ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$.

α) Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A;

(Μονάδες 2)

β) **i.** Πότε μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ έχει αντίστροφη;

(Μονάδα 1)

ii. Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του **(i)**, πώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f;

(Μονάδες 3)

Μονάδες 6

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat που αφορά τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης.

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 5

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.* ***Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.***

α) Για κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ με $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in A$, ισχύει ότι η f είναι σταθερή στο A.

(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό/Λάθος
Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

β) Για κάθε συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$, όταν υπάρχει το όριο της f καθώς το x τείνει στο $x_o \in A$, τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της f στο x_o.

(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό/Λάθος
Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

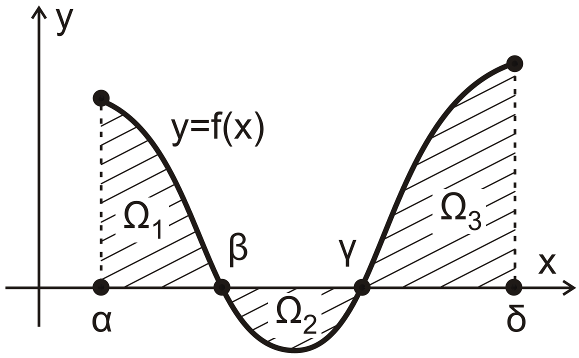
Μονάδες 8

Α5. Έστω η συνάρτηση f του διπλανού σχήματος.

Αν για τα εμβαδά των χωρίων Ω_1, Ω_2 και Ω_3 ισχύει ότι

$E(\Omega_1)=2$, $E(\Omega_2)=1$ και $E(\Omega_3)=3$,

τότε το $\int_\alpha^\delta f(x)dx$ είναι ίσο με:



α) 6 **β)** -4 **γ)** 4 **δ)** 0 **ε)** 2

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=e^{-x}+\lambda$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$, η οποία έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=2$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $\lambda=2$.

Μονάδες 3

Β2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)-x=0$ έχει μοναδική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(2,3)$.

Μονάδες 7

Β3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 (μονάδες 2) και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Β4. Έστω $f^{-1}(x)=-\ell n(x-2),\ \ x>2$. Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης (μονάδες 3) και στη συνέχεια να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση των συναρτήσεων f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων (μονάδες 6).

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha, & x\geq 1 \\ e^{x-1}+\beta x, & x<1. \end{cases}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=1$.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 4

Γ3. **i.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα x_o, η οποία είναι αρνητική.

(Μονάδες 4)

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x)-x_o f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $(x_o,+\infty)$.

(Μονάδες 4)
Μονάδες 8

Γ4. Ένα σημείο $M(x,y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x)$, $x\geq 1$.

Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο Μ διέρχεται από το σημείο $A(3,10)$, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $M\overset{\Delta}{O}K$ τη χρονική στιγμή t_0, όπου $K(x,0)$ και $O(0,0)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=(x-1)\,\ell n(x^2-2x+2)+\alpha x+\beta$ όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και η ευθεία $(\varepsilon): y=-x+2$, η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(1,1)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=-1$ και $\beta=2$.

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την ευθεία (ε) και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

Μονάδες 5

Δ3. **i.** Να αποδείξετε ότι $f'(x) \geq -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 3)

ii. Να αποδείξετε ότι $f(\lambda + \frac{1}{2}) + \lambda \geq (\lambda - 1)\ell n(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2}$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

Μονάδες 8

Δ4. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = -x^3 - x + 2$, $x \in \mathbb{R}$ έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη και να βρείτε την εξίσωσή της.

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Α Π Α Ν Τ Η Σ Ε Ι Σ

ΘΕΜΑ Α

Α1. α. Βλέπε σχ. βιβλίο.

β. i. Η συνάρτηση f έχει αντίστροφη αν είναι "1-1".

ii. $A \ni x \xrightarrow{f} y \in f(A) \Leftrightarrow f(x) = y$ και $A \ni x \xleftarrow{f^{-1}} y \in f(A) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$.

Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης είναι το σύνολο τιμών της f και το σύνολο τιμών της αντίστροφης συνάρτησης είναι το πεδίο ορισμού της f. Επιπλέον για τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης έχουμε $y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$ (Το x είναι παράσταση του y).

Α2. Βλέπε σχ. βιβλίο.

Α3. Βλέπε σχ. βιβλίο.

Α4. **α.** Λάθος

Αντιπαράδειγμα: Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -1, x < 0 \\ 1, x > 0 \end{cases}$.Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ με $f'(x) = 0$ αλλά η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

β. Λάθος

Αντιπαράδειγμα: Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x - 2, x \neq 1 \\ 3 \ \ , x = 1 \end{cases}$.

Έχουμε $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x - 2) = -1$

$f(1) = 3$,οπότε $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -1 \neq f(1)$.

Α5. Σωστό είναι το **γ**.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$.

Πρέπει $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} (e^{-x} + \lambda) = 2 \Rightarrow \lambda = 2$.

Β2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x \Leftrightarrow g(x) = e^{-x} - x + 2, x \in R$.

- Η g είναι συνεχής στο R ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, οπότε είναι συνεχής και στο $[2,3]$.
- $g(2) = e^{-2} > 0$ και $g(3) = \frac{1}{e^3} - 1 < 0$,οπότε $g(2)g(3) < 0$.

Σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε

$g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)-x_0=0$,δηλαδή η εξίσωση $f(x)-x=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(2,3)$.

Θα δείξουμε ότι το x_0 είναι μοναδική ρίζα στο R της εξίσωσης $f(x)-x=0$ (1).

Η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=-e^{-x}-1=-(e^{-x}+1)<0$ για κάθε $x \in R$.Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο R .

Αν δεχτούμε ότι η (1) έχει και άλλη μία ρίζα την $\rho \neq x_0$ π.χ. $\rho < x_0$,τότε αφού η g είναι γνησίως φθίνουσα έχουμε $g(\rho)>g(x_0) \Leftrightarrow 0>0$.Άτοπο. Όμοια αν $\rho > x_0$.

Άρα η (1) έχει ακριβώς μία ρίζα που βρίσκεται στο διάστημα $(2,3)$.

B3. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με $f'(x)=-e^{-x}<0$,οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα και άρα είναι "1-1" που σημαίνει ότι η f αντιστρέφεται.

Θα βρούμε το $f(R)$ που είναι το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^{x}}=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$.Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$.Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα έχουμε:

$f(R)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)=(2,+\infty)$.

Για $x \in R$ και $y \in (2,+\infty)$ $f(x)=y \Leftrightarrow e^{-x}+2=y \Leftrightarrow e^{-x}=y-2 \Leftrightarrow -x=\ln(y-2) \Leftrightarrow$ $x=-\ln(y-2) \Leftrightarrow f^{-1}(y)=-\ln(y-2)$.

Άρα η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι η $f^{-1}:(2,+\infty)\to R$ με τύπο $f^{-1}(x)=-\ln(x-2)$

B4. Η f^{-1} είναι συνεχής οπότε πιθανή κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$ είναι η ευθεία με εξίσωση $x=2$.

Για $x>2$ και κοντά στο 2 θέτουμε $x-2=u>0$. $\lim\limits_{x\to2^{+}}(x-2)=0$.Άρα $u\to0^{+}$.

$\lim\limits_{x\to2^{+}} f^{-1}(x)=\lim\limits_{x\to2^{+}}\left(-\ln(x-2)\right)=\lim\limits_{u\to0^{+}}(-\ln u)=+\infty$.

Άρα η ευθεία με εξίσωση $x=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη με $f''(x)=e^{-x}>0$ για κάθε $x \in R$.Άρα στο R η f είναι κυρτή.

