ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΤΕΤΑΡΤΗ 16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 4

Α3. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Ισχύει $|\eta\mu x|<|x|$, για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

β) Για οποιαδήποτε αντιστρέψιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A ισχύει ότι $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$, για κάθε $x\in A$.

γ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.

δ) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

ε) Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α,β], τότε η f παίρνει στο [α,β] μια μέγιστη τιμή, Μ, και μια ελάχιστη τιμή, m.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x+1)=(x+1)\cdot e^{-x}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να δείξετε ότι $f(x)=x\cdot e^{1-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 3

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

Β3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα, τα σημεία καμπής και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης, αν υπάρχουν.

Μονάδες 9

Β4. Να βρείτε:

(i) το σύνολο τιμών της συνάρτησης f (μονάδες 4).

(ii) το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\lambda$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ (μονάδες 3).

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\alpha x^3-3x^2-x+1, & x\le 0\\ \text{συν}x, & 0<x\le\frac{3\pi}{2}\end{cases}$, με $\alpha<-3$.

Γ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της (μονάδες 3) αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Γ2. (i) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί καθεμιά από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ (μονάδες 3).

(ii) Να βρεθεί το μοναδικό $\xi\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi)=0$ (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Γ3. Να δείξετε ότι στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Μονάδες 6

Γ4. Να δείξετε ότι $f(x) \geq -1$, για κάθε $x \in \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\ell n x = \frac{1}{x} \qquad (1)$$

έχει μοναδική ρίζα, x_0, η οποία ανήκει στο (1, e).

Μονάδες 4

Στα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης (1) και η συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ έχει τύπο $f(x) = \left(\ell n x_0\right) \cdot (x+1) - \ell n x - 1$.

Δ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0, το $f(x_0) = 0$.

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$g(x) = x \cdot e^{-x}, \;\; x \in \mathbb{R} \qquad \text{και} \qquad h(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}, \;\; x \in \mathbb{R}$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

Μονάδες 8

Δ4. Έστω η συνάρτηση $\varphi:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, συνεχής, με $f(x) > \varphi(x)$, για κάθε $x > 0$. Θεωρούμε τα σημεία $A\left(x, f(x)\right)$ και $B\left(x, \varphi(x)\right)$, με $x > 0$. Αν η απόσταση των σημείων Α και Β γίνεται ελάχιστη στο $x = x_0$, να δείξετε ότι το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης φ.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Ε Ν Δ Ε Ι Κ Τ Ι Κ Ε Σ Α ΠΑ Ν Τ Η Σ Ε Ι Σ

ΘΕΜΑ Α

Α1 , Α2 , Α3: Βλέπε σχολικό βιβλίο.

Α4. $\alpha \rightarrow$ Σωστό
$\beta \rightarrow$ Λάθος
$\gamma \rightarrow$ Σωστό
$\delta \rightarrow$ Σωστό
$\varepsilon \rightarrow$ Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Θέτουμε $x+1=\omega \Leftrightarrow x=\omega-1, \omega \in R$. Άρα $f(\omega)=\omega e^{1-\omega} \Leftrightarrow f(x)=xe^{1-x}, x \in R$.

Β2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με $f'(x)=e^{1-x}-xe^{1-x} \Leftrightarrow f'(x)=e^{1-x}(1-x)$.

$$f'(x)=0 \overset{e^{1-x}>0}{\Leftrightarrow} 1-x>0 \Leftrightarrow x<1$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(1)$ ολ.μέγ.	$\searrow$	

Στο $(-\infty,1]$ η f είναι γνησίως αύξουσα και στο $[1,+\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα. Για $x=1$ η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f(1)=1$.

Β3. Η f' είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με $f''(x)=\cdots=e^{1-x}(x-2)$.

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=2$, $f''(x)>0 \Leftrightarrow x>2$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\frown$	$f(2)$ Σ.Κ	$\smile$	

Στο $(-\infty,2]$ η f είναι κοίλη και στο $[2,+\infty)$ είναι κυρτή. Το σημείο $A(2,f(2))=\left(2,\frac{2}{e}\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f.

