ΤΟ ΠΕΡΑΣΜΑ ΤΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΏΝ ΚΑΤΑ-ΣΚΕΥΩΝ ΜΕ ΚΑΝΟΝΑ ΚΑΙ ΔΙΑΒΗΤΗ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΦΗΡΗΜΕΝΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Τα Μαθηματικά σε μια Ιστορική και Φιλοσοφική προοπτική.

Γιαννακόπουλος Σπύρος

mail: giannakopulos10@gmail.com

Περίληψη

Η παρούσα εργασία χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος γίνεται αναφορά στην έννοια του κατασκευάσιμου σημείου με κανόνα και διαβήτη και γενικότερα στην κατασκευή με κανόνα και διαβήτη ενός αριθμού.
Στο δεύτερο μέρος συνοπτικά με τη βοήθεια της επέκτασης σωμάτων δίνεται απάντηση στο αδύνατο της κατασκευής με κανόνα και διαβήτη: α) Κύβου με διπλάσιο όγκο δοθέντος κύβου (Δήλιο πρόβλημα) β) Τριχοτόμηση δοθείσας γωνίας γ) Τετραγωνισμού του κύκλου.

Λέξεις-Κλειδιά: Κατασκευάσιμα σημεία-Επεκτάσεις σωμάτων-Διπλασιασμός κύβου-Τριχοτόμηση γωνίας- Τετραγωνισμός κύκλου.

Abstract

The present project is divided into two parts. The first part is referred to the concept of the constructive point with rule and diabetes, and to the construction of a number with rule and diabetes as well.
In the second part, the answer to the impossibility of construction with a rule and diabetes is briefly given, using the body extension: a) Cube with a double volume of given cube (Delion problem) b) Trichotomy of a given angle c) Squaring the circle.

Key-Words: Constructive points-Body extentions-Doubling of a cude-Trichotomy of an angle-Squaring the circle.

Εισαγωγή
Ο Πλάτωνας θεωρούσε ότι η γεωμετρία και τα μαθηματικά ήταν ο μόνος ασφαλής δρόμος για να προσεγγίσει κανείς τον κόσμο των ιδεών και τον Θεό. Εικάζεται ότι πίστευε, ότι τα μόνα όργανα που επέτρεπε ο Θεός να χρησιμοποιηθούν για την κατασκευή σχημάτων ήταν ο κανόνας και ο διαβήτης. Ο κανόνας για την κατασκευή ευθειών καθώς η ευθεία αντιπροσώπευε το “ανθρώπινο” και ο διαβήτης για την κατασκευή κύκλων καθώς ο κύκλος αντιπροσώπευε το “θείον”. Με τον περιορισμό αυτό οι αρχαίοι Έλληνες δεν κατάφεραν να λύσουν τα προβλήματα που έμειναν στην ιστορία σαν “Τα άλυτα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας” που είναι ο διπλασιασμός του όγκου κύβου δοσμένης ακμής, ο τετραγωνισμός κύκλου και η τριχοτόμηση τυχαίας γωνίας θ.
Οι αρχαίοι Έλληνες βρήκαν λύσεις για αυτά τα προβλήματα για τα οποία όμως χρησιμοποιούσαν και άλλα εργαλεία. Για παράδειγμα ο Εύδοξος ο Κνίδιος (408-355π.Χ.) χρησιμοποίησε μία πολυωνυμική καμπύλη τετάρτου βαθμού για τον διπλασιασμό του κύβου, ο Αρχιμήδης (287-212 π.Χ.) χρησιμοποίησε την έλικα για να τετραγωνίσει τον κύκλο και ο Ιππίας ο Ηλείος (4ος αιώνας π.Χ.) για την τριχοτόμηση γωνίας χρησιμοποίησε την τετραγωνίζουσα,μία μη αλγεβρική καμπύλη.
Η απάντηση τελικά δόθηκε τον $19^{ο}$ αιώνα από την άλγεβρα μέσω της έννοιας του αλγεβρικού αριθμού και της επέκτασης σωμάτων.

