ΚΟΙΝΟ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΟ ΤΜΗΜΑ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ ΠΟΥ ΕΦΑΠΤΟΝΤΑΙ ΣΕ ΤΡΙΤΟ ΚΥΚΛΟ

ΣΠΥΡΟΣ ΓΙΑΝΝΑΚΟΠΟΥΛΟΣ

Έστω κύκλος $C:(O,R)$ και $C_1:(O_1,R_1)$, $C_2:(O_2,R_2)$ κύκλοι που εφάπτονται στον C στα σημεία K_1, K_2. Αν t_{12} είναι το μήκος του κοινού εφαπτόμενου τμήματος AB των C_1, C_2 τότε:

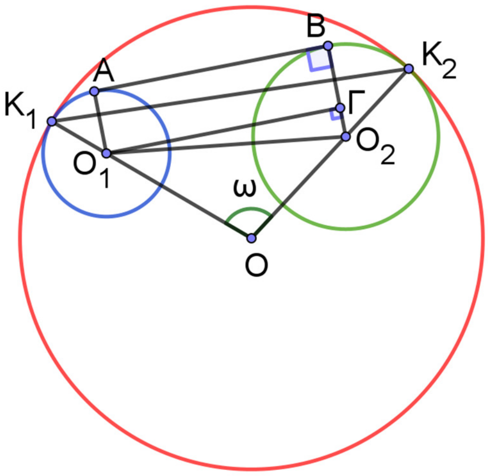
α. Αν οι C_1, C_2 εφάπτονται εσωτερικά του C, είναι $t_{12}=\frac{K_1K_2}{R}\sqrt{(R-R_1)(R-R_2)}$.

β. Αν ο C_1 εφάπτεται εσωτερικά του C και ο C_2 εφάπτεται εξωτερικά του C είναι, $t_{12}=\frac{K_1K_2}{R}\sqrt{(R-R_1)(R_1+R_2)}$.

γ. Αν οι C_1, C_2 εφάπτονται εξωτερικά του C είναι, $t_{12}=\frac{K_1K_2}{R}\sqrt{(R+R_1)(R+R_2)}$.

Απόδειξη

α.



Σχ. 1

Φέρουμε $O_1\Gamma \perp O_2B$ (Σχ.1). Το τετράπλευρο $AB\Gamma O_1$ είναι ορθογώνιο οπότε $O_1\Gamma = AB = t_{12}$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓO_1O_2 και το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $O_1\Gamma^2 = O_1O_2^2 - O_2\Gamma^2 \Leftrightarrow$

$t_{12}^2 = O_1O_2^2 - (R_2 - R_1)^2$ (1).

Εφαρμόζουμε το νόμο των συνημιτόνων στα τρίγωνα OK_1K_2, OO_1O_2 και παίρνουμε:

$$K_1K_2^2 = 2R^2 - 2R^2\text{συν}\omega \Leftrightarrow \text{συν}\omega = 1 - \frac{K_1K_2^2}{2R^2},$$

$$O_1O_2^2 = OO_1^2 + OO_2^2 - 2OO_1\cdot OO_2\text{συν}\omega \Leftrightarrow$$

$$O_1O_2^2 = (R-R_1)^2 + (R-R_2)^2 - 2(R-R_1)(R-R_1)\left(1-\frac{K_1K_2^2}{2R^2}\right) \Leftrightarrow$$

