ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΤΡΙΤΗ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

Μονάδες 6

Α2. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α. Πότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle (μονάδες 3) και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία (μονάδες 2).

Μονάδες 5

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$.

β) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.

γ) Για κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και γνησίως αύξουσα στο Δ, ισχύει ότι $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

δ) Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι μια «ένα προς ένα» (“1-1”) συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

ε) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $f\circ g$ και $g\circ f$, τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\dfrac{4-e^{2x}}{e^x}$ και η συνάρτηση $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $h(x)=\ln x$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f=g\circ h$.

Μονάδες 5

Έστω $f(x)=\dfrac{4-x^2}{x}$, $x>0$.

Β2. **i)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία (μονάδες 4).

ii) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{4-\pi^2}{4-e^2}>\dfrac{\pi}{e}$ (μονάδες 4).

Μονάδες 8

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Β4. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)}$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+3\,, & x<1 \\ \dfrac{1}{x}+\alpha\,, & x\geq 1 \end{cases},$$

όπου $\alpha\in\mathbb{R}$, για την οποία γνωρίζουμε επιπλέον ότι

$$\int_2^3 x\,f(x)\,dx=1.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=0$.

Μονάδες 4

Γ2. **i)** Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$ (μονάδες 4).

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) και τη γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα $x'x$ (μονάδες 4).

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «ένα προς ένα» ("1-1") (μονάδες 3) και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Γ4. Έστω $(\varepsilon): y = -x + 2$ η εξίσωση της εφαπτομένης του ερωτήματος Γ2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f με $x \geq 1$, την ευθεία (ε), τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = e$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f:(0,2) \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \ln(2-x) - \frac{1}{x} + \kappa, \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{R}$$

για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - 2x}{x - 1} = \ell \in \mathbb{R}..$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 3$.

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < 1 < x_2$ (μονάδες 4) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $x_1 < \frac{1}{3}$ (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Στα παρακάτω ερωτήματα, x_1 και x_2 είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα Δ2.

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο $M(\xi, f(\xi))$, με $\xi \in (0,1)$, στο οποίο η κλίση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f ισούται με

$$\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1}.$$

Μονάδες 6

Δ4. Αν επιπλέον F και G είναι δύο αρχικές συναρτήσεις της συνάρτησης f στο διάστημα $(0,2)$ με $F(x_1)=G(x_2)=0$, να αποδείξετε ότι:

i) $F(x_2)+G(x_1)=0$

(μονάδες 4)

ii) η εξίσωση

$$x_1F(x)+x_2G(x)=x_1+x_2-2x$$

έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα (x_1, x_2).

(μονάδες 5)

Μονάδες 9

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους / τις εξεταζόμενες)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A₁, A₂, A₃ Βλέπε Σχολ. Βιβλίο.

A₄. **α** $\to$ Λάθος
β $\to$ Λάθος
γ $\to$ Λάθος
δ $\to$ Σωστό
ε $\to$ Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B₁. Έχουμε $D_g = R$ και $D_h = (0,+\infty)$.

Θεωρούμε το σύνολο $\Sigma = \{x \in D_h \,/\, h(x) \in D_g\}$. $\begin{cases} x \in D_h \\ \text{και} \\ h(x) \in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \text{και} \\ \ln x \in R \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$.

Άρα $\Sigma = (0,+\infty)$, οπότε ορίζεται η συνάρτηση $f = goh$ με πεδίο ορισμού το Σ και τύπο

$$f(x) = (goh)(x) = g(h(x)) = \frac{4-\left(e^{\ln x}\right)^2}{e^{\ln x}} \Leftrightarrow f(x) = \frac{4-x^2}{x}.$$

B₂. i. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \dfrac{-2x^2-\left(4-x^2\right)}{x^2} \Leftrightarrow f'(x) = -\dfrac{x^2+4}{x^2} < 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$, οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

ii. $\dfrac{4-\pi^2}{4-e^2} > \dfrac{\pi}{e} \overset{4-e^2<0}{\Leftrightarrow} \dfrac{4-\pi^2}{\pi} < \dfrac{4-e^2}{e} \Leftrightarrow f(\pi) < f(e) \overset{f \text{ γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} \pi > e$ **που ισχύει.**

B₃. • $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{1}{x}\left(4-x^2\right)\right] = (+\infty)\cdot 4 = +\infty$.

Άρα η ευθεία με εξίσωση $x = 0$ (ο άξονας $y'y$) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4-x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^2}{x^2} = -1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4}{x}\right) = 0$.

