ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΤΕΤΑΡΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$,

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_o \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_o) = \eta$.

Μονάδες 7

Α2. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Για κάθε συνάρτηση f, ορισμένη, παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ισχύει $f'(x) > 0$».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**.

(μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α)**.

(μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x^{2\nu+1}} \right) = +\infty$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

β) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B, αντίστοιχα, τότε η $g \circ f$ ορίζεται, αν $f(A) \cap B \neq \varnothing$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$ έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

δ) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι πάντα διάστημα.

ε) Δίνεται ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα $x'x$. Αν υπάρχει κάποιο σημείο $A(x_o, f(x_o))$ της C_f, του οποίου η απόσταση από τον άξονα $x'x$ είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$f:(1, +\infty) \to \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ και

$g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με τύπο $g(x) = e^x$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

Μονάδες 5

Β2. Αν $(f \circ g)(x) = \dfrac{e^x + 2}{e^x - 1}$, με $x > 0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι ‘1-1’ και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 8

Β3. Αν $\varphi(x) = (f \circ g)^{-1}(x) = \ell n\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$, με $x > 1$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 6

Β4. Αν φ είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **Β3**, να βρεθούν τα όρια

$$\lim_{x \to 1^+} \varphi(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) .$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} - \ell n\lambda , & x \le 0 \\ \eta\mu x + \lambda\sigma\upsilon\nu x , & 0 < x < \dfrac{3\pi}{2} \end{cases} \quad , \text{ με } \lambda > 0 .$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, 1)$, η οποία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ίση με $\frac{\pi}{4}$.

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Γ4. Ένα σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$, με $\alpha \le 0$, κινείται στη γραφική παράσταση της f. Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t) = -\frac{\alpha(t)}{3}$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο M τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο B. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου B τη χρονική στιγμή t_o, κατά την οποία το σημείο M έχει τετμημένη -1.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^x + x^2 - ex - 1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_o \in (0, 1)$, στο οποίο η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι

$$f(x_o) = x_o^{\,2} - (e+2)x_o + e - 1.$$

Μονάδες 7

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \to x_o} \left[\frac{1}{f(x) - f(x_o)} + \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_o} \right) \right],$$

όπου x_o το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

Μονάδες 6

Δ3. Αν x_o είναι το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + x = x_o$ για $x \in (x_o, 1)$ έχει μοναδική ρίζα ρ.

Μονάδες 5

Δ4. Αν x_o είναι το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και ρ είναι η ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος **Δ3**, να αποδείξετε ότι $f(x_o) > f(\rho)\,(f'(k) + 1)$ για κάθε $k \in (\rho, 1)$.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΤΙΚΩΝ (ΝΕΟ) 2020

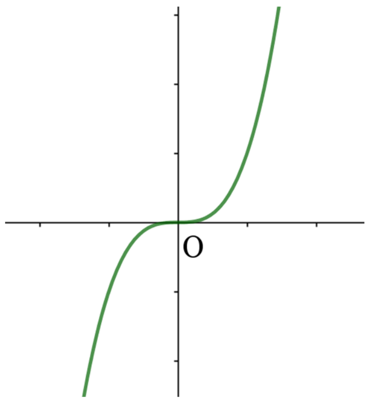
ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 76 .

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 104 .

A4. **α.** Ψ.

β. Αντιπαράδειγμα: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^3, x\in R$.



Η f είναι γνησίως αύξουσα και παραγωγίσιμη με $f'(x)=3x^2\geq 0$.
Το $"="$ ισχύει για $x=0$.

A4. **α.** Λάθος

β. Σωστό

γ. Σωστό

δ. Σωστό

ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. Θεωρούμε το σύνολο $\Sigma=\{x\in D_g / g(x)\in D_f\}$.

$$\begin{cases} x\in D_g \\ \text{και} \\ g(x)\in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in R \\ \text{και} \\ e^x>1 \Leftrightarrow e^x>e^0 \Leftrightarrow x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>0$$

.Άρα $\Sigma=(0,+\infty)$,οπότε ορίζεται η συνάρτηση fog με πεδίο ορισμού το $\Sigma=(0,+\infty)$ και τύπο $(fog)(x)=f(g(x))=\dfrac{g(x)+2}{g(x)-1}\Leftrightarrow$

$$(fog)(x)=\frac{e^x+2}{e^x-1} \ .$$

B2. Η συνάρτηση fog είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$(fog)'(x) = ... = -\frac{3e^x}{(e^x-1)^2} < 0$.Άρα η fog είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε είναι “1-1” και επομένως αντιστρέφεται.

