχει μερικά ακόμη πλεονεκτήματα. Ονομαζει όχι μόνο τη συνάρτηση αλλά και τις τιμές. Έτσι το $f\left(2\right)$ είναι η τιμή της f για $x=2$ δηλαδή $f\left(2\right)=30-2=28$.

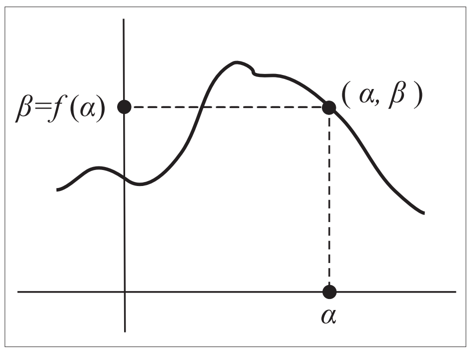
Μπορούμε να φαντασθούμε μία συνάρτηση f σαν ένα μηχανισμό. Δίνουμε x και παίρνουμε $f(x)$.

9.2 Γραφικη παρασταση μιας συναρτησης

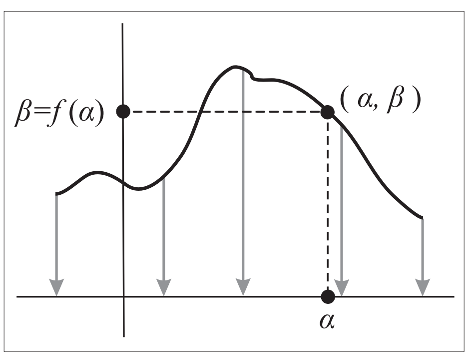
Η εισαγωγή των συντεταγμένων στο επίπεδο είναι ένα μαθηματικό επίτευγμα που μας επιτρέπει να εκφράζουμε γεωμετρικές ιδέες με όρους της Άλγεβρας και το αντίστροφο. Η βασική ιδέα είναι ότι το επίπεδο εφοδιάζεται με ένα σύστημα αξόνων και σε κάθε σημείο του επιπέδου αντιστοιχεί ένα ζεύγος αριθμών, *οι συντεταγμένες του*, και σε κάθε ζεύγος αριθμών ένα σημείο. Αυτή η ζεύξη Γεωμετρίας και Άλγεβρας βρίσκει θαυμαστή εφαρμογή στην περιγραφή των συναρτήσεων. Σε πολλές περιπτώσεις μας προσφέρει τη δυνατότητα, όχι πάντα βέβαια, να παίρνουμε μια γρήγορη ιδέα για το πώς συμπεριφέρεται μία συνάρτηση. Ας πούμε ότι έχουμε μία συνάρτηση f. Αν το α είναι μία τιμή που επιτρέπεται να εισαχθεί στην f δηλαδή ένας αριθμός που ανήκει στο πεδίο ορισμού της τότε η f μας δίνει την τιμή της στο α έστω β. Είναι $\beta=f(\alpha)$. Το ζεύγος (α,β) ορίζει ένα σημείο στο επίπεδο:

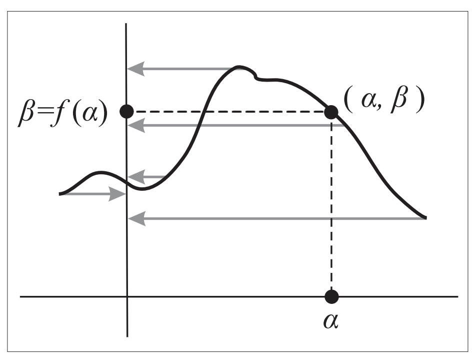


Όλα τα σημεία αυτού του είδους απαρτίζουν τη γραφική παράσταση της f.



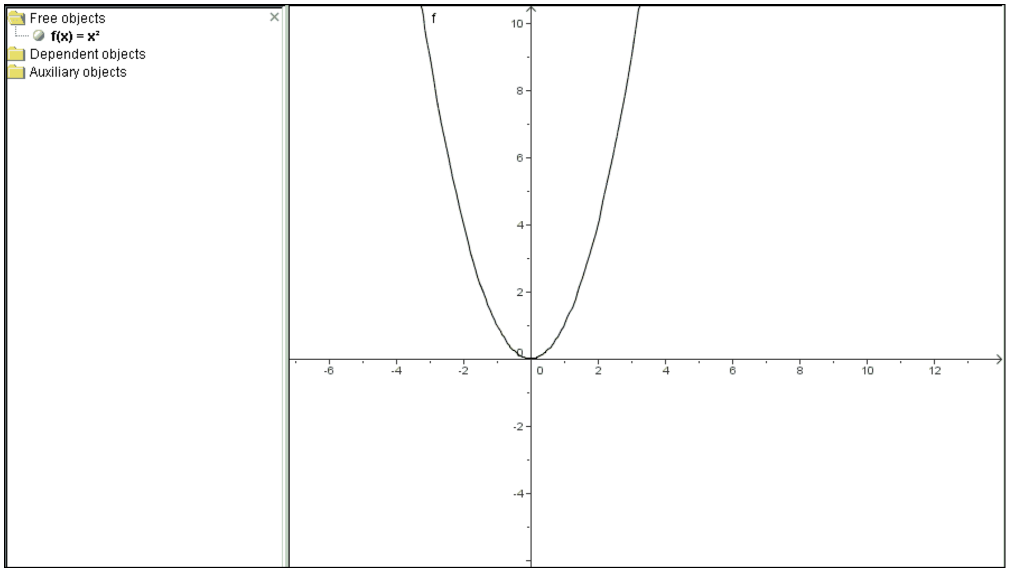
Αν προβάλλουμε όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της f στον $x'x$ θα έχουμε σημεία που αντιστοιχούν στο πεδίο ορισμού ενώ αν τα προβάλλουμε στον $y'y$ θα πάρουμε σημεία που αντιστοιχούν στο σύνολο τιμών.





Για να κάνουμε στην Geogebra τη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης που εκφράζεται με ένα τύπο αρκεί να εισάγουμε τον τύπο της συνάρτησης στη γραμμή των εντολών. Αν για παράδειγμα θέλουμε να κάνουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2$ θα δώσουμε τον τύπο της συνάρτησης με τη γνωστή μορφή

```
f(x)=x^2
Enter
```



Βλέπουμε ότι στο παράθυρο Γεωμετρίας εμφανίζεται η γραφική παράσταση και στο παράθυρο της Άλγεβρας εμφανίζεται ο τύπος της συνάρτησης. Είναι χρήσιμο να θυμόμαστε το “ συντακτικό ” με το οποίο εισάγονται οι παραστάσεις στην Geogebra.

Τι Θέλουμε	Τι Πληκτρολογούμε
A^B	`A^B`
$\frac{A}{B}$	`A/B`
$\sqrt{A}$	`sqrt(A)`
$\sqrt[n]{A}$	`A^(1/n)`
e^x	`exp(x)`
a^x	`α^x`
$\ln(x)$	`log(x)`
$\log_a x$	`log(x)/log(α)`
ημx	`sin(x)`
συνx	`cos(x)`
εφx	`tan(x)`
$\lvert x\rvert$	`abs(x)`

Άσκηση. Να κάνετε στην Geogebra τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων

1. $f(x) = x^2 - 5x + 4$

2. $g(x) = 2^x$

3. $h(x) = \sqrt{x-1}$

4. $d(x) = \frac{1}{x^3+x}$

5. $s(x) = \left|x^2 - 5x + 4\right|$

6. $w(x) = |x-1| + |x-4|$

7. $v(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$

Προσέξτε ότι η Geogebra αντιλαμβάνεται που δεν ορίζονται οι συναρτήσεις h, d, v. Πάνω-κάτω από τα σημεία που δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού δεν διέρχεται σημείο της γραφικής παράστασης.

9.3 Ριζες και Προσημο

9.3.1 Πάνω-Κάτω

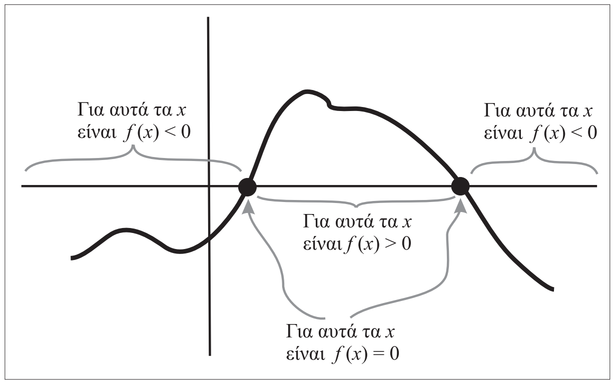
Με απλή εξέταση της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης μπορούμε να δούμε σε ποιά σημεία τέμνει τον άξονα $x'x$. Τα σημεία αυτά είναι σημεία της γραφικής παράσταση άρα της μορφής $(\alpha, f(\alpha))$ αφετέρου σημεία του άξονα $x'x$ δηλαδή άρα έχουν την τεταγμένη ίση με 0. Προφανώς θα είναι $f(\alpha) = 0$. Συνεπώς οι τετμημένες αυτών των σημείων είναι ρίζες της εξίσωσης

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

Αλλά και αντιστρόφως κάθε ρίζα της εξίσωσης (1) αντιστοιχεί σε σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$. Τα υπόλοιπα σημεία της γραφικής παράστασης *που δεν ανήκουν στον* $x'x$

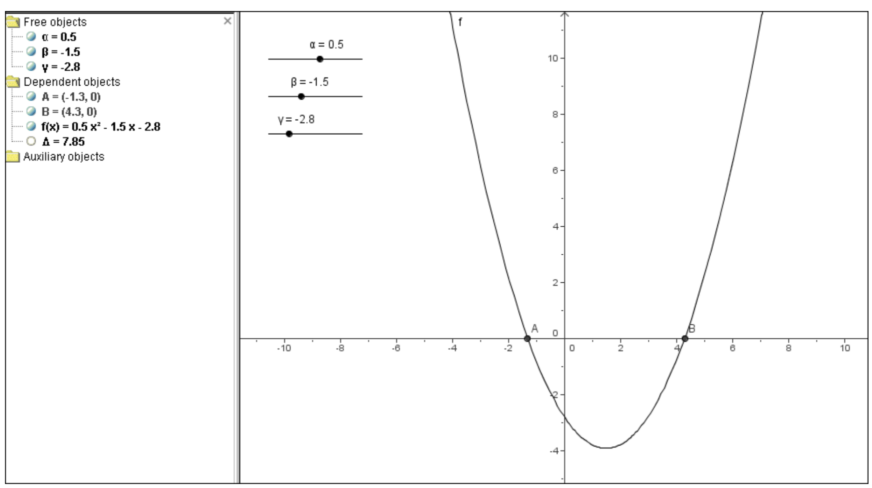
- ή θα είναι πάνω από τον $x'x$ οπότε θα πρόκειται για σημεία $(\alpha, f(\alpha))$ της γραφικής παράστασης της f με θετική τεταγμένη $f(\alpha) > 0$. Αυτά θα αντιστοιχούν σε λύσεις τηα ανίσωσης $f(x) > 0$

- ή θα είναι κάτω από τον $x'x$, θα έχουν αρνητική τεταγμένη και θα αντιστοιχούν σε λύσεις της ανίσωσης $f(x) < 0$



9.3.2 Τρία παραδείγματα

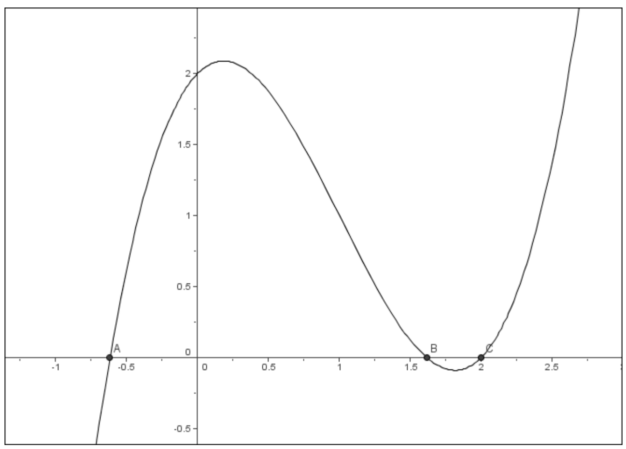
Ρίζες πρόσημο τριωνύμου. Στο παράδειγμα αυτό μπορούμε να δούμε πως συμπεριφέρονται ρίζες-πρόσημο ενός δευτεροβαθμίου τριωνύμου $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Θα ξεκινήσουμε πρώτα με το τριώνυμο $f(x) = x^2 + x + 1$ εισάγοντας διαδοχικά $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$ και $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Προσέξτε να εισάγετε τη συνάρτηση με τη μορφή $\alpha * x\hat{}2 + \beta * x + \gamma$. Στη συνέχεια στο παράθυρο της Άλγεβρας ζητάμε με δεξί κλικ σε κάθε ένα από τα α, β, γ να εμφανισθούν τα αντικείμενα αυτά. Θα δημιουργηθούν τρεις δρομείς. Εισάγουμε και τη διακρίνουσα δίνοντας στη γραμμή εντολών $\Delta = \beta\hat{}2 - 4 * \alpha * \gamma$. Αλλάζοντας τις τιμές των α, β, γ από τους δρομείς αλλάζουμε τη συνάρτηση. Θα επιβεβαιώσετε τα προβλεπόμενα από τη θεωρία.[3] Μπορείτε να ζητήσετε από την Geogebra να εντοπίσει τις ρίζες πάνω στον άξονα $x'x$. Αυτό γίνεται από τη γραμμή των εντολών εισάγοντας `Root[f]`.



[3]Όταν η διακρίνουσα είναι θετική το τριώνυμο έχει δύο ρίζες. Για τα x μεταξύ των ριζών η συνάρτηση παίρνει τιμές ετερόσημες του α ενώ για τιμές εκτός των ριζών παίρνει ετερόσημες. Όταν η διακρίνουσα είναι μικρότερη ή ίση του 0 το τριώνυμο διατηρεί το ίδιο πρόσημο με του α εκτός από μία μόνο περίπτωση: η διακρίνουσα είναι μηδέν και το x γίνεται ίσο με $\frac{-\beta}{2\alpha}$ τότε το τριώνυμο παίρναι την τιμή 0.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει και το εξής: Με δεξί κλικ πάνω στην καμπύλη ενεργοποιείστε την αποτύπωση του ίχνους. Μετακινώντας τώρα το δρομέα σε κάποιο από τα α, β, γ θα δείτε την οικογένεια καμπυλών με παράμετρο τον αριθμό που επιλέξατε.
Ερώτηση. Τι συμβαίνει όταν $\alpha = 0$;
Άσκηση. Βρείτε με τη βοήθεια της Geogebra τις ρίζες και το πρόσημο της $g(x) = (x-1)(x-3)$.

Μία πολυωνυμική εξίσωση. Στο βιβλίο Άλγεβρας της Β′ τάξης στην άσκηση Α2 i) ζητείται να βρεθούν οι ακέραιες ρίζες της εξίσωσης $x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$. Αν εισάγουμε στην Geogebra την συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$ θα δούμε ότι έχει μία ακέραια ρίζα, την 2, και δύο ακόμη ρίζες που η Geogebra τις εντοπίζει μόνο κατά προσέγγιση.



Αλγεβρικοί υπολογισμοί μας δίνουν ότι $x^3 - 3x^2 + x + 2 = (x-2)\left(x^2 - x - 1\right)$ και επομένως οι δύο άλλες ρίζες εκτός του 2 είναι οι ρίζες της $x^2 - x - 1 = 0$ δηλαδή οι αριθμοί $x = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} = 1,6181$ και $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} = -0,6181$

Μία πολυωνυμική ανίσωση. Στο βιβλίο Άλγεβρας της Β′ τάξης στην άσκηση Α6 ζητείται να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + x$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. Εισάγουμε τη συνάρτηση στην Geogebra και ζητάμε με την εντολή `Root[f]` να βρούμε τις ρίζες της f. Η περίπτωση αυτής της συνάρτησης είνα χαρακτηριστική για την αξία των εργαλείων της μεγέθυνσης της σμίκρυνσης και μεταφοράς της επιφάνειας σχεδίασης:

- Με σμίκρυνση μπορούμε να δούμε “ μακροσκοπικά ” μέρος της γραφικής παράστασης γύρω από τις ρίζες.
- Με μεγέθυνση μπορούμε να δούμε ότι η συνάρτηση έχει ρίζες τους αριθμούς 0 και 1.

- Φαίνεται ακόμη ότι υπάρχουν δύο ακόμη ρίζες $-1 < \rho_1 < 0$ και $4 < \rho_2 < 5$ τις οποίες η Geogebra μπορεί να βρεί μόνο κατα προσέγγιση.

- Η θεωρία λέσι ότι ένα πολυώνυμο δε μπορεί να έχει πλήθος ριζών μεγαλύτερο από το βαθμό του. Επομένως έχουμε τελικά 4 ρίζες.

- Φαίνεται ότι τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από τον $x'x$ είναι $(-\infty, \rho_1)$, $(0, 1)$ και $(\rho_2, +\infty)$.

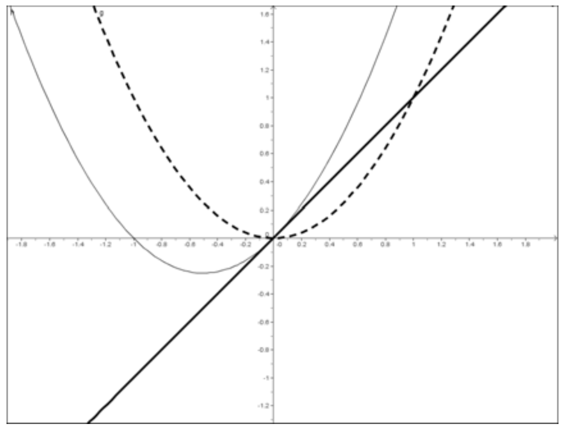
Οι ακριβεις τιμές των ρ_1, ρ_2 βρίσκονται βέβαια με υπολογισμό: Είναι $f(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + x = x(x-1)\left(x^2 - 4x - 1\right)$ και τα ρ_1, ρ_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 4x - 1 = 0$. Λύνοντάς την βρίσκουμε ότι $\rho_1 = 2 - \sqrt{5} = -0,2361$ και $\rho_2 = 2 + \sqrt{5} = 4,2361$.

9.4 Πράξεις συναρτήσεων

Αν έχουμε δύο συναρτήσεις μπορούμε να εφαρμόσουμε στις τιμές τους τις πράξεις των αριθμών και να φτιάξουμε νέες συναρτήσεις. Αυτή είναι μία πολύ συνηθισμένη διαδικασία στα Μαθηματικά: μαθηματικά αντικείμενα αλληλεπιδρούν και φτιάχνουν νέα. Ή αν δούμε τα πράγματα αντίστροφα μία συνάρτηση μπορεί να προκύψει από συνδυασμό πράξεων απλουστέρων συναρτήσεων. Στα επόμενα θα εξετάσουμε μερικές συνηθισμένες πράξεις μεταξύ συναρτήσεων.

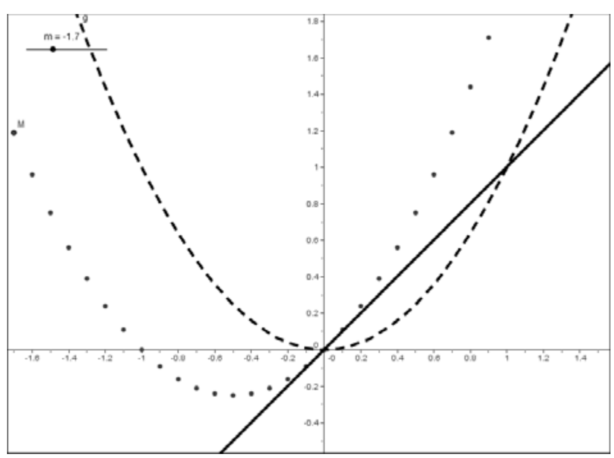
9.4.1 Πρόσθεση συναρτήσεων

Προσθέτοντας δύο συναρτήσεις Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο συναρτήσεις f και g. Αν κάθε φορά προσθέτουμε τις τιμές που προκύπτουν από το ίδιο x δηλαδή αν προσθέτουμε τα $f(x)$, $g(x)$ αποκτούμε μία νέα συνάρτηση το άθροισμα των f και g. Αυτή η νέα συνάρτηση, ας την ονομάσουμε h αντιστοιχεί στο x το $h(x) = f(x) + g(x)$ γιαυτό τη συμβολίζουμε με $h = f + g$. Ονομάζεται *άθροισμα* των f και g. Η Geogebra μπορεί να προσθέτει συναρτήσεις διότι θυμάται τις συναρτήσεις που κάθε φορά εισάγουμε. Ας πάρουμε τις $f(x) = x$ και $g(x) = x^2$. Τις εισάγουμε στην Geogebra και μετά εισάγουμε το άθροισμα τους h πληκτρολογώντας $h(x) = f(x) + g(x)$. Το τελικό αποτέλεσμα που θα πάρουμε εμφανίζεται παρακάτω. Η συγκεκριμένη εικόνα δεν είναι ακριβώς εκείνη που θα μας δώσει η Geogebra. Εχει προηγηθεί με μεγέθυνση και κεντράρισμα. Επίσης αλλαγή του πάχους της γραμμής της f και αλλαγής του πάχους αλλά και είδους της γραμμής για την γραφική παράσταση της g. Όλα αυτά από τις ιδιότητες.



Στο παραπάνω διάγραμμα προσέξτε την αλληλεπίδραση της f (παχειά συνεχής γραμμή) με την g (παχειά διακεκομμένη γραμμή) για να δώσουν το άθροισμα $h = f + g$. Στα αρνητικά x η f παίρνει αρνητικές τιμές και η g θετικές. Όταν σχηματίζουμε το άθροισμα οι τιμές της g ελαττούνται αφου σε αυτές προστίθενται αρνητικές τιμές. Γιαυτό το άθροισμα h (συνεχής λεπτή γραμμή) εμφανίζεται πιό κάτω από την g. Στα θετικά x και οι δύο τιμές των συναρτήσεων που προστίθενται είναι θετικές γιαυτό το άθροισμα εμφανίζεται πάνω από την g.

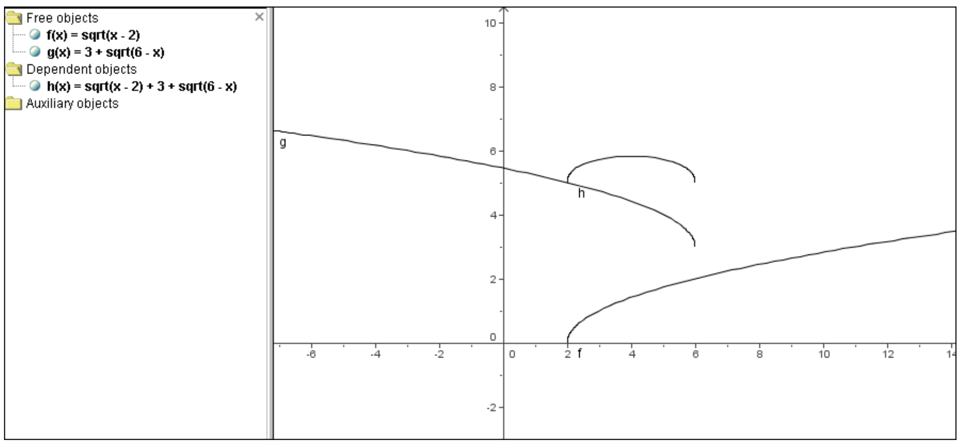
Μπορούμε να παρακολουθήσουμε καλύτερα πως δημιουργείται το άθροισμα αν αντί να εισάγουμε την $h(x) = f(x) + g(x)$ προσπαθήσουμε να βρούμε ένα ένα τα σημεία της γραφικής της παράστασης. Θα ξεκινήσουμε φτιάχνοντας το σημείο της γραφικής παράστασης του αθροίσματος που αντιστοιχεί στην τιμή $m = 1$ του x $m = 1$. Εισάγουμε λοιπόν $m = 1$ και κατόπιν ορίζουμε $M = (m,\ f(m) + g(m))$. Ενεργοποιούμε την αποτύπωση του ίχνους για το σημείο A και δημιουργούμε ένα δρομέα για το m. Κινώντας το δρομέα βλέπουμε διάφορα σημεία της γραφικής παράστασης του αθροίσματος $f + g$.



Το πεδίο ορισμού αθροίσματος Στο προηγούμενο παράδειγμα οι δύο συναρτήσεις που προσθέσαμε είχαν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Ας δούμε τι συμβαίνει όταν προσθέτουμε συναρτήσεις που έχουν μικρότερα πεδία ορισμού. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-2}$ και $g(x) = 3 + \sqrt{6-x}$. Η πρώτη ορίζεται για τα $x \geq 2$ και η δεύτερη για τα $x \leq 6$. Τις εισάγουμε στην Geogebra μαζί με το άθροισμα τους δίνοντας:

```
f(x)=sqrt(x-2)
Enter
g(x)=3+sqrt(6-x)
Enter
h(x)=f(x)+g(x)
Enter
```

Βλέπουμε ότι η Geogebra αντιστοιχεί για την f μόνο τιμές από το διάστημα $[2, +\infty)$ και για την g μόνο τιμές απότο διάστημα $(-\infty, 6]$. Για την $h(x) = f(x) + g(x)$ όμως η Geogebra αντιστοιχεί τιμές μόνο από το διάστημα $[2, 6]$.



Αυτό είναι λογικό: Για να έχουμε, για κάποιο x το $f(x) + g(x)$ πρέπει να έχουμε και το $f(x)$ και το $g(x)$. Άρ απρέπει να μπορεί να εισαχθεί και στην f και στην g. Με άλλα λόγια πρέπει το x να ανήκει και στο πεδίο ορισμού της f και στο πεδίο ορισμού της g δηλαδή να πρόκειται για ένα από τα κοινά σημεία τους. Και οι αριθμοί που ανήκουν και στα δύο πεδία ορισμού είναι ακριβώς τα στοιχεία του διαστήματος $[2, 6]$,

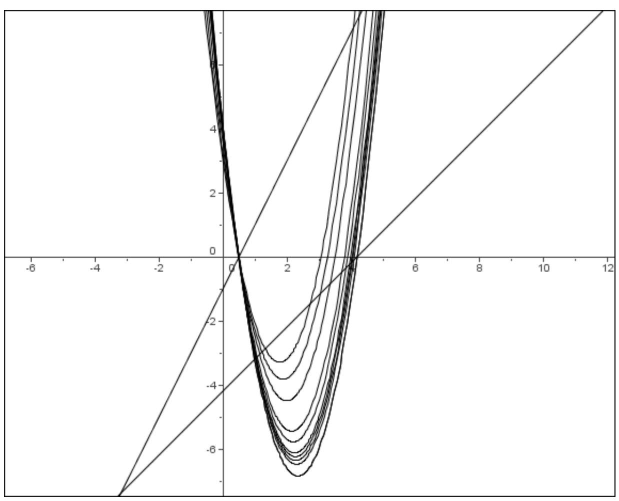
9.5 Πολλαπλασιασμος συναρτησεων

Πολλαπλασιάζοντας δύο συναρτήσεις. Ο πολλαπλασιασμός δύο συναρτήσεων γίνεται όπως ακριβώς και με την πρόσθεση. Απλώς αν έχουμε εισάγει τις $f(x)$ και $g(x)$ το γινόμενο εισάγεται ως $h(x) = f(x) * g(x)$ ή και $h(x) = f(x)\,g(x)$. Ασφαλώς για το πεδίο ορισμού του γινομένου ισχύουν τα ίδια με το άθροισμα: Θα απαρτίζεται από τα κοινά στοιχεία των επιμέρους πεδίων ορισμού. Αξίζει να θυμόμαστε ότι ο πολλαπλασιασμός ακολουθεί τους κανόνες των προσήμων και επομένως εκεί που οι γραφικές παραστάσεςι των f και g βρίσκονται προε το ίδιο μέρος του άξονα $x'x$ η γραφική παράσταση της

fg θα βρεθεί πάνω από τον $x'x$. Επίσης εκεί που οι γραφικές παραστάσεις βρίσκονται εκατέρωθεν του $x'x$ η παράσταση του γινομένου θα βρεθεί κάτω από τον $x'x$.

Γινόμενο δύο γραμμικων συναρτήσεων. *Γραμμικές*[4] λέγονται οι συναρτήσεις της μορφής $y = \alpha x + \beta$. Αν πολλαπλασιάσουμε δύο γραμμικές συναρτήσεις με τύπους $f(x) = \alpha x + \beta$ και $g(x) = \gamma x + \delta$ θα πάρουμε το γινόμενο τους που θα είναι της μορφής $h(x) = (\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta)$. Αν μάλιστα είναι $\alpha\gamma \neq 0$ τότε το γινόμενο τους θα είναι το δευτεροβάθμιο τριώνυμο $h(x) = \alpha\gamma\left(x + \frac{\beta}{\alpha}\right)\left(x + \frac{\delta}{\gamma}\right)$ που έχει ρίζες τις ρίζες των f και g δηλαδή τα $-\frac{\beta}{\alpha}, -\frac{\delta}{\gamma}$.

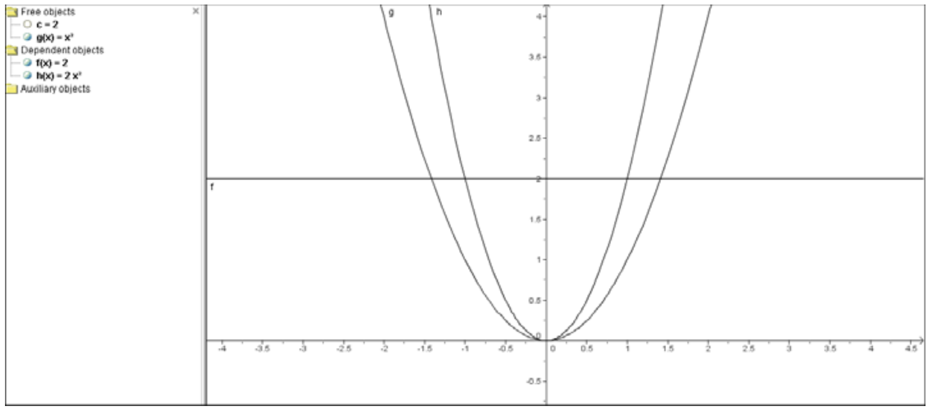
Εισάγουμε λοιπόν στην Geogebra τις γραμμικές συναρτήσεις $f(x) = 2x-1$ και $g(x) = x - 3$ που έχουν ρίζες $\frac{1}{2}$ και 3 και το γινόμενο τους $h(x) = f(x) * g(x)$. Θα εμφανισθούν δύο ευθείες και μία παραβολή. Μπορείτε να δείτε πως επιδρά ο ένας παράγοντας στη διαμόρφωση του γινομένου αν κρατήσετε τον ένα παράγοντα ας πούμε τον $f(x) = 2x - 1$ σταθερό και μετακινείτε τον άλλο παράγοντα. Αυτό γίνεται κρατώντας το αριστερό πλήκτρο του ποντικιού πατημένο στη γραφική παράσταση της $g(x) = x-3$ και σύροντας. Η εικόνα που ακολουθεί έχει προκύψει με αυτό τον τρόπο και ενεργοποίηση της αποτύπωσης ίχνους για την $h(x)$.



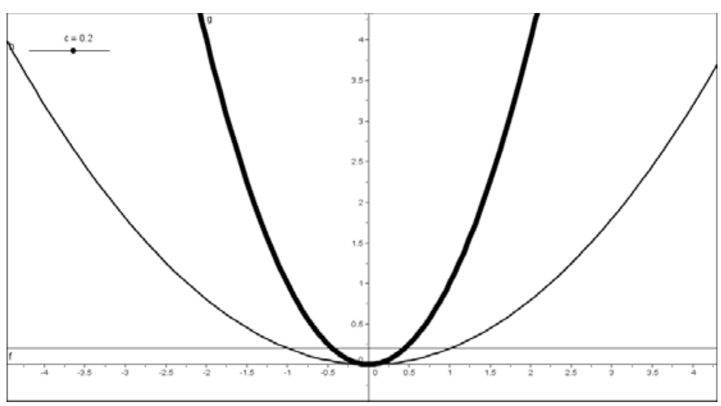
Γινόμενο συνάρτησης επί σταθερά. Ας ξεκινήσουμε με μία σταθερή τιμή $c = 2$. Ας ορίσουμε τη συνάρτηση $f(x) = c$. Αυτή η συνάρτηση αντιστοιχεί σε κάθε αριθμό την ίδια πάντα τιμή c και γιαυτό το λόγο ονομάζεται *σταθερή συνάρτηση*. Η γραφική της παράσταση θα είναι μία ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$. Ας πάρουμε τώρα μία άλλη συνάρτηση $f(x) = x^2$. Ας εισά-

[4]Μερικοί συγγραφείς κρατούν τον όρο *γραμμικές* για συναρτήσεις της μορφής $y = \alpha x$ και για εκείνες της μορφής $y = \alpha x + \beta$ χρησιμοποιούν τον όρο *ομοπαραλληλικές*. Είναι σωστότερο από μαθηματική άποψη αλλά πιο σύνθετο

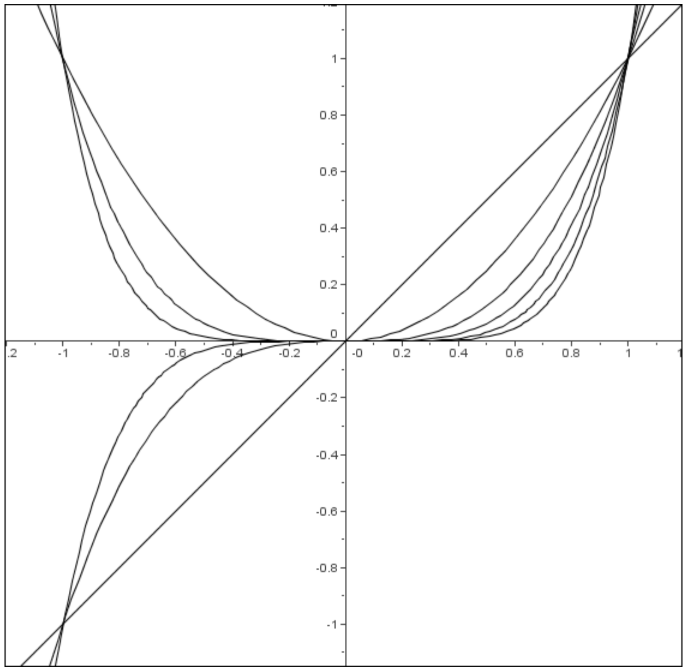
γουμε και το γινόμενο τους $h(x) = f(x)\,g(x)$. Μεγεθύνουμε την επιφάνεια εργασίας και τοποθετούμε την αρχή των αξόνων στο κέντρο της.



Είναι εύκολο να αντιληφθούμε πως δουλεύει ο πολλαπλασιασμός: Το τυχόν σημείο της γραφικής παράστασης της $h(x)$ θα είναι της μορφής $(x, h(x))$ δηλαδή $(x, cf(x))$ (εδώ είναι $c = 2$). Βλέπουμε ότι για να πάρουμε την γραφική παράσταση της $cf(x)$ αρκεί να κρατήσουμε τις τεμημένες των σημείων τους σταθερές και να πολλαπλασιάσουμε τις τεταγμένες δηλαδή τα y με c. Για να σχηματίσουμε καλύτερη ιδέα του πώς λειτουργεί ο πολλαπλασιαμός επί αριθμό μπορούμε να ζητήσουμε από την Geogebra εμφανίσει ένα δρομέα για την σταθερά c. Αλλάζοντας τις τιμές από το δρομέα βλέπουμε πως αλλάζει η συνάρτηση $cf(x)$. Δείτε ποια είναι η διαφορά μεταξύ τιμών μικρότερων του 1 και μεγαλύτερων του 1. Πειραματισθείτε με αρνητικές τιμές. Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνεται η $cf(x)$ για $c = 0,2$. Η γραμμή της f έχει ορισθεί να έχει πάχος 13 και της $cf(x)$ πάχος 3,5.