1. Κατασκευάσιμα σημεία στο επίπεδο

1.1. Έχουμε : **α.** Στο καρτεσιανό επίπεδο τα σημεία $\mathrm{O}(0,0)$ και $\mathrm{I}(1,0)$ (βασικά σημεία) και το σύνολό τους $\Sigma_0=\{(0,0),(1,0)\}$.
β. Κανόνα (μη βαθμολογημένος χάρακας).
γ. Διαβήτη.

Επιτρέπεται να φτιάχνουμε με τον κανόνα ευθείες από δύο δεδομένα σημεία που προκύπτουν από το Σ_0 (κατασκευάσιμες ευθείες) καθώς επίσης με το διαβήτη κύκλους με δεδομένο κέντρο που προκύπτει από το Σ_0 και δεδομένη ακτίνα ρ ,την απόσταση δύο σημείων που προκύπτουν από το Σ_0 (κατασκευάσιμοι κύκλοι).
Στα παρακάτω όταν αναφερόμαστε σε κατασκευή, εννοούμε ότι θα γίνεται χρήση μόνο του κανόνα και του διαβήτη ξεκινώντας από το Σ_0 κατασκευάζοντας ευθείες ή κύκλους όπως αναφέραμε παραπάνω.

1.1.1 Ορισμός: Στοιχειώδης κατασκευή σημείου στο επίπεδο είναι οποιοδήποτε σημείο που προκύπτει:
α. Από την τομή δύο κατασκευάσιμων ευθειών.
β. Από την τομή κατασκευάσιμης ευθείας και κατασκευάσιμου κύκλου.
γ. Από την τομή δύο κατασκευάσιμων κύκλων.

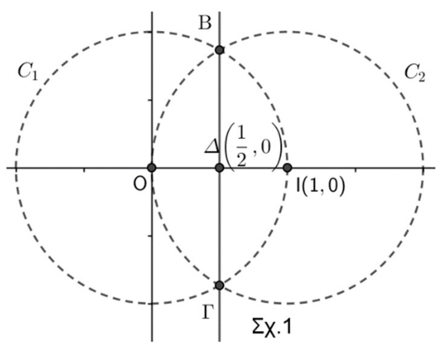
1.1.2. Ορισμός: Ένα σημείο P είναι κατασκευάσιμο αν υπάρχει μια πεπερασμένη ακολουθία στοιχειωδών κατασκευών που τερματίζει επισυνάπτοντας το P.

Παράδειγμα

Κατασκευή του μέσου του τμήματος ΟΙ με $\mathrm{O}(0,0)$ και $\mathrm{I}(1,0)$.

Βήμα 1ο: Ο άξονας $x'x$ ορίζεται από τα σημεία O, I ,άρα είναι κατασκευάσιμη ευθεία με εξίσωση $x=0$.

Βήμα 2ο: Με κέντρο το $\mathrm{O}(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$ κατασκευάζουμε κύκλο C_1



Σχ.1

Η εξίσωση του C_1 είναι $x^2+y^2=1$.

Βήμα 3ο: Με κέντρο το $\mathrm{I}(1,0)$ και ακτίνα $\rho=1$ κατασκευάζουμε κύκλο C_2. Η εξίσωση του C_2 είναι:

$$(x-1)^2+y^2=1.$$

Βήμα 4ο: Οι κύκλοι C_1, C_2 τέμνονται στα σημεία $\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \Gamma\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (κατασκευάσιμα σημεία που προκύπτουν από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων των C_1, C_2),τα οποία ορίζουν την ευθεία ΒΓ (κατασκευάσιμη ευθεία) που είναι η μεσοκάθετος του τμήματος ΟΙ[1].

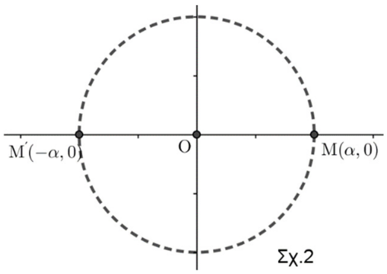
Βήμα 5ο: Η εξίσωση της ευθείας ΒΓ είναι $x=\frac{1}{2}$. Η τομή της ευθείας ΒΓ με τον άξονα $x'x$ μας δίνει το μέσο $\Delta\left(\frac{1}{2},0\right)$ του ΟΙ. Άρα το σημείο $\Delta\left(\frac{1}{2},0\right)$ είναι κατασκευάσιμο σημείο.