$\lim\limits_{x\to 0^+}(fog)(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{e^x-1}(e^x+2)\right]$. Για κάθε $x > 0 \Rightarrow e^x - 1 > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{e^x-1} = +\infty$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}(fog)(x) = (+\infty).2 = +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}(fog)(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{e^x}}{1-\frac{1}{e^x}} = 1$$,αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0$.

Η συνάρτηση fog είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα οπότε το σύνολο τιμών της είναι

$$(fog)((0,+\infty)) = \left(\lim_{x\to+\infty}(fog)(x), \lim_{x\to 0^+}(fog)(x)\right) = (1,+\infty) .$$

Για $x > 0$ και $y > 1$ έχουμε $(fog)(x) = y \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow (y-1)e^x = y+2 \Leftrightarrow e^x = \frac{y+2}{y-1} \Leftrightarrow$

$x = \ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right)$.Άρα $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right), x \in (1,+\infty)$.

B3. $\varphi(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right), x > 1$.

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $\varphi'(x) = \frac{x-1}{x+2}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)' = ... = -\frac{3}{(x+2)(x-1)} < 0$ για κάθε $x \in (1,+\infty)$.Άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα.

B4. • Κοντά στο 1 από μεγαλύτερες τιμές θέτουμε $\frac{x+2}{x-1} = u$.

$\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x+2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\left[\frac{1}{x-1}(x+2)\right] = (+\infty).3 = +\infty$.Άρα $u \to +\infty$.

$\lim\limits_{x\to 1^+}\varphi(x) = \lim\limits_{u\to+\infty}\ln u = +\infty$.

• Κοντά στο $+\infty$ θέτουμε $\frac{x+2}{x-1} = \omega$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x} = 1$.Άρα $\omega \to 1^+$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = \lim\limits_{\omega\to 1^+}\ln\omega = 0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η f είναι συνεχής θα είναι συνεχής και στο 0 δηλαδή $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.

$f(0) = 1 - \ln\lambda$. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{1-x} - \ln\lambda\right) = 1 - \ln\lambda = f(0)$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(\eta\mu x + \lambda\sigma\upsilon\nu x) = \lambda$.Πρέπει $1 - \ln\lambda = \lambda$ (1).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \ln x + x - 1, x > 0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$.Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα οπότε είναι "1-1".

$(1) \Leftrightarrow g(\lambda) = 0 \Leftrightarrow g(\lambda) = g(1) \Leftrightarrow \lambda = 1$.

Γ2. Είναι $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & ,x \le 0 \\ \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$.

$f(0) = 1$. $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{1-x} - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{1-x} = 1$.

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}\right) = 1 + 0 = 1$.Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 1$,οπότε στο σημείο $A(0,1) \in C_f$ ορίζεται εφαπτομένη ε της C_f με συντελεστή διεύθυνσης $f'(0) = 1$.Έστω ω η γωνία που σχηματίζει η ε με τον άξονα $x'x$,τότε $\varepsilon\varphi\omega = f'(0) = 1 \overset{\omega\in[0,\pi)}{\Leftrightarrow} \omega = \frac{\pi}{4}$

Γ3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της $\left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Αν η f έχει κρίσιμα σημεία αυτά θα αναζητηθούν στα σημεία μηδενισμού της f' .

Για κάθε $x \in (-\infty, 0]$ $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} > 0$.

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$.Για $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x$ (2).

Το $\frac{\pi}{2}$ δεν είναι ρίζα της (2) .Άρα για $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ $(2) \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ \text{ή} \\ x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \end{cases}$,

Συνεπώς η f έχει δύο κρίσιμα σημεία τα $\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$.

Γ4. Για κάθε $x \in (-\infty,0]$ $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Έστω ε_1 η εφαπτομένη της C_f στο M ,τότε $\varepsilon_1 : y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha)$ (3).

Για $y=0$ $(3) \Rightarrow -\frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}(x-\alpha) \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x = 2\alpha - 1$.Άρα $B(2\alpha-1,0)$.

Τη τυχαία χρονική στιγμή t έχουμε $x(t) = 2\alpha(t) - 1 \Rightarrow x'(t) = 2\alpha'(t) \Leftrightarrow x'(t) = -\frac{2}{3}\alpha(t)$.

Τη χρονική στιγμή t_0 έχουμε $\alpha(t_0) = -1$.Άρα ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής είναι

$x'(t_0) = \frac{2}{3}\frac{\text{μονάδες}}{\text{χρόνο}}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = e^x + 2x - e$.