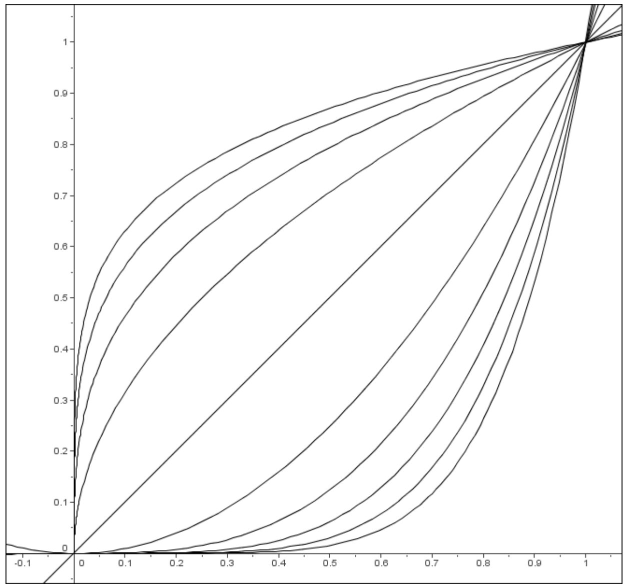
Δυνάμεις του x. Οι συναρτήσεις $y = x$, $y = xx$, $y = xxx$ κτλ προκύπτουν από την $y = x$ επί τον εαυτό της. Έχουν όλες πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Μπορούμε να τις ονομάσουμε αντιστοίχως $f1(x)$, $f2(x)$, $f3(x)$, ... κοκ. Με αυτή την ονομασία μπορούμε να τις εισάγουμε στην Geogebra. Εισάγετε τις συαρτήσεις αυτές έως τον εκθέτη 6. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχουν οι τιμές κοντά στα 0,1. Με μεγέθυνση και κεντράρισμα μπορούμε να πετύχουμε μία αρκετά ευκρινή εικόνα:



Παρατηρούμε ότι:

- Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων που έχουν άρτιο εκθέτη έχουν όλα τα σημεία τους πάνω από τον $x'x$ εκτός από το σημείο τους $(0, 0)$.
- Όλες οι γραφικές παραστάσεις διέρχονται εκτός από το σημείο $(0, 0)$ και από το σημείο $(1, 1)$. Εκείνων που έχουν περιττό εκθέτη οι γραφικές παραστάσεις διέρχονται και από το σημείο (-1,-1).
- Στο διάστημα $(1, +\infty)$ δηλαδή για τιμές του x μεγαλύτερες του 1 ψηλότερα βρίσκεται εκείνη η συνάρτηση που έχει το μεγαλύτερο εκθέτη. Αυτό διότι για $x > 1$ και $m > n$ ισχύει πάντα $x^m > x^n$. Όμως για αριθμούς x από το διάστημα $(0, 1)$ οι ρόλοι αντιστρέφονται. Μεγάλος εκθέτης σημαίνει χαμηλότερη γραφική παράσταση.

Μπορούμε, με τη βοήθεια ριζών, να χρησιμοποιήσουμε και τους εκθέτες $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$. Ας εισάγουμε τις συναρτήσεις $g2 = x\hat{\ }(1/2)$, $g3 = x\hat{\ }(1/3)$, $g4 = x\hat{\ }(1/4)$ και $g5 = x\hat{\ }(1/5)$. Οι νέες αυτές συναρτήσεις έχουν πεδίο ορισμού τους μη αρνητικούς αριθμούς. Κατά τα άλλα στα διαστήματα $(0, 1)$ και $(1, +\infty)$ συμπεριφέρονται όπως στην τελευταία μας παρατήρηση: Στο $(0, 1)$ μεγάλος εκθέτης σημαίμνει χαμηλά η γραφική παράσταση ενώ στο $(1, +\infty)$ σημαίνει ψηλά η γραφική παράσταση.

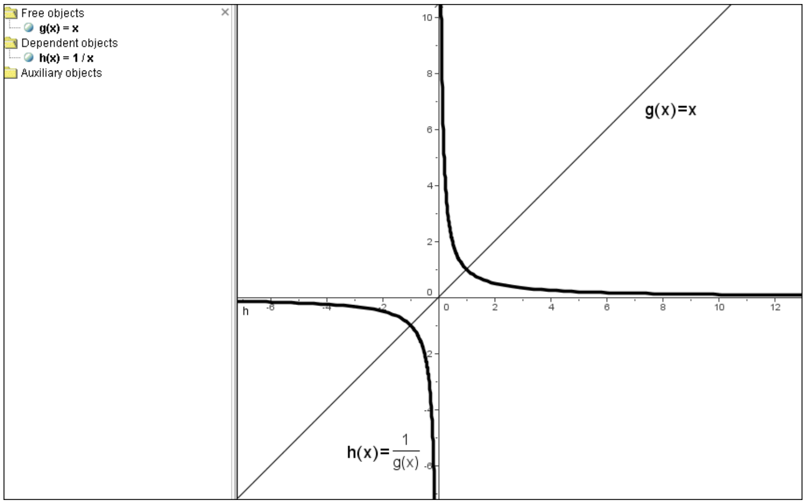


9.6 Αφαιρεση Συναρτησεων.

Για να αφαιρέσουμε από μία συνάρτηση f την συνάρτηση g αρκεί να προσθέσουμε στην συνάρτηση f την αντίθετη $-g$ της g η οποία προκύπτει από την g επί -1. Αξίζει να θυμόμαστε ότι οι συναρτήσεις g και $-g$ έχουν γραφικές παραστάσεις συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = 0$ δηλαδή τον άξονα των x. Ασφαλώς η Geogebra υπολογίζει τη διαφορά δυο συναρτήσεων αυτόματα. Αν έχουμε εισάγει τις f και g αρκεί να δώσουμε $h(x) = f(x) - g(x)$ για να έχουμε τη γραφική παράσταση της διαφοράς τους. Δοκιμάστε το με τις x^2 και x.

9.7 Διαιρεση Συναρτησεων

Διαιρώντας συναρτήσεις. Θέλουμε όταν έχουμε δύο συναρτήσεις f και g να σχηματίσουμε τη συνάρτηση $h\,(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ την οποία βέβαια στην Geogebra θα εισάγουμε ως $h(x) = f(x)/g(x)$. Στην ουσία η διαίρεση προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό της $f(x)$ με τη συνάρτηση $1/g(x)$. Κανονικά τη συνάρτηση $1/g(x)$ θα την ονομάζαμε αντίστροφη της g. Δεν θα το κάνουμε διότι ο όρος ‟ αντίστροφη ” θα χρησιμεύσει σε άλλη περίσταση. Ακόμη και σε απλές περιπτώσεις ο σχηματισμός της $1/g(x)$ παρουσιάζει δυσκολίες. Δώστε στην Geogebra $g(x) = x$ και $h(x) = 1/g(x)$. Στην ουσία ζητάτε από την Geogebra να παραστήσει γραφικά την συνάρτηση $y = \frac{1}{x}$. Θα έχετε την γνωστή εικόνα:

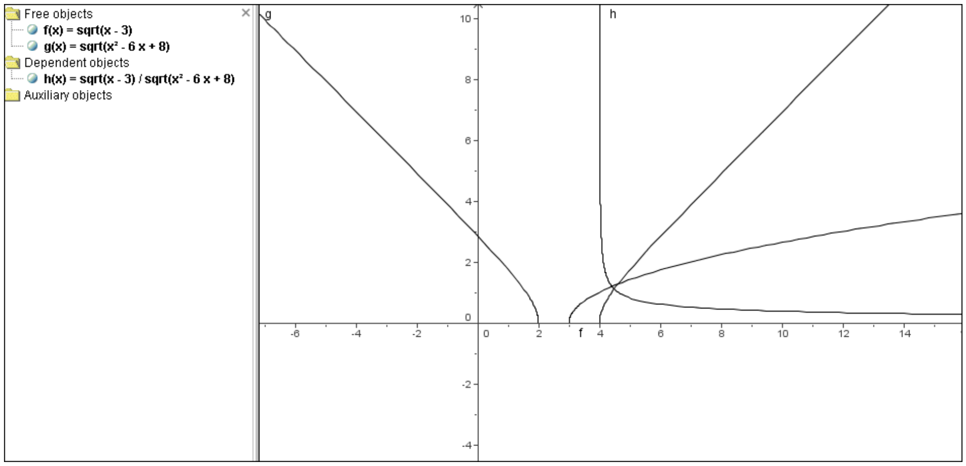


Στο προηγούμενο σχήμα η γραφική παράσταση της h έχει γίνει πιο έντονη με αύξηση του πάχους της γραμμής. Οι δύο τύποι έχουν γραφεί με το εργαλείο εισαγωγής κειμένου και γράφοντας λίγο κώδικα LaTeX με τη σχετική επιλογή[5]. Βλέπουμε ότι η Geogebra δεν παρουσιάζει σημεία της γραφικής παράστασης πάνω ή κάτω από το 0. Αυτό οφείλεται στο γεγονος ότι η συνάρτηση μας δεν ορίζεται στο 0. Μοιάζει μάλιστα σαν η γραφική παράσταση να προσπαθεί να αποφύγει το σημείο 0. Όσο πλησιάζουμε το 0 από θετικές τιμές οι τιμές της συνάρτησης εκτινάσσονται προς πολύ μεγάλες θετικές τιμές δηλαδή προς το $+\infty$. Όταν πλησιάζουμε το 0 από αρνητικές τιμές οι τιμές της συνάρτησης γίνονται πολύ μικρές δηλαδή τείνουν προς το $-\infty$. Υπάρχει μία τυπική περιγραφή αυτού του φαινομένου:

- Όταν το x τείνει στο 0 από μεγαλύτερες τιμές το $h(x)$ τείνει στο $+\infty$
- Όταν το x τείνει στο 0 από μικρότερες τιμές το $h(x)$ τείνει στο $-\infty$

Το πεδίο ορισμού πηλίκου. Από τα προηγούμενα είναι σαφές ότι στη συνάρτηση $h\left(x\right) = \frac{f(x)}{g(x)}$ μπορούν να εισαχθούν εκείνα τα x τα οποία ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f αλλά και στο πεδίο ορισμού της g και *επιπλέον* δεν είναι ρίζες της g. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f\left(x\right) = \sqrt{x-3}$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $[3, +\infty)$. και τη συνάρτηση $g\left(x\right) = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$ με πεδίο ορισμού το σύνολο των x που κάνουν το $x^2 - 6x + 8$ μη αρνητικό δηλαδή τα x με $x \leq 2$ είτε $x \geq 4$. Αν εισάγουμε τις δύο αυτές συναρτήσεις στην Geogebra και στη συνέχεια το πηλίκο τους $h\left(x\right) = \frac{f(x)}{g(x)}$ θα έχουμε:

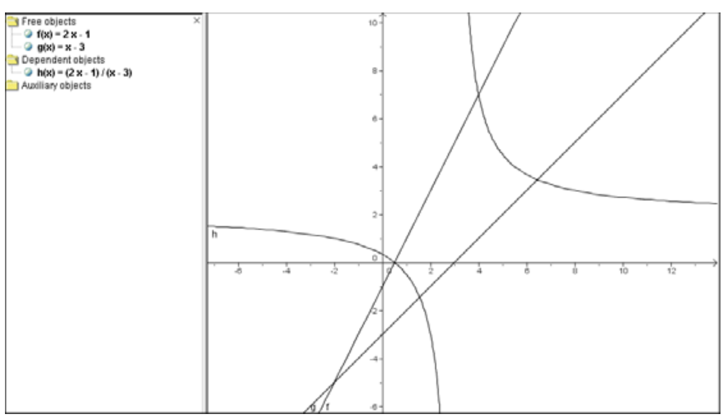
[5]Για να αναγραφεί το $g(x) = x$ γράψαμε απλώς `g(x)=x`. Για να αναγραφεί όμως το $h\left(x\right) = \frac{1}{g(x)}$ χρειάσθηκε να γράψουμε: `h(x)=\frac{1}{g(x)}`



Η Geogebra μας αποδίδει σημεία της γραφικής παράστασης της f μόνο για τα $x > 4$. Αυτό διότι τα *κοινά* στοιχεία των πεδίων ορισμού των f, g είναι τα $x \geq 4$. *Από αυτά* πρέπει να εξαιρεθούν όσα x μηδενίζουν τον παρονομαστή g. Άρα πρέπει να εξαιρεθεί το 4. Έτσι προκύπτουν τα $x > 4$.

Πηλίκο δύο γραμμικων συναρτήσεων. Αν διαιρέσουμε τις γραμμικές συναρτήσεις με τύπους $f(x) = \alpha x + \beta$ και $g(x) = \gamma x + \delta$ θα σχηματίσουμε το πηλίκο τους τους που θα είναι της μορφής $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Ενδιαφέρουσα είναι η περίπτωση όπου $\gamma \neq 0$ (δείτε τι συμβαίνει όταν $\gamma = 0$). Τα πεδία ορισμού των f και g συμπίπτουν: είναι το $\mathbb{R}$. Η g έχει μία ρίζα την $-\frac{\delta}{\gamma}$. Επομένως το πεδίο ορισμού του πηλίκου $\frac{f(x)}{g(x)}$ θα απαρτίζεται από τα $x \neq -\frac{\delta}{\gamma}$.

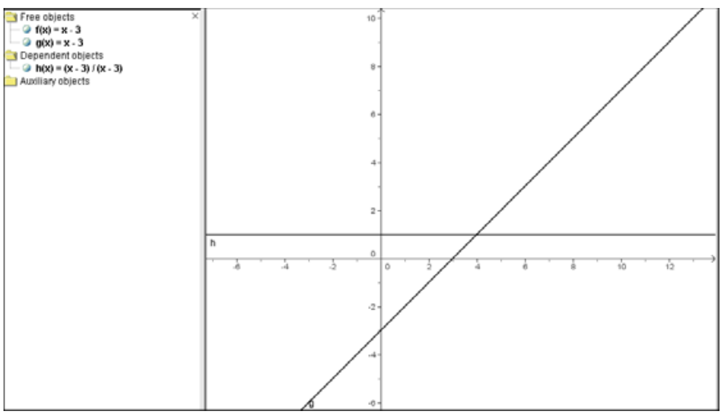
Ας δούμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα με τις συναρτήσεις $f(x) = 2x - 1$ και $g(x) = x - 3$ που πιο πριν δουλέψαμε με το γινόμενο τους. Τις εισάγουμε στην Geogebra και κατόπιν εισάγουμε και το πηλίκο τους $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Θα έχουμε το σχήμα:



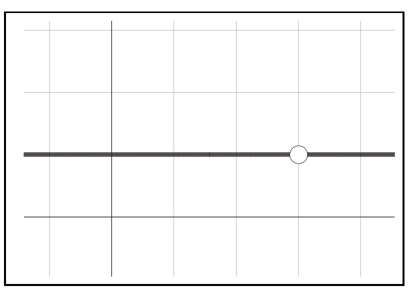
Προσέξτε ότι η γραφική παράσταση κάνει ότι μπορεί για να μην περάσει πάνω ή κάτω από το σημείο Α(3,0) που αντιστοιχεί στην απαγορευμένη τιμή $x = 3$.

Αν προσέξουμε καλά θα δούμε ότι κάτι ανάλογο συμβαίνει με τα y και την τιμή $y = 2$. Πράγματι είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι, αδιάφορο ποιός είναι ο x, ο $y = \frac{2x-1}{x-3}$ δε μπορεί να είναι 2. Ας δοκιμάσουμε να δούμε τί θα συμβεί αν υποθέσουμε ότι $\frac{2x-1}{x-3} = 2$. Κάνοντας απαλοιφή παρονομαστών θα βρούμε ότι $2x - 1 = 2\,(x - 3)$ που πρόκειται για μία αδύνατη εξίσωση.
Ασκηση. Να αποδείξετε ότι με $y = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$, $\gamma \neq 0$ το y μπορεί να πάρει κάθε τιμή εκτός από την τιμή $\frac{\alpha}{\gamma}$.

Κανείς δεν είναι τέλειος. Ας αλλάξουμε τις συναρτήσεις του προηγούμενου παραδείγματος δίνοντας $f\,(x) = x - 3$ και $g\,(x) = x - 3$. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h εξακολουθεί να μην περιλαμβάνει το $x = 3$. Με $x \neq 3$ θα είναι $h\,(x) = \frac{x-3}{x-3} = 1$ επομένως η γραφική παράσταση της h θα είναι η ευθεία $y = 1$ από την οποία θα έχει εξαιρεθεί το σημείο με τετμημένη 3. Η Geogebra επειδή εργάζεται με προσεγγίσεις θα αγνοήσει αυτή τη λεπτομέρεια και θα δώσει

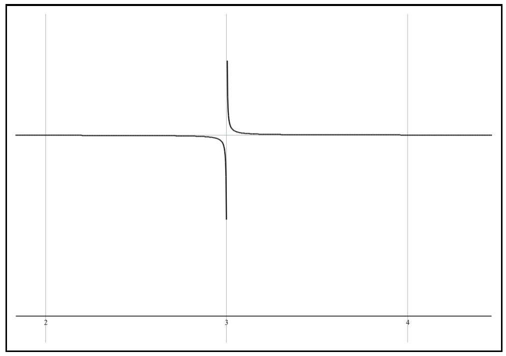


Όταν θέλουμε να δηλώσουμε ότι ένα σημείο από κάποια γραμμή, ειδικότερα γραφική παράσταση εξαιρείται σχεδιάζουμε το σημείο ως ένα μικρό κύκλο με λευκό εσωτερικό. Η γραφική παράσταση της $h(x)$ θα είναι η ακόλουθη:



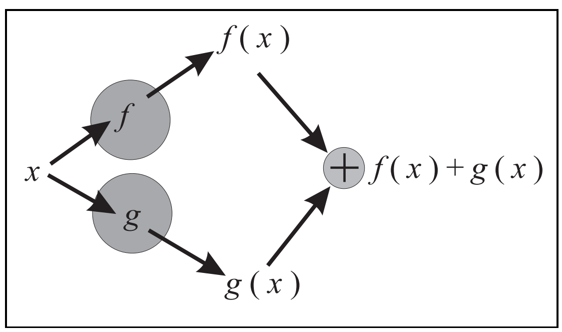
Για το προηγούμενο παράδειγμα όπου η Geogebra δεν εξαίρεσε ένα σημείο μπορούμε να πούμε ότι ήταν μικρό το κακό αφού κατά τα άλλα διατήρησε τη μορφή της γραφικής παράστασης.

Μπορούμε να ζητήσουμε από την Geogebra να αυξήσει, για μεγαλύτερη ακρίβεια, τον αριθμό των δεκαδικών ψηφίων. Αυτό γίνεται από τον κατάλογο των επιλογών επιλέγοντας `Options, Decimal Places, 5`. Ας κρατήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = x - 3$ και ας δώσουμε $f(x) = x - 2.999$ δηλαδή x μείον μία τιμή σχετικά κοντά στο 3. Θα διαπιστώσουμε ότι η Geogebra θα μεταχειρισθεί την την f σαν να ήταν $f(x) = x - 3$ και θα δημιουργήσει την ίδια γραφική παράσταση με πριν. Στην πραγματικότητα κοντά στο σημειό (3,1) η γραφική παράσταση είναι κάπως έτσι[6]:

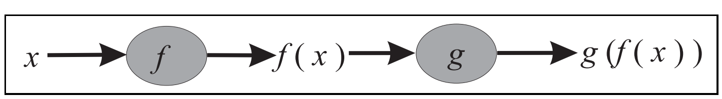


9.8 Συνθεση Συναρτησεων

Συθέτοντας δύο συναρτήσεις. Σε όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις πράξεων συναρτήσεων ένα x (κατάλληλο βέβαια) εισάγονταν σε δύο συναρτήσεις και στα επιμέρους αποτελέσματα εκτελούσμε κάποια πράξη. Για παράδειγμα στην πρόσθεση η σειρά διεκπεραίωσης των υπολογισμών ήταν ή ακόλουθη:



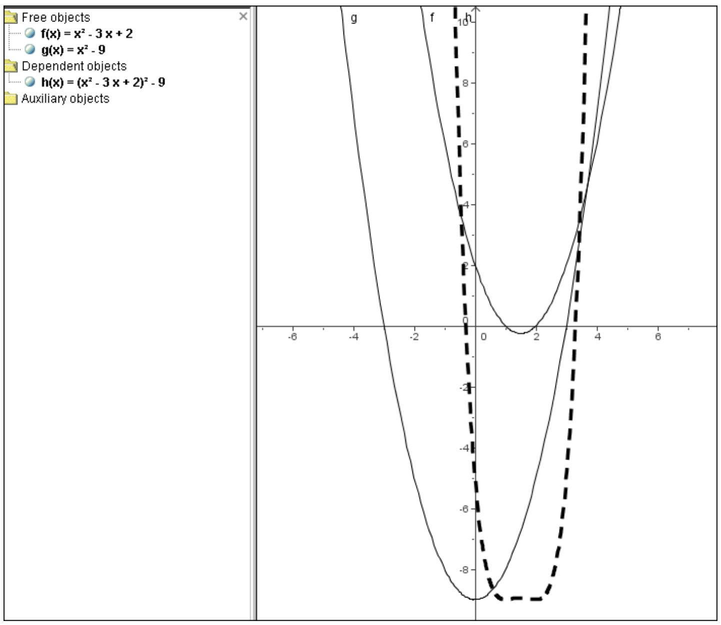
θα μπορούσαμε να πούμε ότι έχουμε ένα είδος *παράλληλης σύνδεσης* των συναρτήσεων όπως γίνεται με τις αντιστάσεις ή τους πυκνωτές στα ηλεκτρικά κυκλώματα. Τι θα σήμαινε *σύνδεση σε μία σειρά*; Θα σήμαινε ότι η μία συνάρτηση θα έπαιρνε και θα επεξεργάζονταν τις τιμές που προέκυπταν άπό μία άλλη. Δηλαδή το x εισάγεται στην f η οποία δίνει $f(x)$ το οποίο με τη σειρά του εισάγεται στην συνάρτηση g για να δώσει $g(f(x))$.



[6]Η παράσταση έγινε με το πολύ καλό πρόγραμμα WinPlot που περιέχεται και αυτό στο CD που σας έχει δοθεί.

Η πράξη αυτή λέγεται *σύνθεση* και το αποτέλεσμα δηλαδή η νέα συνάρτηση που αντιστοιχεί το x στο $g(f(x))$ λέγεται *σύνθεση της* f *με την* g. Μερικοί συγγραφείς αντί του όρου σύνθεση χρησιμοποιούν τον όρο *συνάρτηση άλλης συνάρτησης*.

Για να δημιουργήσουμε μία σύνθεση στην Geogebra εισάγουμε πρώτα τις συναρτήσεις f ,g και στη συνέχεια δίνουμε $h(x) = g(f(x))$. Για παράδειγμα έστω ότι $f(x) = x^2 - 3x + 2$ και $g(x) = x^2 - 9$ και $h(x) = g(f(x))$. Εισάγοντας τις τρεις αυτές συναρτήσεις θα έχουμε το αποτέλεσμα:



όπου η σύνθεσή h έχει παρασταθεί με μεγαλύτερο πάχος και διακεκομμένη. Μπορούμε να δούμε πως επηρρεάζεται η σύνθεση από τις επιμέρους συναρτήσεις αν συρουμε την γραφική παράσταση της f ή της g.

Το προηγούμενο παράδειγμα μορφώσαμε τη σύνθεση $h(x) = g(f(x))$. Αν παρουμε τη σειρά ανάποδα δηλαδή πρώτα να παραλαμβάνει η g και μετά η f θα έχουμε τη σύνθεση της g με την f που θα είναι η $k(x) = f(g(x))$. Αν εισάγουμε την k στην Geogebra θα δούμε ότι δίνει διαφορετική γραφική παράσταση από εκείνη της h που σημαίνει ότι άλλο είναι η $g(f(x))$ και άλλο η $f(g(x))$. Πράγματι αν μπούμε στον κόπο να κάνουμε λίγες πράξεις θα βρούμε ότι:

$$h(x) = g(f(x)) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x - 5$$

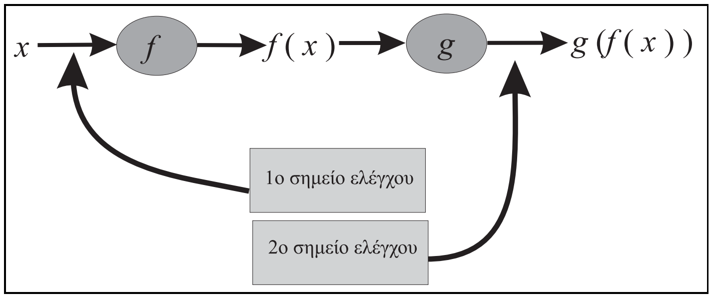
$$k(x) = f(g(x)) = x^4 - 21x^2 + 110$$

Με άλλα λόγια *στη σύνθεση η σειρά έχει σημασία.*

Το πεδίο ορισμού σύνθεσης. Οταν παίρνουμε μία σύνθεση $g(f(x))$ αντικαθιστούμε αριθμούς σε συναρτήσεις δύο φορές άρα και οι πρόφυλάξεις είναι διπλές:

- Αντικαθιστούμε το x στην f άρα πρέπει να φροντίσουμε το x να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f
- Αντικαθιστούμε το $f(x)$ στην g άρα πρέπει να φροντίσουμε το $f(x)$ να ανήκει στο πεδίο ορισμού της g

δηλαδή έχουμε δύο σημεία ελέγχου:



Ας βρούμε το πεδίο ορισμού της $g\left(f\left(x\right)\right)$ όταν $f\left(x\right)=\frac{x+1}{x-1}$ και $g\left(x\right)=\sqrt{x-2}$. Το πεδίο ορισμού της f απαρτίζεται από τα $x\neq 1$ ενώ το πεδίο ορισμού της g από τα $x\geq 2$. Επομένως πρέπει:

- $x\neq 1$ και
- $f\left(x\right)\geq 2$

Δηλαδή πρέπει συγχρόνως να ισχύει $x\neq 1$ και $\frac{x+1}{x-1}\geq 2$. Επομένως πρέπει να λύσουμε το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} x\neq 1 \\ \frac{x+1}{x-1}\geq 2 \end{array}\right\}$$

Έχουμε τις ισοδυναμίες:

$$\left.\begin{array}{l} x\neq 1 \\ \frac{x+1}{x-1}\geq 2 \end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x\neq 1 \\ \frac{x+1}{x-1}-2\geq 0 \end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x\neq 1 \\ \frac{x+1-2x+2}{x-1}\geq 0 \end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x\neq 1 \\ \frac{-x+3}{x-1}\geq 0 \end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x\neq 1 \\ \left(-x+3\right)\left(x-1\right)\geq 0 \end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x\neq 1 \\ \left(x-3\right)\left(x-1\right)\leq 0 \end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x\neq 1 \\ 1\leq x\leq 3 \end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

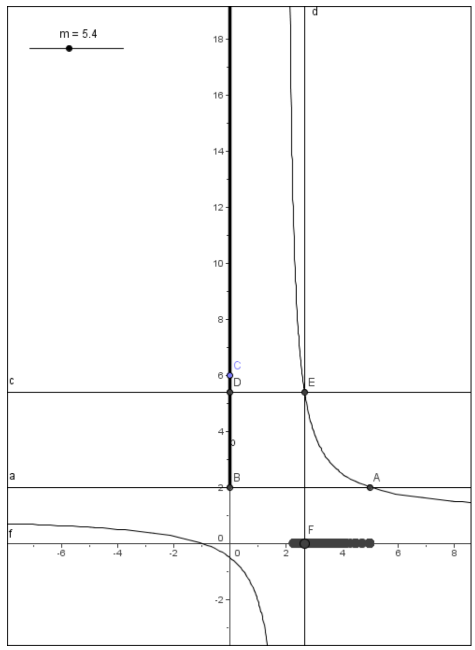
$$1<x\leq 3$$

Τελικά λοιπόν πρέπει $1<x\leq 3$ δηλαδή το πεδίο ορισμού της $g\left(f\left(x\right)\right)$ είναι το διάστημα $(1,3]$.

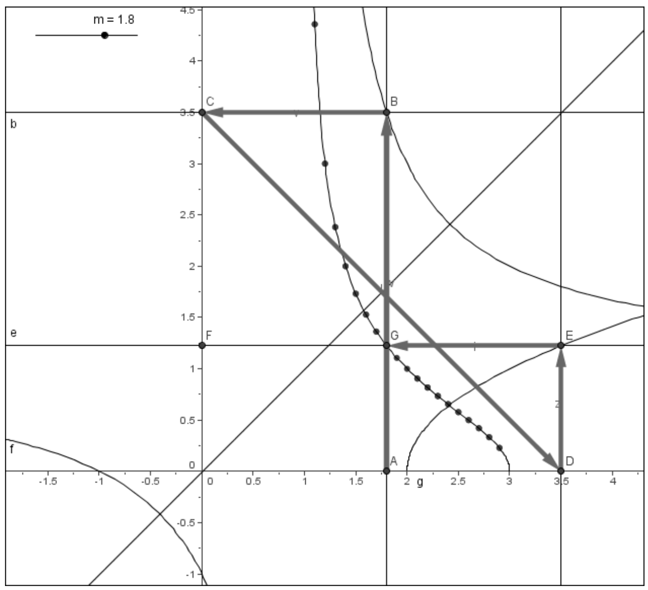
Η σύνθεση τώρα βρισκεται εύκολα: $g\left(f\left(x\right)\right)=\sqrt{f\left(x\right)-2}=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}-2}=\sqrt{\frac{3-x}{x-1}}$

Σημειώστε ότι προκειμένου το $f(x)$ να μπορεί να εισαχθεί στην $g(x)$ πρέπει $f\left(x\right)\geq 2$. Ας εισάγουμε την $f(x)$ στην Geogebra και ας δούμε ποια ακριβώς x είναι εκείνα που πετυχαίνουν να δώσουν $f\left(x\right)\geq 2$. Πρέπει να δίνουν στην $f\left(x\right)=\frac{x+1}{x-1}$ τιμές τουλάχιστον 2 άρα θα είναι σημεία της γραφικής παράστασης της f που είναι επί ή πάνω από την ευθεία $y = 2$. Εισάγουμε την ευθεία $y = 2$ και ζητάμε από την Geogebra να βρεί το σημείο τομής A της ευθείας και της γραφικής παράστασης της f καθώς και το σημείο τομής B της ευθείας και της του άξονα των y.

Οσα σημεία του $y'y$ είναι πάνω από το B είναι τιμές της f που μπορούν να εισαχθούν στην g. Μπορούμε να τις κάνουμε πιο ευδιάκριτες τοποθετώντας πάνω σε αυτές μία ημιευθεία με αρχή το B και πάχος γραμμής ας πούμε 7. Κατά τη δημιουργία της ημιευθείας η Geogebra θα εμφανίσει και ένα σημείο C. Βρήκαμε γραφικά ποια $f(x)$ μπορούν να εισαχθούν στην g. Ας βρούμε από ποιά x προέρχονται: Δίνουμε μία τιμή $m = 3$ εισάγουμε την ευθεία $y = m$. Εμφανίζουμε και ένα δρομέα για το m με ελάχιστη τιμή 2 και μέγιστη 10. Για $m \geq 2$ η ευθεία $y = m$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στα επιθυμητά $y \geq 2$. Δημιουργούμε αυτό το σημείο τομής. Θα είναι το D. Η ευθεία $y = m$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f. Ζητάμε από την Geogebra να βρεί το σημείο τομής E και από το E φέρνουμε κάθετη στον άξονα $x'x$ που τον τέμνει στο F. Από τις ιδιότητες του F δίνουμε μέγεθος 5 και αποτύπωση ίχνους. Με τη μετατόπιση του δρομέα το F διαγράφει το πεδίο ορισμού της σύνθεσης.



Η σύνθεση γεωμετρικά. Όπως είδαμε η Geogebra έχει τη δυνατότητα να βρίσκει τη σύνθεση δύο συναρτήσεων που εισάγουμε. Ας δούμε πως μπορούμε να βρούμε τη γραφική παράσταση της σύνθεσης σημείο προς σημείο γεωμετρικά. Θα εργασθούμε με τις ίδιες συναρτήσεις που είδαμε στην προηγούμενη παράγαραφο. Εισάγουμε την $f(x)$ και την $g(x)$. Θα χρησιμοποιήσουμε πάλι μία παράμετρο m που θα παίξει το ρόλο των τιμών του x. Δίνουμε λοιπόν $m = 2$. Δημιουργούμε το σημείο A$(m, 0)$ δίνοντας A$= (m, 0)$. Στη συνέχεια φέρνουμε κάθετη a στον $x'x'$ στο σημείο A και ζητάμε από τη Geogebra να βρεί την τομή της κάθετης με την γραφική παράστση της f. Το πρόγραμμα θα μας δώσει το σημείο B. Από το B φέρνουμε κάθετη στον άξονα των $y'y$ και στη συνέχεια προσδιορίζουμε το σημείο τομής της με τον $y'y$. Η Geogebra θα το ονομάσει C. Ο αριθμός που αντιστοιχεί στο C είναι το $f(m)$ και πρέπει να εισαχθεί στην g. Άρα τον χρειαζόμαστε στον $x'x$. Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε παίρνοντας το συμμετρικό του C ως προς την πρώτη διχοτόμο των αξόνων που είναι η $y = x$ την οποία και εισάγουμε. Το συμμετρικό του C ως προς την $y = x$ το οποίο και βρίσκουμε με το κατάλληλο εργαλείο η Geogebra θα το ονομάσει D και βέβαια βρίσκεται στον $x'x$. Για να εισάγουμε τον αριθμό που εκπροσωπεί το D στην $g(x)$ φέρνουμε κάθετη d στον $x'x$ η οποία θα τμήσει τη γραφική παράσταση της $g(x)$ στο σημείο E. Από το E φέρνουμε κάθετη e στον $y'y$ η οποία τέμνει τον $y'y$ στο F το οποίο και αντιστοιχεί στον αριθμό $g(f(m))$. Τώρα δεν έχουμε παρά να βούμε το σημείο με τετμημένη m και τεταγμένη $g(f(m))$. Είναι προφανώς το σημείο τομής G των ευθειών a και e, Ενεργοποιούμε την αποτύπωση ίχνους για το G. Όταν μετακινούμε το δρομέα του m το G διαγράφει τη γραφική παράσταση της σύνθεσης $g\left(f\left(x\right)\right)$. Η όλη κατασκευή εμφανίζεται στο επόμενο σχήμα. Έχει προστεθεί, για σύγκριση, και η $h = g\left(f\left(x\right)\right)$. Τα βέλη (που προστέθηκαν με το εργαλείο του διανύσματος και με απόκρυψη των επιγραφών) δείχνουν την πορεία που ακολουθήσαμε:



9.8.1 Μία επισκόπηση των πράξεων

Σε όλες τις πράξεις ακολουθούμε ένα ενιαίο κανόνα: *Βρίσκουμε πρώτα το πεδίο ορισμού και μετά ασχολούμεθα με τον τύπο.* Η σειρά των ενεργειών έχει σημασια. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τις συναρτήσεις $f\left(x\right) = x - \sqrt{x-2}$ και $g\left(x\right) = x + \sqrt{x-2}$. Το πεδίο ορισμού τους συμβαίνει να είναι το ίδιο. Πρόκειται για το σύνολο των $x \geq 2$. Άρα κανονικά το άθροισμα τους είναι η συνάρτηση $h\left(x\right) = f\left(x\right) + g\left(x\right) = x - \sqrt{x-2} + x + \sqrt{x-2} = 2x$. Αν όμως βρούμε πρώτα τον τύπο και επιχειρήσουμε να βρούμε μετά το πεδίο ορισμού θα έχουμε μπροστά μας τη συνάρτηση $h\left(x\right) = 2x$ και θα οδηγηθούμε στο εσφαλμένο συμπέρασμα ότι το άθροισμα έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Γιατί το αποτέλεσμα δεν είναι σωστό; Μα γιατί θέλουμε για όλα τα x μέσα από το πεδίπ ορισμού του αθροίσματος να ισχύει $h\left(x\right) = f\left(x\right) + g\left(x\right)$. Αν το πεδίο ορισμού ήταν το $\mathbb{R}$ θα έπρεπε λ.χ. να ισχύει $h\left(1\right) = f\left(1\right) + g\left(1\right)$!!

9.9 Συμβολισμοί και συμβάσεις

Υπάρχουν ορισμένα σύμβολα που χρησιμοποιούμε όταν εργαζόμαστε με συναρτήσεις. Μπορούμε να κάνουμε και χωρίς αυτά αλλά καλό είναι να τα μάθετε. Έστω δύο συνάρτησεις f, g.