[1] Σχ. βιβλίο «Ευκλείδεια Γεωμετρία» Α-Β Λυκείου έκδοση 2014 "Κατασκευή μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος" (σελ.73).

1.1.3 Ορισμός: Ο πραγματικός αριθμός α είναι κατασκευάσιμος αν και μόνο αν το σημείο $M(\alpha,0)$ είναι κατασκευάσιμο.

- **Το σημείο $P(\alpha,\beta)$ είναι κατασκευάσιμο αν και μόνο αν είναι κατασκευάσιμα τα σημεία $M(\alpha,0)$ και $N(\beta,0)$.**

Παρατήρηση: Αν ο θετικός αριθμός α είναι κατασκευάσιμος, τότε και ο $-\alpha$ είναι κατασκευάσιμος.

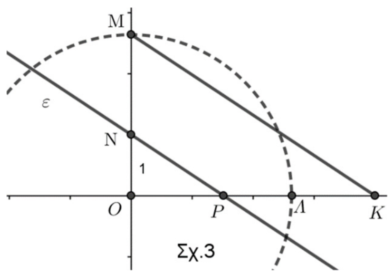


Πράγματι: Το σημείο $M(\alpha,0)$ είναι κατασκευάσιμο. Με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=(OM)=\alpha$ κατασκευάζουμε κύκλο. Το δεύτερο σημείο τομής του άξονα $x'x$ με τον κύκλο (O,ρ), δηλαδή το σημείο $M'(-\alpha,0)$ είναι κατασκευάσιμο, οπότε ο αριθμός $-\alpha$ είναι κατασκευάσιμος.

1.1.4 Πρόταση: Κάθε ρητός αριθμός α είναι κατασκευάσιμος.

Απόδειξη

- Αν ο α είναι ακέραιος με $\alpha\neq 0$ (ο $\alpha=0$ είναι κατασκευάσιμος),τότε κατασκευάζουμε με τη βοήθεια του διαβήτη στον άξονα $x'Ox$ τμήμα μήκους $|\alpha|$ με επανάληψη του μοναδιαίου τμήματος, οπότε κατασκευάζεται το σημείο $(|\alpha|,0)$. Άρα κατασκευάζεται και το σημείο $(\alpha,0)$, οπότε ο α είναι κατασκευάσιμος.



- Αν $\alpha=\dfrac{\mu}{\nu}$ όπου μ,ν θετικοί ακέραιοι με $\mu\neq\nu,\nu\neq 1$ και $(\mu,\nu)=1$,τότε στον θετικό ημιάξονα Ox με τη βοήθεια του διαβήτη επαναλαμβάνουμε το μοναδιαίο τμήμα και κατασκευάζουμε το τμήμα OK με $(OK)=\mu$ και το τμήμα $O\Lambda$ με $(O\Lambda)=\nu$ Κατασκευάζουμε κύκλο με κέντρο το O και ακτίνα $\rho=\nu$ που τέμνει το θετικό ημιάξονα Oy στο σημείο M. Άρα είναι $(OM)=\nu$. Όμοια στον ημιάξονα Oy κατασκευάζουμε το σημείο N με $(ON)=1$. Από το N κατασκευάζουμε ευθεία ε παράλληλη στο τμήμα MK [2] που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο P. Άρα το P είναι κατασκευάσιμο.

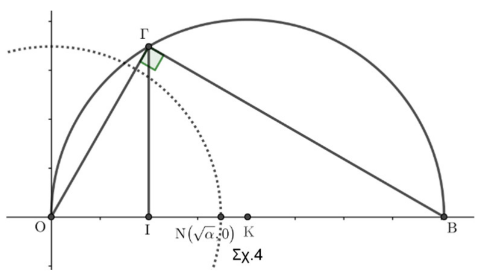
Από το θεώρημα του Θαλή έχουμε: $\dfrac{(\text{OP})}{(\text{ON})}=\dfrac{(\text{OK})}{(\text{OM})}\Leftrightarrow\dfrac{(\text{OP})}{1}=\dfrac{(\text{OK})}{(\text{OM})}\Leftrightarrow$

$(\text{OP})=\dfrac{\mu}{\nu}\Leftrightarrow(\text{OP})=\alpha$. Άρα είναι $\text{P}(\alpha,0)$,οπότε ο αριθμός α είναι κατασκευάσιμος. Εύκολα τώρα μπορούμε να κατασκευάσουμε και το $-\alpha$ (παρατήρηση § 1.1.3).