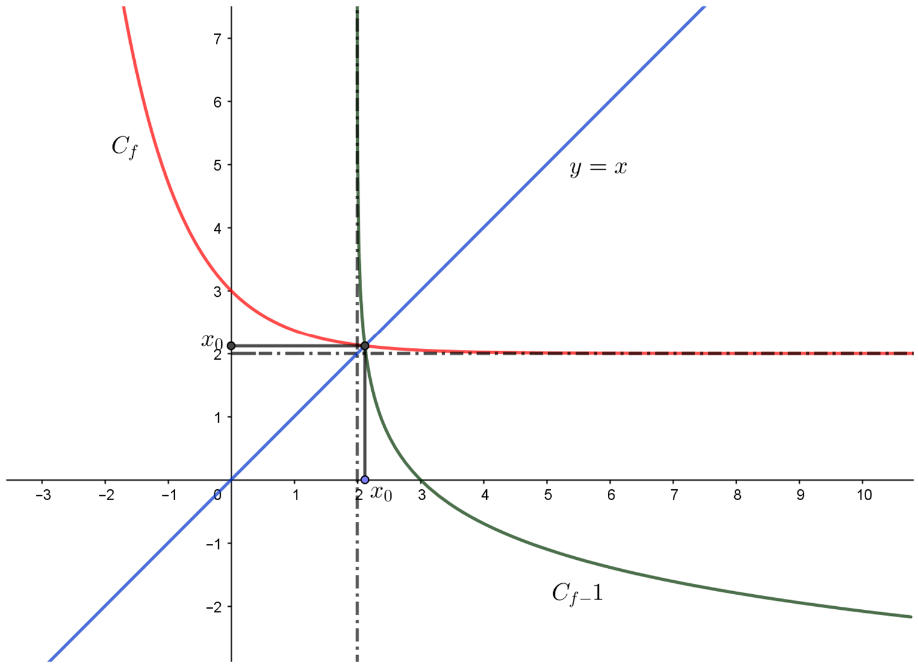
Πίνακας μεταβολών της f :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f''(x)$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία με εξίσωση $y=x$.

Σύμφωνα με το Β2 η C_f με την ευθεία $y=x$ έχουν ένα κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (2,3)$.

$f(x_0)=x_0 \Leftrightarrow f^{-1}(x_0)=x_0$. Άρα από το σημείο (x_0,x_0) διέρχεται και η $C_{f^{-1}}$.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη θα είναι συνεχής,οπότε είναι συνεχής και στο 1. $f(1)=1+\alpha$. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(e^{x-1}+\beta x\right)=1+\beta$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2+\alpha\right)=1+\alpha=f(1)$.

Πρέπει $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1) \Leftrightarrow 1+\alpha=1+\beta \Leftrightarrow \alpha=\beta$ (1).

Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 οπότε πρέπει $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ (2).

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta x-1-\alpha}{x-1}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\alpha x-1-\alpha}{x-1}\underset{L.H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 1^-}\frac{\left(e^{x-1}+\alpha x-1-\alpha\right)'}{(x-1)'}=$$

$$\lim_{x\to 1^-}\left(e^{x-1}+\alpha\right)=1+\alpha .$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+\alpha-1-\alpha}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2 .$$

Άρα $(2)\Leftrightarrow 1+\alpha=2 \Leftrightarrow \alpha=1$ και λόγω της (1) $\beta=1$.

Γ2. Είναι $f(x)=\begin{cases} x^2+1, x\ge 1 \\ e^{x-1}+x, x<1 \end{cases}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,1)$ με $f'(x)=e^{x-1}+1>0$ και παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με

$f'(x)=2x>0$.

Άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ και δεδομένου ότι η f είναι συνεχής στο 1,είναι γνησίως αύξουσα στο R.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x-1}+x\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-1} \underset{u\to-\infty}{\overset{x-1=u}{=}} = \lim\limits_{u\to-\infty} e^{u}=0$.Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$.

Αφού η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα έχουμε:

$f(R)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=R$.

Γ3 . **i.** Έχουμε $f\left((-\infty,0]\right)=\left(-\infty,\dfrac{1}{e}\right]$ και $f\left((0,+\infty)\right)=\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$.

Επειδή το μηδέν ανήκει μόνο στο $f\left((-\infty,0]\right)$,υπάρχει $x_0\in(-\infty,0)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$ και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα το x_0 είναι μοναδικό.

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία αρνητική ρίζα x_0.

