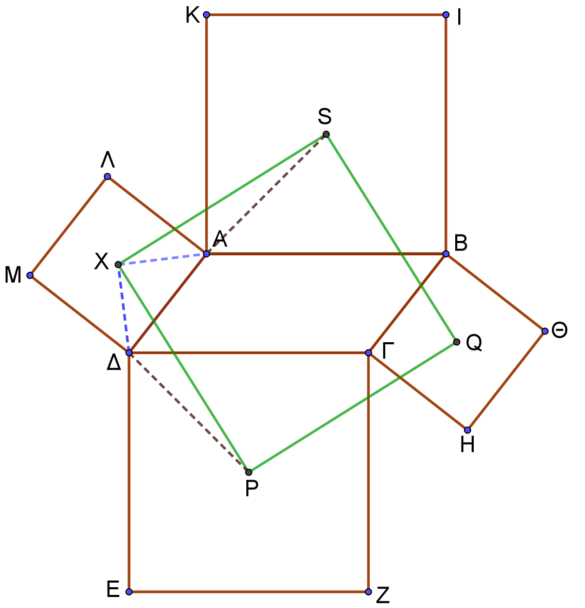
1ο – 2ο Πρόβλημα του Thebault

Σπύρος Γιαννακόπουλος

1ο Πρόβλημα Thebault
Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Με πλευρές τις πλευρές του παραλληλογράμμου και εξωτερικά του παραλληλογράμμου κατασκευάζουμε τετράγωνα. Να δείξετε ότι τα κέντρα των τετραγώνων ορίζουν τετράγωνο.
Λύση



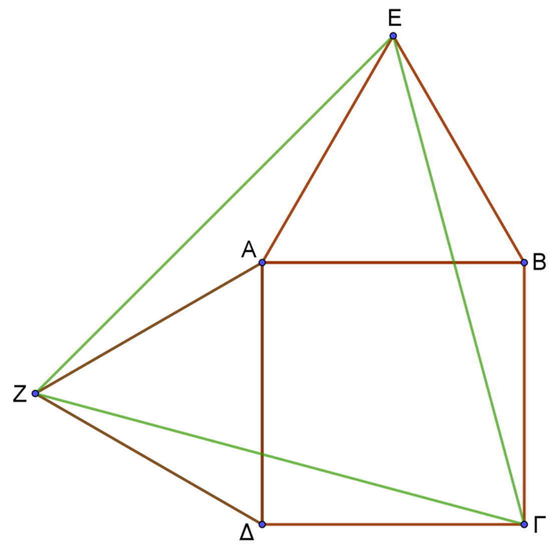
Έστω P, Q, S, X τα κέντρα των τετραγώνων όπως φαίνονται στο παραπάνω σχήμα.
Τα τετράγωνα $ABIK$ και $\Delta\Gamma ZE$ είναι ίσα, οπότε $AS = \Delta P$. Επιπλέον $XA = X\Delta$ και $\Lambda\hat{A}K = \hat{\Delta}$ ως οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες. Άρα $X\hat{A}S = 90^0 + \Lambda\hat{A}K = 90^0 + \hat{\Delta} = K\hat{\Delta}P$.

Σύμφωνα με το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα AXS και ΔXP είναι ίσα. Άρα $XS = XP$ και $A\hat{X}S = \Delta\hat{X}P$.
Όμοια έχουμε $PQ = QS = XS$. Συνεπώς το τετράπλευρό $PQSX$ είναι ρόμβος.

$P\hat{X}S = P\hat{X}A + A\hat{X}S = P\hat{X}A + \Delta\hat{X}P = \Delta\hat{X}A = 90^0$.
Άρα το τετράπλευρο $PQSX$ είναι τετράγωνο.

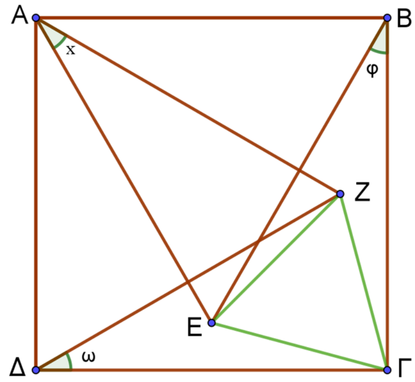
2ο Πρόβλημα Thebault
Με τις πλευρές $AB, A\Delta$ του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ κατασκευάζουμε ισόπλευρα τρίγωνα AEB και $AZ\Delta$ είτε στο εσωτερικό είτε στο εξωτερικό του τετραγώνου. Τότε το τρίγωνο $EZ\Gamma$ είναι ισόπλευρο.
Λύση

• Έστω ότι τα ισόπλευρα τρίγωνα AEB και $A\Delta Z$ βρίσκονται εκτός του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.



$Z\hat{A}E = E\hat{B}\Gamma = Z\hat{\Delta}\Gamma = 150^0$. Σύμφωνα με το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα $AZE, BE\Gamma$ και $\Delta Z\Gamma$ είναι ίσα, οπότε $ZE = Z\Gamma = \Gamma E$. Άρα το τρίγωνο $ZE\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

• Έστω ότι τα ισόπλευρα τρίγωνα AEB και $A\Delta Z$ βρίσκονται εντός του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.



Είναι $x = \varphi = \omega = 30^0$. Προφανώς από το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα $AEZ, BE\Gamma, \Delta Z\Gamma$ είναι ίσα. Άρα $EZ = \Gamma E = \Gamma Z$.
Συνεπώς το τρίγωνο ΓEZ είναι ισόπλευρο.

Παρατήρηση: Οι AE, AZ τριχοτομούν την ορθή γωνία.

Σπύρος Γιαννακόπουλος