Η f είναι συνεχής στο R, οπότε η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{1-x}\underset{u\to+\infty}{\overset{1-x=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}e^{u}=+\infty$. Άρα στο $-\infty$ η C_f δεν έχει ασύμπτωτες.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{1-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x-1}}\underset{L.H.P}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{\left(e^{x-1}\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x-1}}=0$. Άρα η ευθεία y=0 (άξονας $x'x$) είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Β4. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{1-x}\right)=(-\infty)(+\infty)=-\infty$**.** Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,1]$,οπότε $f((-\infty,1])=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),f(1)\right]=(-\infty,1]$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$, οπότε

$f([1,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),f(1)\right]=(0,1]$.

Το σύνολο τιμών της f είναι $f(R)=(-\infty,1]\cup(0,1]=(-\infty,1]$.

Αν το λ ανήκει σε κάποια από τις παραπάνω εικόνες των διαστημάτων μονοτονίας, δηλαδή είναι τιμή της f , τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει ακριβώς μία ρίζα (λόγω της μονοτονίας) στο αντίστοιχο διάστημα μονοτονίας.

- Αν $\lambda\le0$, η εξίσωση έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(-\infty,1]$.
- Αν $0<\lambda<1$, η εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες μία στο $(-\infty,1)$ και μία στο $(1,+\infty)$.
- Αν $\lambda=1$, η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα το 1 .
- Αν $\lambda>1$, η εξίσωση είναι αδύνατη.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση f για κάθε τιμή του $\alpha<-3$ στο διάστημα $(-\infty,0)$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική. Επίσης στο $(0,+\infty)$ η f είναι συνεχής ως τριγωνομετρική.

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\alpha x^3-3x^2-x+1\right)=1=f(0)$.

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}$ συνx=1=$f(0)$. Άρα $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$,οπότε η f είναι συνεχής στο 0. Συνεπώς η f είναι συνεχής στο $\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right]$.

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\alpha x^3-3x^2-x}{x}=\lim_{x\to0^-}\left(\alpha x^2-3x-1\right)=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0.$$

Επειδή $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$, η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Γ2. i. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$.

$f(0)=1$ και $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$. Αφού $f(0)\neq f(1)$ δεν εφαρμόζεται για την f στο $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ το θεώρημα του Rolle.

ii. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ με $f'(x)=-\eta\mu x$

Επιπλέον $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$. Εφαρμόζεται για την f στο $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ το θεώρημα του Rolle, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)\subseteq\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0\Leftrightarrow -\eta\mu\xi=0\Leftrightarrow$

$\eta\mu\xi=0 \overset{\xi\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow} \xi=\pi$.

Στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ είναι $f'(x)=-\eta\mu x<0$. Άρα το $\xi=\pi$ είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f'(x)=0$ στο $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$.

Γ3. Στο $(-\infty,0)$ έχουμε $f'(x)=3\alpha x^2-6x-1$. Το τριώνυμο $3\alpha x^2-6x-1$ έχει διακρίνουσα $\Delta=36+12\alpha=12(3+\alpha)<0$ αφού $\alpha<-3$.Άρα για κάθε $x\in(-\infty,0)$ είναι $f'(x)<0$, οπότε δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τεταγμένη στα οποία η εφαπτομένη της C_f να δέχεται εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Γ4. Κάνοντας χρήση των παραπάνω ερωτημάτων έχουμε $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,\pi)$ και δεδομένου ότι η f είναι συνεχής έχουμε ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\pi]$. Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας της f.

x	$-\infty$		0		π		$\frac{3\pi}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$		
$f(x)$			↘		$f(\pi)$ ολ.ελαχ.	↗	$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ τοπ.μεγ.	

Αφού για $x=\pi$ η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, έχουμε $f(x)\geq f(\pi)\Leftrightarrow f(x)\geq -1$ για κάθε $x\in\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right]$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $t(x)=\ln x-\frac{1}{x}, x>0$.