Άρα η ευθεία με εξίσωση $y = -x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

B₄. Έστω $M > 2$. Για κάθε $x > M$ είναι $4 - x^2 < 0$, οπότε $f(x) < 0$.

$$\left|\frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)}\right| = \frac{\left|\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)\right|}{|f(x)|} \le \frac{1}{|f(x)|} = \frac{x}{x^2-4} \Rightarrow \left|\frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)}\right| \le \frac{x}{x^2-4} \Leftrightarrow$$

$-\dfrac{x}{x^2-4} \le \dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)} \le \dfrac{x}{x^2-4}$ (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$. Άρα λόγω της (1) και του κριτηρίου παρεμβολής έχουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)} = 0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ₁. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[2,3]$, οπότε $\int_2^3 xf(x)dx = \int_2^3 (1+\alpha x)dx =$

$\left[x+\alpha\frac{x^2}{2}\right]_2^3 = 3+\frac{9\alpha}{2}-2-2\alpha = 1+\frac{5\alpha}{2}$. Πρέπει $1+\frac{5\alpha}{2}=1 \Leftrightarrow \alpha=0$.

Για $\alpha=0$ είναι $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+3, x<1 \\ \frac{1}{x} \quad ,x\geq 1\end{cases}$.

Γ₂. i. $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}(x-2) = -1$.

$\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(-\frac{1}{x}\right) = -1$.

Αφού $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -1$, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $f'(1)=-1$, που σημαίνει ότι στο σημείο $A(1,f(1))$ ορίζεται εφαπτομένη ε της C_f με συντελεστή διεύθυνσης $f'(1)=-1$.

ii. Είναι $\varepsilon: y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y=-x+2$.

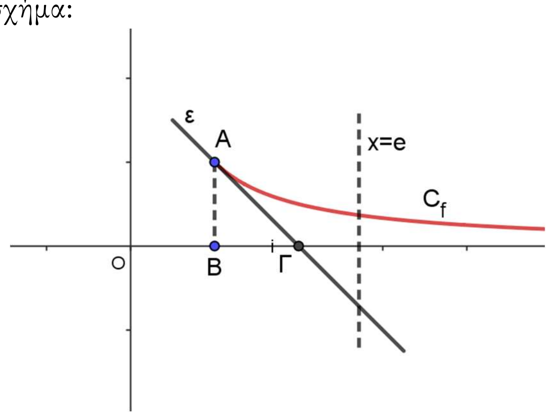
Αν ω είναι η ζητούμενη γωνία τότε: $\begin{cases}\omega\in[0,\pi) \\ \text{και} \\ \varepsilon\varphi\omega = f'(-1)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\omega\in[0,\pi) \\ \text{και} \\ \varepsilon\varphi\omega=-1\end{cases} \Leftrightarrow \omega=\pi-\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \omega=\frac{3\pi}{4}$.

Γ₃. Για $x<1$, $f'(x)=2x-3$. $x<1 \Leftrightarrow 2x<2 \Leftrightarrow 2x-3<-1 \Rightarrow f'(x)<0$.

Για $x>1$, $f'(x)=\frac{-1}{x^2}<0$. Άρα για κάθε $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ $f'(x)<0$ και δεδομένου ότι η f είναι συνεχής στο 1 ως παραγωγίσιμη, είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.Συνεπώς η συνάρτηση f είναι "1-1". $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-3x+3) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα οπότε $f(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right) = (0,+\infty)$

Γ₄. Έχουμε το παρακάτω σχήμα:



Η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\Gamma(2,0)$.

$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}(B\Gamma)(AB)=\frac{1}{2}$ τετρ. μονάδες.

Έστω E_1 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=e$, τότε είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in[1,e]$ και $E_1=\int_1^e f(x)dx=\int_1^e \frac{1}{x}dx=[\ln x]_1^e=1$ τετρ. μονάδες. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E=E_1-(AB\Gamma)\Leftrightarrow E=\frac{1}{2}$ τετρ. μονάδες.

ΘΕΜΑ Δ

Δ₁. Κοντά στο 1 θέτουμε $\frac{f(x)-2x}{x-1}=g(x)\Leftrightarrow f(x)=(x-1)g(x)+2x\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-1+\kappa$. Άρα $-1+\kappa=2\Leftrightarrow \kappa=3$. Έτσι είναι $f(x)=\ln(2-x)-\frac{1}{x}+3, x\in(0,2)$.

Δ₂. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$f'(x)=-\frac{1}{2-x}+\frac{1}{x^2}=\frac{-x^2-x+2}{x^2(2-x)}$. $f'(x)=0\Leftrightarrow x^2+x-2=0 \overset{x\in(0,2)}{\Leftrightarrow} x=1$

Για κάθε $x\in(0,2)$ είναι $x^2(2-x)>0$.