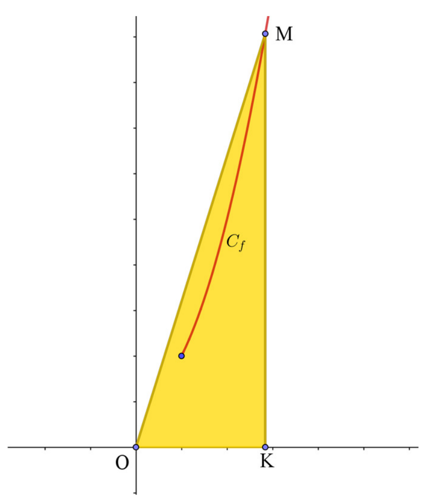
ii. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $\rho\in(x_0,+\infty)$ είναι $f^2(\rho)-x_o f(\rho)=0 \Leftrightarrow$

$f(\rho)\left(f(\rho)-x_0\right)=0$ (2).

$\rho>x_0 \overset{f\ \gamma\nu.\alpha\upsilon\xi.}{\Rightarrow} f(\rho)>f(x_0)\Leftrightarrow f(\rho)>0$.Άρα (2) $\Leftrightarrow f(\rho)=x_0<0$.Άτοπο.

Άρα η εξίσωση $f^2(x)-x_0 f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $(x_0,+\infty)$.

Γ4.



Το εμβαδόν του τριγώνου ΜΟΚ είναι:

$E=\dfrac{1}{2}(OK)(KM)=\dfrac{1}{2}|x||f(x)|=\dfrac{1}{2}x\left(x^2+1\right)=\dfrac{1}{2}\left(x^3+x\right), x\geq 1$.

Την τυχαία χρονική στιγμή t έχουμε $E(t)=\frac{1}{2}\left(x^3(t)+x(t)\right)$.Παραγωγίζουμε το $E(t)$ με μεταβλητή παραγώγισης το t και έχουμε $E'(t)=\frac{1}{2}\left[3x^2(t)x'(t)+x'(t)\right]$.

Τη χρονική στιγμή t_0 έχουμε $x(t_0)=3$ μονάδες και $x'(t_0)=2\ \frac{\text{μονάδες}}{\text{sec}}$ ..

Ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής είναι :

$$E'(t_o)=\frac{1}{2}\left[3x^2(t_0)x'(t_0)+x'(t_0)\right]=28\ \frac{\text{τετραγωνικές μονάδες}}{\text{sec}}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=(x-1)'\ln\left(x^2-2x+2\right)+(x-1)\left(\ln\left(x^2-2x+2\right)\right)'+(\alpha x+\beta)'=$$

$$\ln\left(x^2-2x+2\right)+\frac{x-1}{x^2-2x+2}\left(x^2-2x+2\right)'+\alpha=\ln\left(x^2-2x+2\right)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}+\alpha.$$

$A\in C_f \Leftrightarrow f(1)=1\Leftrightarrow \alpha+\beta=1$ (1).Επιπλέον πρέπει $f'(1)=-1\Leftrightarrow \alpha=-1$ και από την (1) παίρνουμε $\beta=2$.

Δ2. Είναι $f(x)=(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)-x+2$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=-x+2, x\in R$.

Οι συναρτήσεις f,φ είναι συνεχής στο $[1,2]$.

$$f(x)-\varphi(x)=(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)=(x-1)\ln\left[(x-1)^2+1\right].$$

Για κάθε $x\in[1,2]$ έχουμε $x-1\geq 0$ και $(x-1)^2+1\geq 1\Rightarrow \ln\left[(x-1)^2+1\right]\geq 0$.

Άρα για κάθε $x\in[1,2]$ είναι $f(x)-\varphi(x)\geq 0$.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E=\int_1^2|f(x)-\varphi(x)|dx=\int_1^2(x-1)\ln\left[(x-1)^2+1\right]dx$.

Θέτουμε $(x-1)^2+1=u$ (2).

$$du=2(x-1)dx\Leftrightarrow (x-1)dx=\frac{1}{2}du.$$

Για $x=1$ $(2)\Rightarrow u=1$ και για $x=2$ $(2)\Rightarrow u=2$.