- Η συνάρτηση t είναι συνεχής στο $[1,e]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
- $t(1)=-1<0$ και $t(e)=1-\frac{1}{e}>0$. $t(1)t(e)<0$. Σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(1,e)$ τέτοιο ώστε $t(x_0)=0\Leftrightarrow \ln x_0=\frac{1}{x_0}$.

Η συνάρτηση t είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με $t'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0$. Άρα η t είναι γνησίως αύξουσα οπότε το x_0 είναι μοναδικό.

Δ2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\ln x_0-\frac{1}{x}$.

Σύμφωνα με το Δ_1 είναι $f'(x_0)=0$. $f''(x)=\frac{1}{x^2}>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Για $0<x<x_0\Rightarrow f'(x)<f'(x_0)\Leftrightarrow f'(x)<0$. Για $x>x_0\Rightarrow f'(x)>f'(x_0)\Leftrightarrow f'(x)>0$. Δεδομένου ότι η f είναι συνεχής, για $x=x_0$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το

$$f(x_0)=(\ln x_0)(x_0+1)-\ln x_0-1=(\ln x_0)x_0-1=x_0\left(\ln x_0-\frac{1}{x_0}\right)\overset{(\Delta_1)}{=}0.$$

Δ3. Αν $x\leq 0$ είναι $g(x)\leq 0$ και $h(x)>0$, οπότε στην περίπτωση αυτή οι C_g, C_h δεν έχουν κοινό σημείο με τετμημένη στο $(-\infty,0]$.

Αν $x>0$ $g(x)=h(x)\Leftrightarrow xe^{-x}=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\Leftrightarrow xe^{-x}=\frac{x_0^{x+1}}{e^{x+1}}\Leftrightarrow xe=x_0^{x+1}\Leftrightarrow \ln(xe)=\ln x_0^{x+1}\Leftrightarrow$

$\ln x+1=(\ln x_0)(x+1)\Leftrightarrow f(x)=0$. Επειδή το 0 είναι ολικό ελάχιστο της f έχουμε $f(x)=0\Leftrightarrow x=x_0$.

Άρα οι C_g, C_h έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο το $A\left(x_0, x_0e^{-x_0}\right)$;

$g'(x)=e^{-x}-xe^{-x}\Rightarrow g'(x_0)=e^{-x_0}(1-x_0)$.

$$h'(x)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\ln\frac{x_0}{e}\Rightarrow h'(x_0)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}\ln\frac{x_0}{e}\overset{g(x_0)=h(x_0)}{\Leftrightarrow} h'(x_0)=x_0e^{-x_0}(\ln x_0-1).$$

Έχουμε $f(x_0)=0\Leftrightarrow(\ln x_0)(x_0+1)-\ln x_0-1=0\Leftrightarrow(\ln x_0)x_0=1$.

Σύμφωνα με την τελευταία ισότητα $h'(x_0)=e^{-x_0}(x_0\ln x_0-x_0)=e^{-x_0}(1-x_0)\Leftrightarrow$

$h'(x_0)=g'(x_0)$ (1). Από το γεγονός ότι το σημείο με τετμημένη x_0 είναι κοινό σημείο των C_g, C_h, η (1) μας κατοχυρώνει ότι στο σημείο $A\left(x_0, x_0e^{-x_0}\right)$ ορίζεται κοινή εφαπτομένη των C_g, C_h.

Δ4. • Αν η συνάρτηση φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (0,+\infty)$, τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ στο $(0,+\infty)$.

• Αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Sigma(x)=f(x)-\varphi(x), x\in(0,+\infty)$.

Η συνάρτηση Σ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $\Sigma'(x_0)=f'(x_0)-\varphi'(x_0) \overset{f'(x_0)=0}{\Leftrightarrow} \Sigma'(x_0)=-\varphi'(x_0)$

Στο x_0 η συνάρτηση Σ σύμφωνα με την υπόθεση παρουσιάζει ελάχιστο.

Έτσι σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat είναι $\Sigma'(x_0)=0 \Leftrightarrow \varphi'(x_0)=0$. Δηλαδή το x_0 είναι κρίσημο σημείο τη φ στο $(0,+\infty)$.

Άρα σε κάθε περίπτωση το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ στο $(0,+\infty)$.