- Το πεδίο ορισμού της f θα το συμβολίζουμε με $\mathcal{D}_f$. Θα είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων.
- Δύο συναρτήσεις f και g θα θεωρούνται ίσες[7] αν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και αν παίρνουν τις ίδιες τιμές στα ίδια x δηλαδή

$$\boxed{f=g \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathcal{D}_f=\mathcal{D}_g \\ f\left(x\right)=g\left(x\right)\;\; \gamma\iota\alpha\ \kappa\alpha\theta\varepsilon\ x\in\mathcal{D}_f \end{array}\right\}}$$

- Η γραφική παράσταση της f συμβολίζεται με $\mathcal{C}_f$. Ισχύει:

$$\boxed{(\alpha,\beta)\in C_f \Leftrightarrow \alpha\in D_f\ \ \kappa\alpha\iota\ f\left(\alpha\right)=\beta}$$

Για τις πράξεις που γνωρίσαμε ισχύουν τα ακόλουθα:

Πράξη	Σύμβολο	Ορισμός	Πεδίο Ορισμού
Πρόσθεση των f, g	$f+g$	$(f+g)\left(x\right)=f\left(x\right)+g\left(x\right)$	$D_{f+g}=D_f\cap D_g$
Αφαίρεση της g από την f	$f-g$	$(f-g)\left(x\right)=f\left(x\right)-g\left(x\right)$	$D_{f-g}=D_f\cap D_g$
Πολλαπλασιασμός των f, g	fg	$(fg)\left(x\right)=f\left(x\right)g\left(x\right)$	$D_{fg}=D_f\cap D_g$
Πολλαπλασιασμός της f επί c	cf	$(cf)\left(x\right)=cf\left(x\right)$	$D_{cf}=D_f$
Διαίρεση της f δια την g	$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)\left(x\right)=\frac{f(x)}{g(x)}$	$D_{\frac{f}{g}}=\left(D_f\cap D_g\right)-\{x\in D_g \vert g\left(x\right)=0\}$
Σύνθεση της f με την g	$g\circ f$	$(g\circ f)\left(x\right)=g\left(f\left(x\right)\right)$	$D_{g\circ f}=\left\{x\in D_f \mid f\left(x\right)\in D_g\right\}$

9.10 Μερικοί ενδιαφέροντες μετασχηματισμοί

Στην ενότητα αυτή θα δούμε τί συμβαίνει όταν συνθέτουμε μία συνάρτηση f με κάποια από τις συναρτήσεις

$$\boxed{t\left(x\right)=x+\alpha}$$

και

$$\boxed{s\left(x\right)=cx}$$

Υπάρχουν 4 συνδυασμοί:

$$t\circ f\,,\quad f\circ t,\quad s\circ f,\quad f\circ s$$

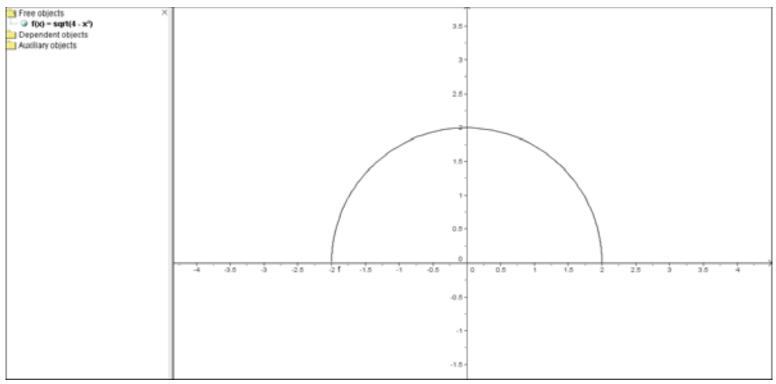
που μας οδηγούν στις συναρτήσεις

$$\left(t\circ f\,\right)\left(x\right)=t\left(f\left(x\right)\right)=f\left(x\right)+\alpha$$

[7] Συνηθίζεται να λέγεται ότι " δύο συναρτήσεις είναι ίσες άν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και τον ίδιο τύπο ". Ως έξη είναι αδιάφορη. Ως ορισμός είναι λάθος.

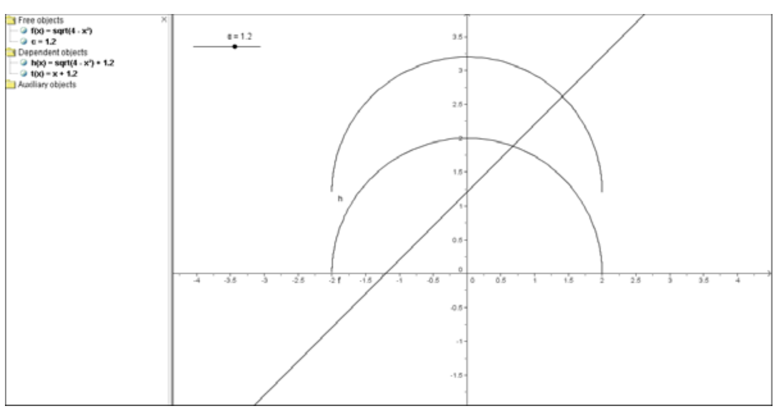
$$(f \circ t)(x) = f(t(x)) = f(x+a)$$
$$(s \circ f)(x) = s(f(x)) = cf(x)$$
$$(f \circ s)(x) = f(s(x)) = f(cx)$$

Στα επόμενα θα εξετάσουμε χωριστά κάθε περίπτωση. Θα χρησιμοποιήσουμε ώς παράδειγμα την ίδια κάθε φορά συνάρτηση την $f(x) = \sqrt{4-x^2}$. Η συνάρτηση αυτή έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[-2, 2]$. Από τον τύπο της $y = \sqrt{4-x^2}$ προκύπτει ότι $y \geq 0$ και ισχύει $x^2 + y^2 = 4$. Δηλαδή η γραφική παράσταση της f είναι το άνω από τα δύο ημικύκλια που ορίζει ο κύκλος $x^2 + y^2 = 4$ με τον $x'x$.



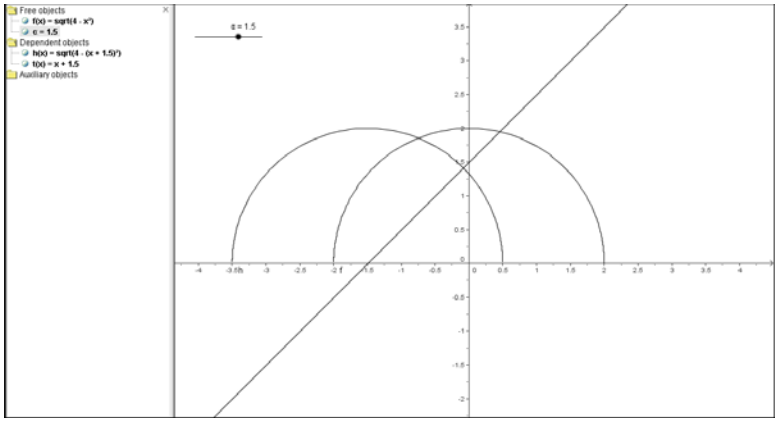
9.10.1 Η συνάρτηση $f(x) + \alpha$

Εισάγουμε στην Geogebra τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4-x^2}$. Εισάγουμε την παράμετρο α με αρχική τιμή $\alpha = 1$ και ένα δρομέα για αυτήν. Κατόπιν εισάγουμε τη συνάρτηση $t(x) = x + \alpha$. Κατόπιν δίνουμε $h(x) = t(f(x))$. Η $h(x)$ είναι η συνάρτηση $f(x) + \alpha$. Μετακινώστας το δρομέα βλέπουμε ότι
Η γραφική παράσταση της $f(x)+\alpha$ προκύπτει από την γραφική παράσταση της $f(x)$ μετακινώντας την πάνω-κάτω κατά $|\alpha|$ (πάνω αν $\alpha > 0$, κάτω αν $\alpha < 0$) ή ισοδύναμα αν οι τετμημένες των σημείων της C_f μένουν ως έχουν και στις τεταγμένες προστεθεί το α.



9.10.2 Η συνάρτηση $f(x+\alpha)$

Εργαζόμαστε όπως πριν μόνο που ως $h(x)$ εισάγουμε την $h(x) = f(t(x))$ που είναι η $f(x+\alpha)$. Μετακινώντας το δρομέα για το α βλέπουμε διάφορα στιγμιότυπα της $f(x+\alpha)$.



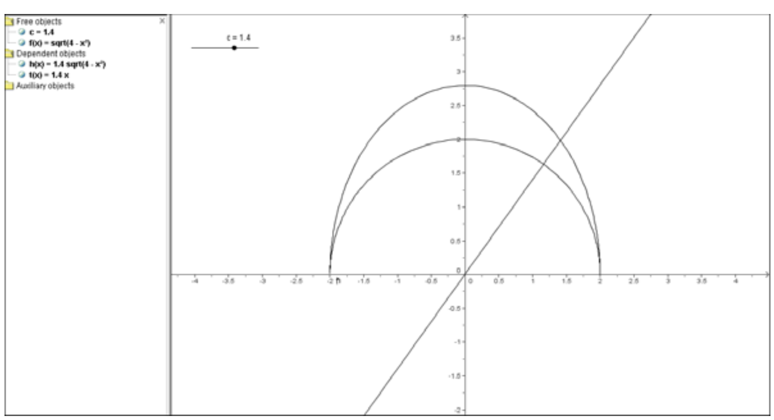
Παρατηρούμε ότι

Η γραφική παράσταση της $f(x+\alpha)$ προκύπτει από την γραφική παράσταση της $f(x)$ μετακινώντας την αριστερά-δεξιά κατά $|\alpha|$ (αριστερά αν $\alpha > 0$, δεξιά αν $\alpha < 0$). Ισοδύναμα αν οι τεταγμένες της $\mathcal{C}_f$ μείνουν ως έχουν και στις τετμημένες προστεθεί το $-\alpha$

Φυσικά αυτός ο μετασχηματισμός επιφέρει τροποίηση το πεδίου ορισμού. Η νέα συνάρτηση θα έχει το πεδίο ορισμού της παλιάς στα στοιχεία του οποίου έχει προστεθεί το $-\alpha$.

9.10.3 Η συνάρτηση $cf(x)$

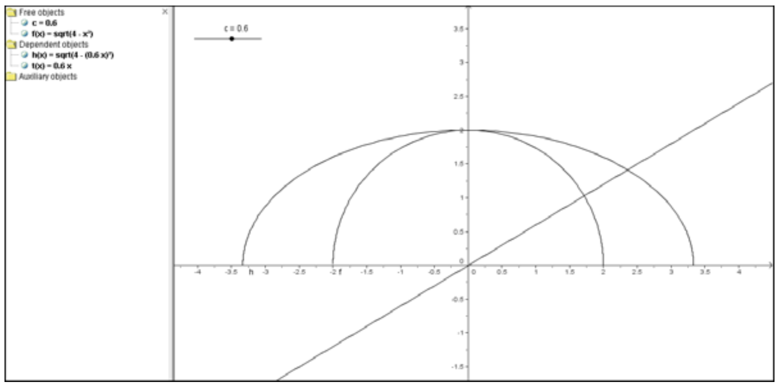
Εισάγουμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4-x^2}$. Μετά εισάγουμε την παράμετρο c με αρχική τιμή $c = 1$ και τον δρομέα της. Εισάγουμε τη συνάρτηση $s(x) = cx$ και ορίζουμε $h(x) = s(f(x))$.



Εδώ
Η γραφική παράσταση της $cf(x)$ προκύπτει από την γραφική παράσταση της $f(x)$ αν κρατησουμε τις ίδιες τετμημένες και πολλαπλασιάσουμε τις τεταγμένες των σημείων της με c.

9.10.4 Η συνάρτηση $f(cx)$

Κάνουμε ότι και πριν μόνο που ορίζουμε $h(x) = (f(s(x)))$.



Βλέπουμε ότι *η γραφική παράσταση της $f(cx)$ προκύπτει από την γραφική παράσταση της $f(x)$ αν οι τεταγμένες των σημείων της μείνουν ίδιες και οι τετμημένες πολλαπλασιασθούν επί c.*

Φυσικά αλλαγή θα υποστούν και τα σημεία του πεδίου ορισμού αφού όλα θα πολλαπλασιασθύν επί c.

9.11 Δυο παραδειγματα.

9.11.1 Η γραφική παράσταση της $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ από τη γραφική παράσταση της x^2.

Στο παράδειγμα αυτό θα δούμε πώς από τη γραφική παράσταση της x^2 μπορούμε χρησιμοποιώντας κάποιους απότους μετασχηματισμούς που περιγράψαμε μπορούμε να φτιάξουμε τη γραφική παράσταση κάθε παραβολής της μορφής $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Πριν προχωρησουμε ας θυμηθούμε την παρακάτω μορφή του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$:

$$\boxed{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha}}$$

Το β′ μέλος μας λέει ότι η συνάρτηση του α′ μέλους μπορεί να προκύψει ως εξής:

$$x \to x + \frac{\beta}{2\alpha} \to \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 \to \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 \to \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha}$$

Αν ονομάσουμε $q\left(x\right)=x^2$ και ακόμη

$$t_1\left(x\right)=x+\frac{\beta}{2\alpha},\qquad s\left(x\right)=\alpha x^2,\qquad t_2\left(x\right)=x-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha}$$

τότε έχουμε τις παρακάτω μεταμορφώσεις:

$$x\xrightarrow{t_1}x+\frac{\beta}{2\alpha}\xrightarrow{q}\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2\xrightarrow{s}\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2\xrightarrow{t_2}\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha}$$

Δηλαδή η $f\left(x\right)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ μπορεί να προκύψει ως διαδοχική[8] σύνθεση:

$$f=t_2\circ s\circ q\circ t_1$$

Ας δούμε πως δουλεύουν όλα αυτά στην Geogebra. Εισάγουμε πρώτα τους συντελεστές α,β,γ ως παραμέτρους δίνοντας αρχικές τιμές $\alpha=1$, $\beta=1$ και $\gamma=1$. Δημιουργούμε και τρεις δρομείς για αυτές τις παραμέτρους. Ορίζουμε κατόπιν τις βοηθητικές τιμές[9]:

$$c=\alpha+0,\qquad w=\frac{\beta}{2a},\qquad D=\beta^2-4\alpha\gamma,\qquad m=-\frac{D}{2\alpha}$$

Η ώρα των συναρτήσεων τώρα. Εισάγουμε τις

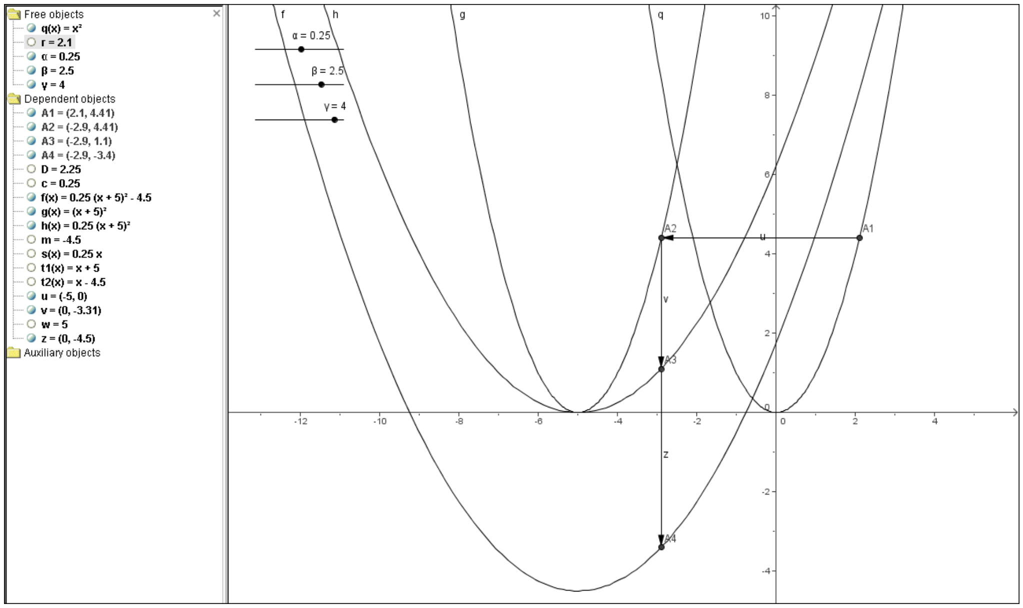
$$q\left(x\right)=x^2,\qquad t_1\left(x\right)=x+w,\qquad s\left(x\right)=cx,\qquad t_2\left(x\right)=x+m$$

Σημειώστε ότι στην Geogebra θα δώσουμε `t1(x)=x+w`.

Επειδή δε μας ενδιαφέρει η εμφάνιση των t_2,q,t_1 ζητάμε από την Geogebra να κρύψει αυτά τα αντικείμενα (δεξί κλικ και απενεργοποιούμε το `Show Object`). Για να φανούν τα ενδιάμεσα βήματα εισάγουμε τις συνθέσεις σταδιακά: $g\left(x\right)=q\left(t_1\left(x\right)\right)$ $h\left(x\right)=s\left(g\left(x\right)\right)$ (αν έχετε δώσει τις τιμές που αναφέρουμε δε θα παρατηρήσετε διαφορά διότι η g απλώς πολλαπλασιάσθηκε με 1), και τέλος $f\left(x\right)=t_2\left(h\left(x\right)\right)$. Μπορείτε να κάνετε εμφανέστερους τους διάφορους μετασχηματισμούς αν παρακολουθήσετε τη διαδρομή ενός μόνο σημείου: Δώστε $r=1$. Ονομάστε $A1=(r,q(r))$. Το σημείο αυτό ανήκει στην $\mathcal{C}_q$. Μετά $A2=(r-w,q(r))$. Το $A2$ ανήκει στην $\mathcal{C}_g$. Στη συνέχεια ορίζουμε $A3=(r-w,cq(r))$ που είναι σημείο της h. Τέλος ορίζουμε το σημείο $A4=(r-w,cq(r)+m)$ που θα είναι σημείο της $\mathcal{C}_f$. Μπορείτε αλλάζοντας το r να επιλέξετε διαφορετικό αρχικό σημείο. Η διαδρομή γίνεται πιο παραστατική αν ορίσουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{A1A2}$, $\overrightarrow{A2A2}$, $\overrightarrow{A2A4}$. Το σχήμα που ακολουθεί έχει προκύψει αφού έχουν εισαχθεί οι τιμές $\alpha=\frac{1}{4}$, $\beta=\frac{5}{2}$, $\gamma=4$ και $r=2$. *Το αρχείο της Geogebra που δημιουργήσατε καλό είναι να το αποθηκεύσετε.*

[8] Έχουμε μάθει πως συνθέτουμε δύο συναρτήσεις. Η σύνθεση περισσοτέρων συναρτήσεων γίνεται συθέτοντας κάθε φορά 2. Η έκφραση $t_2\circ s\circ q\circ t_1$ σημαίνει $((t_2\circ s)\circ q)\circ t_1$ αλλά και $(t_2\circ s)\circ(q\circ t_1)$ ή $t_2\circ((s\circ q)\circ t_1)$. Αποδεικνύεται ότι όλες αυτές οι συναρτήσεις είναι ίσες

[9] Θα σας παραξενέψει η εισάγωγή $c=\alpha+0$. Δυστυχώς η Geogebra δεν δέχεται δύο ονόματα για την ίδια τιμή γιαυτό εισάγουμε το c σαν ενα εξαρτημένο αντικείμενο.



9.11.2 Η γραφική παράσταση της $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ από τη γραφική παράσταση της $\frac{1}{x}$.

Τη συνάρτηση αυτή την συναντήσαμε και πορηγουμένως. Σε μερικά βιβλία θα τη συνατήσετε με το όνομα *ομογραφική*. Υποθέτουμε ότι $\gamma \neq 0$ (στην αντίθετη περίπτωση η $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ συμπίπτει με ευθεία). Τροποποιούμε τον τύπο της συνάρτησης ως εξής:

$$\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma\left(x+\frac{\delta}{\gamma}\right)} = \frac{\alpha\left(x+\frac{\delta}{\gamma}\right)+\beta-\alpha\frac{\delta}{\gamma}}{\gamma\left(x+\frac{\delta}{\gamma}\right)} = \frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma}}{\gamma\left(x+\frac{\delta}{\gamma}\right)} = \frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2}}{x+\frac{\delta}{\gamma}}$$

και επομένως έχουμε:

$$\boxed{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} = \frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2}}{x+\frac{\delta}{\gamma}}}$$

Παρατηρούμε ότι ο τελικός τύπος της συνάρτησης μπορεί να παραχθεί ως εξής:

$$x \to x+\frac{\delta}{\gamma} \to \frac{1}{x+\frac{\delta}{\gamma}} \to \frac{\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2}}{x+\frac{\delta}{\gamma}} \to \frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2}}{x+\frac{\delta}{\gamma}}$$

Αν έχετε μελετήσει την προηγούμενη παράγραφο δε θα έχετε δυσκολία να μαντέψετε τη συνέχεια: Ονομάζουμε $f(x) = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ και $q(x) = \frac{1}{x}$. Επίσης ονομάζουμε

$$t_1(x) = x+\frac{\delta}{\gamma}, \qquad s(x) = \frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2}x, \qquad t_2(x) = x+\frac{\alpha}{\gamma}$$

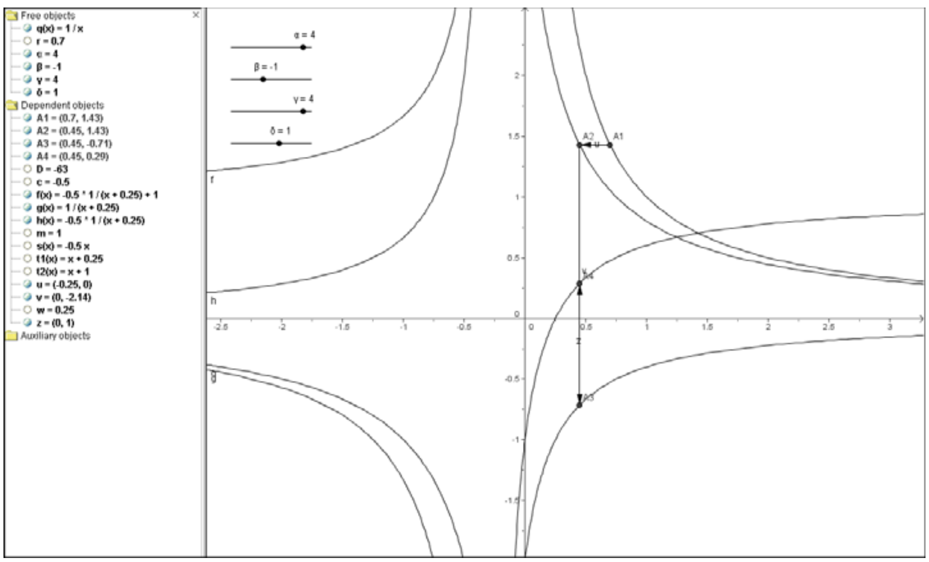
και έχουμε

$$x \xrightarrow{t_1} x + \frac{\delta}{\gamma} \xrightarrow{q} \frac{1}{x + \frac{\delta}{\gamma}} \xrightarrow{s} \frac{\frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2}}{x + \frac{\delta}{\gamma}} \xrightarrow{t_2} \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2}}{x + \frac{\delta}{\gamma}}$$

Εργαζόμαστε όπως ακριβώς στην προηγούμενη παράγραφο [10] εισάγοντας παραμέτρους και συναρτήσεις στην Geogebra. Θα εισάγουμε τώρα $q(x) = \frac{1}{x}$ και

$$w = \frac{\delta}{\gamma}, \quad c = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2}, \quad m = \frac{\alpha}{\gamma}$$

και τις συναρτήσεις $t_1(x) = x + w$, $s(x) = cx$ και $t_2(x) = x + m$ όπως ακριβώς κάναμε στην προηγούμενη παράγραφο. Όλα τα υπόλοιπα είναι ακριβώς ίδια.



10 Συμμετρίες

10.1 ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΚΕΝΤΡΟ-ΑΞΟΝΑ

Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση

$$\boxed{s(x) = cx}$$

που έχουμε ήδη εξετάσει στην ειδική περίπτωση όπου $c = -1$ δηλαδή τη συνάρτηση

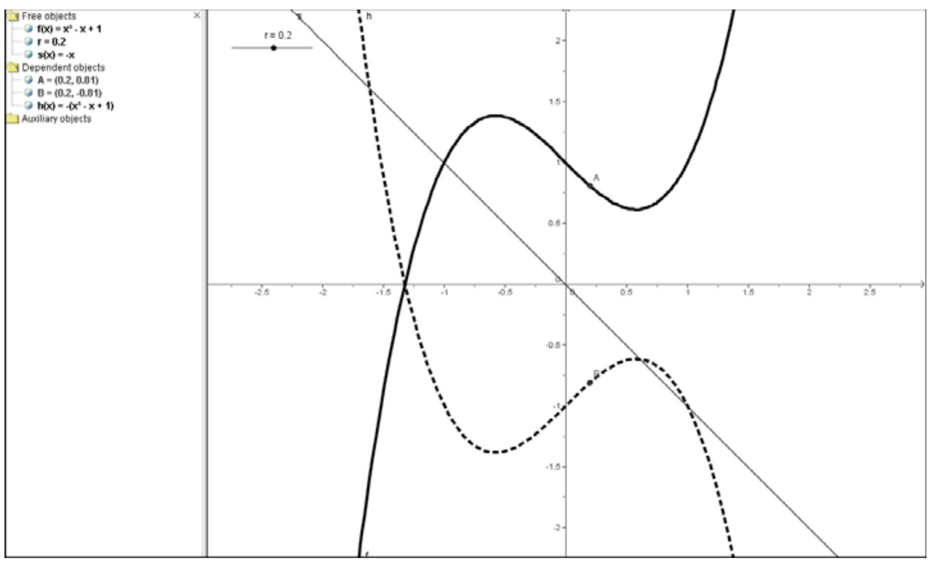
$$\boxed{s(x) = -x}$$

Αν τώρα έχουμε μία οποιαδήποτε συνάρτηση f θα δούμε ποιά είναι η σημασία των συνθέσεων $f \circ s$ και $s \circ f$ δηλαδή τί σημαίνουν οι συναρτήσεις $f(-x)$ και $-f(x)$.

[10] Αν μάλιστα έχετε αποθηκεύσει το αρχείο με τη δουλειά της προηγούμενης παραγράφου μπορείτε να κάνετε μικρές τροποποιήσεις.

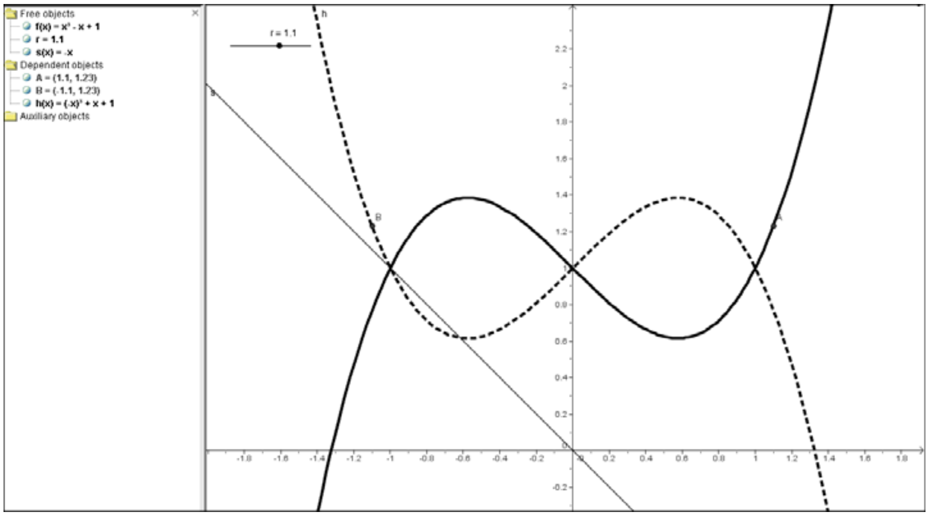
10.1.1 Συμμετρία ως προς $x'x$.

Εισάγουμε την $f(x) = x^3$ και την $s(x) = -x$. Κατόπιν ζητάμε να μας δώσει τη συνάρτηση $h(x) = s(f(x))$. Είναι $h(x) = -f(x)$. Το αποτέλεσμα είναι προφανές: Τα σημεία της $\mathcal{C}_h$ προκύπτουν από τα σημεία της $\mathcal{C}_f$ κρατώντας την ίδια τετμημένη και παίρνοντας την αντίθετη τεταγμένη. Επομένως η $\mathcal{C}_h$ είναι συμερική της $\mathcal{C}_f$ ως προς τον άξονα $x'x$. Για να επιβεβαιώσουμε το γεγονός αυτό παίρνουμε ένα μεταβλητό σημείο της $\mathcal{C}_f$. Δίνουμε $r = 1$, εισάγουμε τον σχετικό δρομέα και ορίζουμε το σημείο $A = (r, f(r))$. Με το κατάλληλο εργαλείο συμμετρίας ως προς άξονα βρίσκουμε το συμμετρικό του A ως προς $y'y$ το οποίο η Geogebra θα ονομάσει B. Μετακινώντας το δρομέα μετακινείται το A στην $\mathcal{C}_f$ και το B στην $\mathcal{C}_h$. Στο σχήμα έχουμε αλλάξει τις γραμμές για τις $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_h$.



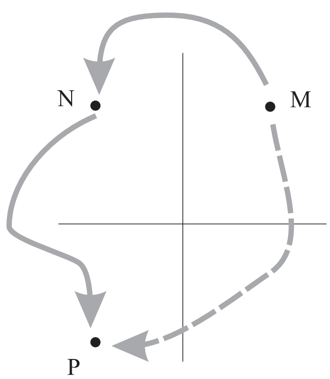
10.1.2 Συμμετρία ως προς $y'y$.

Εργαζόμαστε όπως ακριβώς στο προηγούμενο παράδειγμα αλλά παίρνοντας αντί για $h(x) = s(f(x))$ τη σύνθεση με διαφορετική σειρά δηλαδή $h(x) = f(s(x))$. Τώρα $h(x) = f(-x)$. Διαπιστώνουμε ότι οι $\mathcal{C}_f$ και $\mathcal{C}_h$ είναι συμμετρικές ως προς τον $y'y$. Μία επαλήθευση μπορεί να γίνει αν πάρουμε το συμμετρικό μεταβλητού σημείου A της $\mathcal{C}_f$ ως προς $y'y$.

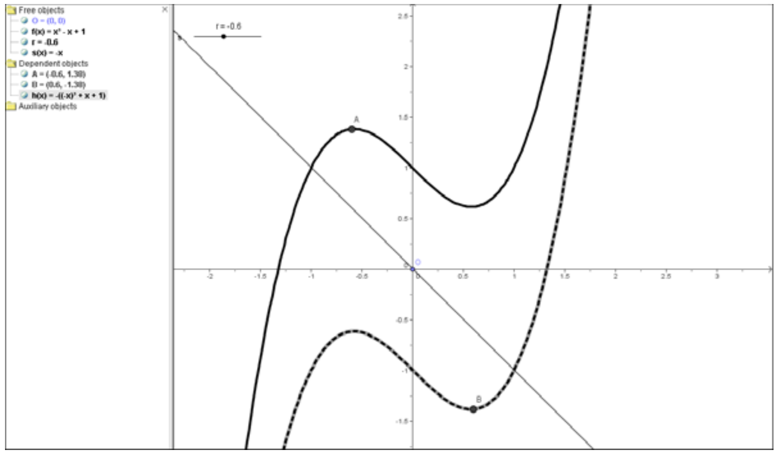


10.1.3 Συμμετρία ως προς O.

Μία εύκολη άσκηση Γεωμετρίας είναι η ακόλουθη (λύστε την): Αν έχουμε δύο *κάθετες* ευθείες που τέμνονται στο Α, και πάρουμε το συμμετρικό Ν ενός σημείου Μ ως προς την πρώτη ευθεία και το συμμετρικό Π του Ν ως προς τη δεύτερη ευθεία τότε το Ρ είναι το συμμετρικό του Μ ως προς Α:



Αυτό σημαίνει ότι αν πάρουμε μία συνάρτηση και τη συνθέσουμε αριστερά και δεξιά με την $s(x) = -x$ θα έχουμε μία συνάρτηση, την $s(f(s(x)))$ και πιο συγκεκριμένα την $-f(-x)$, της οποίας η γραφική παράσταση θα είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της αρχικής ως προς Ο. Με άλλα λόγια αν σχηματίσουμε την $h = s \circ f \circ s$ οι $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_h$ είναι συμμετρικές ως προς Ο. Μπορούμε να επαληθεύσουμε με το κατάλληλο εργαλείο ότι το συμμετρικό σημείου Α της $\mathcal{C}_f$ ως προς Ο ανήκει στην $\mathcal{C}_h$.



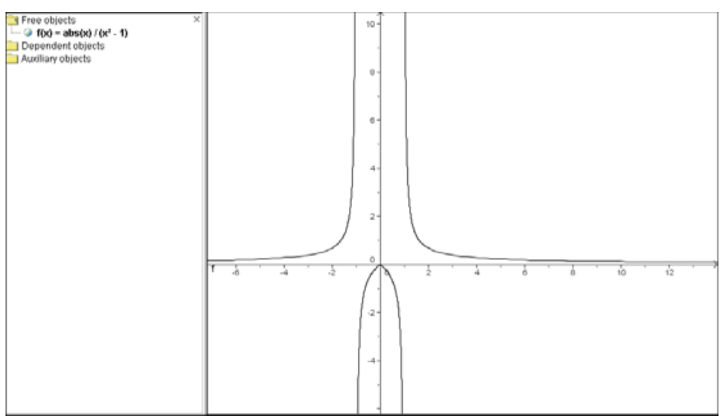
10.1.4 Άρτιες και περιττές συναρτήσεις.

Η γραφική παράσταση μάς συνάρτησης f δε μπορεί να είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $x'x$ (γιατί;). Αν είναι συμμερική ως προς τον άξονα $y'y$, δηλαδή αν συμπίπτει με την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(-x)$ θα λέγεται άρτια. Δηλαδή μία συνάρτηση f θα είναι άρτια αν ισχύει $f(-x) = f(x)$ για κάθε x από εκείνα που ορίζεται η f. Η σχέση αυτή μας λέει ότι πρέπει αν ν f ορίζεται στο x τότε πρέπει να ορίζεται και στο $-x$. Ο τυπικός ορισμός της άρτιας συνάρτησης περιλαμβάνει και αυτή την προϋπόθεση. Δηλαδή μία συνάρτηση f λέγεται *άρτια* αν:

- Για κάθε $x \in \mathcal{D}_f$ ισχύει $-x \in \mathcal{D}_f$.
- Για κάθε $x \in \mathcal{D}_f$ ισχύει $f(-x) = f(x)$.

Στο επόμενο σχήμα η Geogebra έχει παραστήσει τη συνάρτηση $f(x) = \frac{|x|}{1-x^2}$. Θα την εισάγετε:

```
f(x)=abs(x)/(1-x^2)
```



Από τη γραφική παράσταση φαίνεται ότι η συνάρτηση είναι άρτια.
Άσκηση. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω συνάρτηση είναι άρτια.

Αν η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f παρουσιάζει συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων δηλαδή αν συμπίπτει με τη συμμετρική της δηλαδή την $-f(-x)$ η συνάρτηση είναι περιττή. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει $f(x) = -f(-x)$ ή αλλιώς $f(-x) = -f(x)$. Ανάλογη παρατήρηση με εκείνη των αρτίων συναρτήσεων ισχύει και για το πεδίο ορισμού των περιττών. Ο τυπικός ορισμός είναι:
Μία συνάρτηση f λέγεται *περιττή* αν:

- Για κάθε $x \in \mathcal{D}_f$ ισχύει $-x \in \mathcal{D}_f$.

- Για κάθε $x \in \mathcal{D}_f$ ισχύει $f(-x) = -f(x)$.