- Η f' είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- $f'(0) = 1 - e < 0, f'(1) = 2 > 0$,οπότε $f'(0)f'(1) < 0$.

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.

Για κάθε $x \in R$ $f''(x) = e^x + 2 > 0$.Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Για $x < x_0 \Rightarrow f'(x) < f'(x_0) \Rightarrow f'(x) < 0$.Για $x > x_0$ $f'(x) > f'(x_0) \Rightarrow f'(x) > 0$.Άρα στο x_0 η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Προφανώς το x_0 είναι μοναδικό.

$f(x_0) = e^{x_0} + x_0^2 - ex_0 - 1$ και $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} + 2x_0 - e = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = -2x_0 + e$.

Άρα $f(x_0) = -2x_0 + e + x_0^2 - ex_0 - 1 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0^2 - (e+2)x_0 + e - 1$.

Δ2. 1ος τρόπος: Από το Δ1 έχουμε $f(x)\ge f(x_0)$ για κάθε $x\in R$.

Κοντά στο x_0 είναι $f(x)>f(x_0)\Leftrightarrow f(x)-f(x_0)>0$ (1).

Κοντά στο x_0 $ημ\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\ge -1\Leftrightarrow \frac{1}{f(x)-f(x_0)}+ημ\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\ge -1+\frac{1}{f(x)-f(x_0)}$ (2).

Η f είναι συνεχής στο x_0 ,οπότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0$ και λόγω της (1) έχουμε $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)-f(x_0)}=+\infty\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\left(-1+\frac{1}{f(x)-f(x_0)}\right)=+\infty$ και λόγω της (2) παίρνουμε

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)}+ημ\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right]=+\infty .$$

2ος τρόπος

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)}+ημ\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right]=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)}\left(1+\left(f(x)-f(x_0)\right)ημ\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right)\right]=A$$

Κοντά στο x_0 $\left|\left(f(x)-f(x_0)\right)ημ\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right|=\left|f(x)-f(x_0)\right|\left|ημ\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right|\le\left|f(x)-f(x_0)\right|\Leftrightarrow$

$\left|\left(f(x)-f(x_0)\right)ημ\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right|\le f(x)-f(x_0)\Leftrightarrow$

$-\left(f(x)-f(x_0)\right)\le\left(f(x)-f(x_0)\right)ημ\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\le f(x)-f(x_0)$.Επειδή $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0$ από το κριτήριο της παρεμβολής παίρνουμε $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\left(f(x)-f(x_0)\right)ημ\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right]=0$.Δεδομένου ότι

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)-f(x_0)}=+\infty$ θα έχουμε $A=+\infty$.

Δ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $φ(x)=f(x)+x-x_0, x\in[x_0,1]$.

- Η $φ$ είναι συνεχής στο $[x_0,1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- $φ(x_0)=f(x_0)$.Από το Δ1 στο $[x_0,+\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα ,οπότε $x_0<1\Rightarrow f(x_0)<f(1)=0\Rightarrow φ(x_0)<0$, $φ(1)=f(1)+1-x_0\Leftrightarrow φ(1)=1-x_0>0$.

Άρα $φ(x_0)φ(1)<0$. Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $ρ\in(x_0,1)$ τέτοιο ώστε $φ(ρ)=0\Leftrightarrow f(ρ)+ρ=x_0$.

Για κάθε $x \in (x_0,1)$, $\varphi'(x) = f'(x)+1>0$ που σημαίνει ότι η φ στο $(x_0,1)$ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε το ρ είναι μοναδικό.

Δ4. Από το Δ3 έχουμε $f(\rho) = x_0 - \rho < 0$.

Η f είναι συνεχής στο $[x_0,\rho]$ και παραγωγίσιμη στο (x_0,ρ) .Σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_0,\rho)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(\rho)-f(x_0)}{\rho - x_0} \Leftrightarrow f'(\xi) = \dfrac{f(x_0)-f(\rho)}{f(\rho)}$.

Από το Δ1 η f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε για κάθε $k \in (\rho,1)$ έχουμε $x_0 < \xi < \rho < k \Rightarrow$

$$f'(\xi) < f'(k) \Leftrightarrow \frac{f(x_0)-f(\rho)}{f(\rho)} < f'(k) \overset{f(\rho)<0}{\Leftrightarrow} f(x_0)-f(\rho) > f(\rho)f'(k) \Leftrightarrow f(x_0) > f(\rho)\left(f'(k)+1\right) .$$