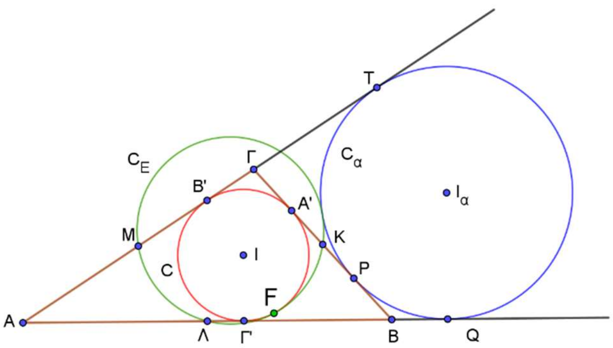
# ΘΕΩΡΗΜΑ FEUERBACH

ΣΠΥΡΟΣ ΓΙΑΝΝΑΚΟΠΟΥΛΟΣ

**Ο κύκλος των εννέα σημείων (ή κύκλος Euler) ενός τριγώνου εφάπτεται ταυτόχρονα του εγγεγραμμένου κύκλου και των παρεγγεγραμμένων κύκλων του τριγώνου. Το σημείο $F$ του κύκλου Euler και του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ονομάζεται σημείο Feuerbach.**

**Απόδειξη**[1]




Έστω τρίγωνο $ΑΒΓ$ με μήκη πλευρών $α \le β \le γ$ και $Κ, Λ, Μ$ τα μέσα των πλευρών του $ΒΓ, ΑΒ, ΑΓ$ αντίστοιχα.

Ο κύκλος Euler $C_E$ διέρχεται από τα σημεία $Κ, Λ, Μ$. Θεωρούμε ότι τα σημεία $Κ, Λ, Μ$ είναι κέντρα κύκλων με μηδενική ακτίνα. Ο εγγεγραμμένος κύκλος $C$ του τριγώνου με κέντρο $Ι$ εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου στα σημεία $Α', Β'$ και $Γ'$.

**Βήμα 1ο:** Θα δείξουμε ότι οι κύκλοι $C, C_E$ εφάπτονται.

Έχουμε $ΜΚ = \dfrac{γ}{2}$, $ΜΛ = \dfrac{α}{2}$, $ΛΓ' = ΑΓ' - ΑΛ = τ - α - \dfrac{γ}{2} = \dfrac{β-α}{2}$, $ΚΑ' = ΓΚ - ΓΑ' = \dfrac{α}{2} - (τ-γ) = \dfrac{γ-β}{2}$. Σειρά των κύκλων: $1 \to (Μ)$, $2 \to (Κ)$, $3 \to C$, $4 \to (Λ)$, $t_{12} \cdot t_{34} + t_{23} \cdot t_{14} = ΜΚ \cdot ΛΓ' + ΚΑ' \cdot ΜΛ = \dfrac{γ}{2} \cdot \dfrac{β-α}{2} + \dfrac{γ-β}{2} \cdot \dfrac{α}{2} = \dfrac{β(γ-α)}{4} \Leftrightarrow t_{12} \cdot t_{34} + t_{23} \cdot t_{14} = \dfrac{β(γ-α)}{4}$ (1). Επίσης έχουμε $ΚΛ = \dfrac{β}{2}$, $ΜΒ' = ΑΒ' - ΑΜ = τ - α - \dfrac{β}{2} = \dfrac{γ-α}{2}$, $t_{13} \cdot t_{24} = ΜΒ' \cdot ΚΛ = \dfrac{β(γ-α)}{4}$ (2). Από τις (1),(2) προκύπτει ότι $t_{12} \cdot t_{34} + t_{23} \cdot t_{14} = t_{13} \cdot t_{24}$, που από το αντίστροφο θεώρημα του Casey μας εξασφαλίζεται ότι οι κύκλοι $C, C_E$ εφάπτονται (εσωτερικά).

**Βήμα 2ο:** Έστω $C_α$ ο παρεγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $ΑΒΓ$ που εφάπτεται των προεκτάσεων των πλευρών $ΑΓ, ΑΒ$ στα σημεία $Τ, Q$ αντίστοιχα και στην πλευρά $ΒΓ$ στο σημείο $Ρ$. Σειρά των κύκλων $1 \to (Μ), 2 \to C_α$, $3 \to (Κ), 4 \to (Λ)$.

Δεδομένου ότι $ΑΤ = τ$ και $ΓΡ = τ - β$ εύκολα βρίσκουμε $t'_{12} = ΜΤ = \dfrac{α+γ}{2}$, $t'_{34} = ΚΛ = \dfrac{β}{2}$, $t'_{23} = ΚΡ = \dfrac{γ-β}{2}$ $t'_{14} = ΜΛ = \dfrac{α}{2}$, $t'_{13} = ΜΚ = \dfrac{γ}{2}$, $t'_{24} = ΛQ = \dfrac{α+β}{2}$. $t'_{12} \cdot t'_{34} + t'_{23} \cdot t'_{14} = t'_{13} \cdot t'_{24}$ (3). Από την (3) σύμφωνα με το αντίστροφο του θεωρήματος

[1]https://www.dropbox.com/scl/fi/mnhpzgrmngtlefg9turj1/FEUER-BACH.docx?rlkey=26fqjb6xrwrtdgopt4994fhe0&dl=0

του Casey οι κύκλοι $C_E, C_\alpha$ εφάπτονται (εξωτερικά). Όμοια και με τους υπόλοιπους παρεγγεγραμμένους κύκλους του τριγώνου $AB\Gamma$.

**Σημείωση:** Έχουμε άλλες δύο αποδείξεις οι οποίες έχουν καταχωρηθεί στον παραπάνω σύνδεσμο.

**Σπύρος Γιαννακόπουλος**