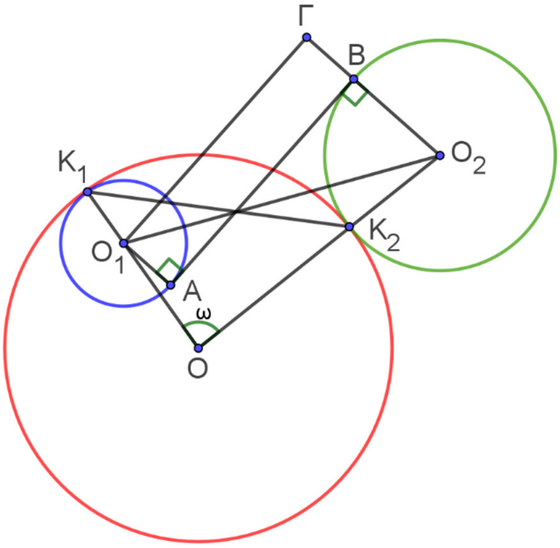
$$O_1O_2^2 = \left[(R-R_1)-(R-R_2)\right]^2 + (R-R_1)(R-R_2)\frac{K_1K_2^2}{R^2} \Leftrightarrow$$

$$O_1O_2^2 = (R_1-R_2)^2 + (R-R_1)(R-R_2)\frac{K_1K_2^2}{R^2} \quad (2)$$

Η (1) με βάση την (2) γράφεται $t_{12}^2 = (R-R_1)(R-R_2)\frac{K_1K_2^2}{R^2} \Leftrightarrow$

$$t_{12} = \frac{K_1K_2}{R}\sqrt{(R-R_1)(R-R_2)}.$$

β. Φέρουμε $O_1\Gamma \perp O_2B$ (Σχ.2). Το τετράπλευρο $O_1AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο, οπότε $O_1\Gamma = AB$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓO_1O_2 έχουμε $O_1\Gamma^2 = O_1O_2^2 - O_2\Gamma^2 \Leftrightarrow$



Σχ. 2

$AB^2 = O_1O_2^2 - (R_1 + R_2)^2$ (3).

Εφαρμόζουμε το νόμο των συνημιτόνων στα τρίγωνα OK_1K_2, OO_1O_2 και παίρνουμε:

$K_1K_2^2 = 2R^2 - 2R^2συνω \Leftrightarrow συνω = 1 - \frac{K_1K_2^2}{2R^2}$,

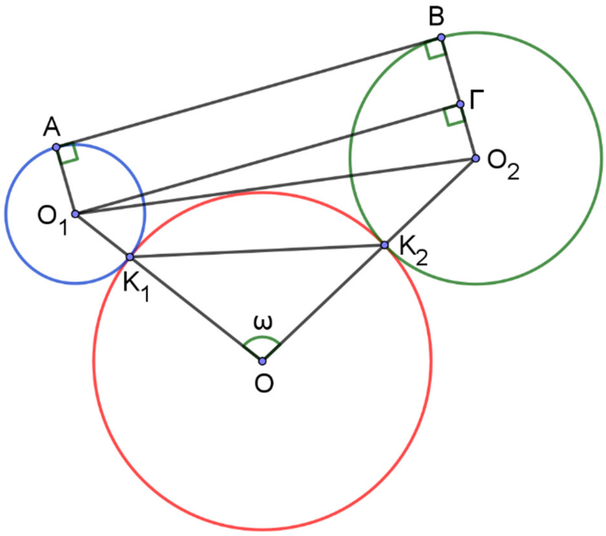
$O_1O_2^2 = OO_1^2 + OO_2^2 - 2OO_1 \cdot OO_2συνω \Leftrightarrow$

$O_1O_1^2 = (R - R_1)^2 + (R + R_2)^2 -$

$2(R - R_1)(R + R_2) + (R - R_1)(R + R_2)\frac{K_1K_2^2}{R^2} \Leftrightarrow O_1O_2^2 = (R_1 + R_2)^2 + (R - R_1)(R + R_2)\frac{K_1K_2^2}{R^2}$

$(3) \Leftrightarrow t_{12}^2 = (R - R_1)(R + R_2)\frac{K_1K_2^2}{R^2} \Leftrightarrow t_{12} = \frac{K_1K_2}{R}\sqrt{(R - R_1)(R + R_2)}$.

γ.



Σχ. 3

Εργαζόμαστε όπως στα προηγούμενα ερωτήματα και έχουμε

$t_{12} = \frac{K_1K_2}{R}\sqrt{(R + R_1)(R + R_2)}$.