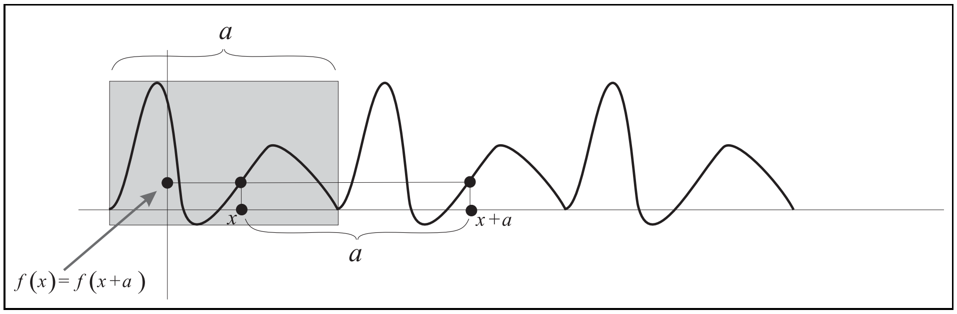
Άσκηση. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x$. Να παραστήσετε τη συνάρτηση στην Geogebra και να αποδείξετε ότι είναι περιττή. Τροποποιούμε τη συνάρτηση παίρνοντας την $g(x) = x^3 + x + 1$. Δείξτε ότι η g δεν είναι άρτια ούτε περιττή.

10.2 Μεταφορες

Είδαμε ότι αν συνθέσουμε την f με την $t(x) = x + \alpha$ η $\mathcal{C}_f$ μεταφέρεται παράλληλα πάνω ή κάτω ανάλογα με τη σειρά που συνθέτουμε. Η σύνθεση $t \circ f$ δίνει μεταφορές πάνω-κάτω ενώ η σύνθεση $f \circ t$ δίνει μεταφορές αριστερά-δεξιά. Οι μεταφορές αυτές θεωρούνται ένα είδος συμμετρίας. Όπως και με τις συμμετρίες ως προς τους άξονες ή την αρχή των αξόνων εύλογο είναι το ερώτημα: Μπορεί να συμπίπτει κάποια από τις $t \circ f$, $f \circ t$ με την f;

Η απάντηση στο πρώτο ερώτημα είναι απλή. Οι $t \circ f$ και f θα είναι ίσες αν και μόνο αν για όλα τα x στα οποία ορίζεται η συνάρτηση f ισχύει $(t \circ f)(x) = f(x)$ δηλαδή $f(x) + \alpha = f(x)$. Η τελευταία σχέση ισχύει μόνο όταν $\alpha = 0$ και επομένως ή t συντιθέμενη με την f αφήνει την δεύτερη ως έχει.

Η απάντηση στο δεύτερο ερώτημα είναι πιό ενδιαφέρουσα. Ενδιαφέρει το αν οι συναρτήσεις $f \circ t$ και f είναι ίσες δηλαδή αν ισχύει $f(t(x)) = f(x)$ για κάθε x που ορίζονται τα δύο μέλη. Με δυό λόγια αν μπορεί να ισχύει $f(x + \alpha) = f(x)$ *για όλα τα* x. Σε μια τέτοια περίπτωση θα πρέπει βέβαια τόσο το x όσο και το $x + \alpha$ να ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f. Γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι ο α θα πρέπει να είναι τέτοιος ώστε αν η γραφική παράσταση της f μετατοπισθεί οριζόντια κατα $|\alpha|$ (είτε δεξιά είτε αριστερά) να συμπέσει με τον εαυτό της. Ας υποθέσουμε ότι το α είναι θετικό. Τότε κάθε κομμάτι της γραφικής παράστασης της f που αντιστοιχεί σε διάστημα πλάτους α θα επαναλαμβάνεται.



10.2.1 Περιοδικές συναρτήσεις.

Μία συνάρτηση με αυτή την ιδιότητα έχει το στοιχείο της επανάληψης ή είναι όπως λέμε περιοδική και ο α θα λέγεται περίοδος της. Με $\alpha > 0$ η απαίτηση $f(x+\alpha) = f(x)$ είναι απαίτηση επανάληψης προς τα δεξια. Το βιβλίο Άλγεβρας της Β΄ Λυκείου στον ορισμό που δίνει στην έννοια απαιτεί επανάληψη και προς τα αριστερά. Επανάλαμβάνουμε αυτό τον ορισμό προσαρμοσμένο στο δικό μας συμβολισμό. Μία συνάρτηση f θα λέγεται *περιοδική* με περίοδο $\alpha > 0$ αν:

- Για κάθε $x \in \mathcal{D}_f$ ισχύει $x+\alpha \in \mathcal{D}_f$ και $x-\alpha \in \mathcal{D}_f$
- Για κάθε $x \in \mathcal{D}_f$ ισχύει $f(x+\alpha) = f(x)$ και $f(x-\alpha) = f(x)$.

Είναι προφανές ότι κάθε σταθερή συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι περιοδική. Ήδη έχετε γνωρίσει τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις που είναι περιοδικές. Στο θέμα αυτό θα επανέλθουμε.

Η συνάρτηση του ακεράιου μέρους. Ας δούμε ένα παράδειγμα με κάποιες συναρτήσεις στις οποίες δεν έχουμε αναφερθεί και είναι ενσωματωμένες στην Geogebra. Αν έχουμε ένα μη αρνητικό αριθμό αυτός διαθέτει ένα πλήθος μονάδων. Ο 5 διαθέτει 5 μονάδες ο 8,4 διαθέτει 8 όπως 8 διαθέτει και ο 8,3 αλλά και ο 8,9999. Ο αριθμός αυτός ονομάζεται ακέραιο μέρος. Το ακέραιο μέρος του 1,2 είναι 1, το ακέραιο μέρος του 0,8 είναι 0. Μπορούμε να περιγράψουμε το ακέραιο μέρος με μεγαλύτερη ακρίβεια:

- Το *ακέραιο μέρος* του $x \geq 0$ είναι ο πιό μεγάλος από τους ακεραίους που δεν υπερβαίνουν το x.

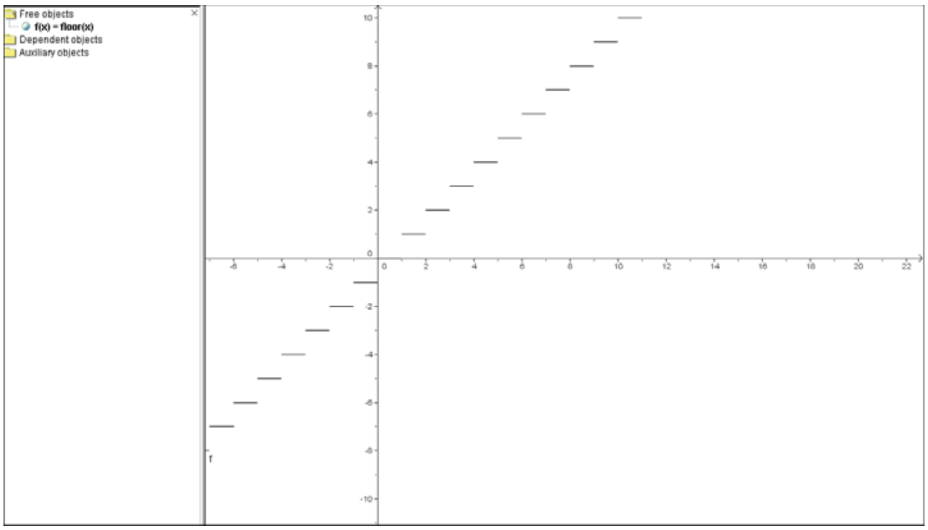
Η παραπάνω περιγραφή μας επιτρέπει να ορίσουμε ακέραιο μέρος και για τους αρνητικούς αριθμούς. Για παράδειγμα οι ακέραιοι που δεν υπερβαίνουν το -1,4 είναι οι -2, -3, -4, ... και ο πιο μεγάλος από αυτούς είναι ο -2. Το ακέραιο μέρος του -1,4 είναι ο -2. Το ακέραιο μέρος του x συμβολίζεται με $[x]$. Θα είναι λοιπόν:

- $[x]$=ο πιό μεγάλος από τους ακεραίους που δεν υπερβαίνουν το x.

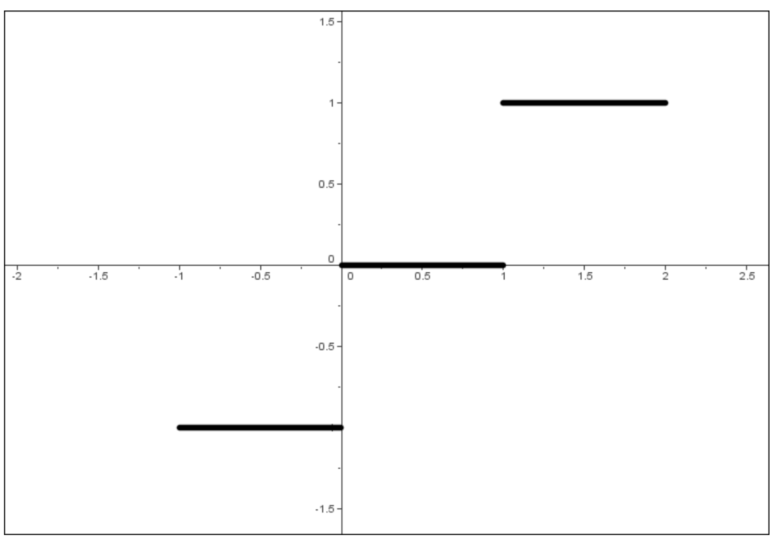
Η Geogebra συμβολίζει το ακέραιο μέρος με το σύμβολο `floor`. Είναι

```
floor(3,89)=3,    floor(-3,89)=-4
```

Ανοίξτε την Geogebra και δώστε `f(x)=floor(x)`. Η γραφική παράσταση της f είναι η ακόλουθη:

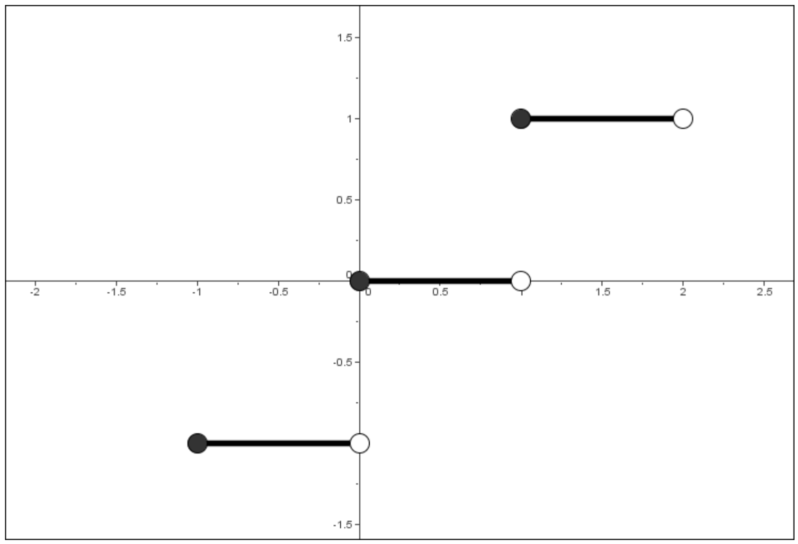


Η συνάρτηση αυτή έχει κλιμακωτό σχήμα. Για να γίνει πιο κατανοητό πως δουλεύει ας εστιάσουμε την προσοχή μας σε ένα κομμάτι της. Αλλάζουμε το πάχος γραμμής και δίνουμε μεγέθυνση:



Ας πάρουμε τους αριθμούς του διαστήματος $[0, 1]$ ξεκινώντας από το 0. Ο αριθμός 0 έχει ακέραιο μέρος 0. Ανεβαίνοντας και κατευθυνόμενοι προς το 1 θα συναντάμε αριθμούς που επίσης έχουν ακέραιο μέρος 0. Τα πράγματα αλλάζουν απότομα μόλις συναντήσουμε το 1. Αυτός έχει ακέραιο μέρος 1. Το σημείο (1,0) δεν περιλαμβάνεται στη γραφική παράσταση ενώ το (1,0) περιλαμβάνεται.

Αν ένα σημείο ανήκει στη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης το σχεδιάζουμε με μάυρο γέμισμα ($\bullet$) ενώ αν δεν ανήκει με λευκό γέμισμα ($\circ$). Με αυτή τη σύμβαση θα σχεδιάζαμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ακεραίου μέρους.



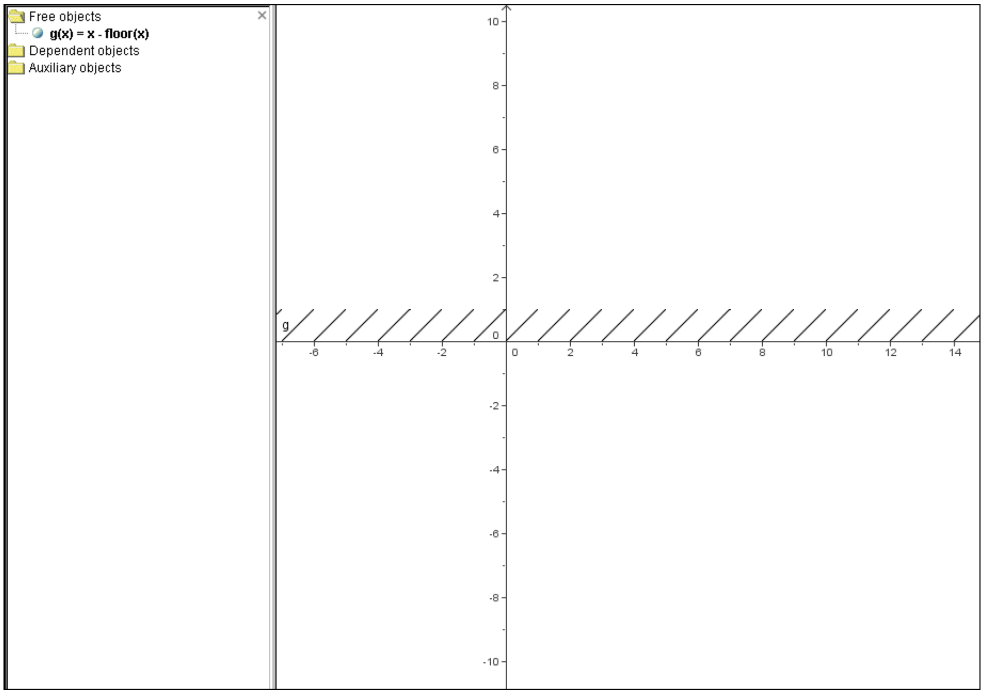
Βλέπουμε ότι στο 1 η συνάρτηση παρουσιάζει άλμα. Μπορούμε να πούμε ότι:

- Όταν το x τείνει στο 1 από μικρότερες τιμές το $f(x)$ τείνει στο 0
- Όταν το x τείνει στο 1 από μεγαλύτερες τιμές το $h(x)$ τείνει στο 1
- Το $f(1)$ είναι 1

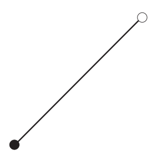
Η συνάρτηση του δεκαδικού μέρους. Αν από ένα αριθμό αφαιρέσουμε τις μονάδες που περιέχει αυτό που θα μείνει είναι το δεκαδικό μέρος. Αν χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό $[x]$ για το ακέραιο μέρος του x θα είναι:

- Το *δεκαδικό μέρος* του x είναι ίσο με $x - [x]$.

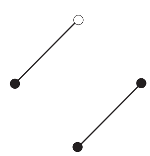
Είναι προφανές ότι αν αυξήσουμε ένα αριθμό κατά 1 μονάδα το δεκαδικό του μέρος δεν θα αλλάξει. Το ίδιο συμβαίνει αν μειώσουμε τον αριθμό κατά ένα. Η συνάρτηση λοιπόν του δεκαδικού μέρους είναι περιοδική με περίοδο 1. Δώστε στην Geogebra `g(x)=x-floor(x)` και θα έχετε την γραφική παράσταση του δεκαδικού μέρους:



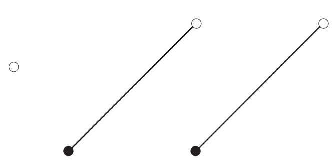
Βλέπουμε καθαρά την περιοδικότητα της συνάρτησης g. Το κομμάτι που επαναλαμβάνεται είναι εκείνο μεταξύ που αντιστοιχεί στο διάστημα $[0, 1)$:



Εξ' ίσου καλά μπορούμε όμως να θεωρήσουμε ότι επαναλαμβάνεται και το κομμάτι μεταξύ κάθε διαστήματος με πλάτος 1 λ.χ. το κομμάτι που αντιστοιχεί στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$:



Αφού επαναλαμβάνεται το τμήμα που βρίσκεται στο διάστημα $[0, 1)$ επαναλαμβάνεται και το τμήμα που βρίσκεται στο διάστημα $[0, 2)$:



Δηλαδή μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση g είναι περιοδική και με περίοδο 2. Αυτό ισχύει πιό γενικά:
Άσκηση: Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση g είναι περιοδική με περίοδο α τότε είναι περιοδική και με περίοδο 2α.

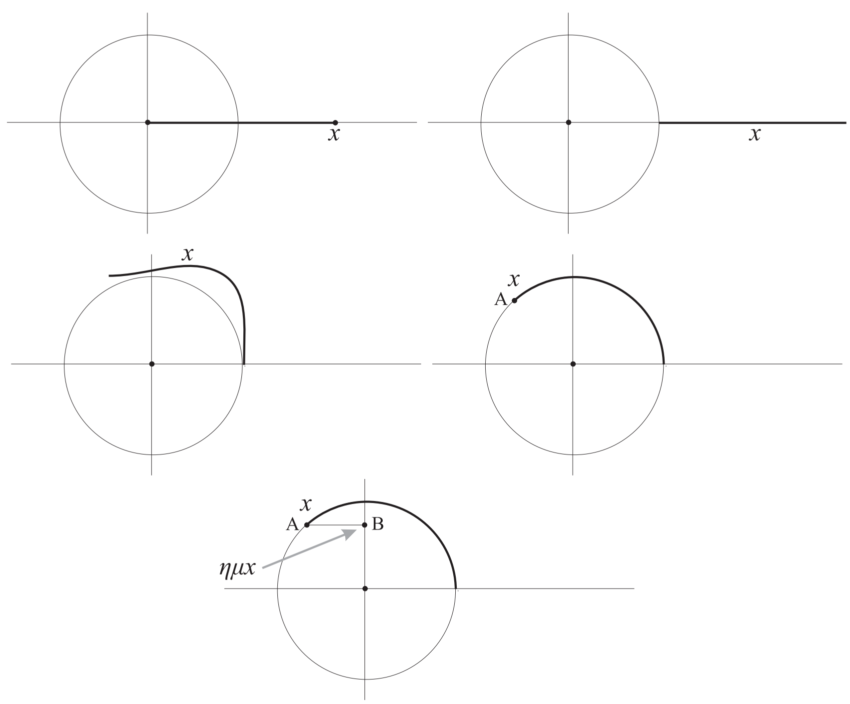
11 Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

11.1 Απο τον Τριγωνομετρικο Κυκλο στην Γραφικη Παρασταση.

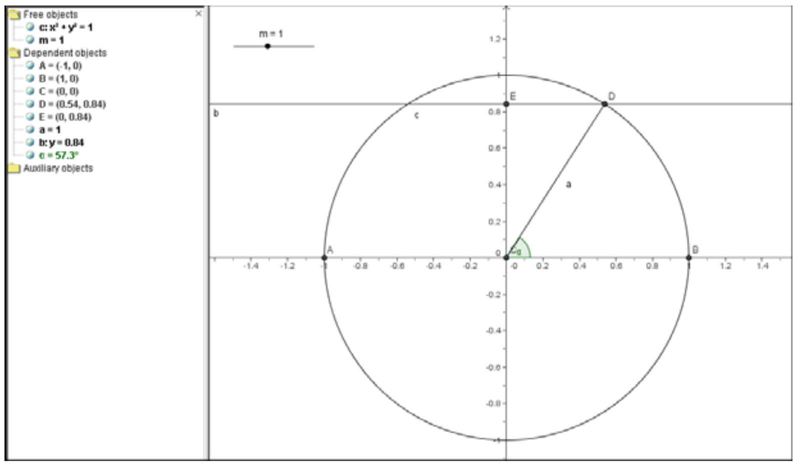
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης ημίτονο. Ήδη σας είναι γνωστός ο τρόπος με τον οποίο σε κάθε παραγματικό αριθμό x μπορούμε να αντιστοιχίσουμε το ημίτονο του:

1. Τυλίγουμε το x στο μοναδιαίο κύκλο (κατά την θετική φορά αν το x είναι θετικό και κατά την αρνητική αν είναι αρνητικό) και καταλήγουμε στο σημείο Α.

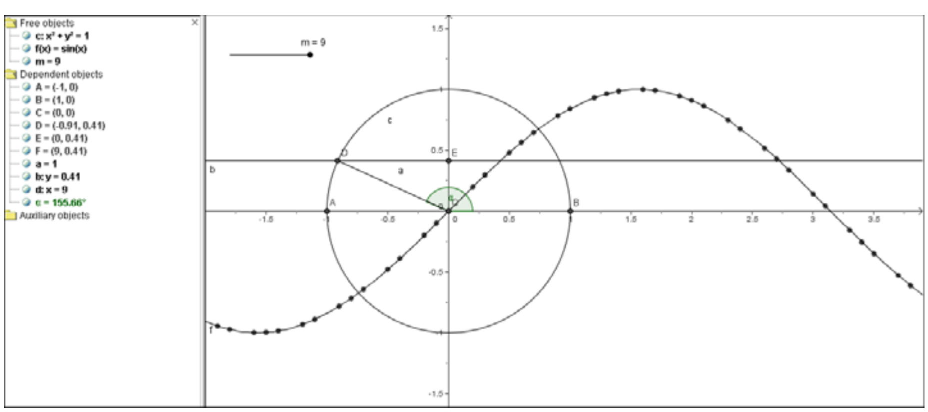
2. Προβάλλουμε το σημείο Α στον άξονα $y'y$ και παίρνουμε το σημείο Β. Η τεταγμένη του σημείου Β είναι το ημίτονο του x.



Μπορούμε να κάνουμε αυτή την κατασκευή με την βοήθεια της Geogebra. Εισάγουμε ως συνήθως μία παράμετρο m. Δίνουμε μία τιμή $m = 1$ και εμφανίζουμε τον σχετικό δρομέα. Εισάγουμε τον μοναδιαίο κύκλο $x^2 + y^2 = 1$. Ζητάμε από την Geogebra να βρεί το κέντρο του (με την εντολή `Center`) και το σημείο τομής του με τον θετικό ημιάξονα. Στη συνέχεια ενεργοποιούμε το εργαλείο (`Angle with given size`». Κάνοντας κλικ στο σημείο τομής του κύκλου με τον θετικό ημιάξονα των x, στην αρχή των αξόνων (δηλαδή το κέντρο του κύκλου) και κατόπιν εισάγοντας το m παίρνουμε γωνία μεγέθους m. Η Geogebra μας δίνει ένα ακόμη σημείο του κύκλου που μαζί με τα δύο προηγούμενα σημεία προσδιορίζει πλήρως την γωνία. Από το σημείο αυτό φέρνουμε κάθετη στον άξονα $y'y$. Θα έχουμε το ημίτονο x:



Η συνάρτηση ημίτονο είναι εκείνη που αντιστοιχεί σε κάθε x το ημίτονο του. Μολονότι η Geogebra έχει την δυνατότητα να παραστήσει γραφικά αυτή την συνάρτηση ας δούμε πρώτα πως μπορούμε να εμφανίσουμε μερικά σημεία της γραφικής παράστασης. Συνεχίζοντας από εκεί που μείναμε εισάγουμε την ευθεία $x = m$ και ζητάμε από την Geogebra να βρεί το σημείο τομής της $x = m$ με την κάθετη στον $y'y$ που χρησιμοποιήσαμε για να εντοπίσουμε το ημίτονο. Με δεξί κλικ στο σημείο τομής των δύο ευθειών ενεργοποιούμε την αποτύπωση του ίχνους. Το σημείο αυτό θα έχει τετμημένη m και τεταγμένη $\eta\mu m$ και επομένως θα ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ημιτόνου. Μετακινώντας τον δρομέα θα έχουμε διάφορα σημεία της γραφικής παράστασης. Δίνοντας τέλος `f( x) =sin (x)` θα έχουμε και όλόκληρη την γραφική παράσταση:



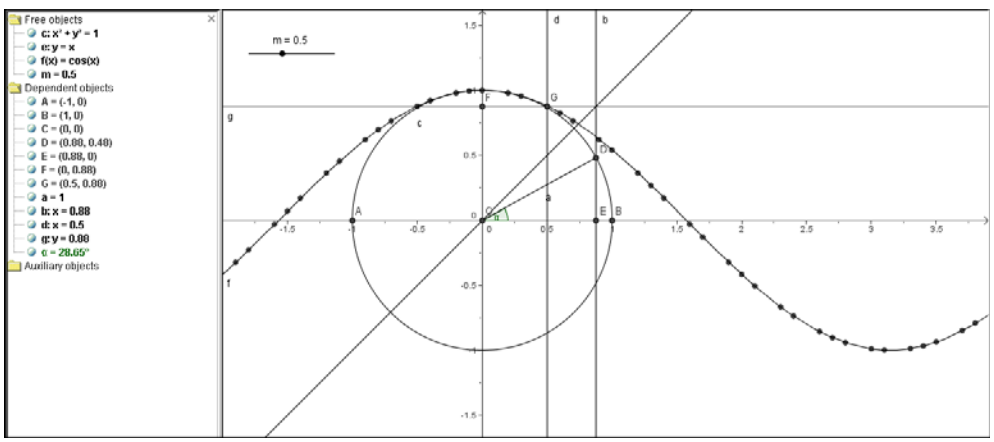
Οι τιμές της συνάρτησης ημίτονο δε μπορούν να ξεπεράσουν το 1 ή να πέσουν κάτω από το -1 με άλλα λόγια:

$$-1 \leq \eta\mu x \leq 1$$

πληροφορία που σε πιο πυκνή μορφή γράφεται και

$$|\eta\mu x| \leq 1$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης συνημίτονο. Σε κάθε αριθμό x μπορούμε να αντιστοιχίσουμε το συνημίτονο του. Αυτό γίνεται αν εργασθούμε όπως στο ημίτονο αλλά αντί να προβάλλουμε στον άξονα των y προβάλλουμε στον άξονα των x. Για να βρίσκουμε σημεία της γραφικής παράστασης δηλαδή σημεία της μορφής $(x, \sigma\upsilon\nu x)$ χρειαζόμαστε η τιμή $\sigma\upsilon\nu x$ να βρίσκεται στον $y'y$. Αυτό επιτυγχάνεται με μία συμμετρία ως προς την ευθεία $y = x$. Η όλη κατασκευή με την Geogebra διακρίνεται στο σχήμα που ακολουθεί. Υπενθυμίζεται ότι η συνάρτηση συνημίτονο εισάγεται ως cos.



Φυσικά και εδώ ισχύει:

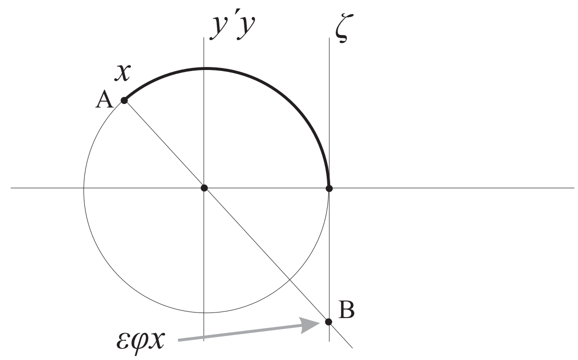
$$-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$$

πληροφορία που σε πιο πυκνή μορφή γράφεται και

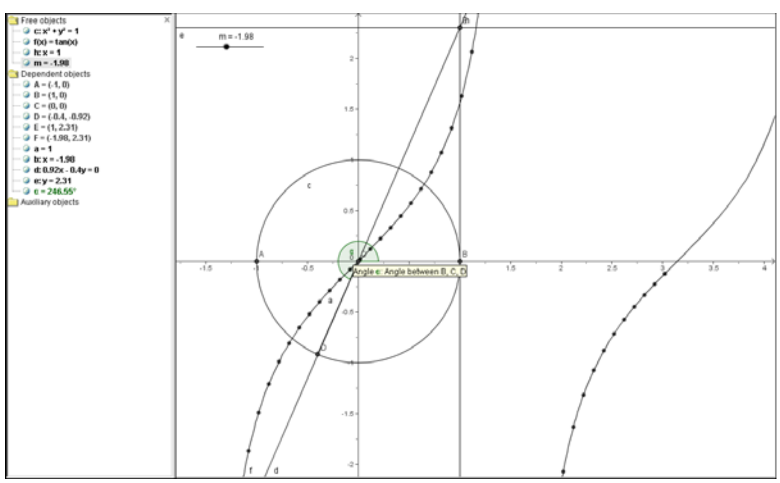
$$|\sigma\upsilon\nu x| \leq 1$$

Άσκηση: Να κάνετε βήμα προς βήμα την προηγούμενη κατασκευή.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης εφαπτομένη. Όπως είναι γνωστό για να βρούμε την εφαπτομένη του αριθμού x χρειαζόμαστε ένα ακόμη άξονα έστω ζ ο οποίος προκύπτει από τον $y'y$ με μεταφορά προς τα δεξιά κατά μία μονάδα (δηλαδή για να ακριβολογούμε κατά το διάνυσμα $\vec{u} = (1, 0)$). Η όλη εργασία είναι η εξής: Τοποθετούμε τον x στο μοναδιαίο κύκλο και κατόπιν βρίσκουμε το σημείο που τον εκπροσωπεί και φέρνουμε την ευθεία που ορίζει το σημείο αυτό με το κέντρο του κύκλου δηλαδή με την αρχή των αξόνων. Η ευθεία αυτή τέμνει τον άξονα ζ σε ένα σημείο που αντιστοιχεί στην εφαπτομένη του x.



Μπορούμε, εργαζόμενοι περίπου όπως πριν, να κατασκευάσουμε σημεία της γραφικής παράστασης της εφαπτομένης. Είναι χρήσιμο όταν εισάγουμε την παράμετρο m να ορίσουμε στο δρομέα μεγαλύτερο εύρος λ.χ. ελάχιστη τιμή -20 και μέγιστη 20. Αφού βρούμε το σημείο B του προηγουμένου σχήματος θα χρειασθούμε και το σημείο $(x, \varepsilon\varphi x)$. Αυτό βρίσκεται φέρνοντας κάθετη από το B στον y-άξονα και σημειώνοντας την τομή της με την ευθεία $x = m$. Αφού βρούμε μερικά μεμονωμένα σημεία της γραφικής παράστασης της εφαπτομένης ζητάμε από την Geogebra να χαράξει και την γραφική παράσταση. Αυτό γίνεται δίνοντας `f(x)=tan(x)`

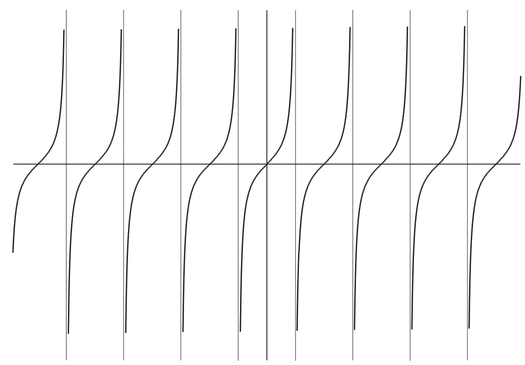


Σημειώστε ότι η εφαπτομένη δεν ορίζεται όταν το σημείο που εκπροσωπεί τον αριθμό x βρίσκεται στον άξονα $y'y$. Δηλαδή όταν είναι

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Οι τιμές αυτές δεν περιλαβάνονται στο πεδίο ορισμού της εφαπτομένης. Επομένως η γραφική παράσταση της δεν διαθέτει σημεία στις ευθείες της μορφής $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Όπως έχουμε δεί και σε άλλες περιπτώσεις ή γραφική παράσταση " αποφεύγει " αυτές τις ευθείες. Πιο συγκεκριμένα:

- Όταν το x τείνει στον $\frac{\pi}{2} + k\pi$ από μικρότερες τιμές η $\varepsilon\varphi x$ τείνει στο $+\infty$
- Όταν το x τείνει στον $\frac{\pi}{2} + k\pi$ από μεγαλύτερες τιμές η $\varepsilon\varphi x$ τείνει στο $-\infty$



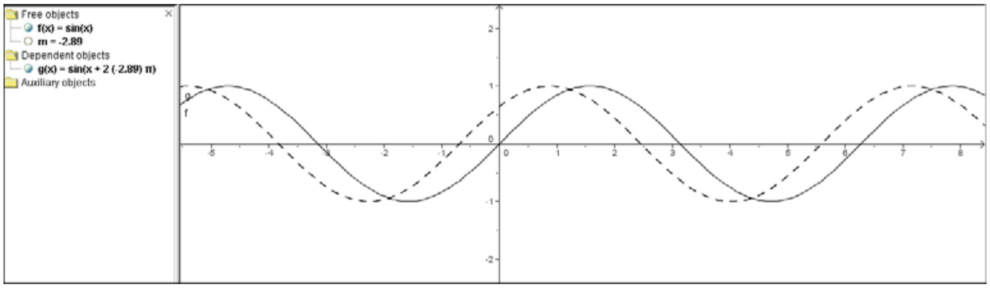
Άσκηση: Ποιές από τις συναρτήσεις ημίτονο, συνημίτονο, εφαπτομένη είναι άρτιες ή περιττές;

11.2 Η ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΤΗΤΑ ΣΤΙΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ.

Η περίοδος της συνάρτησης ημίτονο. Η τιμή του ημιτόνου του x δεν εξαρτάται τόσο από την τιμή που έχει ο x όσο από την θέση που θα έχει ο x αν τοποθετηθεί στον τριγωνομετρικό κύκλο. Επομένως οι στροφές που θα πάρει κατά το τύλιγμα δεν παίζουν ρόλο. Οι τιμές του ημιτόνου επαναλαμβάνονται για κάθε στροφή δηλαδή για κάθε 2π. Η τυπική σχέση που περιγράφει αυτό το γεγονός είναι

$$\eta\mu\,(x \pm 2\pi) = \eta\mu x$$

Η ημίτονο λοιπόν είναι μία συνάρτηση περιοδική με περίοδο 2π. Αλλά και οι αριθμοι 4π, 8π, $12\pi, \ldots$ είναι περίοδοι της ημίτονο. Εισάγουμε στην Geogebra μία παράμετρο m με αρχική τιμή $m = 1$. Δίνουμε `f(x)=sin(x)`. Δίνουμε `g(x)=sin(x+2*m*pi)`. Από τις ιδιότητες ορίζουμε η γραφική παράσταση της g να είναι διακεκομμένη. Στη συνέχεια αλλάζουμε το m ως εξής: Επιλέγουμε την σχέση `m=1` από το παράθυρο της άλγεβρας και κατόπιν πατάμε το άνω ($\uparrow$) ή το κάτω ($\downarrow$) βελάκι. Η δουλειά αυτή μπορεί να γίνει και με εισαγωγή δρομέα για το m αλλά, όπως θα διαπιστώσετε ο τρόπος, αυτός προσφέρει καλύτερο έλεγχο. Με την αυξομείωση του m η γραφική παράσταση της g μετακινείται δεξιά αριστερά (λογικό διότι παίρνοντας την g ουσιαστικά παίρνουμε την σύνθεση $f \circ t$ με $t\,(x) = x + 2m\pi$ που όπως έχουμε δεί προκαλεί μετακίνηση δεξιά-αριστερά).



Θα παρατηρήσετε ότι όταν το m παίρνει ακέραια τιμή τότε οι γραφικές παραστάσεις των f και g συμπίπτουν. Αυτό είναι αναμενόμενο διότι οι αριθμοί $2m\pi$ είναι περίοδοι της ημίτονο. Επίσης θα παρατηρήσετε ότι οι δύο συναρτήσεις δεν συμπίπτουν για μή ακέραιες τιμές του m. Με δυό λόγια *φαίνεται* ότι η ημίτονο δεν έχει άλλες περιόδους εκτός από τις $2m\pi, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$. Αυτό ισχύει και μια αυστηρή απόδειξη μπορείτε να έχετε όταν τελειώσετε την επόμενη:

Άσκηση: Να αποδείξετε ότι αν για όλα τα x ισχύει $\eta\mu x = \eta\mu\,(x + T)$ τότε $T = 2m\pi$ για κάποιον ακέραιο m.