1.1.5 Πρόταση: Αν ο α είναι θετικός ρητός και δεν είναι τέλειο τετράγωνο, τότε ο $\sqrt{\alpha}$ είναι κατασκευάσιμος αριθμός.

Απόδειξη

Σύμφωνα με την πρόταση § 1.1.4, ο α είναι κατασκευάσιμος.



Σχ.4

Στον θετικό ημιάξονα Ox έχουμε $(\text{OI})=1$ και το κατασκευάσιμο σημείο B με $(\text{IB})=\alpha$. Με κέντρο το μέσο K του OB (Το K είναι κατασκευάσιμο, βλέπε παράδειγμα § 1.1.2) και ακτίνα $\rho=(\text{KO})$ κατασκευάζουμε ημικύκλιο. Πάνω στον άξονα $x'\text{O}x$ στο σημείο I κατασκευάζουμε κάθετο[3] που τέμνει το ημικύκλιο στο σημείο Γ. Το τρίγωνο ΓOB είναι ορθογώνιο στη κορυφή Γ, οπότε έχουμε: $(\Gamma\text{I})^2=(\text{OI})(\text{IB})\Leftrightarrow(\Gamma\text{I})^2=\alpha\Leftrightarrow(\Gamma\text{I})=\sqrt{\alpha}$.Με κέντρο το O και ακτίνα $\rho_1=(\Gamma\text{I})$ κατασκευάζουμε κύκλο που τέμνει τον θετικό ημιάξονα Ox στο σημείο $\text{N}(\sqrt{\alpha},0)$. Άρα το σημείο N είναι κατασκευάσιμο, οπότε ο $\sqrt{\alpha}$ είναι κατασκευάσιμος αριθμός.

Σημείωση: Αν οι πραγματικοί αριθμοί α,β είναι κατασκευάσιμοι, τότε και οι αριθμοί $\alpha\pm\beta$,$\alpha.\beta$,$\dfrac{\alpha}{\beta}$ με $\beta\neq 0$ είναι κατασκευάσιμοι.

— Το σύνολο L των κατασκευάσιμων αριθμών είναι υπόσωμα του $\mathbb{R}$ με

---

[2] Σχ. βιβλίο «Ευκλείδεια Γεωμετρία» Α-Β Λυκείου έκδοση 2014 "Κατασκευή παράλληλης ευθείας" (σελ.83).

[3] Σχ. Βιβλίο "Ευκλείδεια Γεωμετρία» Α-Β Λυκείου έκδοση 2014 (σελ.74 πρόβλημα 3)".

$\mathbb{Q} \subset L \subset \mathbb{R}$.

1.1.6. Θα δούμε τώρα πως μπορούμε να συνδέσουμε την κατασκευή ενός σημείου με την άλγεβρα μέσω υποσωμάτων του $\mathbb{R}$.

● Έστω ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα σημείο **P** που έχει κάποια ιδιότητα.

Βήμα 1ο: Ξεκινάμε από το σύνολο Σ_0 (§ 1.1) και με δεδομένο ότι κάθε ρητός είναι κατασκευάσιμος μπορούμε να κατασκευάσουμε σημεία με ρητές συντεταγμένες τα οποία περιέχονται σε ένα σύνολο Σ_1 με $\Sigma_0 \subseteq \Sigma_1$.

Βήμα 2ο: Από τα σημεία του Σ_1 μπορούμε να κατασκευάσουμε ευθείες με ρητούς συντελεστές και κύκλους με κέντρα με ρητές συντεταγμένες και ακτίνες ρ την απόσταση δύο σημείων του Σ_1. Από την τομή δύο ευθειών ή ευθείας και κύκλου ή τομή δύο κύκλων που έχουμε κατασκευάσει παίρνουμε σημεία που τα επισυνάπτουμε στο Σ_1 και δημιουργούμε το σύνολο Σ_2 με $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$. Ακολουθούμε την ίδια λογική κατασκευάζοντας σημεία μέχρι το **ν-οστό βήμα** στο οποίο παίρνουμε το σύνολο $\boldsymbol{\Sigma_\nu}$ με $\Sigma_{\nu-1} \subseteq \Sigma_\nu$, που περιέχει το P.