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
$-x^2-x+2$			$+$	0	$-$		
$f'(x)$			$+$	0	$-$		
$f(x)$			$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$		

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$, $f(1)=2$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$, οπότε

$f((0,1])=\left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), f(1)\right]=(-\infty,2]$.

$\lim\limits_{x\to 2^-}\ln(2-x)\overset{2-x=u}{=}\lim\limits_{u\to 0^+}\ln u=-\infty$. Άρα $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[1,2)$, οπότε

$f([1,2))=\left(\lim\limits_{x\to 2^-} f(x), f(1)\right]=(-\infty,2]$.

Επειδή το $0\in f((0,1])$ και $0\in f([1,+\infty))$ και λόγω της μονοτονίας της f, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα $x_1\in(0,1)$ και ακριβώς μία ρίζα $x_2\in(1,2)$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left(0,\frac{1}{3}\right]$. Αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$, υπάρχει ρ με $0<\rho<\frac{1}{3}$ τέτοιο ώστε $f(\rho)<0$. $f\left(\frac{1}{3}\right)=\ln\frac{5}{3}>0$. Συνεπώς $f(\rho)f\left(\frac{1}{3}\right)<0$. Εφαρμόζεται για τη συνάρτηση f το θεώρημα του Bolzano στο $\left[\rho,\frac{1}{3}\right]$, οπότε και λόγω της μονοτονίας της f η εξίσωση $f(x)=0$, έχει μοναδική ρίζα στο $\left(\rho,\frac{1}{3}\right)\subseteq(0,1)$. Όμως στο $(0,1)$ το x_1 είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$,οπότε $\rho<x_1<\frac{1}{3}\Rightarrow 0<x_1<\frac{1}{3}$.

Δ3. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[x_1,\frac{1}{3}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(x_1,\frac{1}{3}\right)$. Σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(x_1,\frac{1}{3}\right)\subseteq(0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f\left(\frac{1}{3}\right)-f(x_1)}{\frac{1}{3}-x_1}\overset{f(x_1)=0}{\Leftrightarrow} f'(\xi)=\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}\ (1).$$

$f''(x)=-\left(\frac{1}{(2-x)^2}+\frac{2}{x^3}\right)<0$ για κάθε $x\in(0,2)$. Η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Η (1) και η μονοτονία της f' εξασφαλίζει το ζητούμενο.

Δ4. i. Ισχύει $F(x)=G(x)+c$ (2) για κάθε $x\in(0,2)$, με c σταθερό πραγματικό αριθμό.

Για $x=x_1$ $(2)\Rightarrow F(x_1)=G(x_1)+c\Leftrightarrow c=-G(x_1)$.

Για $x=x_2$ $(2)\Rightarrow F(x_2)=G(x_2)+c\Leftrightarrow c=F(x_2)$. Άρα $F(x_2)=-G(x_1)\Leftrightarrow$ $F(x_2)+G(x_1)=0$

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=x_1F(x)+x_2G(x)+2x-x_1-x_2\,,x\in[x_1,x_2]$.

• Οι συναρτήσεις F,G ως παραγωγίσιμες είναι συνεχείς, οπότε η h είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

• $h(x_1)=x_1F(x_1)+x_2G(x_1)+x_1-x_2\Leftrightarrow h(x_1)=x_2G(x_1)+x_1-x_2$.

$h(x_2)=x_1F(x_2)+x_2G(x_2)+x_2-x_1\Leftrightarrow h(x_2)=x_1F(x_2)+x_2-x_1\overset{(i)}{\Leftrightarrow}h(x_2)=-x_1G(x_1)+x_2-x_1$

Για κάθε $x\in(x_1,x_2)$ είναι $f(x)\neq 0$ και δεδομένου ότι η f είναι συνεχής στο (x_1,x_2) , στο διάστημα αυτό διατηρεί σταθερό πρόσημο και αφού $f(1)>0$, έχουμε $f(x)>0$ για κάθε $x\in(x_1,x_2)$

Για κάθε $x\in(x_1,x_2)$ $G'(x)=f(x)>0$ και αφού η G είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_1,x_2]$. Άρα $x_1<x_2\Rightarrow G(x_1)<G(x_2)=0\Rightarrow G(x_1)<0$.

Άρα $h(x_1)<0$ και $h(x_2)>0$. Έτσι είναι $h(x_1)h(x_2)<0$. Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0\Leftrightarrow$ $x_1F(x_0)+x_2G(x_0)=x_1+x_2-2x_0$.

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x)=x_1F'(x)+x_2G'(x)+2=x_1f(x)+x_2f(x)+2\Leftrightarrow$ $h'(x)=(x_1+x_2)f(x)+2>0$ για κάθε $x\in[x_1,x_2]$. Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα, οπότε το x_0 είναι μοναδικό.