Η περίοδος των συνάρτησεων: συνημίτονο, εφαπτομένη. Μπορείτε εύκολα επαναλαμβάνοντας την προηγούμενη διαδικασία αλλά δίνοντας `f(x)=cos(x)` να επιβεβαιώσετε ότι οι αριθμοί $2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$ είναι περίοδοι της συνάρτησης συνημίτονο.

Εισάγοντας την συνάρτηση `f(x)=tan(x)` και πάλι `g(x)=sin(x+2*m*pi)` θα διαπιστώσετε ότι η g θα συμπέσει με την h όχι μόνο στις ακέραιες τιμές του m αλλά και στις τιμές ακέραιος+μισή μονάδα. Αυτό σημαίνει ότι (θυμηθείτε και τον τριγωνομετρικό κύκλο) η εφαπτομένη επαναλαμβάνεται κάθε π.

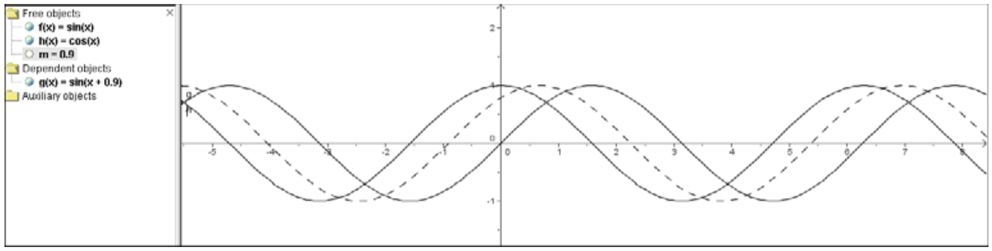
11.3 Ημιτονο απο Συνημιτονο

Στην Geogebra δίνουμε:

`m=0`, `f(x)=sin(x)`, `g(x)=sin(x+m)`, `h(x)=cos(x)`.

Ρυθμίζουμε το βήμα μεταβολής του m να είναι 0,01. Ορίζουμε η γραφική παράσταση της g να είναι διακεκομμένη. Μεταβολή του m προκαλεί οριζόντια μετακίνηση της γραφικής παράστασης της ημίτονο. Βλέπουμε ότι όταν το m πάρει την τιμή 1,57 που αντριστοιχεί κατά προσέγγισιν στην τιμή $\frac{\pi}{2}$ η ή γραφική παράσταση της g θα συμπέσει με της h. Αυτό συμβαίνει διότι είναι

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sigma\upsilon\nu x$$



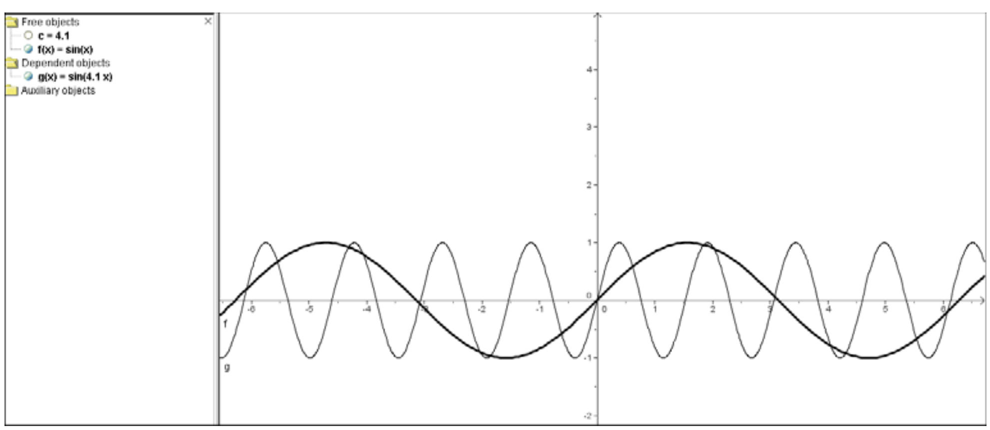
11.4 Μερικοι Ενδιαφεροντες Συνδυασμοι.

11.4.1 Η $\eta\mu\,(cx)$

Έχουμε δεί στα προηγούμενα τι συμβαίνει όταν από την συνάρτηση $f(x)$ σχηματίζουμε την συνάρτηση $f\,(cx)$ με $c > 0$. Η γραφική παράσταση της f θα *εκταθεί* ή θα *συμπιεσθεί* κατά μήκος του $x'x$ ανάλογα με το ο c είναι **μικρότερος** ή *μεγαλύτερος* της μονάδας. Αν τώρα η συνάρτηση $f(x)$ είναι περιοδική με περίοδο $T > 0$ τότε η γραφική παράσταση της $f(x)$ επαναλαμβάνεται ανά T. Όταν είναι $c > 1$ η γραφική παράσταση συμπιέζεται επομένως η επανάληψη θα γίνει σε μικρότερο διάστημα ενώ όταν $c < 1$ η επανάληψη θα γίνει σε μεγαλύτερο διάστημα. Πιό συγκεκριμένα:

- Αν η $f(x)$ έχει περίοδο T η $f\,(cx)$ θα έχει περίοδο $\frac{T}{c}$.

Για να δούμε το φαινόμενο όταν είναι $f\,(x) = \eta\mu x$ εισάγουμε στην Geogebra την παράμετρο $c = 1$ την $f\,(x) = \eta\mu x$ και την $g\,(x) = f\,(cx)$. Αλλάζοντας την τιμή του c βλέπουμε τις αλλαγές που υφίσταται η γραφική παράσταση:

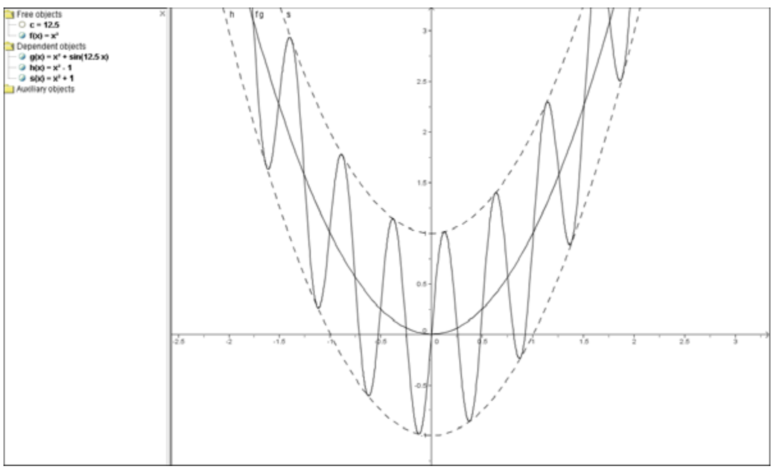


11.4.2 Η $f\,(x) + \eta\mu cx$

Όταν σε κάποια συνάρτηση $f(x)$ προσθέτουμε την συνάρτηση $\eta\mu cx$ τότε κάθε φορά σε μία τιμή της f προσθέτουμε ένα αριθμό μεταξύ του 1 και του -1. Αυτό σημαίνει ότι το αντίστοιχο σημείο της $f(x)$ θα ανέβει το πολύ κατά 1 και μία μονάδα ή θα κατέβει το πολύ κατά μία μονάδα. Θα είναι λοιπόν

$$f(x) - 1 \leq f(x) + \eta\mu cx \leq f(x) + 1$$

Άς εισάγουμε στην Geogebra την παράμετρο c με αρχική τιμή $c = 1$ την συνάρτηση $f(x) = x^2$ και την συνάρτηση $g(x) = f(x) + \eta\mu cx$. Επίσης εισάγουμε και τις συναρτήσεις $h(x) = f(x) - 1$ και $s(x) = f(x) + 1$. Με κατάλληλη αλλαγή στην τιμή της παραμέτρου θα έχουμε την ακόλουθη γραφική παράσταση:

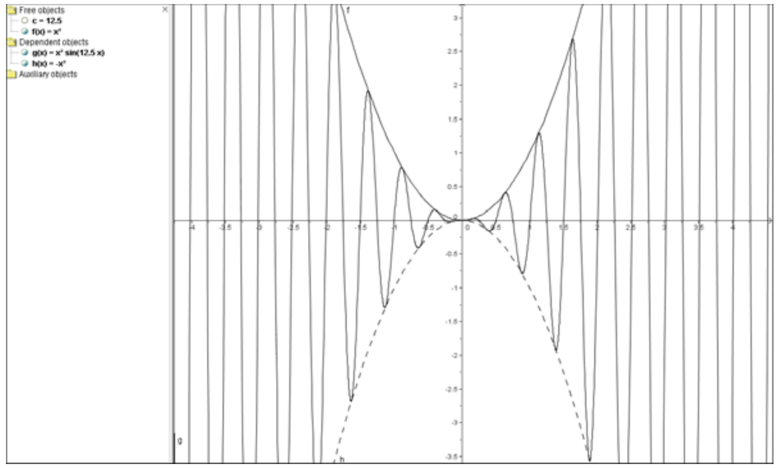


11.4.3 Η $f(x)\,\eta\mu cx$

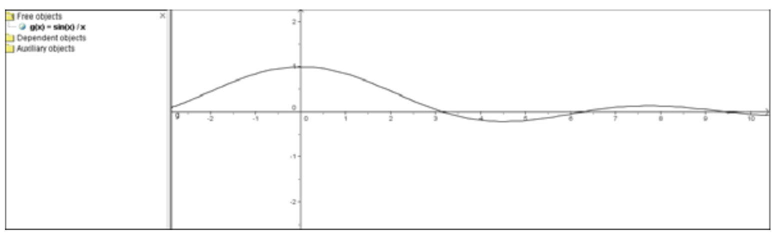
Όταν σε κάποια συνάρτηση $f(x)$ πολλαπλασιάζεται με την $\eta\mu cx$ τότε κάθε φορά μία τιμή της f πολλαπλασιάζεται επί κάποιν αριθμό, τον $\eta\mu cx$, που βρίσκεται στο διάστημα $[-1, 1]$. Αυτό έχει ως συνέπεια ότι η γραφική παράσταση της f θα "έλκεται" από τον $x'x$ αλλού πόλύ αλλού λίγο. Φυσικά

$$-f(x) \leq f(x)\,\eta\mu cx \leq f(x)$$

Εισάγουμε στην Geogebra την αρχική τιμή της παραμέτρου $c = 1$ και τις συναρτήσεις $f(x) = x^2$, $g(x) = f(x)\,\eta\mu cx$, $h(x) = -f(x)$. Αλλάζοντας τιμές στο μετρητή έχουμε την γραφική παράσταση:



Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση όπου $f(x) = \frac{1}{x}$ και $c = 1$. Το προϊόν είναι η συνάρτηση $g(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$. Αυτή ορίζεται στα $x \neq 0$. Την εισάγουμε στην Geogebra.



Βλέπουμε ότι η Geogebra δεν αντιλαμβάνεται ότι η συνάρτηση δεν ορίζεται στο 0. Εν αντιθέσει με την $\frac{1}{x}$ η γραφική παράσταση της $\frac{\eta\mu x}{x}$ δεν αποφεύγει την ευθεία $x = 0$. Πιο συγκεκριμένα όταν πλησιάζουμε στο 0 η γραφική παράσταση της $\frac{\eta\mu x}{x}$ πλησιάζει προς το σημείο (0,1) δηλαδή οι τιμές της συνάρτησης πλησιάζουν προς το 1. Αποδεικνύεται ότι:

- Όταν το x τείνει στο 0 το $\frac{\eta\mu x}{x}$ τείνει στο 1

Τι συμβαίνει όταν το x μεγαλώνει απεριόριστα; Το x διανύει διαστήματα όπου η $\eta\mu x$ επαναλαβάνεται ταλαντευόμενη μεταξύ -1 και 1. Όμως ο παρονομαστής x του κλάσματος $\frac{\eta\mu x}{x}$ γίνεται ολοένα μεγαλύτερος και το κλάσμα πλησιάζει στο 0. Βλέπουμε στο σχήμα ότι η γραφική παράσταση τείνει να συμπέσει με τον άξονα $x'x$. Αποδεικνύεται ότι:

- Όταν το x τείνει στο $+\infty$ το $\frac{\eta\mu x}{x}$ τείνει στο 0

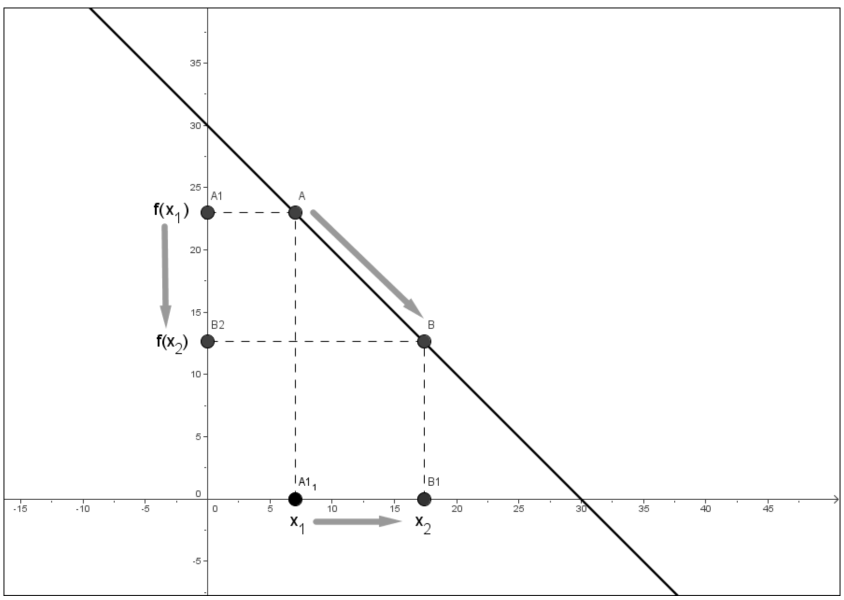
12 Μονοτονία.

12.1 Γνησιως Φθινουσες η Αυξουσες Συναρτησεις

Ας πάρουμε την συνάρτηση $y = 30 - x$ δηλαδή την $f(x) = 30 - x$. Αν αυξάνουμε τις τιμές που δίνουμε στο x το y ελαττώνεται ή αλλιώς *φθίνει*. Αυτό είναι λογικό: Όταν αφαιρούμε μεγαλύτερο αριθμό μικραίνει αυτό που απομένει. Αυτό σημαίνει ότι αν εισάγουμε μία τιμή x_1 και βρούμε την τιμή της $f(x_1)$ και μετά εισάγουμε μία μεγαλύτερη τιμή x_2 τότε θα πάρουμε ένα $f(x_2)$ μικρότερο του $f(x_1)$. Αν θέλαμε να είμαστε πολύ τυπικοί θα γράφαμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow 30 - x_1 > 30 - x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

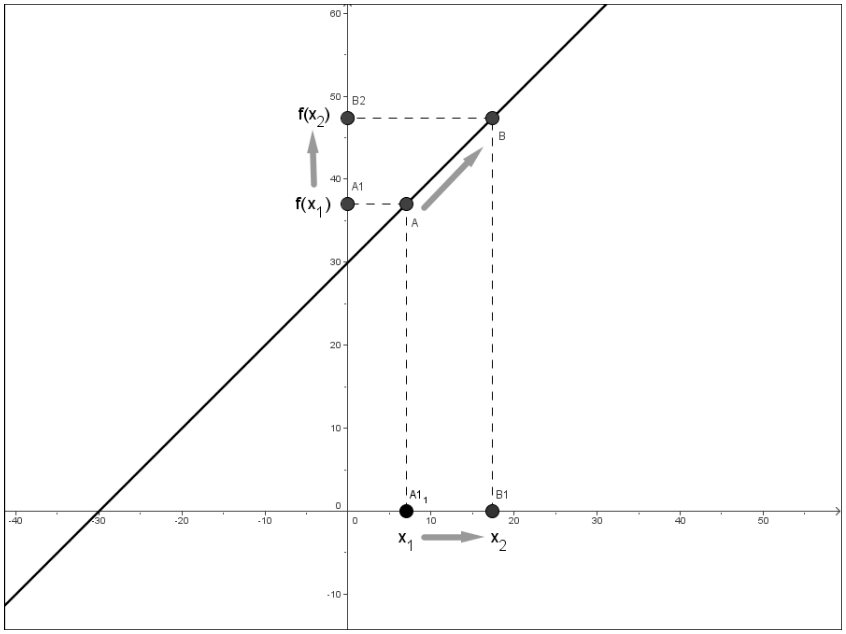
Γεωμετρικά οι παραπάνω διαπιστώσεις έχουν την ακόλουθη σημασία: Η γραφική παράσταση της f είναι μία ευθεία. Αν πάρουμε τα σημεία $x_1 < x_2$ και μετά σχηματίσουμε τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ που ανήκουν στη γραφική παράσταση της f θα έχουμε ότι η τεταγμένη του A είναι μεγαλύτερη από την τεταγμένη του B. *Το B είναι δεξιότερα του A (λόγω τετμημένης) αλλά είναι πιο κάτω από το A (λόγω τεταγμένης).*



Όλα αυτά ένας μη πεπαιδευμένος άνθρωπος θα τα έλεγε απλά: Προς τα δεξιά είναι κατηφόρα! Εμεις δεν κάνουμε τίποτε περισσότερο από το να περιγράφουμε με μαθηματικούς όρους την κατηφόρα: Στην καμπύλη $y = f(x)$ *όταν κινούμεθα προς τα δεξιά* (αυτό πρέπει να το πούμε αφού υπάρχουν τόσες κατηφόρες όσες ανηφόρες) είναι κατηφόρα αν για κάθε $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) > f(x_2)$. Σε αυτή την περίπτωση την συνάρτηση $f(x)$ την λέμε γνησίως φθίνουσα. Έχουμε λοιπόν τον ακόλουθο ορισμό:

- Η συνάρτηση f θα λέγεται *γνησίως φθίνουσα* αν για κάθε x_1, x_2 από το πεδίο ορισμού της για τα οποία ισχύει $x_1 < x_2$ ισχύει και $f(x_1) > f(x_2)$.

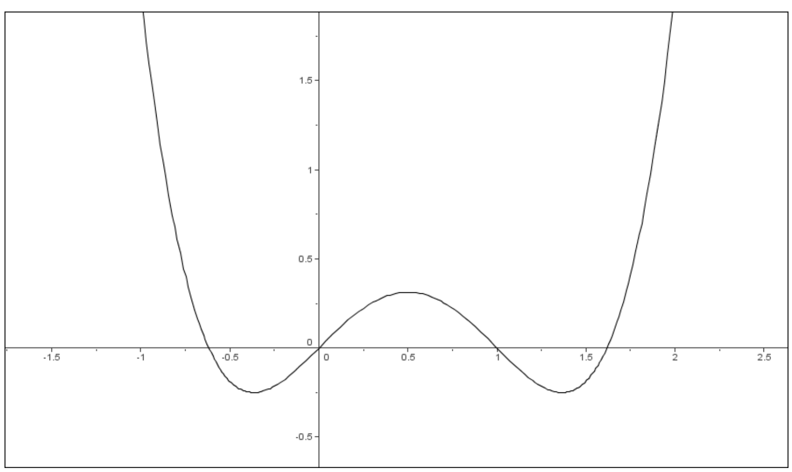
Φυσικά έχουμε και τις ανηφόρες που αντιστοιχούν σε συναρτήσεις γνησίως αύξουσες. Όπως η $f(x) = 30 + x$. Όταν αυξάνουμε το x οι τιμές της f αυξάνουν.



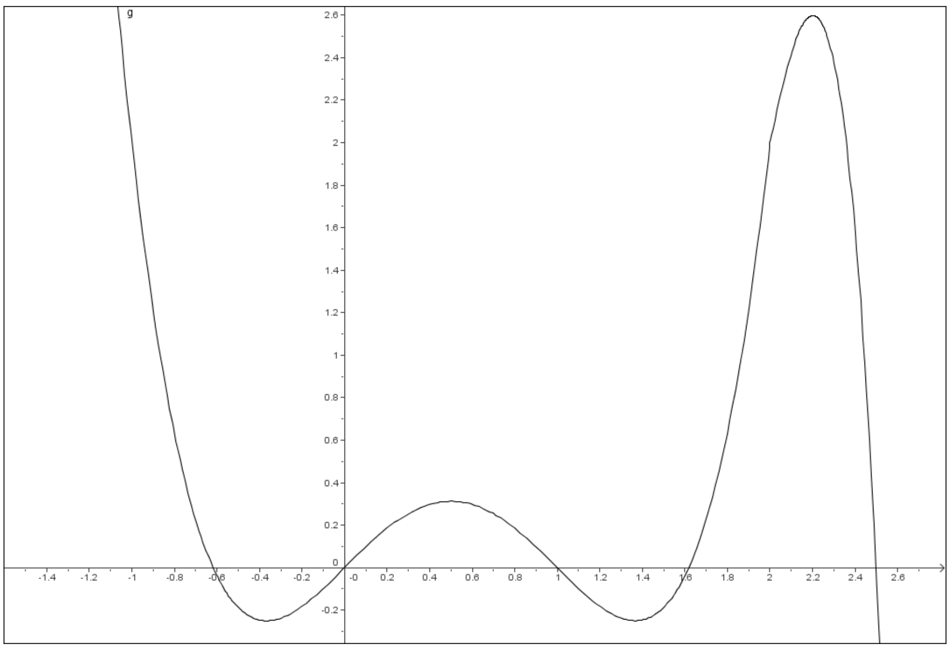
Ο αντίστοιχος ορισμός είναι ακριβώς αυτός που περιμένουμε:

- Η συνάρτηση f θα λέγεται *γνησίως αύξουσα* αν για κάθε x_1, x_2 από το πεδίο ορισμού της για τα οποία ισχύει $x_1 < x_2$ ισχύει και $f(x_1) < f(x_2)$.

Μία συνάρτηση μπορεί να μην είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα αλλά να είναι κάτι από τα δύο σε ένα κομμάτι του πεδίου ορισμού της, σε ένα διάστημα που περιέχεται στο πεδίο ορισμού της. Ας πάρουμε για παράδειγμα την συνάρτηση $f(x) = x(x-1)\left(x^2 - x - 1\right)$ του σχήματος που ακολουθεί:



Βλέπουμε ότι η συνάρτηση είναι αρχικά γνησίως φθίνουσα μετά γνησίως αύξουσα μετά πάλι γνησίως φθίνουσα και μετά πάλι γνησίως αύξουσα. Μιλάμε βέβαια γιαυτό που βλέπουμε διότι δεν υπάρχει καμμία εγγύηση ότι δε θα έχουμε πάλι κάποια αλλαγή. Για παράδειγμα αν κάνουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x(x-1)\left(x^2-x-1\right)(|x-3|-|2-x|)$ (θα εισαχθεί `g(x)=x*(x-1)*(x^2-x-1)*(abs(x-3)-abs(2-x))`) θα δούμε ότι, φαινομενικά, συμπίπτει με εκείνη της f. Εντούτοις με μεγέθυνση ή μετακίνηση της επιφάνειας σχεδίασης κοντά στο -10 ή στο 9 θα δούμε ότι οι δύο γραφικές παραστάσεις διαφοροποιούνται. Είναι σε παντοτινή ισχύ το δίδαγμα ότι στα Μαθηματικά τα διάφορα υπολογιστικά και εποπτικά μέσα συνήθως αποκαλύπτουν μέρος της αλήθειας. *Το όλον αποκαλύπτεται, όταν αποκαλύπτεται, μόνο από την θεωρία.*



Μπορούμε να δώσουμε τους παρακάτω ορισμούς:

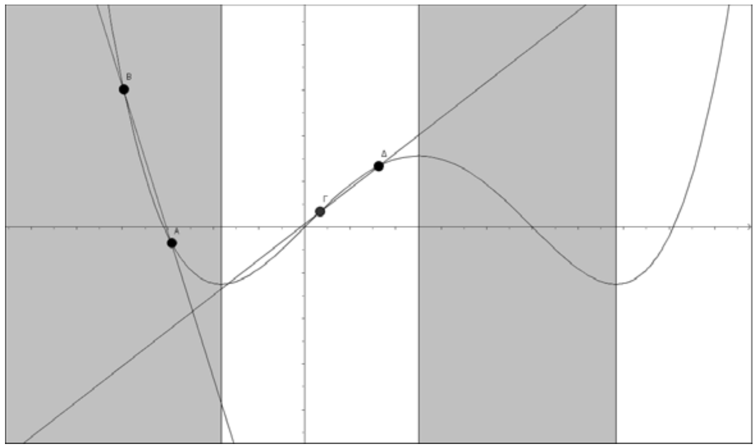
- Η συνάρτηση f θα λέγεται *γνησίως φθίνουσα* σε ένα διάστημα Δ που περιέχεται στο πεδίο ορισμού της αν για κάθε x_1, x_2 από το Δ της για τα οποία ισχύει $x_1 < x_2$ ισχύει και $f(x_1) > f(x_2)$.

- Η συνάρτηση f θα λέγεται *γνησίως αύξουσα* σε ένα διάστημα Δ που περιέχεται στο πεδίο ορισμού της αν για κάθε x_1, x_2 από το Δ της για τα οποία ισχύει $x_1 < x_2$ ισχύει και $f(x_1) < f(x_2)$.

Μία συνάρτηση που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα λέγεται *γνησίως μονότονη*. Αν μία συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ που περιέχεται στο πεδίο ορισμού της τότε λέγεται *γνησίως μονότονη στο Δ*.

12.2 Ο Λογος Μεταβολης

Ας ξαναγυρίσουμε στη συνάρτηση $f(x) = x(x-1)\left(x^2-x-1\right)$. Στο σχήμα που ακολουθεί ο επίπεδο έχει χωρισθεί σε 4 περιοχές. Η κάθε μια περιέχει ένα κομμάτι της γραφικής παράστασης της f όπου η f παρουσιάζει ένα είδος μονοτονίας. Αρχικά γνησίως αύξουσα μετά γνησίως φθίνουσα κτλ.



Επιλέγουμε δύο σημεία Α και Β από την πρώτη περιοχή. Παρατηρούμε ότι, και αυτό είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων, ότι ο συντελεστής διευθύνσεως της ευθείας ΑΒ είναι αρνητικός. Αν όμως πάρουμε δύο σημεία Γ και Δ από την δεύτερη περιοχή στην οποία η συνάρτηση μας είναι γνησίως αύξουσα ο συντελεστής της ευθείας ΑΒ είναι θετικός.

Αν τώρα τα $P\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$ και $Q\left(x_2, f\left(x_2\right)\right)$ είναι δύο διάφορα σημεία της γραφικής παράστασης της f τότε θα είναι $x_1 \neq x_2$ (Γιατί; Τι θα συνέβαινε αν ήταν $x_1 = x_2$?) ο συντελεστής διευθύνσεως της ευθείας PQ είναι

$$\frac{f\left(x_1\right) - f\left(x_2\right)}{x_1 - x_2} = \frac{f\left(x_2\right) - f\left(x_1\right)}{x_2 - x_1}$$

Ο αριθμός $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ λέγεται *λόγος μεταβολής της f στα x_1, x_2*. Από τα προηγούμενα είναι σαφές ότι:

- Αν σε κάποιο διάστημα Δ η f είναι γνησίως αύξουσα και $x_1, x_2 \in \Delta$ τότε ο λόγος μεταβολής της f στα x_1, x_2 είναι θετικός.
- Αν σε κάποιο διάστημα Δ η f είναι γνησίως φθίνουσα και $x_1, x_2 \in \Delta$ τότε ο λόγος μεταβολής της f στα x_1, x_2 είναι αρνητικός.

Προσπαθείστε να αποδείξετε τα παραπάνω χρησιμοποιώντας τον όρισμό της γνησίως φθίνουσας και της γνησίως αύξουσας συνάρτησης. Επίσης να αποδείξετε ότι ισχύει και το αντίστροφο δηλαδή:

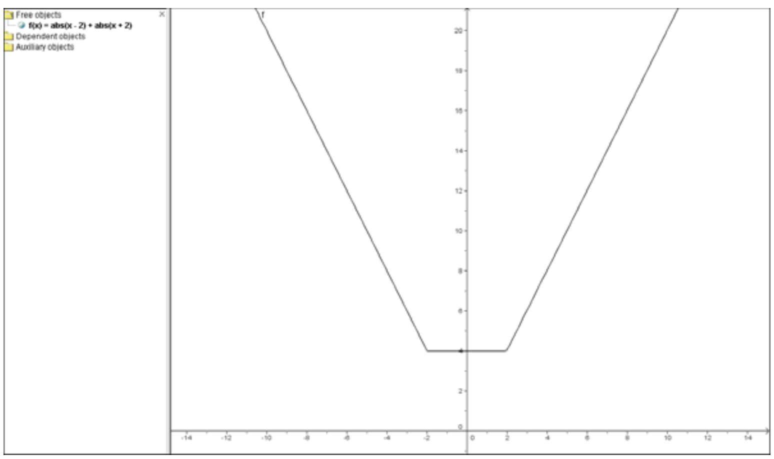
- Αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ο λόγος μεταβολής της f στα x_1, x_2 είναι θετικός τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.
- Αν σε κάποιο διάστημα Δ η f είναι γνησίως φθίνουσα και $x_1, x_2 \in \Delta$ τότε ο λόγος μεταβολής της f στα x_1, x_2 είναι αρνητικός.

12.3 Αυξουσες η Φθινουσες Συναρτησεις

Ίσως αναρρωτηθήκατε τι συμβαίνει αν σε ένα διάστημα ο λόγος μεταβολής είναι μηδέν. Επειδή ο λόγος μεταβολής είναι κλάσμα θα πρέπει ο αριθμητής του να είναι μηδέν. Δηλαδή σε αυτό το διάστημα θα πρέπει να είναι $f(x_1) = f(x_2)$ όποια και να είναι τα x_1, x_2. Με δυό λόγια θα πρέπει όλες οι τιμές που παίρνει η f σε αυτό το διάστημα να είναι ίσες δηλαδη η f σε αυτό το διάστημα να μην αλλάζει δηλαδή να είναι *σταθερή*. Έχουμε λοιπόν τον ακόλουθο ορισμό:

- Η συνάρτηση f θα λέγεται *σταθερή* σε ένα διάστημα Δ που περιέχεται στο πεδίο ορισμού της αν για κάθε x_1, x_2 από το Δ της για τα οποία ισχύει $x_1 < x_2$ ισχύει και $f(x_1) = f(x_2)$.

Εισάγουμε στην Geogebra την συνάρτηση $f(x) = |x-2| + |x+2|$ δηλαδή δίνουμε `f(x)=abs(x-2)+abs(x+2)`.



Βλέπουμε ότι η συνάρτηση αυτή είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -2]$, σταθερή στο διάστημα $[-2, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$. Τι μπορούμε να πούμε γιατην συμπεριφορά της συνάρτησης στο διάστημα $(-\infty, 2]$; Ασφαλώς όχι ότι είναι γνησίως φθίνουσα διότι δεν όταν κινούμεθα προς τα δεξιά η γραφική παράσταση δεν κατεβαίνει. Το σίγουρο είναι ότι η γραφική παράσταση *δεν ανεβαίνει*. Η συνάρτηση λέγεται (απλώς) φθίνουσα. Αντίστοιχα στο διάστημα $[-2, +\infty)$ η συνάρτηση είναι φθίνουσα. Έχουμε τους ακόλουθους ορισμούς:

- Η συνάρτηση f θα λέγεται *φθίνουσα* σε ένα διάστημα Δ που περιέχεται στο πεδίο ορισμού της αν για κάθε x_1, x_2 από το Δ της για τα οποία ισχύει $x_1 < x_2$ ισχύει και $f(x_1) \geq f(x_2)$.

- Η συνάρτηση f θα λέγεται *γνησίως αύξουσα* σε ένα διάστημα Δ που περιέχεται στο πεδίο ορισμού της αν για κάθε x_1, x_2 από το Δ της για τα οποία ισχύει $x_1 < x_2$ ισχύει και $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Είναι προφανές ότι

- Αν σε κάποιο διάστημα Δ που περιέχεται στο πεδίο ορισμού της η f είναι αύξουσα και $x_1, x_2 \in \Delta$ τότε ο λόγος μεταβολής της f στα x_1, x_2 είναι μεγαλύτερος ή ίσος του μηδενός και αντιστρόφως.

- Αν σε κάποιο διάστημα Δ που περιέχεται στο πεδίο ορισμού της η f είναι φθίνουσα και $x_1, x_2 \in \Delta$ τότε ο λόγος μεταβολής της f στα x_1, x_2 είναι μικρότερος ή ίσος του μηδενός και αντιστρόφως.

Μία συνάρτηση που είναι αύξουσα ή φθίνουσα λέγεται *μονότονη*. Ασφαλώς μία γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι και μονότονη αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει.

12.4 Ο Λόγος μεταβολής ξανα

Ας υποθεσουμε ότι την συνάρτηση $f(x)$. Αν δώσουμε δύο τιμές στο x τις x_1, x_2 τότε ο λόγος μεταβολής της f στα x_1, x_2 είναι

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_2}$$

Όταν το x από x_1 γίνεται x_2 η μεταβολή είναι $x_2 - x_1$. Η αντίστοιχη μεταβολή για τις τιμές της f είναι $f(x_2) - f(x_1)$. Συνοπτικά μπορούμε να πούμε ότι:

$$\text{λόγος μεταβολής της } f = \frac{\text{μεταβολή της } f}{\text{μεταβολή του } x}$$

Στην Φυσική είναι συνηθισμένος και ο συμβολισμός $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ ή και ο $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Επίσης συνηθισμένη πρακτική είναι να παίρνουμε τον λόγο μεταβολης της f στα $x, x+h$ που θα είναι ο $\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{x}$.

12.5 Τρεις Ασκησεις

1. Έστω $f(x) = x^2 - 4x + 2$. Να αποδείξετε ότι ο λόγος μεταβολής της f στα x_1, x_2 είναι $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = x_1 + x_2 - 4$. Βάσει αυτού να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι

   (α′) Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 2]$.

   (β′) Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$.

2. Να αποδείξετε ότι ο λόγος μεταβολής της $f(x) = x^5$ στα x, x_0 είναι $x^4 + x^3x_0 + x^2x_0^2 + xx_0^3 + x_0^4$.

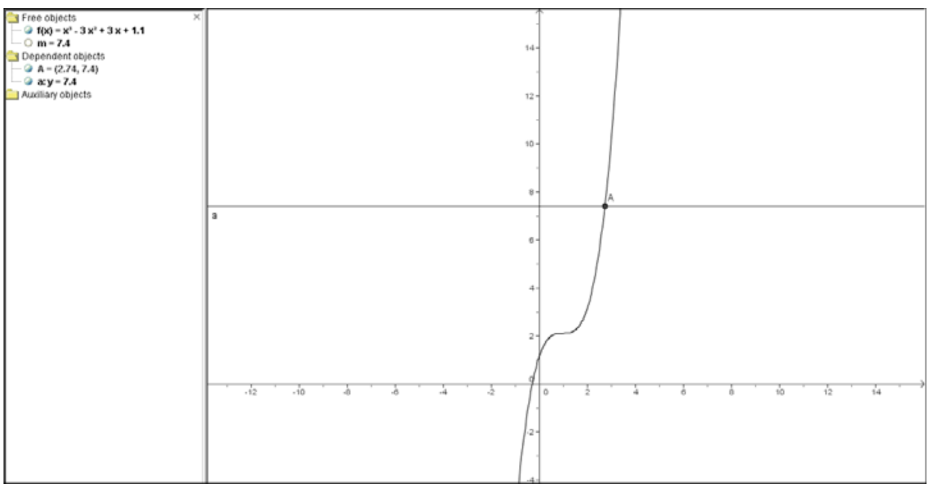
3. Να αποδείξετε ότι ο λόγος μεταβολής της $f(x) = \eta\mu x$ στα $x_0, x_0 + h$ είναι $\eta\mu x_0 \frac{\sigma\upsilon\nu h - 1}{h} + \sigma\upsilon\nu x_0 \frac{\eta\mu h}{h}$.

12.6 1-1 Συναρτησεις

Εισάγουμε στην Geogebraτην συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ δίνοντας `f(x)=x^3-3x^2+3x+1`. Η γραφική παράσταση της f δείχνει ότι είναι γνησίως αύξουσα. Αυτό επιβεβαιώνεται και απότην θεωρία. Ο λόγος μεταβολής της f στα x_1, x_2 είναι

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = x_2^2 + (x_1 - 3)\, x_2 + \left(x_1^2 - 3x_1 + 3\right)$$

και πρόκειται για θετικό αριθμό (γιατί;). Εισάγουμε την παράμετρο m με αρχικη τιμή $m = 3$. Επίσης εισάγουμε την ευθεία $y = m$. Η ευθεία $y = m$ τέμνει την γραφική παράσταση $\mathcal{C}_f$ της f σε ένα μόνο σημείο που εντοπίζεται με το κατάλληλο εργαλείο.