Έτσι με την παραπάνω διαδικασία έχουμε κατασκευάσει με κανόνα και διαβήτη το σημείο P (από το Σ_0).

Σημείωση: Εύκολα προκύπτει ότι μια ευθεία που ορίζεται από δύο σημεία με ρητές συντεταγμένες θα έχει εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A, B, \Gamma \in \mathbb{Q}$ και $A \neq 0$ ή $B \neq 0$.

Αν τώρα έχουμε δύο ευθείες με ρητούς συντελεστές που τέμνονται, η λύση του συστήματος τους δίνει τιμές των x, y στο $\mathbb{Q}$. Αν έχουμε ευθεία που ορίζεται από δύο σημεία με ρητές συντεταγμένες και κύκλο με κέντρο που έχει ρητές συντεταγμένες και ακτίνα ρ την απόσταση δύο κατασκευάσιμων σημείων ή δύο κύκλους με τις προϋποθέσεις για τον καθένα όπως του παραπάνω κύκλου, τότε το σύστημά τους σε κάθε περίπτωση μας οδηγεί σε μία δευτεροβάθμια εξίσωση (E) με διακρίνουσα Δ_1. Επειδή θέλουμε να έχουμε σημείο τομής πρέπει $\Delta_1 \geq 0$.Αν $\Delta_1 > 0$ και η $\sqrt{\Delta_1} \notin \mathbb{Q}$ έχουμε κατασκευάσει μη ρητούς αριθμούς που είναι οι ρίζες της εξίσωσης (E) (Πρόταση 1.1.5).

Αν τώρα το σημείο $P(\alpha, \beta)$ είναι κατασκευάσιμο η παραπάνω γεωμετρική διαδικασία ανάγεται στην άλγεβρα ως εξής:

▶ **Κατασκευή K1 $\rightarrow$ Σύνολο Σ1 $\rightarrow$ συντεταγμένες των σημείων του Σ_1 στο σώμα $\mathbb{Q}$ των ρητών.**

▶ **Κατασκευή K2 $\rightarrow$ Σύνολο Σ2 $\rightarrow$ συντεταγμένες των σημείων του Σ_2 στο σώμα $\mathbb{Q}\left(\sqrt{\Delta_1}\right), \Delta_1 \geq 0$.**

Το σώμα $\mathbb{Q}\left(\sqrt{\Delta_1}\right)$ προκύπτει επισυνάπτοντας στο $\mathbb{Q}$ την $\sqrt{\Delta_1}$ και είναι $\mathbb{Q}\left(\sqrt{\Delta_1}\right)=\left\{\kappa+\lambda\sqrt{\Delta_1} / \kappa, \lambda \in \mathbb{Q}\right\}$. Αν $\sqrt{\Delta_1} \in \mathbb{Q}$, τότε $\mathbb{Q}\left(\sqrt{\Delta_1}\right)=\mathbb{Q}$.

....

▶ **Κατασκευή Kν $\rightarrow$ Σύνολο Σν $\rightarrow$ συντεταγμένες των σημείων του Σ_ν σε ένα σώμα K.**

$\mathbb{Q}\left(\sqrt{\Delta_1}, \sqrt{\Delta_2}, ..., \sqrt{\Delta_\nu}\right) \subseteq K$ [4], $\Delta_1, \Delta_2, ...\Delta_\nu$ είναι μη αρνητικές διακρίνουσες δευτεροβάθμιων εξισώσεων που προκύπτουν από τη λύση συστημάτων εξισώσεων ευθειών και κύκλων ή εξισώσεων κύκλων ,όπως έχουμε αναφέρει παραπάνω. Στο σώμα K περιέχονται οι συντεταγμένες του σημείου P. Είναι $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}\left(\sqrt{\Delta_1}\right) \subseteq \mathbb{Q}\left(\sqrt{\Delta_1}, \sqrt{\Delta_2}\right) \subseteq ... \subseteq \mathbf{K}$.

Το καθένα από τα σώματα από το δεύτερο και μετά είναι επέκταση του προηγούμενου και είναι διανυσματικός χώρος επί του προηγούμενου με πρόσθεση την πρόσθεση του σώματος και βαθμωτό πολλαπλασιασμό τον πολλαπλασιασμό του σώματος και έχει διάσταση 1 ή 2 .

$\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{\Delta_1}\right):\mathbb{Q}\right]=1$ ή 2. Αν $\sqrt{\Delta_1} \in \mathbb{Q}$ τότε $\mathbb{Q}\left(\sqrt{\Delta_1}\right)=\mathbb{Q}$ οπότε $\left[\mathbb{Q}:\mathbb{Q}\right]=1$. Αν $\sqrt{\Delta_1} \notin \mathbb{Q}$ τότε το σύνολο $\left\{1, \sqrt{\Delta_1}\right\}$ είναι βάση του $\mathbb{Q}\left(\sqrt{\Delta_1}\right)$ επί του $\mathbb{Q}$ οπότε $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{\Delta_1}\right):\mathbb{Q}\right]=2$. Όμοια $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{\Delta_1}, \sqrt{\Delta_2}\right):\mathbb{Q}\left(\sqrt{\Delta_1}\right)\right]=1$ ή 2 κ.λ.π.

Το τελευταίο σώμα K είναι πεπερασμένη επέκταση $K/\mathbb{Q}$ και διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{Q}$. Λαμβάνοντας υπόψιν μας ότι αν $F_1, F_2, ..., F_\nu$ σώματα με F_i / F_{i-1} πεπερασμένη επέκταση για $i=2,3,...,\nu$ τότε είναι:

$\left[F_\nu : F_1\right]=\left[F_\nu : F_{\nu-1}\right].\left[F_{\nu-1} : F_{\nu-2}\right]...\left[F_2 : F_1\right]$ [5], η διάσταση του K επί του $\mathbb{Q}$ είναι $\left[K:\mathbb{Q}\right]=2^m$, $m \in \mathbb{N}$.

---

[4] $\mathbb{Q}\left(\sqrt{\Delta_1}, \sqrt{\Delta_2}\right)=\left(\mathbb{Q}\left(\sqrt{\Delta_1}\right)\right)\left(\sqrt{\Delta_2}\right), ..., \mathbb{Q}\left(\sqrt{\Delta_1}, \sqrt{\Delta_2}, ...\sqrt{\Delta_\nu}\right)=\left(\mathbb{Q}\left(\sqrt{\Delta_1}, \sqrt{\Delta_2}, ...\sqrt{\Delta_{\nu-1}}\right)\right)\left(\sqrt{\Delta_\nu}\right)$.

[5] Στυλιανού Ανδρεαδάκη «Θεωρία Galois" "έκδοση 1999" (σελ.48,49).

● Ας δούμε την παραπάνω διαδικασία για το παράδειγμα της § 1.1.2.

Βήμα 1ο $\to K_1$ (κατασκευή) $\to \Sigma_1 = \Sigma_0 = \{(0,0),(1,0)\} \to \mathbb{Q}$.

Βήμα 2ο,3ο,4ο $\to K_2 \to \Sigma_2 = \left\{(0,0),(1,0),\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\} \to \mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right)$.

Βήμα 5ο $\to K_3 \to \Sigma_3 = \left\{(0,0),(1,0),\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\left(\frac{1}{2},0\right)\right\} \to \mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right)$.

Είναι $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right)$ με $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right):\mathbb{Q}\right] = 2$.

Τελικά με βάση τα παραπάνω, αν το σημείο P είναι κατασκευάσιμο, τότε οι συντεταγμένες του θα ανήκουν σε ένα σώμα K με $K/\mathbb{Q}$ πεπερασμένη επέκταση και $[K:\mathbb{Q}] = 2^{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$. Το αντίστροφο εν γένει δεν ισχύει.

2. Τα τρία περίφημα άλυτα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας

2.1. Δήλιο Πρόβλημα [6]

Να κατασκευαστεί με κανόνα και διαβήτη κύβος με όγκο διπλάσιο δεδομένου κύβου.