Ο ισχυρισμός αυτός διατυπώνεται και έτσι:

- Η ευθεία $y = m$ τέμνει την $\mathcal{C}_f$ *ακριβώς* σε ένα σημείο.

και μπορεί να αναλυθεί σε δύο σκέλη:

- Η ευθεία $y = m$ τέμνει την $\mathcal{C}_f$ *τουλάχιστον* σε ένα σημείο.
- Η ευθεία $y = m$ τέμνει την $\mathcal{C}_f$ *το πολύ* σε ένα σημείο.

Δηλαδή ισχύει η ακόλουθη “ εξίσωση ”

$$\boxed{\text{ακριβώς} = \text{τουλάχιστον} + \text{το πολύ}}$$

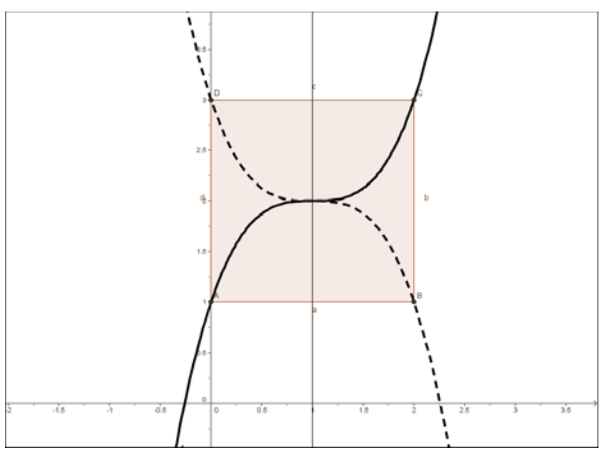
Τον πρώτο ισχυρισμό (δηλαδή το “ τουλάχιστον ”) δεν είμαστε σε θέση, για την ώρα, να το αποδείξουμε. Ας το πιστέψουμε. Ο δεύτερος ισχυρισμός επιδέχεται μάλλον εύκολη απόδειξη: Αν οι $y = m$ και $\mathcal{C}_f$ τέμνονται σε κάποιο σημείο αυτό επειδή είναι σημείο της $\mathcal{C}_f$ θα είναι της μορφής $(x_0, f(x_0))$. Επειδή θα ανήκει στην ευθεία $y = m$ η τεταγμένη του θα είναι m δηλαδή $f(x_0)$. Αν τώρα x είναι ένας αριθμός με $x < x_0$ θα είναι (μην ξεχνάτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα) $f(x) < f(x_0) = m$. Άρα το σημείο $(x, f(x))$ ανήκει μεν στην $\mathcal{C}_f$ αλλά όχι στην $y = m$. Το ίδιο συμβαίνει και όταν $x > x_0$ διότι τότε $f(x) > f(x_0) = m$. Άρα το μόνο σημείο της $\mathcal{C}_f$ που ανήκει στην ευθεία $y = m$ είναι το $(x_0, f(x_0))$. Επομένως αν οι δύο γραμμές έχουν κοινό σημείο αυτό θα είναι μοναδικό δηλαδή έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο. Το γεγονός ότι η $y = m$ τέμνει την $\mathcal{C}_f$ το πολύ σε ένα σημείο σημαίνει ότι δε μπορούμε να έχουμε το ίδιο y για διαφορετικά x δηλαδή αποκλείεται να ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$ όταν $x_1 \neq x_2$. Μία τέτοια συνάρτηση λέγεται 1-1.

- Η συνάρτηση f λέγεται 1-1 αν για κάθε $x_1 \neq x_2$ από το πεδίο ορισμού της ισχύει $f(x_1) \neq f(x_2)$.

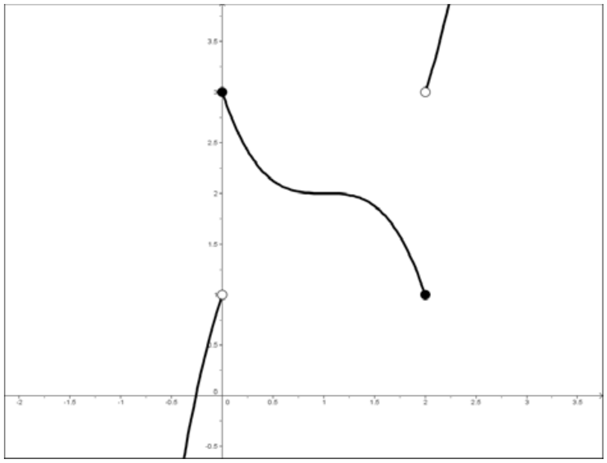
Αν μία συνάρτηση είναι 1-1 τότε για $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) \neq f(x_2)$. Δηλαδή τα $f(x_1), f(x_2)$ διαφοροποιούνται χωρίς κατ' ανάγκην να είναι πάντα $f(x_1) < f(x_2)$ ή πάντα $f(x_1) > f(x_2)$. Για να το δούμε αυτό ας πάρουμε την συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ που χρησιμοποιήσαμε και προηγουμένως. Ορίζουμε την συνάρτηση $g(x) = f(2 - x)$. Οι $\mathcal{C}_f$ και $\mathcal{C}_g$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $x = 1$ (γιατί;) δηλαδή η $\mathcal{C}_g$ είναι το είδωλο της $\mathcal{C}_f$ όταν καθρεφτίζεται στην $x = 1$. Θα αλλάξουμε τώρα την συνάρτηση f ως εξής. Παντού να συμπεριφέρεται όπως ο εαυτός της εκτός από το διάστημα $[0, 2]$ που θα συμπεριφέρεται όπως το είδωλό της. Η συνάρτηση που θα προκύπτει θα είναι η:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \alpha\nu \quad x < 0 \\ g(x) & \alpha\nu \quad 0 \leq x \leq 2 \\ f(x) & \alpha\nu \quad 2 < x \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της h προκύπτει με λίγη χειρουργική. Επεμβαίνουμε μόνο στο κομμάτι που περικλείεται στο ορθογώνιο με κορυφές τα σημεία $(0, f(0)$, $(2, g(2))$, $(2, f(2))$ και $(0, g(0))$. Αφαιρούμε από την γραφική παράσταση το κομμάτι της που περιέχεται σε αυτό το ορθογώνιο και αντ' αυτού δίνουμε το αντίστοιχο κομμάτι της $\mathcal{C}_g$.



Το αποτέλεσμα ειναι το ακόλουθο:



Για να παραχθεί η προηγούμενη εικόνα αξιοποιήσαμε την εντολή `Function` που επιτρέπει στην Geogebra να παριστά όχι ολόκληρη την γραφική παράσταση μίας συνάρτησης αλλά εκείνη που αντιστοιχεί όταν τροφοδοτείται από ένα διάστημα. Για το αριστερό κομμάτι δώσαμε:

```
Function[x^3 - 3* x^2 + 3 *x + 1, -100, 0]
```

Έτσι ζητήσαμε από την Geogebra να παραστήσει την συνάρτηση $x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ στο διάστημα $[-100, 0]$. Για το δεξιό κομμάτι δώσαμε:

```
Function[x^3 - 3* x^2 + 3 *x + 1, 2, 100]
```

που αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της ίδιας συνάρτησης στο διάστημα $[2, 100]$. Τέλος για το μεσαίο κομμάτι δώσαμε (μην ξεχνάτε ότι το μεσαίο κομμάτι αντιστοιχεί στην $f(2 - x)$):

```
Function[(2-x)^3 - 3* (2-x)^2 + 3 *(2-x) + 1, 2]
```

Τα σημεία προσετέθησαν με τις γνωστές εντολές και το λευκό γέμισμα στα δύο από αυτά επιτυγχάνεται επιλέγοντας το λευκό χρώμα από τις ιδιότητες. Η συνάρτηση που φτιάξαμε προέκυψε από μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Εξακολουθεί να είναι 1-1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη.

Οι 1-1 συναρτήσεις αποτελούν μία κατηγορία συναρτήσεων που περιλαμβάνει τις γνησίως μονότονες. Μάλιστα έχουμε και το εξής εύχρηστο κριτήριο για να διαπιστώνουμε αν μία συνάρτηση f είναι 1-1:

- Αν για μία συνάρτηση f οποτεδήποτε ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$ ισχύει και $x_1 = x_2$ τότε η συνάρτηση είναι 1-1.

Πράγματι ας πούμε ότι ισχύει το παραπάνω. Τότε αν $x_1 \neq x_2$ δύο τινά θα συμβαίνουν για τα $f(x_1), f(x_2)$. Ή θα είναι ίσα οπότε ή θα είναι άνισα. Ίσα δ εμπορούν να είναι διότι από το προηγούμενο αναγκάζονται και τα x_1, x_2 να είναι ίσα πράγμα αδύνατο. Άρα θα είναι άνισα και η f θα είναι 1-1.

12.7 Σπαταλες

Ανοίγουμε την Geogebra και εισάγουμε τις συναρτήσεις:

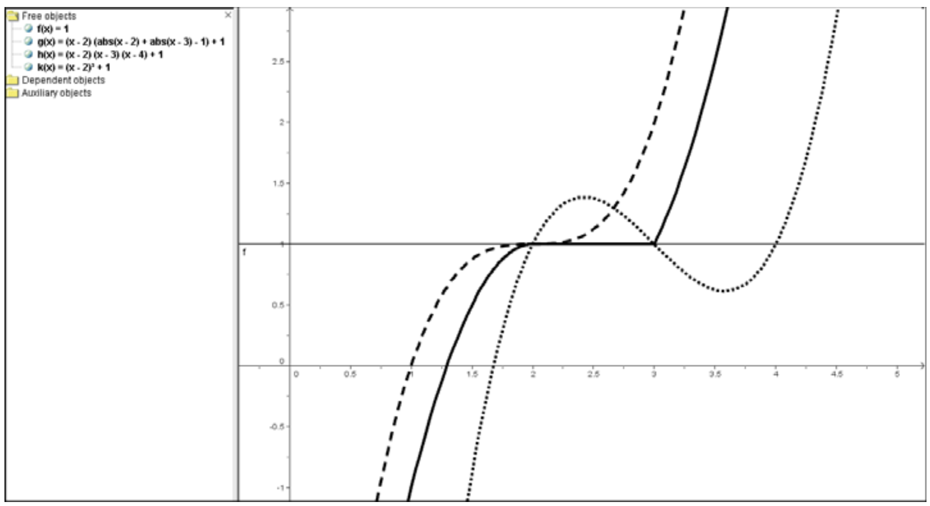
$$f(x) = 1$$

$$g(x) = (x-2)(|x-2| + |x-3| - 1) + 1$$

$$h(x) = (x-2)(x-3)(x-4) + 1$$

$$k(x) = (x-2)^3 + 1$$

Κατόπιν από τις ιδιότητες αλλάζουμε είδος και πάχος γραμμής για να ξεχωρίζουν:



Παρατηρούμε ότι και όλες οι συναρτήσεις δίνουν την τιμή 1. Αλλά υπάρχουν διαφορές. Η f παίρνει μόνο την τιμή 1 αφού για όλα τα x ισχύει $f(x) = 1$. Δηλαδή η f καταναλώνει όλες τις τιμές που παίρνει το x για να φτιάξει ένα μόνο αριθμό: τον 1. Και η συνάρτηση g παίρνει την τιμή 1. Μάλιστα σπαταλάει όλες τις τιμές του διαστήματος $[1, 2]$ για να δώσει 1. Η τρίτη συνάρτηση είναι λιγότερο σπάταλη. Παίρνει την τιμή 1 μόνο 3 φορές αφού $h(2) = h(3) = h(4) = 1$. Πιό οικονομικά συμπεριφέρεται η k αφού $k(2) = 1$ και ο 2 είναι η μόνη τιμή για την οποία συβαίνει αυτό. Βέβαια αυτή είναι και η μόνη 1-1 συνάρτηση από αυτή την ομάδα. Σημειώστε ότι στις παρακάτω τέσσερις ισότητες

$$f(...) = 1, \quad g(...) = 1, \quad h(...) = 1, \quad k(...) = 1$$

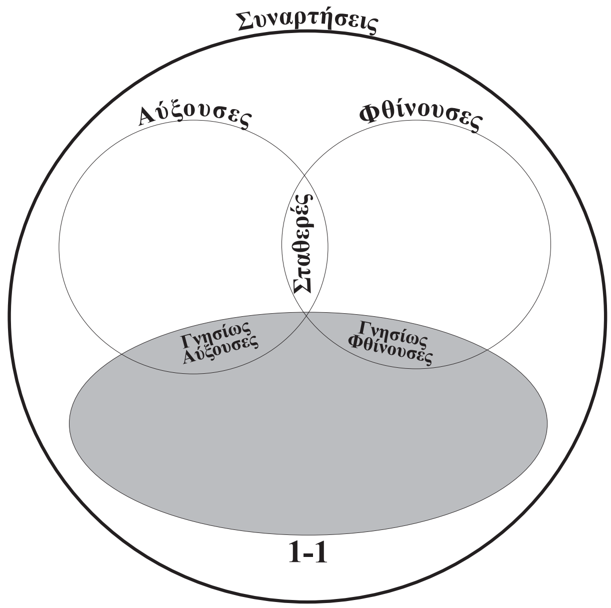
μπορεί πάντα κάποιος να συμπληρώσει τα κενά με κάποιους αριθμούς ώστε οι ισότητες να αληθεύουν. Αν εμείς δεν ξέρουμε ποιός αριθμός συμπληρώθηκε δε μπορούμε να πούμε με βεβαιότητα ποιός αριθμός ήταν εκτός από την τελευταία περίπτωση όπου ο 1 δε μπορεί να προέλθει παρά μόνο από τον 2.

12.8 Ανακεφαλαιωση

Συνοπτικά έχουμε τα ακόλουθα:

Είδος Συνάρτησης	Μία Περιγραφή	Λόγος Μεταβολής
Σταθερή	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$	$= 0$
Αύξουσα	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$	≥ 0
Φθίνουσα	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$	≤ 0
Γνησίως Αύξουσα	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$	> 0
Γνησίως Φθίνουσα	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$	< 0
1-1	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$	$\neq 0$

Η σχέση μεταξύ των κατηγοριών είναι η ακόλουθη:



12.9 Χταποδια

Στην πατρίδα μας οι ασκήσεις με συναρτήσεις που έχουν κλάδους (μία τέτοια είδαμε προηγουμένως) που επίσης λέγονται και κλαδικές αλλά και συναρτήσεις πολλαπλού τύπου είναι πολύ δημοφιλείς. Κάθε χρόνο καταναλώνονται χιλιάδες τέτοιες πολυπλόκαμες συναρτήσεις και στο θέμα αυτό έχουμε μία παγκόσμια πρωτιά. Εκτός από ευάριθμες περιπτώσεις που έχουν μαθηματικό ενδιαφέρον η πλειονότητα των συναρτήσεων αυτών είναι προϊόν τερατογενέσεων όπου κόβονται διάφορα κομμάτια από υγιείς συναρτήσεις και συναρμολογούνται. Ο μόνος, δυστυχώς, τρόπος για να τις αντιμετωπίσετε είναι η εξοικείωση. Παρακάτω υπάρχουν 8 τέτοιες συναρτήσεις που προέρχονται από δύο σχολικά βιβλία. Να κάνετε στην Geogebra την γραφική παράσταση όσων περισσοτέρων μπορέσετε. Καλή διασκέδαση.

1.

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & \alpha\nu \quad x<0 \\ 2x+3 & \alpha\nu \quad x\geq 0 \end{cases}$$

(Άγεβρα Α′ Λυκείου σελίδα 68)

2.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \alpha\nu \quad |x|<1 \\ \frac{1}{x^2} & \alpha\nu \quad x\geq 1 \end{cases}$$

(Άγεβρα Α′ Λυκείου σελίδα 68)

3.

$$f(x)=\begin{cases} -x+2 & \alpha\nu \quad x<0 \\ x-1 & \alpha\nu \quad 0\leq x<4 \\ 3 & \alpha\nu \quad x\geq 4 \end{cases}$$

(Άγεβρα Α′ Λυκείου σελίδα 78)

4.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{|x-3|}{x-3} & \alpha\nu \quad x\neq 3 \\ 0 & \alpha\nu \quad x=3 \end{cases}$$

(Άγεβρα Α′ Λυκείου σελίδα 78)

5.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & , \quad x<-1 \\ -x^2 & , \quad -1\leq x<0 \\ x^2 & , \quad 0\leq x<1 \\ \frac{1}{x} & , \quad x\geq 1 \end{cases}$$

(Άγεβρα Α′ Λυκείου σελίδα 94)

6.

$$f(x)=\begin{cases} -x+3 & , \quad x<1 \\ x+1 & , \quad x\geq 1 \end{cases}$$

(Άγεβρα Α′ Λυκείου σελίδα 94)

7.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x} & , \quad x<0 \\ \sigma\upsilon\nu x & , \quad x\geq 0 \end{cases}$$

(Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ′ Λυκείου σελίδα 198)

8.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x+1 & , \quad x<1 \\ x^2-4x+3 & , \quad x\geq 1 \end{cases}$$

(Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ′ Λυκείου σελίδα 268)

13 Η Εκθετική Συνάρτηση

13.1 Πραγματικοι εκθετες

Έστω α ένας αριθμός και ν ένας θετικός ακέραιος. Τότε a^ν είναι μία συντομογραφία του γινομένου

$$\underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha}_{\nu}$$

Μπορούμε να επιτρέψουμε και στον ν να πάρει την τιμή 0 αρκεί ο α να μην είναι 0. Ορίζουμε $\alpha^0=1, \qquad \alpha\neq 0$. Με την συμφωνία ότι $\alpha\neq 0$ μπορούμε να έχουμε και εκθέτες αρνητικούς ακεραίους ορίζοντας:

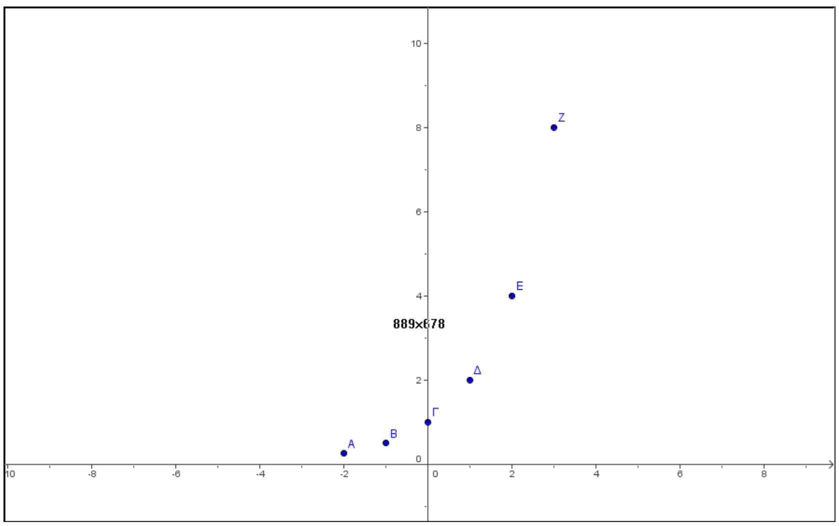
$$\alpha^{-\nu}=\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\nu}=\frac{1}{\alpha^{\nu}}$$

Ας πάρουμε την τιμή $\alpha=2$. Μερικές δυνάμεις του 2 είναι οι ακόλουθες:

ν	2^ν
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

Αν θεωρήσουμε το ν ως τετμημένη και το 2^ν ως τεταγμένη μπορούμε να παραστήσουμε τα ζεύγη ως σημεία στο επίπεδο. Δίνουμε στην Geogebra

`A=(-2,1/4)    B=(-1,1/2)  Γ=(0,1)  Δ=(1,2)  E=(2,4)  Z=(3,8)`

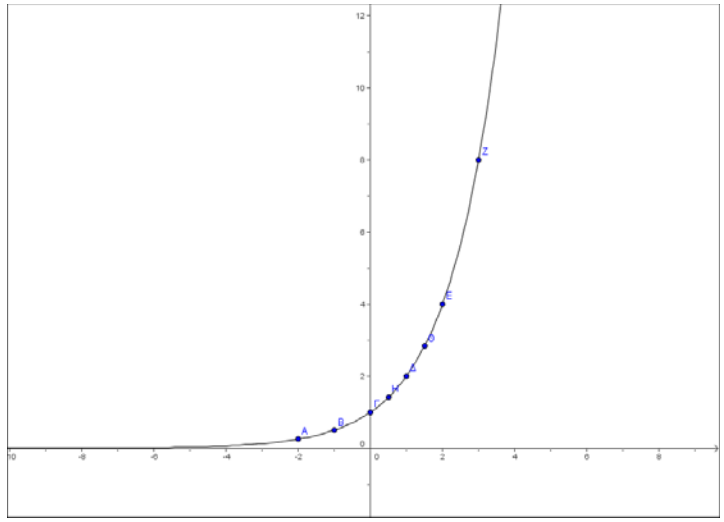


Περαιτέρω χρήση εκθετών γίνεται μόνο αν περιορίσουμε τις επιλογές των βάσεων και ασχοληθούμε μόνο με θετική βάση. Μπορούμε να επεκταθούμε σε ρητούς εκθέτες ακολουθώντας τον γενικό συμβολισμό:

$$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu} = \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\mu, \qquad \alpha > 0$$

όπου βέβαια $\sqrt[\nu]{\alpha}$ υποδηλώνει το, μοναδικό, θετικό αριθμό που αν υψωθεί στη ν μας δίνει α. Αξιοποιώντας αυτή την δυνατότητα μπορούμε να πυκνώσουμε τα σημεία στο σχήμα του παραδείγματος δίνοντας λχ `H=(1/2,2˜(1/2»`, `Θ=(3/2,2˜(3/2»`.

Η θεωρία προβλέπει ότι μπορούμε να ορίσουμε και δυνάμεις με άρρητους εκθέτες μόνο που η περιγγραφή τους δεν είναι τόσο απλή όπως πριν. Για $\alpha > 0$ και x οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό ορίζεται η δύναμη α^x που υπόκειται στης συνηθισμένες ιδιότητες των δυνάμεων. Η Geogebra αντιλαμβάνεται το α^x ως $a\hat{}x$. Αν δώσουμε `f(x)=2^x` η Geogebra θα χαράξει μία λεία (=χωρίς γωνίες) καμπύλη που θα διέλθει από τα σημεία που έχουμε ήδη εισάγει:



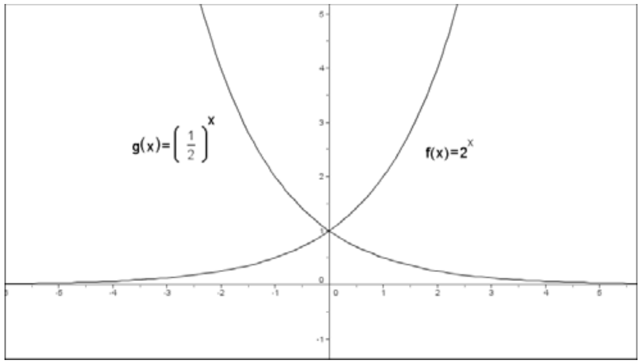
Παρατηρούμε ότι η καμπύλη μετά το 0 ανεβαίνει απότομα. Αν από την τιμή m πάμε στην τιμή $m+1$ ο λόγος μεταβολής είναι

$$\frac{2^{m+1}-2^{m}}{(m+1)-m}=2^{m+1}-2^{m}=2^{m}\left(2-1\right)=2^{m}$$

Αυτό σημαίνει ότι αν είμαστε στην τιμή $x=3$ και αυξήσουμε το x κατά 1 θα έχουμε αύξηση $2^3=8$. Αν όμως είμαστε στην τιμή $x=10$ αύξηση κατά 1 στο x επιφέρει αύξηση κατά $2^{10}=1024$ στο 2^x. Όταν ελττωνουμε το x η 2^x ελαττώνεται παραμένοντας πάντα θετική. Γενικά ισχύει ότι:

- Αν $\alpha>1$ τότε
  - Η συνάρτηση α^x είναι γνησίως αύξουσα
  - $\alpha^x>1\Leftrightarrow x>0$ και $\alpha^x<1\Leftrightarrow x<0$
  - Όταν το x τείνει στο $+\infty$ το α^x τείνει στο $+\infty$
  - Όταν το x τείνει στο $-\infty$ το α^x τείνει στο 0

Μπορούμε να έχουμε και βάσεις (πάντα θετικές) μικρότερες του 1. Για παράδειγμα την $\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Είναι βέβαια $\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{-x}$. Επομένως αν $f\left(x\right)=2^x$ και $g\left(x\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ τότε θα είναι $g\left(x\right)=f\left(-x\right)$. Αλλά οι γραφικές παραστάσεις των $f\left(x\right),f\left(-x\right)$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'y$. Επομένως οι γραφικές παραστάσεις των $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ και 2^x είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'y$.



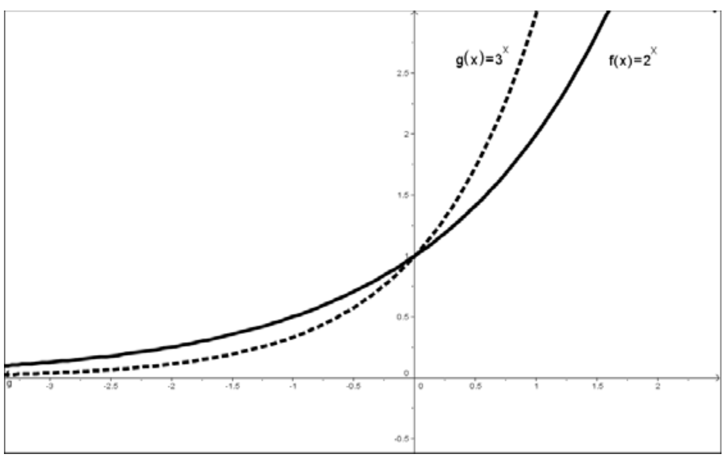
Αυτό ισχύει και πιό γενικά:

- οι γραφικές παραστάσεις των α^x και $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^x$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'y$.

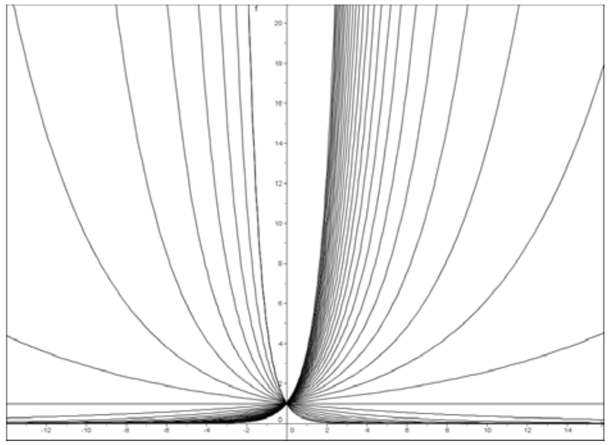
Τι συμβαίνει όταν αντί της συνάρτησης 2^x έχουμε την 3^x; Μπορούμε να συγκρίνουμε αυτές τις δύο συναρτήσεις συγκρίνοντας το λόγο τους με την μονάδα:

$$3^x > 2^x \Leftrightarrow \frac{3^x}{2^x} > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$$

Δηλαδή για $x > 0$ η γραφική παράσταση της 3^x βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της 3^x. Οι δύο γραφικές παραστάσεις τέμνονται για $x = 1$ και για $x < 0$ οι ρόλοι αντιστέφονται:



Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ ονομάζονται ***εκθετικές***. Η περίπτωση $\alpha = 1$ δεν παρουσιάζει ενδιαφέρον διότι μας δίνει μία σταθερή συνάρτηση. Όλες οι εκθετικές συναρτήσεις έχουν πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών και σύνολο τιμών το διάστημα $(0, +\infty)$. Μπορείτε να πάρετε μία ιδέα για το πως αλλάζει η μορφή της εκθετικής συνάρτησης ως εξής: Εισάγετε στην Geogebra την παράμετρο α με αρχική τιμή 3. Στη συνέχεια εισάγετε την συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$. Από τις ιδιότητες της συνάρτησης επιλέξτε την αποτύπωση ίχνους. Κατόπιν αλλάξτε τις τιμές του α εισάγοντας ένα δρομέα είτε με `Shift` και βελάκι.



13.2 Ο ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΟΥ EULER

Τι συμβαίνει όταν καταθέτουμε στην τράπεζα ένα ποσό; Δίνουμε στην επιχείρηση-τράπεζα χρήματα από τα οποία θα κερδίσει. Ως αμοιβή εισπράτουμε ένα μικρό μέρος των κερδών υπό μορφή τόκου. Το ύψος του τόκου καθορίζεται από το επιτόκιο που καθορίζει τι ποσοστό του ποσού θα εισπράξουμε ως αμοιβή. Αν το επιτόκιο είναι λ.χ. 2% το χρόνο μετά από ένα χρόνο θα πάρουμε το ποσό σύν τα $\frac{2}{100}$ του ποσού. Ας υποθέσουμε ότι καταθέτουμε K ευρώ με επιτόκιο ε. Μετά από ένα χρόνο το ποσό που θα πάρουμε είναι

$$K + \varepsilon K = K(1+\varepsilon)$$

Πολλές τράπεζες τοκίζουν ανά εξάμηνο και κεφαλαιοποιούν τους τόκους. Σε μια τέτοια περίπτωση μετά το πρώτο εξάμηνο το ποσό θα γίνει:

$$K + \frac{\varepsilon}{2}K = K\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Το $\frac{1}{2}$ οφείλεται στο γεγονός ότι το κεφάλαιο τοκίζεται μισό χρόνο και επομένως του αναλογεί το μισό ετήσιο επιτόκιο δηλαδή $\frac{\varepsilon}{2}$. Άρα αν ένα κεφάλαιο τοκιστεί για $\frac{1}{2}$ του χρόνου με ετήσιο επιτόκιο ε θα γίνει το αρχικό κεφάλαιο επί $\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)$. Αν αφήσουμε το ποσό αυτό δηλαδή το $K\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ για ένα ακόμη εξάμηνο έως ότου συμπληρωθεί το έτος θα έχουμε μετά το τέλος του έτους δηλαδή μετά και το δεύτερο εξάμηνο το ποσό

$$\left(K\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right) = K\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2$$

Σημειώστε ότι αν το ποσό τοκιστεί δύο φορές το χρόνο θα γίνει

$$K\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 = K\left(1+\varepsilon+\frac{1}{4}\varepsilon^2\right) > K\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Άν ο τοκισμός γινόταν ανά τετράμηνο δηλαδή τρεις φορές το χρόνο στο τέλος του χρόνου το ποσό θα ήταν

$$K\left(1+\frac{\varepsilon}{3}\right)^{3}=K\left(1+\varepsilon+\frac{1}{3}\varepsilon^{2}+\frac{1}{27}\varepsilon^{3}\right)>K\left(1+\varepsilon+\frac{1}{4}\varepsilon^{2}\right)>K\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Γενικά σε περισσότερες φορές τοκισμού αντιστοιχεί μεγαλύτερο τελικό ποσό. Αν ήταν δυνατό το ποσό να ανατοκίζεται ν φορές τότε μετά το τέλος του έτους το εισπρακτέο ποσό θα ήταν:

$$K\left(1+\frac{\varepsilon}{\nu}\right)^{\nu}$$

Ως ήταν φυσικό η ανθρώπινη απληστία έθεσε το ερώτημα. Τι θα συνέβαινε άραγε αν ο καταθέτης (αντιστοίχως ο τραπεζίτης) πετύχαινε όρους που θα επέτρεπαν να τοκίζεται το ποσό όχι 3 ούτε 4 ούτε 6 ούτε 360 φορές το χρόνο αλλά πολύ περισσότερες. Σχεδόν κάθε στιγμή. Με δυο λόγια τι θα συνέβαινε αν αναγκάζαμε το ν να τείνει στο $+\infty$; Το πρόβλημα αυτό, ως μαθηματικό ερώτημα πλέον, απασχόλησε τον Jakob Bernoulli σε σχετική εργασία του που εμφανίσθηκε το 1690. Για να δούμε καλύτερα το πρόβλημα ας κάνουμε μερικές τροποποιήσεις γράφοντας:

$$K\left(1+\frac{\varepsilon}{\nu}\right)^{\nu}=K\left(\left(1+\frac{1}{\left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)}\right)^{\frac{\nu}{\varepsilon}}\right)^{\varepsilon}$$

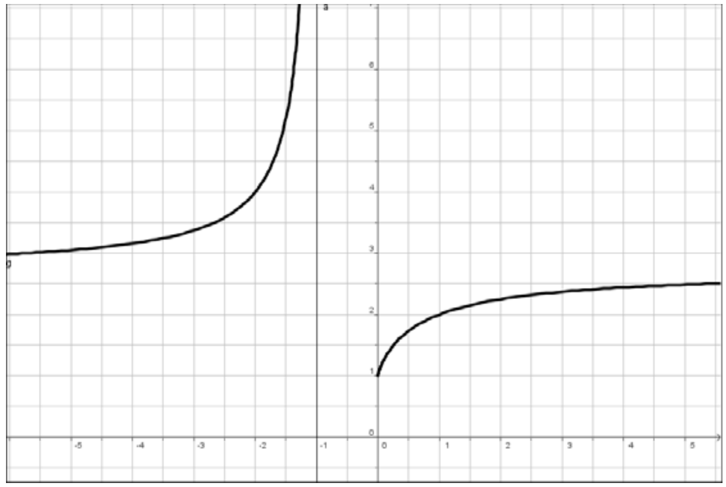
Ας ονομάσουμε $x=\frac{\nu}{\varepsilon}$ και $f\left(x\right)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$. Το τελικό ποσό θα είναι

$$K\left(1+\frac{\varepsilon}{\nu}\right)^{\nu}=K\left(f\left(x\right)\right)^{\varepsilon} \tag{2}$$

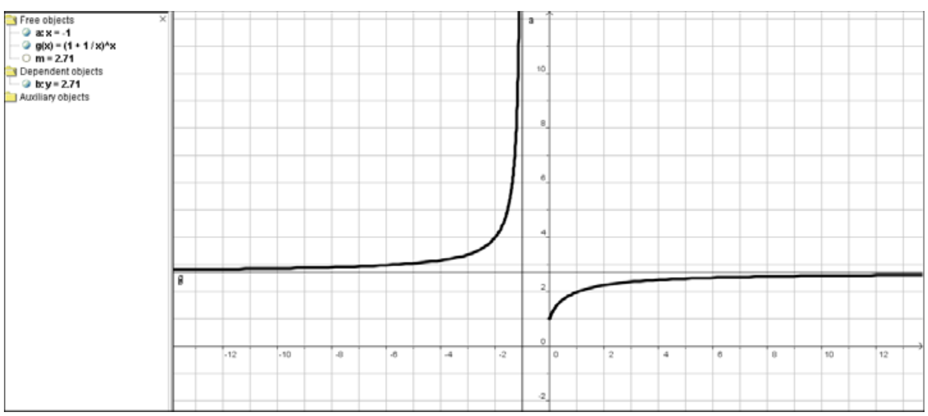
Όταν η αγάπη για το χρήμα οδηγεί το ν στο άπειρο η Άλγεβρα οδηγεί και το $x=\frac{\nu}{\varepsilon}$ στο άπειρο. Άρα το ερώτημα είναι τι θα συμβεί στη συνάρτηση $f\left(x\right)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ όταν $x\to+\infty$. Ενδιαφέρει μόνον η $f\left(x\right)$ διότι στο β′ μέλος της (2) τα K και ε είναι σταθερά. Εισάγουμε στην Geogebra, την συνάρτηση $f\left(x\right)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$. Θα γράψουμε `f(x)=(1+1/x)^x`. Η βάση $1+\frac{1}{x}$ στη δύναμη $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ πρέπει να είναι οπωσδήποτε θετική. Αλλά

$$1+\tfrac{1}{x}>0\Leftrightarrow\tfrac{x+1}{x}>0\Leftrightarrow x\left(x+1\right)>0,\ \ x\neq0\Leftrightarrow x<-1 \text{ ή } x>0$$

Για αυτό το λόγο η Geogebra μας δίνει σημεία της γραφικής παράστασης με τετμημένες εκτός του διαστήματος $[-1,0]$. Στο σχήμα έχει αποτυπωθεί και το πλέγμα. Αυτό επιτυγχάνεται αν κάνουμε δεξί κλικ στην επιφάνεια σχεδίασης και ενεργοποιήσουμε το `Grid`.