Λύση

Εκλέγουμε ως μονάδα μέτρησης των μηκών την ακμή του δοσμένου κύβου. Έστω α το μήκος της ακμής του ζητούμενου κύβου. Ο όγκος του αρχικού κύβου είναι $V = 1^3 = 1$ κυβική μονάδα και του ζητούμενου κύβου $V' = \alpha^3$ κυβικές μονάδες. Θέλουμε $V' = 2V$. Άρα ζητάμε να κατασκευάζουμε τμήμα μήκους α με $\alpha^3 = 2$. Αν δεχτούμε ότι ο α είναι κατασκευάσιμος αριθμός, τότε θα είναι ρίζα του πολυωνύμου $f(x) = x^3 - 2$. Δηλαδή θα είναι αλγεβρικός αριθμός επί του $\mathbb{Q}$. Το πολυώνυμο $f(x)$ είναι ανάγωγο επί του $\mathbb{Q}$ (κριτήριο Eisenstein[7] για $p = 2$) και είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του α επί του $\mathbb{Q}$. Άρα $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] = 3$. Το α θα ανήκει σε ένα σώμα K με $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\alpha) \subseteq K$ και $[K:\mathbb{Q}] = 2^m$, $m \in \mathbb{N}$. Είναι $[K:\mathbb{Q}] = [K:\mathbb{Q}(\alpha)].[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] \Rightarrow 3 | 2^m$.

Άτοπο. Άρα ο α δεν είναι κατασκευάσιμος με κανόνα και διαβήτη, οπότε το πρόβλημα είναι αδύνατο.

---

[6] https://el.wikipedia.org/wiki/Διπλασιασμός_του_κύβου

[7] Στυλιανού Ανδρεαδάκη «Θεωρία Galois» “έκδοση 1999” σελ.30.

2.2. Τριχοτόμηση τυχαίας γωνίας [8]

Θα δείξουμε ότι δεν μπορούμε για οποιαδήποτε γωνία θ να κατασκευάσουμε με κανόνα και διαβήτη τη γωνία $\frac{\theta}{3}$. Η γωνία θ είναι κατασκευάσιμη αν και μόνο αν είναι κατασκευάσιμο το $\sigma\upsilon\nu\theta$. Είναι $\sigma\upsilon\nu 3\omega = 4\sigma\upsilon\nu^3\omega - 3\sigma\upsilon\nu\omega$. Για $\omega = \frac{\theta}{3}$ έχουμε $\sigma\upsilon\nu\theta = 4\sigma\upsilon\nu^3\frac{\theta}{3} - 3\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{3}$. Θα δείξουμε το αδύνατο του προβλήματος με αντιπαράδειγμα τη γωνία $\theta = 60^0$.

Έχουμε $\sigma\upsilon\nu 60^0 = 4\sigma\upsilon\nu^3 20^0 - 3\sigma\upsilon\nu 20^0 \Leftrightarrow 4\sigma\upsilon\nu^3 20^0 - 3\sigma\upsilon\nu 20^0 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$ $8\sigma\upsilon\nu^3 20^0 - 6\sigma\upsilon\nu 20^0 - 1 = 0$. Το $\sigma\upsilon\nu 20^0$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $\varphi(x) = 8x^3 - 6x - 1$. Αν το $\varphi(x)$ δεν είναι ανάγωγο επί του $\mathbb{Q}$ τότε θα έχει ρητή ρίζα την $\rho = \frac{\mu}{\nu}, \mu, \nu \in \mathbb{Z}, \nu \neq 0$ και $(|\mu|, |\nu|) = 1$. Τότε $\mu | (-1)$ και $\nu | 8$ οπότε $\mu = \pm 1$, και $\nu = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$, οπότε $\rho = \pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}$. Παρατηρούμε ότι καμία από τις τιμές του ρ δεν είναι ρίζα του $\varphi(x)$. Άτοπο. Άρα το $\varphi(x)$ είναι ανάγωγο επί του $\mathbb{Q}$. Το ελάχιστο πολυώνυμο του $\sigma\upsilon\nu 20^0$ επί του $\mathbb{Q}$ είναι το $f(x) = x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}$. Άρα $\left[\mathbb{Q}\left(\sigma\upsilon\nu 20^0\right) : \mathbb{Q}\right] = 3$.

Αν δεχτούμε ότι το $\sigma\upsilon\nu 20^0$ είναι κατασκευάσιμο θα έχουμε το $\sigma\upsilon\nu 20^0$ να ανήκει σε κάποιο σώμα K με $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}\left(\sigma\upsilon\nu 20^0\right) \subseteq K$ και $[K : \mathbb{Q}] = 2^m$, $m \in \mathbb{N}$ οπότε $3 | 2^m$. Άτοπο. Άρα η γωνία 20^0 δεν είναι κατασκευάσιμη με κανόνα και διαβήτη.

Παρατήρηση 1η : Το κανονικό δεκαοκτάγωνο δεν είναι κατασκευάσιμο με κανόνα και διαβήτη αφού η κεντρική του γωνία είναι 20^0.

Παρατήρηση 2η : Η 1^0 δεν είναι κατασκευάσιμη με κανόνα και διαβήτη.

Παρατήρηση 3η: Αν η γωνία θ είναι ακέραιος αριθμός τότε: Η θ είναι κατασκευάσιμη με κανόνα και διαβήτη αν και μόνο αν $3 | \theta$.

---

[8] http://users.sch.gr/giannakopulos/site/index.php/genika-themata/genikes-ergasies/176-tetragvnizousa

Σημείωση (Θεώρημα Gauss): Ένα κανονικό ν-γωνο είναι κατασκευάσιμο με κανόνα και διαβήτη αν και μόνο αν $\nu = 2^{\kappa} p_1.p_2...p_s$,όπου κ μη αρνητικός ακέραιος και $p_1, p_2, ..., p_s$ διακεκριμένοι περιττοί πρώτοι της μορφής $p_i = 2^{2^{r_i}} + 1$, όπου $r_i, i = 1, 2, ..., s$ μη αρνητικοί ακέραιοι (πρώτοι του Fermat).

2.3. Τετραγωνισμός κύκλου

Δοθέντος ενός κύκλου να κατασκευαστεί τετράγωνο που να έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του κύκλου.

Λύση

Δεν βλάπτεται η γενικότητα αν θεωρήσουμε την ακτίνα του κύκλου $r = 1$.
Ζητάμε να κατασκευάσουμε τετράγωνο που το μήκος της πλευράς του να είναι α και να ισχύει $\alpha^2 = \pi r^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = \pi \Leftrightarrow \alpha = \sqrt{\pi}$. Αν δεχτούμε ότι ο $\sqrt{\pi}$ είναι κατασκευάσιμος αριθμός ,τότε οδηγούμαστε στο σώμα $\mathbb{Q}\left(\sqrt{\pi}\right)$. Δηλαδή το σώμα $\mathbb{Q}\left(\sqrt{\pi}\right)$ θα είναι αλγεβρική επέκταση επί του $\mathbb{Q}$ με διάσταση $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{\pi}\right):\mathbb{Q}\right] = 2^{\rho}, \rho \in \mathbb{N}$.

Ο Lindemann έδειξε το 1882 ότι ο π είναι υπερβατικός αριθμός επί του $\mathbb{Q}$, οπότε και ο $\sqrt{\pi}$ είναι υπερβατικός επί του $\mathbb{Q}$. Όμως έχουμε ότι το $\mathbb{Q}\left(\sqrt{\pi}\right)$ είναι αλγεβρική επέκταση του $\mathbb{Q}$, δηλαδή ο $\sqrt{\pi}$ είναι αλγεβρικός αριθμός επί του $\mathbb{Q}$. Άτοπο. Άρα το πρόβλημα είναι αδύνατο με τη χρήση του κανόνα και του διαβήτη.

Βιβλιογραφία

1. Στυλιανού Ανδρεαδάκη “Θεωρία Galois” “έκδοση 1999” .
2. John B. Fraleigh “Εισαγωγή στην άλγεβρα” “Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης”.
3. Δημήτριος Α. Βάρσος, Δημήτριος Ι. Δεριζιώτης, Ιωάννης Π. Εμμανουήλ, Μιχαήλ Π. Μαλιάκας, Ολυμπία Π. Ταλέλλη ,“Μια εισαγωγή στην Άλγεβρα . Γ έκδοση”.
4. Σχολικό βιβλίο “Ευκλείδεια Γεωμετρία Α-Β Λυκείου έκδοση 2014”.
5. Διαδίκτυο.