Βλέπουμε ότι η $\mathcal{C}_f$ δεν έχει σημεία μεταξύ των ευθειών $x = -1$, $x = 0$. Φαίνεται ότι η f παίρνει τιμές από 1 και πάνω και μάλιστα όλες τις τιμές από 1 και πάνω εκτός μίας τιμής που μάλλον αποφεύγει. Για να προσεγγίσουμε αυτή την τιμή θα χρειασθούμε μία οριζόντια ευθεία. Δίνουμε λοιπόν $m = 1$ και $y = m$ και στο παράθυρο της Άλγεβρας αλλάζουμε από τις ιδιότητες το βήμα για την παράμετρο m από 0.1 σε 0.01. Δοκιμάζουμε τώρα να βρούμε, αλλάζοντας το m, μία θέση της ευθείας $y = m$ που δεν τέμνει την γραφική παράσταση της f. Αν το πετύχουμε αυτό θα έχουμε εντοπίσει και εκείνη την τιμή που δεν παίρνει η f δηλαδή εκείνη την τιμή για m για την οποία $f(x) \neq m$ για όλα τα x. Για να το επιτύχετε θα χρειασθεί εκτός από υπομονή να κάνετε και μερικές μετακινήσεις δεξιά αριστερά του παραθύρου Γεωμετρίας για να βεβαιωθείτε ότι η $y = m$ δεν θα τμήσει την $\mathcal{C}_f$ κάπου μακριά από την αρχή των αξόνων.



Με λίγο πειραματισμό θα καταλήξετε σε μία τιμή του m περίπου 2,71. Η γραφική παράσταση της f όταν $x \to +\infty$ πλησιάζει σε αυτή την ευθεία και τείνει να ταυτισθεί με αυτή χωρίς όπως αποδεικνείεται να το πετυχαίνει. Όταν λοιπόν $x \to +\infty$ τότε ο αριθμός $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ τείνει σε κάποιο αριθμό που είναι περίπου 2,71. Αυτός ο μυστηριώδης αριθμός ονομάζεται αριθμός του Euler και συμβολίζεται με e. Είναι λοιπόν:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Ο παραπάνω συμβολισμός ίσως σας φαίνεται λίγο απωθητικός αλλά δεν λέει τίποτε διαφορετικό από αυτό που είπαμε με λόγια: Το όριο της $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ όταν το x τείναι στο $+\infty$ είναι e.

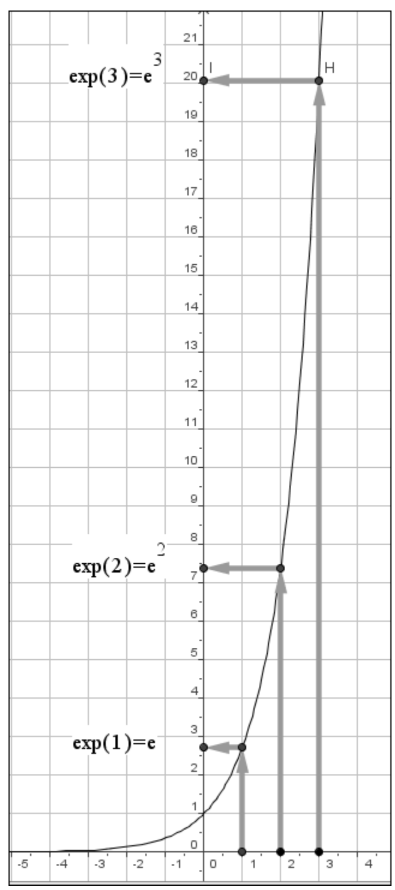
Ο αριθμός e δεν είναι ρητός αλλά άρρητος. Αλλά κάτι ακόμη. Σε αντίθεση με άλλους άρρητους όπως ο $\sqrt{2}$ ή ο $\frac{1}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{17}}$ που είναι ρίζες πολυωνυμικών εξισώσεων με ακέραιους συντελεστές (της $x^2 - 2 = 0$ ο πρώτος και της $x^4 - 5x^2 + 2 = 0$ ο δεύτερος) δηλαδή είναι *αλγεβρικοί* αριθμοί ο e δε μπορεί να φυλακισθεί μέσα σε μία εξίσωση με ακεραίους συντελεστές. Είναι όπως λέμε *υπερβατικός* αριθμός. Μία γρήγορη προσσέγιση του e μας δίνει το άθροισμα απείρων όρων:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + ...$$

Σωρεύοντας προσθετέους πετυχαίνουμε καλύτερη προσέγγιση.

13.3 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ e^x

Ο αριθμός e διαδραμματίζει ένα σηματικό ρόλο στα Μαθηματικά κυρίως μέσω της εκθετικής συνάρτησης που έχει βάση αυτό τον αριθμό δηλαδή την e^x. Λέγοντας μαλιστα *η εκθετική συνάρτηση* θα εννοούμε *αυτήν* την εκθετική συνάρτηση. Στην Geogebra η εκθετική συνάρτηση εισάγεται ως $exp(x)$. Η γραφική της παράσταση εμφανίζεται στο διπλανό σχήμα. Προσέξτε την απότομη αύξηση του y για τιμές του x μετά το 1. Σημειώστε ακόμη ότι η εκθετική συνάρτηση μετασχηματίζει την αριθμητική πρόοδο 1, 2, 3, ... στη γεωμετρική πρόοδο $e^1, e^2, e^3, ...$ Μια εύκολη άσκηση είναι να αποδείξετε γενικότερα ότι αν η ακολουθία α_ν είναι αριθμητική πρόοδος τότε η ακολουθία $\beta_\nu = \exp(\alpha_\nu)$ είναι γεωμετρική πρόοδος.



13.4 Μια Συναρτησιακη Εξισωση

Από τις ιδιότητες των δυνάμεων έχουμε $\exp(x+y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = \exp(x) \cdot \exp(y)$ δηλαδή για κάθε ζεύγος x, y ισχύει:

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \tag{3}$$

Ξεχάστε προς στιγμήν από που προήλθε η σχέση (3). Ας υποθέσουμε ότι η πρόκειται για μία άγνωστη σε μας συνάρτηση. Η σχέση αυτή μας πληροφορεί ότι η τιμή της συνάρτησης στο άθροισμα δύο αριθμών είναι ίση με το γινόμενο των τιμών της συνάρτησης στους δύο αριθμούς. Ας ονομάσουμε αυτή την άγνωστη συνάρτηση u. Θα ισχύει για όλα τα x και για όλα τα y:

$$u(x+y) = u(x) \cdot u(y) \tag{4}$$

Ένα συνηθισμένο πρόβλημα στα Μαθηματικά είναι να έχουμε στη διάθεση μας μία τέτοια σχέση και να πρέπει να μάθουμε την συνάρτηση που ικανοποιεί αυτή την σχέση. Ο άγνωστος μας είναι όχι πλέον ένας αριθμός αλλά μία συνάρτηση. Η εξίσωση αυτή λέγεται *συναρτησιακη εξίσωση*. Γενικά η επίλυση συναρτησιακών εξισώσεων είναι δύσκολο πρόβλημα χωρίς ενιαία τεχνική αν και βέβαια δε λείπουν και οι απλές περιπτώσεις. Αν έχουμε μία συναρτησιακή εξίσωση μπορούμε να πάρουμε μερικές επιπλέον πληροφορίες για την εμπλεκόμενη συνάρτηση αν κάνουμε διάφορες αντικαταστάσεις. Η σχέση (4) ισχύει για όλα τα x και για όλα τα y.

Άρα μπορούμε να αντικαταστήσουμε στη θέση του x το 0 και στη θέση του y επίσης το 0. Θα βρούμε $u(0) = u(0) \cdot u(0)$ δηλαδή $u(0)(1 - u(0)) = 0$. Δύο τινά μπορούν να συμβούν. Ή $u(0) = 0$ ή $u(0) = 1$. Αν συμβαίνει $u(0) = 0$ τότε θέτοντας στην (4) $y = 0$ βρίσκουμε $u(x+0) = u(x) \cdot u(0)$ δηλαδή $u(x) = 0$. Στην περίπτωση αυτή η u θα είναι η σταθερή συνάρτηση 0.

Ας συνεχίσουμε στην πιό ενδιαφέρουσα περίπτωση όπου $u(0) = 1$. Τότε όχι μόνο είναι $u(0) \neq 0$ αλλά $u(x) \neq 0$ όποιο νάναι το x. Πράγματι αν στη σχέση (4) αφήσουμε το x όπως είναι αλλά στη θέση του y αντικαταστήσουμε το $-x$ θα βρούμε ότι $u(x + (-x)) = u(x) \cdot u(-x)$ δηλαδή $u(0) = u(x) \cdot u(-x)$ με άλλα λόγια $1 = u(x) \cdot u(-x)$ και επομένως αναγκαστικά $u(x) \neq 0$ (γιατί;). Μάλιστα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $u(-x) = \frac{1}{u(x)}$.

Η σχέση (4) μας λέει πως μετασχηματίζει η u τα αθροίσματα: Τα κάνει γινόμενα τιμών. Τι συμβαίνει με τις διαφορές; Είναι

$$u(x-y) = u(x + (-y)) = u(x) \cdot u(-y)$$

Είδαμε ότι για κάθε x είναι $u(-x) = \frac{1}{u(x)}$. Εξ' ίσου καλά ισχύει και $u(-y) = \frac{1}{u(y)}$. Αξιοποιώντας αυτή την πληροφορία έχουμε $u(x-y) = u(x) \cdot \frac{1}{u(y)}$ και επομένως

$$u(x-y) = \frac{u(x)}{u(y)}$$

14 Η Λογαριθμική Συνάρτηση

14.1 ΑΛΛΑΖΟΝΤΑΣ ΘΕΣΗ

Όταν δουλεύουμε με μία συνάρτηση υπάρχουν μεταξύ άλλων δύο ερωτήματα:

Από την οπτική γωνία των x. Αν έχουμε ένα συγκεκριμένο x: Μπορεί να εισαχθεί στη συνάρτηση; Αν ναι τι θα προκύψει;

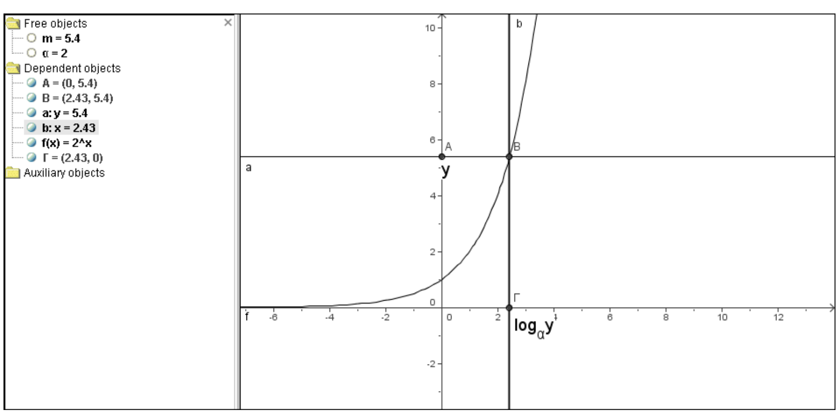
Από την οπτική γωνία των y. Αν έχουμε ένα συγκεκριμένο y: Έχει ελπίδα να είναι κάποιο από τα προϊόντα της συνάρτησης δηλαδή να είναι τιμή της; Και αν ναι από ποιά x προκύπτει;

Όταν υπολογίζουμε την αριθμητική τιμή της παράστασης x^2+x+1 για $x=-3$ ουσιαστικά απαντάμε σε ένα ερώτημα του πρώτου είδους. Όταν αναζητούμε τις λύσεις της εξίσωσης $x^2+x+1=2$ απαντάμε σε ένα ερώτημα του δευτέρου είδους.

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε το ερώτημα του δευτέρου είδους επικεντρωμένο στις εκθετικές συναρτήσεις. Ξέρουμε ότι κάθε θετικός αριθμός y είναι τιμή της εκθετικής συνάρτησης α^x. Και επειδή η α^x είναι γνησίως αύξουσα όταν $\alpha>1$ και γνησίως φθίνουσα όταν $0<\alpha<1$, επόμένως 1-1, άρα σε κάθε περίπτωση δεν κάνει σπατάλες, ο y θα είναι τιμή που προκύπτει από ένα μόνο x. Ας δώσουμε στην Geogebra $\alpha=2$, και $f(x)=\alpha^x$. Εισάγουμε την τιμή $m=3$, την ευθεία $y=m$ και ορίζουμε το σημείο τομής Α της $y=m$ με τον άξονα $y'y$, το σημείο τομής Β της ευθείας $y=m$ με την $\mathcal{C}_f$ και τέλος την προβολή Γ του Β στον άξονα $x'x$. Ο αριθμός που αντιστοιχεί στο Γ έστω x έχει την ιδιότητα $\alpha^x=y$. Ο αριθμός x ονομάζεται λογάριθμος του y ως προς βάση το α. Δηλαδή

$$\text{λογάριθμος του } y \text{ ως προς βάση το } \alpha{=}x \quad \Leftrightarrow \quad y=\alpha^x$$

Βέβαια οι μαθηματικοί ποτέ δεν θα άφηναν μία μακροσκελή έκφραση χωρίς να την υποκαταστήσουν με ένα πυκνό σύμβολισμό. Αυτός είναι ο $\log_\alpha y$ που δηλώνει τον λογάριθμο του y ως προς βάση το α. Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνεται η παραπάνω διαδικασία.



Αν αυξομειώνουμε το m τα σημεία αλλάζουν θέση. Οι δύο επιγραφές y και $\log_\alpha y$ έχουν γραφεί με το εργαλείο εισαγωγής κειμένου με απλό κώδικα LaTeX. Μπορείτε να κάνετε τις δύο επιγραφές να μετακινούνται μαζί με τα σημεία αν στις ιδιότητες του κειμένου επιλέξετε από το `Starting Point` τα σημεία A και Γ αντίστοιχα.

Αξίζει τον κόπο να θυμόμαστε ότι η ισότητα

$$\boxed{\log_\alpha y = x}$$

σημαίνει τρία πράγματα:

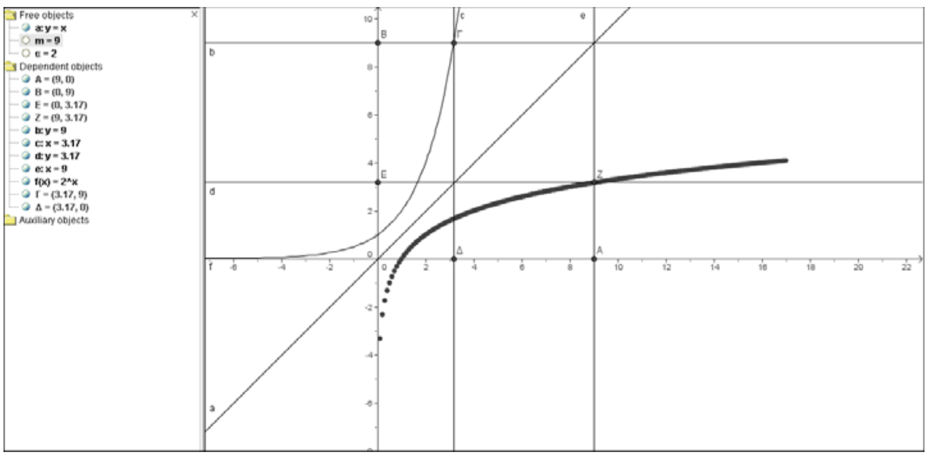
- $\alpha > 0, \quad \alpha \neq 1$
- $y > 0$
- $\alpha^x = y$

Είδαμε ότι η εκθετική συνάρτηση μετατρέπει τα αθροίσματα σε γινόμενα. Δηλαδή μία εύκολη πράξη σε μια δύσκολη. Τι γίνεται όμως αν δούμε τα πράγματα ανάποδα; Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα γινόμενο θετικών αριθμών ας πούμε το $y_1 y_2$. Θα υπάρχουν δύο αριθμοί x_1 και x_2, που δεν είναι άλλοι από τους λογαρίθμους των y_1, y_2 με βάση το α, έτσι ώστε $y_1 = \alpha^{x_1}$, $y_2 = \alpha^{x_2}$. Τότε $y_1 \cdot y_2 = \alpha^{x_1} \cdot \alpha^{x_2} = \alpha^{x_1 + x_2}$. Αλλά υπάρχει ένας μόνο αριθμός στον οποοίο αν υψωθεί ο α να μας δώσει $y_1 y_2$. Είναι ο $\log_\alpha (y_1 y_2)$. Άρα δε μπορεί παρά οι αριθμοί $\log_\alpha (y_1 y_2), x_1 + x_2$ να είναι ίσοι. Αυτό σημαίνει ότι

$$\log_\alpha (y_1 y_2) = \log_\alpha y_1 + \log_\alpha y_2 \tag{5}$$

Οι λογάριθμοι είναι σημαντικοί για πολλούς λόγους. Σε παλαιότερες εποχές που τα μέσα υπολογισμού ήσαν περιορισμένα η σχέση (5) έδινε επιπρόσθετη σπουδαιότητα στους λογαρίθμους διότι μετέτρεπε μία δύσκολη πράξη, τον πολλαπλασιασμό σε μία εύκολη, την πρόσθεση. Για να βρούν το γινόμενο δύο αριθμών εύρισκαν, από πίνακες, τους λογαρίθμους τους που και προσέθεταν. Έτσι είχαν τον αριθμό του β′ μέλους της (5). Πάλι από τους πίνακες εύρισκαν τίνος αριθμού αυτός ήταν λογάριθμος και είχαν το $y_1 y_2$.

Επομένως η αντιστοίχιση $y \to \log_\alpha y$ αξίζει να μελετηθεί. Με δυό λόγια να μελετηθεί η συνάρτηση που αντιστοιχεί κάθε θετικό αριθμό στο λογάριθμο του ως προς α. Για να δούμε πως δουλεύει αυτή η συνάρτηση θα χρησιμοποιήσουμε μία τεχνική που έχουμε υιοθετήσαμε και σε άλλη ενότητα. Εισάγουμε όπως πριν $\alpha = 2, f(x) = \alpha^x$, $m = 3$. Ο m θα χρησιμεύσει ως η μεταβλητή της οποίας θα βρίσκουμε το λογάριθμο. Θεωρούμε το σημείο $(m, 0)$ έστω A και για να το έχουμε στον άξονα $y'y$ εισάγουμε την ευθεία $y = x$ και ζητάμε από την Geogebra να μας βρεί το συμμετρικό του B ως προς την $y = x$. Αυτό αντιστοιχεί σε ένα θετικό αριθμό του οποίου ζητάμε το λογάριθμο. Φέρνουμε λοιπόν από το B παράλληλη στον $x'x$ που τέμνει την γραφική παράσταση της f στο σημείο G (Η Geogebra θα δώσει άλλο όνομα το οποίο και αλλάζουμε με δεξί κλικ και δίνοντας Redefine). Από το Γ φέρνουμε κάθετη στον $x'x$ που τον τέμνει στο Δ. Η τετμημένη αυτού του σημείου είναι ο λογάριθμος του m και επειδή τον θέλουμε στον $y'y$ παίρνουμε άλλη μία συμμετρία ως προς $y = x$. Βρίσκουμε το σημείο Ε. Από το Ε φέρνουμε κάθετη στον $y'y$ και ακόμη φέρνουμε κάθετη στον $x'x$ στο Α. Οι δύο αυτές ευθείες τέμνονται στο Ζ. Το Ζ είναι το σημείο $(m, \log_\alpha m)$. Ορίζουμε να αποτυπώνεται το ίχνος του Ζ. Μεταβάλλοντας το m θα έχουμε μεμονωμένα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \log_\alpha x$. Η όλη διαδικασία εμφανίζεται στο επόμενο σχήμα. *Όταν ολοκληρώσετε και σεις την εργασία να αποθηκεύσετε το αρχείο της Geogebra γιατί θα χρειασθεί να επανέλθουμε.*



14.2 Ολα απο ενα

Αν και χρήσιμοι οι λογάριθμοι συνοδεύονται από ένα μειονέκτημα. Ο υπολογισμός τους είναι αρκετά δύσκολος. Ωστόσο τελικά είναι αρκετό να ξέρουμε τους λογαρίθμους ως προς μία βάση για να μάθουμε τους λογαρίθμους ως προς οπιαδήποτε άλλη βάση. Πράγματι ας πούμε ότι ξέρουμε τους λογαρίθμους ως προς την βάση α και θέλουμε να μάθουμε τους λογαρίθμους ως προς την βάση β. Ας πούμε ότι μας ενδιαφέρει ο λογάριθμος του x. Γράφουμε τρείς φορές τον ορισμό του λογαρίθου:

- Μία του x με βάση το α: $x = \alpha^{\log_\alpha x}$
- Μία του x με βάση το β: $x = \beta^{\log_\beta x}$
- Μία του β με βάση το α: $\beta = \alpha^{\log_\alpha \beta}$

Αν αντικαταστήσουμε το β από την τρίτη σχέση στη δεύτερη έχουμε $x = \left(\alpha^{\log_\alpha \beta}\right)^{\log_\beta x}$ δηλαδή

$$x = \alpha^{\log_\alpha \beta \cdot \log_\beta x}$$

Το πρώτο μέλος της παραπάνω ισότητας είναι ίδιο με το πρώτο μέλος της πρώτης ισότητας επομένως:

$$\alpha^{\log_\alpha \beta \cdot \log_\beta x} = \alpha^{\log_\alpha x}$$

από την οποία προκύπτει ότι οι εκθέτες είναι ίσοι: $\log_\alpha \beta \cdot \log_\beta x = \log_\alpha x$ Λύνοντας ως προς $\log_\beta x$ βρίσκουμε ότι:

$$\log_\beta x = \frac{\log_\alpha x}{\log_\alpha \beta}$$

Ο παραπάνω τύπος είναι γνωστός ως τύπος αλλαγής βάσης των λογαρίθμων. Μπορεί να διαβαστεί, και αυτό μας ενδιαφέρει εδώ, και ως εξής:

$$\log_\beta x = \left(\frac{1}{\log_\alpha \beta}\right) \log_\alpha x$$

Ο παραπάτω τύπος μας λέει ότι η λογαριθμική συνάρτηση με βάση το β μπορεί να προκύψει αν πολλαπλασιάσουμε την λογαριθμική συνάρτηση με βάση το α επί ένα στεθερό αριθμό τον $\frac{1}{\log_\alpha \beta}$. Με άλλα λόγια αν ξέρουμε μία λογαριθμική συνάρτηση τις ξέρουμε όλες και βρίσκονται με ένα απλό πολλαπλασιασμό. Άρα μία λογαριθμική συνάρτηση ως προς κάποια βάση είναι αρκετή. Παρ΄ όλα αυτά δεν χρησιμοποιούμε μία αλλά δύο.

- Για τις εφαρμογές εκείνη που έχει βάση το 10 δηλαδή την $\log_{10} x$ που πιό απλά γράφεται $\log x$

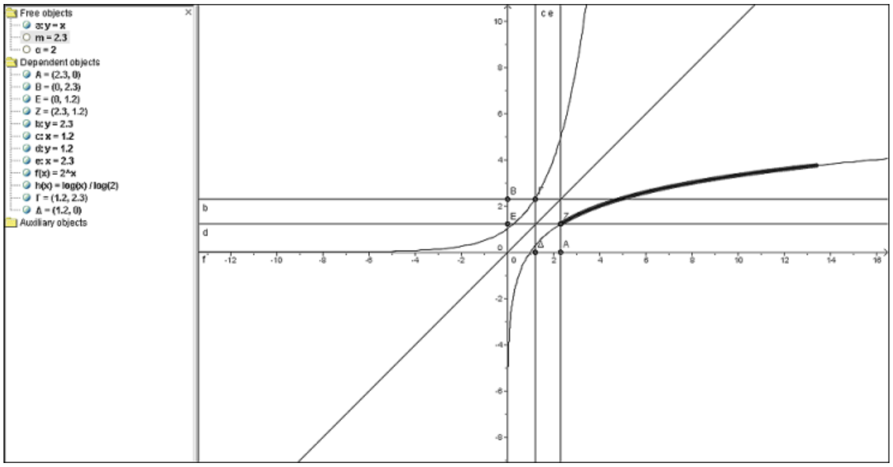
- Για το θεωρητικό κομμάτι των Μαθηματικών εκείνη που έχει βάση τον αριθμό e δηλαδή την $\log_e x$ που πιό απλά συμβολίζεται με $\ln x$.

Θα ασχοληθούμε μόνο με την δεύτερη αλλά η πρώτη δεν είναι άλλη από την

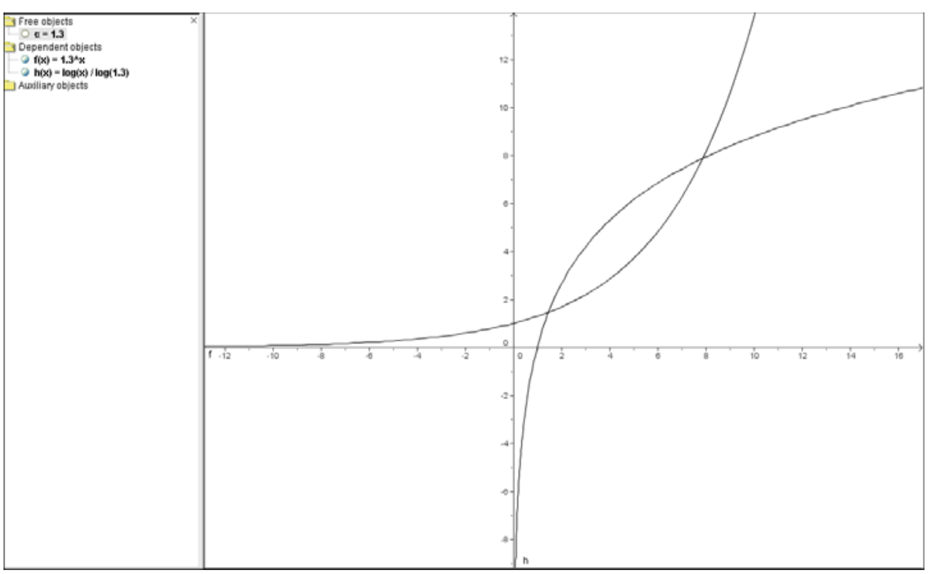
$$\log_{10} x = \frac{1}{\ln 10} \ln x$$

που κατά προσέγγιση είναι η $\log_{10} x = 0,434\,29 \ln x$. Δυστυχώς όπως συμβαίνει σε όλες τις επαγγελματικές ομάδες οι μαθηματικοί δεν είναι σύμφωνοι σε όλα τα πράγματα. Ένα από αυτά είναι ο συμβολισμός. Μερικοί χρησιμοποιούν το σύμβολο $\log x$ αντί του $\ln x$. Αυτό συμβαίνει και με τον σχεδιαστή της Geogebra. Έτσι αν θέλετε να εισάγετε στην Geogebra τον $\ln x$ θα γράφετε $\log(x)$. Αν θέλετε να εισάγετε την $\log_\alpha x$ θα εισάγετε $\log(x) / \log(\alpha)$.

Ανοίξτε το αρχείο που αποθηκεύσατε στην προηγούμενη παράγραφο. Ορίστε την συνάρτηση $h(x) = \log(x) / \log(\alpha)$. Αλλάξτε τις τιμές του m από το παράθυρο της Άλγεβρας. Θα δείτε ότι ότι το Z κινείται εκεί που πρέπει δηλαδή πάνω στη γραφική παράσταση της h:



Εχουμε δεί πως αλλάζει η εκθετική συνάρτηση όταν αλλάζει η βάση της. Θα κάνουμε το ίδιο για την λογαριθμική. Ανοίγουμε την Geogebra δίνουμε την αρχική τιμή $\alpha = 2$ και εισάγουμε τις συναρτήσεις $f(x) = \alpha^x$ και $h(x) = \log(x) / \log(\alpha)$. Αλλάζοντας την τιμή του α θα έχουμε διαφορτικές λογαριθμικές συναρτήσεις. Προσέξτε ότι αν μειώσετε την τιμή του α ώστε να πάρει αρνητικές τιμές η Geogebra δεν δείχνει τίποτε! Λογικό άφού η εκθετική συνάρτηση δεν ορίζεται για αρνητικές τιμές της βάσης. Και μαζί της φυσικά και η λογαριθμική. Επίσης όταν το α πάρει την τιμή 1 η Geogebra δίνει μία ευθεία γραμμή που αντιστοιχεί στην σταθερή συνάρτηση 1^x δεν δίνει όμως λογαριθμική συνάρτηση. Ενδιαφέρουσες είναι οι τιμές του α κοντά στο 1 πάνω ή κάτω.



14.3 Δυο Ασκησεις

1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \log_x x$. Χρησιμοποιήστε τον ορισμό του λογαρίθμου για βρείτε το πεδίο ορισμού της. Κατόπιν να κάνετε την γραφική της παράσταση.

2. Πόσα κοινά σημεία μπορούν να έχουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \alpha^x$ και $g(x) = \log_\alpha x$; Δοκιμάστε αλλάζοντας τις τιμές του α. Για τιμές του α κοντά στο 0 θα χρειασθεί να μεγεθύνετε το παράθυρο Γεωμετρίας για να έχετε καλλίτερη εικόνα.

14.4 Η Μονοτονια της $\ln x$

Ανοίξτε την Geogebra και σχεδιάστε τις συναρτήσεις e^x και $\ln x$. Μην ξεχνάτε πως προκύπτει η $\ln x$ από την e^x. Δοθέντος του x ο $\ln x$ είναι ο μοναδικός αριθμός στον οποίο αν υψωθεί ο e μας δίνει x:

$$e^{\ln x} = x$$

Από την γραφική παράσταση της $\ln x$ φαίνεται να είναι γνησίως αύξουσα. Ας το τεκμηριώσουμε με ένα συλλογισμό. Ξέρουμε ότι η e^x είναι γνησίως αύξουσα. Παίρνουμε $x_1 < x_2$. Τι μπορεί να συμβαίνει με τα $\ln x_1$, $\ln x_2$; Ή θα είναι ίσα ή κάποιο θα είναι μεγαλύτερο από το άλλο. Ας καταγράψουμε τις περιπτώσεις γράφοντας τελευταία εκείνη που θέλουμε να εξασφαλίσουμε ότι ισχύει:

1. $\ln x_1 = \ln x_2$

2. $\ln x_1 > \ln x_2$

3. $\ln x_1 < \ln x_2$

Αν ίσχυε η πρώτη περίπτωση τότε θα είχαμε και $e^{\ln x_1} = e^{\ln x_2}$ δηλαδή $x_1 = x_2$ (άτοπο). Αν ίσχυε η δεύτερη περίπτωση θα είχαμε $e^{\ln x_1} > e^{\ln x_2}$ δηλαδή $x_1 > x_2$ (άτοπο). Άρα αναγκαστικά μένει να ισχύει η τρίτη περίπτωση δηλαδή $x_1 < x_2$.

Όταν το x λοιπόν αυξάνει και το $\ln x$ αυξάνει. Αν προσέξουμε την γραφική παράσταση θα δούμε ότι κοντά στο 1 η $\ln x$ αυξάνει σχετικά γρήγορα. Όμως όσο μεγαλώνει το x η $\ln x$ αυξάνει μεν αλλά ολοένα και πιό αργά. Αυτό φαίνεται καθαρά αν αρχίσουμε να μετακινούμε το παράθυρο της Γεωμετρίας προς τα δεξιά. Θα δούμε ότι η γραφική παράσταση της $\ln x$ μοιάζει με οριζόντια γραμμή. Αυτό οφείλεται στο εξής. Για να πάρουμε τον x πρέπει ο e υψωθεί στο $\ln x$. Άρα για να πάρουμε το x^k πρέπει να υψώσουμε το e στο $\ln x$ (βρίσκοντας έτσι x) και μετά στην k. Τελικά $x = \left(e^{\ln x}\right)^k = e^{k \ln x}$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\ln x^k = k \cdot \ln x$$

και για $x = 10$ έχουμε $\ln 10^k = k \cdot \ln 10$ δηλαδή (είναι περίπου $\ln 10 = 2,3026$) κατά προσέγγιση

$$\ln 10^k = 2,3026k$$

Σύμφωνα με την παραπάνω σχέση όταν μεταβαίνουμε από το 10 στο 100 έχουμε αύξηση του λογαρίθμου κατά 2,3026. Μετά όμως για να επιτύχουμε την ίδια αύξηση θα χρειασθεί να περιμένουμε έως το 1000 και μετά για άλλη τόση αύξηση ως το 10000!

14.5 Δυο Ασκησεις

1. Το ότι η $\ln x$ αυξάνει αργά μπορεί να εξηγηθεί από το γεγονός ότι η e^x αυξάνει γρήγορα. Μπορείτε να δώσετε την εξήγηση;

2. Θα είναι:

$$x^y > y^x \Leftrightarrow \ln x^y > \ln y^x \Leftrightarrow y \ln x > x \ln y \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} > \frac{\ln y}{y}$$

   Να κάνετε στην Geogebra την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Η συνάρτηση αυτή είναι γνησίως αύξουσα και μετά γνησίως φθίνουσα. Το σημείο που αλλάζει μονοτονία είναι το e. Χρησιμοποιήστε αυτή την πληροφορία για να συγκρίνετε τους αριθμούς 11^{12} και 12^{11}. Για όσους μπουν στον πειρασμό να κάνουν πράξεις με το χέρι με αριθμομηχανή ή υπολογιστή η ερώτηση είναι 111111^{111112} και 111112^{111111}.

15 Αντίστροφες συναρτήσεις

15.1 Η Εννοια της Αντιστροφης Συναρτησης

Άς θυμηθούμε πως ορίσαμε την λογαριθμική συνάρτηση με βάση το α. Θεωρήσαμε πρώτα την εκθετική συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$. Μετά για κάθε θετικό αριθμό y, δηλαδή για κάθε αριθμό που είχε ελπίδα να είναι τιμή της f, αναζητήσαμε εκείνο ακριβώς τον αριθμό x που αν εισαχθεί στην f μας δίνει το y. Υπάρχει ένας μόνο τέτοιος x και επομένως ορίζεται μία νέα συνάρτηση Ας θεωρήσουμε ένα θετικό αριθμό x. Ας πάρουμε το e^x. Μετά ας πάρουμε το λογάριθμο του με βάση το e δηλαδή το $\ln e^x = x$. Η σειρά των ενεργειών ήταν:

$$x \to e^x \to \ln e^x = x$$

Ας πάρουμε τώρα ένα θετικό αριθμό y, μετά το λογάριθμο του και μετά υψώνουμε τον e στον λογάριθμο. Η σειρά των χειρισμών είναι:

$$y \to \ln y \to e^{\ln y} = y$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι αν σε ένα αριθμό δράσει η εκθετική συνάρτηση και μετά η λογαριθμική (πάντα με βάση το e) το αποτέλεσμα είναι ο αρχικός αριθμός. Το ίδιο συμβαίνει και αν δράσει πρώτα η λογαριθμική και μετά η εκθετική. Δηλαδή η δράση της μίας συνάρτησης ακυρώνεται από την άλλη. Η μία συνάρτηση λέγεται αντίστροφη της άλλης. Μπορούμε να θέσουμε το θέμα μας πιό γενικά:

- Έστω f μία 1-1 συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A και σύνολο τιμών το B. Για κάθε y από το B υπάρχει ακριβώς ένα x από το A έτσι ώστε $f(x) = y$. Η συνάρτηση g που αντιστοιχεί στο y το x ονομάζεται αντίστροφη συνάρτηση της f.

Επομένως η αντίστροφη συνάρτηση της f, που ορίζεται μόνο αν η f είναι 1-1 έχει πάντοτε πεδίο ορισμού το συνολο τιμών της f και σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού της g. Αν θεωρήσουμε ένα x από το πεδίο ορισμού της f και ονομάσουμε $y = f(x)$ τότε έχουμε την παρακάτω διάταξη:

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} x \xrightarrow{f} y$$

Και εδώ πάλι όταν σε ένα αριθμό δράσει η συνάρτηση και μετά η αντίστροφη της το αποτέλεσμα θα είναι ο αρχικός αριθμός. Το ίδιο θα συμβεί αν δράσει πρώτα η αντίστροφη και μετά η συνάρτηση. Δηλαδή:

$$g\left(f\left(x\right)\right) = x \text{ για κάθε αριθμό } x \text{ από το πεδίο ορισμού της } f$$

και ακόμη

$$f\left(g\left(y\right)\right) = y \text{ για κάθε αριθμό } y \text{ από το σύνολο τιμών της της } f$$

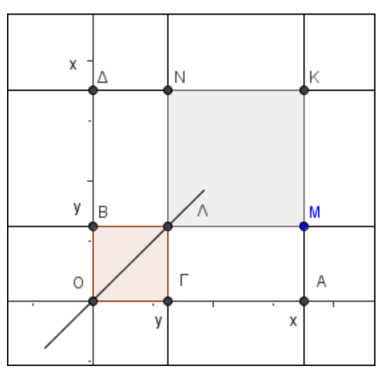
Προφανώς αν η g είναι αντίστροφη της f θα είναι και η g είναι 1-1. Ακόμη η αντίστροφη της είναι η f. Δηλαδή: Η αντίστροφη της αντίστροφης της f είναι η ίδια η f.

15.2 Γραφικη Παρασταση της Αντιστροφης Συναρτησης

Έστω f μία 1-1 συνάρτηση και g η αντίστροφη της. Τώρα ενα σημείο $M\left(x, y\right)$ (ας το πάρουμε χάριν απλότητας με θετικές συντεταγμένες, οι συλλογισμοί που θα κάνουμε είναι οι ίδιοι και για τις άλλες περιπτώσεις) ανήκει στη γραφική παράσταση της f αν και μόνο αν $f\left(x\right) = y$. Αυτό σημαίνει ότι $g\left(f\left(x\right)\right) = g\left(y\right)$ δηλαδή $g\left(y\right) = x$ δηλαδή το σημείο $N\left(y, x\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της g. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι ισχύει και το αντίστροφο επομένως μπορούμε να γράψουμε συμβολικά ότι:

$$M\left(x, y\right) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow N\left(y, x\right) \in \mathcal{C}_g$$

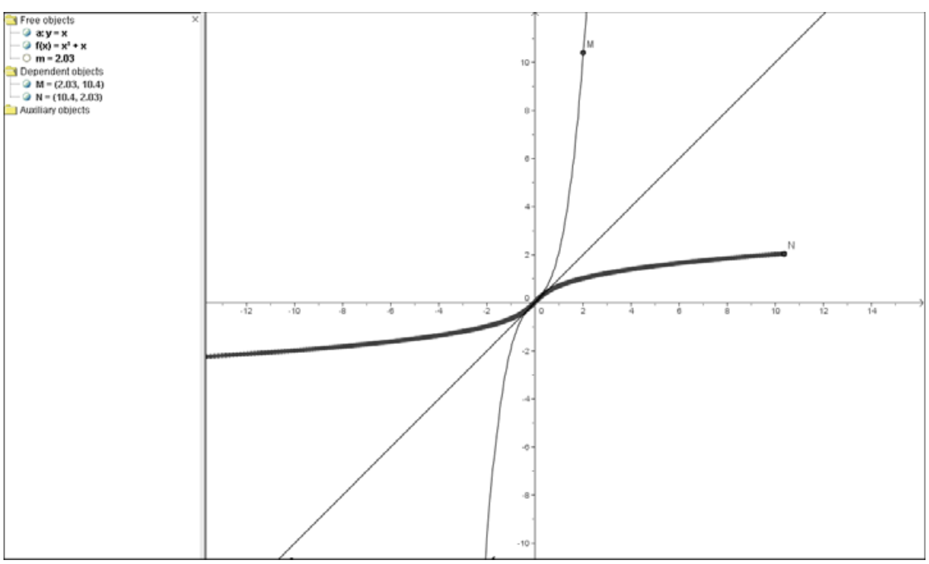
Ας δούμε πως είναι τοποθετημένα τα σημεία $M\left(x, y\right)$, $N\left(y, x\right)$ στο επίπεδο:



Το τετράπλευρο ΟΓΛΒ είναι τετράγωνο με πλευρά y και το ΛΜΚΝ επίσης τετράγωνο με με πλευρά, στο συγκεκριμένο σχήμα, $x-y$. Η ευθεία που συνδέει τα Ο, Λ είναι διαγώνιος του ΟΓΛΒ και επομένως διχοτόμος της $\widehat{\text{Ο}}$ καθώς και της $\widehat{\Lambda}$. Επομένως είναι και διαγώνιος του τετραγώνου ΛΜΚΝ. Άρα οι κορυφές του Μ και Ν είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία ΟΑ η οποία αφού διχοτομεί την $\widehat{O}$ είναι η πρώτη διχοτόμος των αξόνων δηλαδή η ευθεία $y = x$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το σημείο $M\left(x, y\right)$ της $\mathcal{C}_f$ είναι συμετρικό του αντιστοίχου του σημείου $N\left(y, x\right)$ της $\mathcal{C}_g$. Άρα έχουμε την ακόλουθη γεωμετρική πληροφορία:

- Η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης και της αντίστροφης της είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$

Ας πάρουμε την συνάρτηση $f\left(x\right) = x^3 + x$. Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1-1. Αυτό μπορεί να γίνει με τον ορισμό δηλαδή να πάρουμε $x_1 < x_2$ και αφού ενδιαμέσως συμπεράνουμε ότι $x_1^3 < x_2^3$ να πούμε ότι $x_1^3 + x_1 < x_2^3 + x_2$ δηλαδή $f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right)$. Μπορεί και να γίνει με το λόγο μεταβολής αρκεί να πούμε ότι $\lambda = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + 1$ και επομένως ο λόγος μεταβολής είναι θετικός (μην το προσπεράσετε αυτό το σημείο: αιτιολόγηση). Επομένως η f ναι 1-1 άρα έχει ανρίστροφη ή όπως αλλιώς λέμε είναι αντιστρέψιμη. Μπορούμε τώρα να δούμε ποιά είναι η γραφική παράσταση της αντίστροφης της g παίρνοντας τα συμμετρικά των σημείων της $\mathcal{C}_g$ με άξονα συμμετρίας την $y = x$. Ανοίγουμε λοιπόν την Geogebra και δίνουμε $m = 1$, $f\left(x\right) = x^3 + x$, $M = \left(m, f\left(m\right)\right)$ εισάγουμε την ευθεία $y = x$ και με το κατάλληλο εργαλείο ζητάμε από την Geogebra να βρεί το συμμετρικό του Μ ως προς την $y = x$ το οποίο το μετονομάζουμε σε Ν. Αλλάζοντας την τιμή του m θα έχουμε διάφορα σημεία της γραφικής παράστασης της αντίστροφης g της f. Μπορούμε να έχουμε την γραφική παράσταση της g αν ενεργοποιήσουμε την αποτύπωση ίχνους για το Ν και ορίσουμε το βήμα του m είναι όχι 0.1 αλλά 0.01.



15.3 Εύρεση της Αντίστροφης Συνάρτησης όταν Είμαστε Τυχεροί

Οι συναρτήσεις συνήθως δίνονται με τύπους. Αν η f είναι αντιστρέψιμη [11] τότε με $f(x) = y$ μπορούμε να μάθουμε πως δουλεύει η αντίστροφη συνάρτηση g της f αν μάθουμε πως από το y θα μεταβούμε στο x. Υπάρχουν μερικές απλές περιπτώσεις που αυτό γίνεται ακόμη και με το " μυαλό ". Ας πάρουμε την $f(x) = 2x + 1$. Αν το $f(x)$ είναι y αυτό σημαίνει ότι το x διπλασιάστηκε και μετά του προσετέθη το 1 για να δώσει y. Αν ξέρουμε εμείς το y και θέλουμε να δούμε από ποιό x προήλθε αρκεί να αφαιρέσουμε το 1 που προσετέθη τελευταίο και μετά να διαιρέσουμε δια δύο. Λ.χ. το 6 προήλθε από το $\frac{5}{2}$. Φυσικά μπορούμε και να λύσουμε την σχέση ως προς x:

$$f(x) = y \Leftrightarrow 2x + 1 = y \Leftrightarrow 2x = y - 1 \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{2}$$

και να συνάγουμε ότι η αντίστροφη g της f έχει τύπο

$$g(y) = \frac{y-1}{2}$$

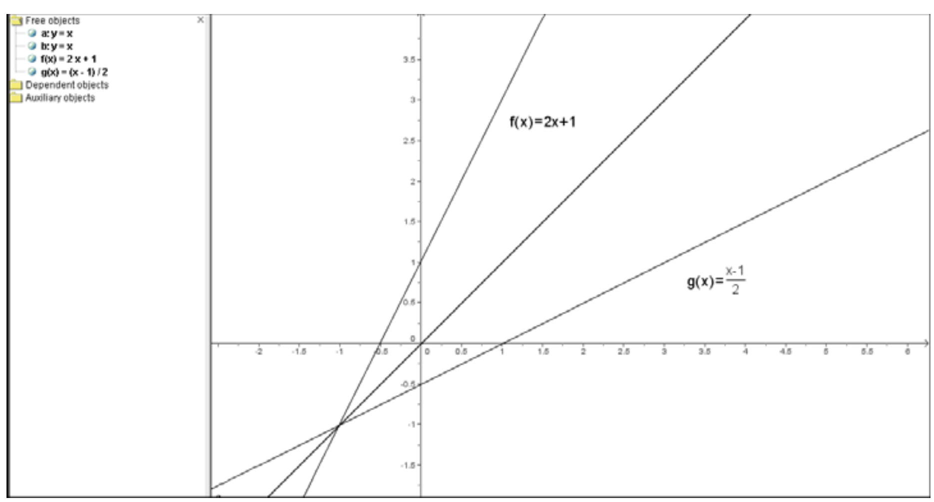
ή, εξ' ίσου καλά, έχει τύπο

$$g(\heartsuit) = \frac{\heartsuit - 1}{2}$$

και επειδή στα Μαθηματικά προτιμούμε τα x από τις καρδούλες τελικά γράφουμε ως τύπο της g τον

$$g(x) = \frac{x-1}{2}$$

Αν κάνουμε τις γραφικές παραστάσεις στην Geogebra μαζί με την $y = x$ θα πάρουμε



[11] Θυμηθείτε ότι αντιστρέψιμη είναι εκείνη που μπορεί να αντιστραφεί και αυτό συμβαίνει μόνο αν η συνάρτηση μας είναι 1-1

Ας δούμε μία άλλη περίπτωση όπου η αλγεβρική επίλυση είναι δυσκολότερη. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Αυτή δεν είναι 1-1 διότι είναι $f(1) = 2$ αλλά υπάρχει και άλλη μία τιμή που αν εισαχθεί στην f δίνει 2 (βρείτε την). Αν όμως περιορίσουμε κατάλληλα το πεδίο ορισμού της αποκλείοντας τις σπατάλες μπορούμε να την κάνουμε 1-1. Αυτό γίνεται αν πάρουμε ως πεδίο ορισμού το διάστημα $[1, +\infty)$. Αν είναι $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ και συμβεί $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $f(x_1) - f(x_2) = 0$ και επομένως μετά από μία εύκολη παραγοντοποίηση βρίσκουμε ότι

$$(x_1 + x_2 - 2)(x_1 - x_2) = 0$$

Με λίγη σκέψη θα δείτε ότι εφ' όσον είναι $x_1 \geq 1$ και $x_2 \geq 1$ η τελευταία σχέση μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι είναι $x_1 = x_2$. Άρα η f είναι αντιστρέψιμη. Για να βρούμε την αντίστροφη της θα χρειασθεί να λύσουμε ως προς x την εξίσωση:

$$f(x) = y$$

δηλαδή την

$$x^2 - 2x + 3 = y \tag{6}$$

η οποία μας οδηγεί στις λύσεις

$$x = 1 \pm \sqrt{y - 2}$$

Όμως θα πρέπει το x να ανήκει στο πεδίο ορισμού δηλαδή να είναι τουλάχιστο 1 δηαλαδή 1 και κάτι όπου αυτό οτο κάτι μπορί να είναι θετικό ή 0. Η τιμή $x = 1 - \sqrt{y - 2}$ λοιπόν απορρίπτεται και μας μένει

$$x = 1 + \sqrt{y - 2}$$

Άρα εδώ $g(y) = 1 + \sqrt{y - 2}$ και ο τύπος της αντίστροφης τελικά είναι:

$$g(x) = 1 + \sqrt{x - 2} \tag{7}$$

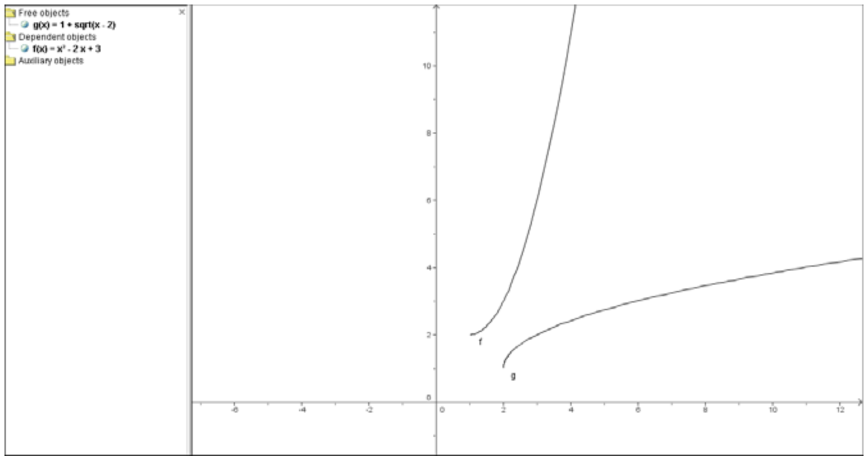
Συγχρόνως βρήκαμε και το σύνολο τιμών της f που είναι και το πεδίο ορισμού της g. Αυτό μπορούσε να φανεί κατά την επίλυση της (6) διότι ένα y έχει ελπίδα να ανήκει στο σύνολο τιμών όταν η εξίσωση έχει λύση x μέσα από το πεδίο ορίμού και γιαυτό πρέπει η διακρίνουσα της εξίσωσης στην οποία ανάγεται η (6) να είναι μη αρνητική δηλαδή $y \geq 2$. Επίσης μπορούμε να το καταλάβουμε και από την (7) διότι η σχέση αυτή έχει νόημα μόνο αν $x \geq 2$. Η αντίστροφη συνάρτηση έχει λοιπόν πεδίο ορισμού το $[2, +\infty)$. Μπορούμε να δούμε τις συναρήσεις f και g στην Geogebra. Για την εισαγωγή της g δεν έχουμε προβλήματα. Θα δώσουμε

```
g(x) = 1 + sqrt(x - 2)
```

Για την f όμως πρέπει να κόψουμε τους αριθμούς κάτω από 1. Γιαυτό ορίζουμε την f σε ένα διάστημα της μορφής $[1, t]$ όπου t είναι ένας μεγάλος αριθμός που πέραν τούτου να μη μας ενδιαφέρουν οι τιμές της f. Δίνουμε λοιπόν:

```
f(x)=Function[x^2-2x+3,1,1000]
```

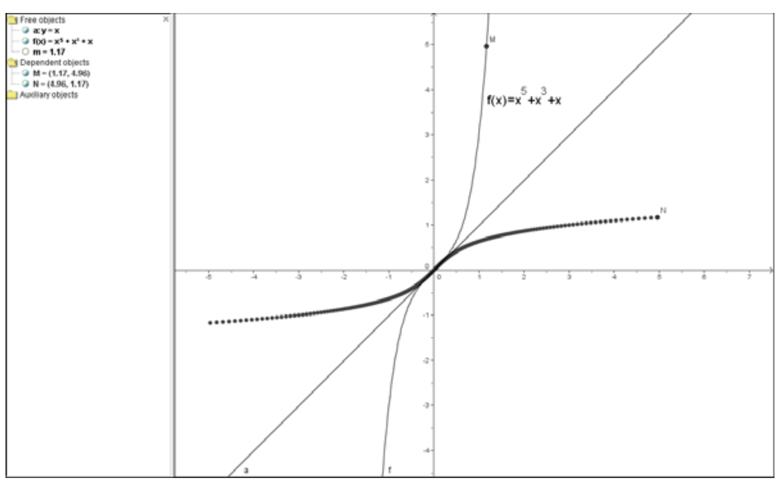
Η εικόνα που θα πάρουμε είναι:



15.4 Οταν δεν ειμαστε τυχεροι Ι

Σημειώστε ότι οι εξισώσεις που μπορούμε να λύνουμε είναι λιγότερες από εκείνες που δε μπορούμε να λύνουμε. Επομένως δεν είναι πάντοτε εύκολο να βρίσκουμε τον τύπο της αντίστροφης μίας συνάρτησης.

Ένα τέτοιο παράδειγμα προέρχεται από ένα θέμα των εξετάσεων της Γ′ Λυκείου στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης του έτους 2003. Δόθηκε η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$. Η συνάρτηση αυτή είναι γνησίως αύξουσα (προκύπτει εύκολα με τον ορισμό) και επομένως αντιστρέψιμη. Για να βρεθεί η αντίστροφή της πρέπει να λυθεί η εξίσωση $x^5 + x^3 + x = y$ ως προς x κάτι που δεν είναι δυνατόν. Η αντίστροφη συνάρτηση υπάρχει αλλά δε μπορούμε να την βρούμε. Η Geogebra μας επιτρέπει να την σχεδιάσουμε όπως κάναμε στο προηγούμενο παράδειγμα:

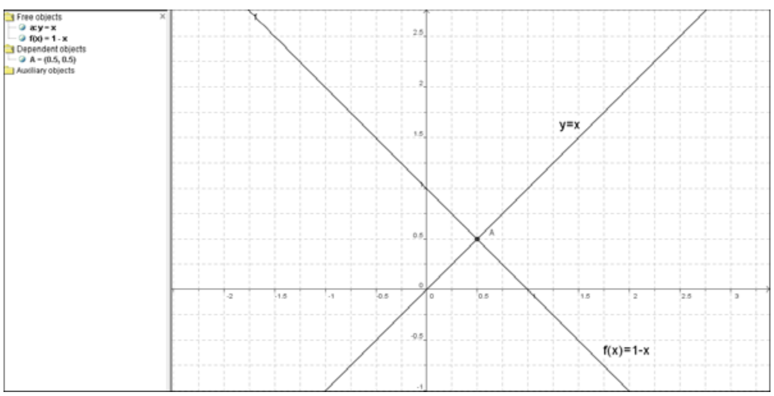


15.5 ΜΕΡΙΚΑ ΑΚΟΜΗ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

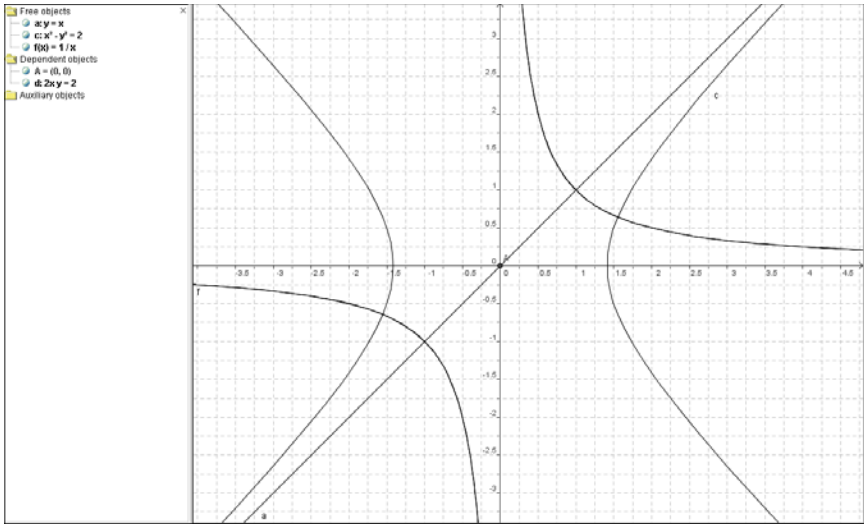
Ας δούμε την αντιστροφή μερικών απλών συναρτήσεων.

Η αντίστροφη της $\mathbf{f(x) = x}$. Τυπικά θα πρέπει αφού ελέγξουμε ότι η f είναι 1-1 (είναι) να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = y$ ως προς x. Δηλαδή την $x = y$! Η αντίστροφη συνάρτηση είναι η $g(x) = x$. Αυτό ήταν αναμενόμενο. Η γραφική παράσταση της αντίστροφης θα πρέπει να είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της f ως προς την ευθεία $y = x$. Δηλαδή πρέπει να πάρουμε την συμμετρική της $y = x$ ως προς τον εαυτό της που δεν είναι άλλη από την $y = x$.

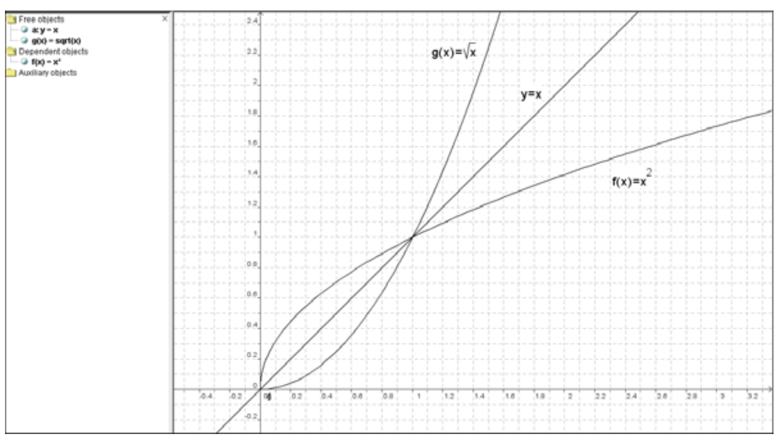
Η αντίστροφη της $\mathbf{f(x) = 1 - x}$. Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα και επομένως 1-1. Άρα είναι αντιστρέψιμη και με $f(x) = y$ δηλαδή $1 - x = y$ βρίσκουμε ότι $x = 1 - y$ δηλαδή ο τύπος της αντίστροφης g είναι $g(x) = 1 - x$. Και πάλι η αντίστροφη συμπίπτει με την f. Πάλι αυτό ήταν αναμενόμενο. Η γραφική παράσταση της f είναι μία ευθεία κάθετη στην $y = x$ στο σημείο $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και επομένως η συμμετρική της ως προς την $y = x$ συμπίπτει με τον εαυτό της.



Η αντίστροφη της $\mathbf{f(x) = \frac{1}{x}}$. Η f είναι 1-1 αλλά όχι και μονότονη. Είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ αλλά όχι συνολικά. Εύκολα βρίσκουμε ότι η αντίστροφη της είναι η $g(x) = \frac{1}{x}$ δηλαδή συμπίπτει με την f. Υπάρχει μία εξήγηση γιαυτό. Η γραφική παράσταση της f προκύπτει αν περιστρέψουμε την υπερβολή $x^2 - y^2 = 2$, γύρω από το O κατά $45°$ και κατά την θετική φορά. Για να το δείτε αυτό να εισάγετε την υπερβολή, να ζητήσετε από την Geogebra να βρεί την τομή των δύο αξόνων (θα την ονομάσει A) και με το κατάλληλο εργαλείο να περιστρέψετε την υπερβολή γύρω από το A κατά $45°$. Μετά να εισάγετε την συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$. Δεν θα παρατηρήσετε καμμία αλλαγή διότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης θα συμπέσει με την περιεστραμμένη υπερβολή. Τώρα η αρχική υπερβολή $x^2 - y^2 = 2$ ήταν συμμετρική ως προς τον άξονα της δηλαδή τον $x'x$. Φυσικά αυτή η συμμετρία θα διατηρηθεί και μετά την περιστροφή. Όμως η $x^2 - y^2 = 2$ θς γίνει η $y = \frac{1}{x}$ και ο $x'x$ θα γίνει η $y = x$!



Η αντίστροφη της $\mathbf{f(x) = x^2,\ x \geq 0}$. Η συνάρτηση αυτή είναι γνησίως αύξουσα άρα 1-1 και λύνοντας την $f(x) = y$ δηλαδή την $x^2 = y$ ως προς x βρίσκουμε ότι $x = \sqrt{y}$ επομένως η αντίστροφη συνάρτηση είναι η $g(x) = \sqrt{x}$. Επειδή θέλουμε να περιορίσουμε το πεδίο ορισμού της x^2 στους μη αρνητικούς αριθμούς θα εισάγουμε την συνάρτηση με την εντολή `Function` δίνοντας `f(x)=Function[x^2, 0, 1000]`. Η αντίστροφη g θα εισαχθεί ως `g(x)=sqrt(x)`:



15.6 ΟΤΑΝ ΔΕΝ ΕΙΜΑΣΤΕ ΤΥΧΕΡΟΙ ΙΙ

Αν από ατυχία της ζωής βρεθούμε αντιμέτωποι με μία συνάρτηση f που δε μπορούμε να μάθουμε την αντίστροφή της g αυτό δε σημαίνει ότι δε μπορούμε να μάθουμε *τίποτε* γιαυτήν. Διότι από την f, έμμεσα δηλαδή, μπορούμε να έχουμε κάποιες πληροφορίες για την g.

Μονοτονία της αντίστοφης συνάρτησης. Ίσως προσέξατε, από τα προηγούμενα παραδείγματα, ότι όταν η f είχε ένα είδος μονοτονίας τότε και η αντίστροφή της είχε το ίδιο είδος μονοτονίας. Αυτό είναι κάτι που μπορούμε να αποδείξουμε: Ας υποθέσουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Θα δείξουμε ότι και η αντίστροφή της, g, είναι και αυτή γνησίως αύξουσα. Παίρνουμε $x_1 < x_2$ από το πεδίο ορισμού της g. Θέλουμε να εξασφαλίσουμε ότι

$$g\left(x_1\right) < g\left(x_2\right)$$

Μη ξεχνάτε ότι το πεδίο ορισμού της g είναι το σύνολο τιμών f. Επομένως θα υπάρχουν t_1, t_2 από το πεδίο ορισμού της f έτσι ώστε

$$f\left(t_1\right) = x_1, \qquad f\left(t_2\right) = x_2$$

Τα t_1, t_2 απεικονίζονται μέσω της f στα x_1, x_2. Επομένως η αντίστοφη της f θα κάνει την αντίστροφη δουλειά. Θα απεικονίζει τα x_1, x_2 στα t_1, t_2. Δηλαδή:

$$g\left(x_1\right) = t_1, \qquad g\left(x_2\right) = t_2$$

Αρχικός μας στόχος ήταν $g\left(x_1\right) < g\left(x_2\right)$. Δηλαδή:

$$t_1 < t_2 \tag{8}$$

Εδώ εφαρμόζουμε ένα επιχείρημα που το έχουμε ξαναδεί. Υπάρχουν τρείς περιπτώσεις για τα t_1, t_2. Η (8) και δύο ακόμη:

$$t_1 = t_2 \text{ ή } \qquad t_1 > t_2$$

Αν ήταν $t_1 = t_2$ τότε θα είχαμε και $f\left(t_1\right) = f\left(t_2\right)$ δηλαδή $x_1 = x_2$(άτοπο). Αν είχαμε $t_1 > t_2$ τότε από την μονοτονία της f έχουμε $f\left(t_1\right) > f\left(t_2\right)$ δηλαδή $x_1 > x_2$(άτοπο). Άρα αναγκαστικά ισχύει η (8).

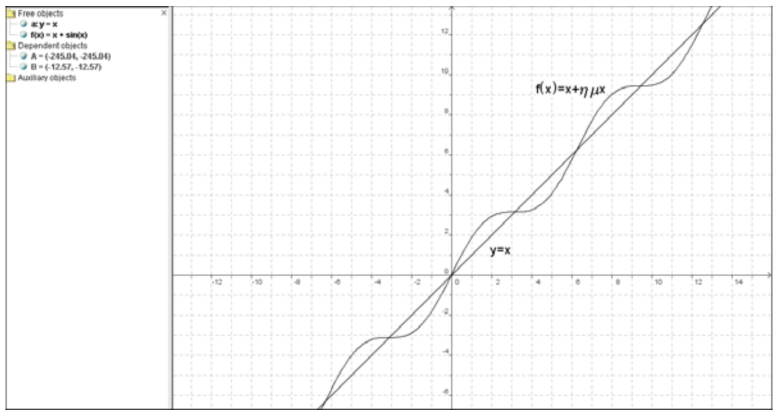
Με όμοιο τρόπο διαπιστώνεται ότι αν η f είναι γνησίως φθίνουσα τότε και η αντίστροφή της g είναι επίσης γνησίως φθίνουσα. Άρα:

- Αν η f είναι γνησίως μονότονη τότε και η αντίστροφή της είναι γνησίως μονότονη και έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με της f.

Κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων αντιστρόφων συναρτήσεων. Οι γραφικές παραστάσεις δύο αντιστρόφων συναρτήσεων f και g έχουν πάντα την ευθεία $y = x$ ως άξονα συμμετρίας. Τώρα ενδέχεται κάποια από αυτές, ας πούμε η $\mathcal{C}_f$, να τέμνει τον άξονα συμμετρίας σε κάποιο σημείο έστω A. Το συμμετρικό του A, δηλαδή ο ευατός του, ανήκει και στη γραφική παράσταση της $\mathcal{C}_g$, άρα είναι κοινό σημείο των $\mathcal{C}_f$ και $\mathcal{C}_g$. Επομένως:

- Αν η γραφική παράσταση μίας αντιστρέψιμης συνάρτησης f τέμνει την ευθεία $y = x$ σε κάποιο σημείο τότε το σημείο αυτό είναι κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της f και της αντίστροφής της. Στο επόμενο σχήμα υπάρχει η γραφική παράσταση της $f\left(x\right) = x + \eta\mu x$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα (ας το πιστέψουμε)

Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = x + \eta\mu x$, όπως μπορεί να αποδειχθεί αλλά όχι με τις γνώσει που μέχρι στιγμής έχουμε, είναι γνησίως αύξουσα. Η γραφική της παράσταση τέμνει την ευθεία $y = x$ σε άπειρα σημεία. Αντιστοιχούν στους αριθμούς που μηδενίζεται το ημίτονο. Τα σημεία αυτά είναι και σημεία της γραφικής παράστασης της αντίστροφης της f:



Τίθεται το ερώτημα: *Μπορούμε άραγε να βρίσκουμε όλα τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων δύο αντιστρόφων συναρτήσεων με αυτό τον τρόπο δηλαδή παίρνοντας τα κοινά σημεία της μίας από αυτές με την ευθεία $y = x$;* Γενικά η απάντηση είναι αρνητική. Δείτε για παράδειγμα την $f(x) = \frac{1}{x}$. Αυτή συμπίπτει με την αντίστροφή της και επομένως όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της και της γραφικής παράστασης της αντίστροφής της είναι κοινά. Ωστόσο δύο μόνο από αυτά ανήκουν στην $y = x$: Τα $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Αν όμως η f είναι γνησίως αύξουσα η απάντηση στο ερώτημα είναι καταφατική. Πράγματι έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα, g η αντίστροφή της και έστω (α, β) ένα κοινό σημείο των $\mathcal{C}_f$ και $\mathcal{C}_g$. Θα δείξουμε ότι ανήκει στην ευθεία $y = x$. Δηλαδή $\alpha = \beta$. Αρκεί να αποκλείσουμε τις περιπτώσεις $\alpha < \beta$ και $\alpha > \beta$. Δεν ξεχνάμε ότι το (α, β) ανήκει στην $\mathcal{C}_f$. Αυτό σημαίνει ότι $f(\alpha) = \beta$. Αλλά ανήκει και στην $\mathcal{C}_g$ άρα $g(\alpha) = \beta$ και επομένως $f(g(\alpha)) = f(\beta)$ δηλαδή $f(\beta) = \alpha$. Αν τώρα ήταν $\alpha > \beta$ αφού η f είναι γνησίως αύξουσα θα ήταν και $f(\alpha) > f(\beta)$. Αλλά τότε θα ήταν και $\beta > \alpha$ (άτοπο). Όμοια αποκλείεται και η περίπτωση $\alpha < \beta$. Αποδείξαμε ότι:

- Αν μία συνάρτηση είναι γνησδίως αύξουσα τότε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης με την γραφική παράσταση της αντίστροφής της ανήκουν στην ευθεία $y = x$.

15.7 Η Αντιστροφη Συναρτηση της Εφαπτομενης.

Μιά γωνία έχει εφαπτομένη 1. Ποιά είναι η γωνία;. Αν βιαστήκατε να απαντήσετε $\frac{\pi}{4}$ χάσατε. Εξ' ίσου καλά θα μπορούσε να είναι και η $\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$. Και άπειρες άλλες (βρέιτε τες). Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η συνάρτηση *εφαπτομένη* δεν είναι 1-1. Η ίδια τιμή αντιστοιχεί σε πολλές τιμές του x.

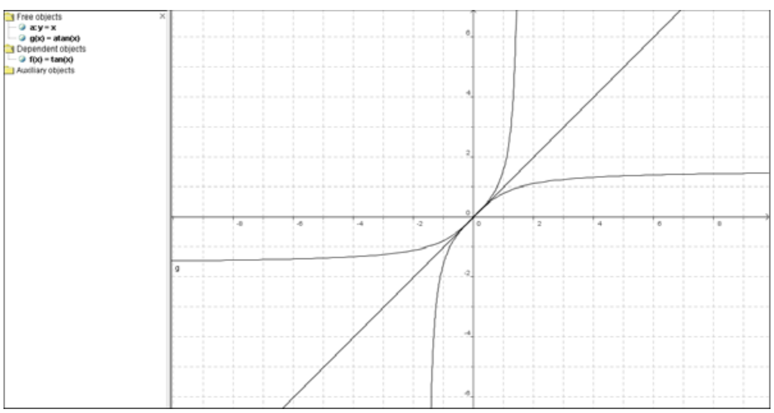
Ωστόσο η απάντηση " $\frac{\pi}{4}$ " δεν είναι λάθος αν το ερώτημα τεθεί διαφορετικά: Μιά γωνία έχει εφαπτομένη 1 και βρίσκεται μεταξύ $-\frac{\pi}{2}$ και $\frac{\pi}{2}$. Ποιά είναι η γωνία; Η απάντηση τώρα είναι καλή διότι περιορίσαμε το πεδίο ορισμού της εφαπτομένης σε ένα διάστημα, το $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, στο οποίο είναι 1-1 και μάλιστα γνησίως αύξουσα. Αν το x παίρνει τιμές σε αυτό το διάστημα η εφαπτομένη του μπορεί παράξει όλες τις τιμές που παράγει η εφαπτομένη δηλαδή όλο το $\mathbb{R}$ αλλά χωρίς σπατάλες. Η αντίστροφη συνάρτηση ονομάζεται *τόξο εφαπτομένης* και συμβολίζεται με arctan. Είναι $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ και $\arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$. Στην Geogebra η συνάρτηση του τόξου εφαπτομένης συμβολίζεται με `atan`. Αυτή καθώς και οι αντίστροφες των άλλων τριγωνομετρικών συναρτήσεων είναι πολύ χρήσιμες και διευρύνουν την ορατότητα μας. Δεν διδάσκονται αφότου οι εκπαιδευτικές αρχές αποφάσισαν να ενδίδουν στις οιμωγές του κόσμου για μείωση της ύλης. Το επόμενο διάγραμμα προέκυψε όταν ζητήσαμε από την Geogebra να σχεδιάσει την γραφική παράσταση της εφαπτομένης περιορίζοντας την στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ με την εντολή:

```
f(x)=Function[tan(x),-pi/2,pi/2]
```

και μετά να κάνει την γραφική παράσταση του τόξου εφαπτομένης δίνοντας:

```
g(x)=atan(x)
```

Έχουμε προσθέσει και τον άξονα συμμετρίας τους την ευθεία $y = x$



15.8 Και Ενας Συμβολισμος

Η αντίστροφη συνάρτηση της f συμβολίζεται με f^{-1}. Προσοχή: f^{-1} δεν σημαίνει $\frac{1}{f}$. Για παράδειγμα όταν $f(x) = \frac{x}{x+1}$ η $\frac{1}{f}$ έχει τύπο $\frac{x+1}{x}$ ενώ η f^{-1} έχει τύπο $\frac{x}{1-x}$. Φυσικά για κάθε αντιστρέψιμη συνάρτηση f ισχύει:

- $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$
- $f^{-1}(f(x)) = x$ για κάθε $x \in \mathcal{D}_f$
- $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ για κάθε $x \in f(\mathcal{D}_f)$