Άρα $E=\frac{1}{2}\int_1^2\ln u\,du=\frac{1}{2}\int_1^2(u)'\ln u\,du=\frac{1}{2}\left(\left[u.\ln u\right]_1^2-\int_1^2 u(\ln u)'du\right)=\frac{1}{2}\left(2\ln 2-\int_1^2 1du\right)\Leftrightarrow$

$$E=\frac{1}{2}(2\ln 2-1)\Leftrightarrow E=\ln 2-\frac{1}{2}\ \text{τετραγωνικές μονάδες}.$$

Δ3. i. Έχουμε $f'(x)=\ln\left[(x-1)^2+1\right]+\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1}-1$ για κάθε $x\in R$.

Για κάθε $x \in R$ $\begin{cases} \ln\left[(x-1)^2+1\right] \ge 0 \Leftrightarrow \ln\left[(x-1)^2+1\right]-1 \ge -1 \\ \dfrac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1} \ge 0 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} f'(x) \ge -1$.Το "=" ισχύει για $x=1$.

ii. $f(\lambda)+\lambda-2=(\lambda-1)\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)$**.**

Η ισότητα που ζητάμε να δείξουμε είναι ισοδύναμη με την

$f\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right)+\lambda \ge f(\lambda)+\lambda-2+\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow f\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right) \ge f(\lambda)-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$f\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right)-f(\lambda) \ge -\dfrac{1}{2}$ (I).Αρκεί να δείξουμε την (I).

Για κάθε $\lambda \in R$ είναι $\lambda+\dfrac{1}{2}>\lambda$.

Στο $\left[\lambda,\lambda+\dfrac{1}{2}\right]$ η f συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\left(\lambda,\lambda+\dfrac{1}{2}\right)$.

Σύμφωνα με τι θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού υπάρχει ένα τουλάχιστον

$\xi \in \left(\lambda,\lambda+\dfrac{1}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\lambda+\frac{1}{2}-\lambda} \Leftrightarrow f\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right)-f(\lambda)=\dfrac{1}{2}f'(\xi)$ (II).

Όμως λόγω του Δ3 i) $f'(\xi) \ge -1$.

Άρα $(II) \Rightarrow f\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right)-f(\lambda) \ge -\dfrac{1}{2}$.

Δ4. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=-3x^2-1 \le -1$.Το “=” ισχύει στο 0.

Έστω $M\left(x_1,f(x_1)\right) \in C_f$ και $N\left(x_2,g(x_2)\right) \in C_g$.

Ας είναι ε_1 η εφαπτομένη της C_f στο M και ε_2 η εφαπτομένη της C_g στο N.

$\varepsilon_1: y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1) \Leftrightarrow y=f'(x_1)x+f(x_1)-x_1f'(x_1)$.

Όμοια $\varepsilon_2: y=g'(x_2)x+g(x_2)-x_2g'(x_2)$.

Απαιτούμε οι $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ να ταυτίζονται οπότε πρέπει:

$$\begin{cases} f'(x_1)=g'(x_2) \ (3) \\ \text{και} \\ f(x_1)-x_1f'(x_1)=g(x_2)-x_2g'(x_2) \ (4) \end{cases} . \ (\Sigma)$$

Έχουμε $f(x_1) \ge -1$ (Δ2 i).Το “=” ισχύει όταν $x_1=1$ και $g(x_2) \le -1$ με το “=” να ισχύει όταν $x_2=0$.

Άρα η (3) ισχύει μόνο όταν $x_1=1$ και $x_2=0$.

Για $x_1=1$: $f(x_1)-x_1f'(x_2)=f(1)-f'(1)=0$

Για $x_2=0$: $g(x_2)-x_2g'(x_2)=0$ οπότε η (4) ισχύει.

Άρα το σύστημα (Σ) έχει μοναδική λύση την $(x_1, x_2) = (1,0)$,οπότε η ευθεία MN με $M(1,1)$ και $N(0,2)$ είναι μοναδική κοινή εφαπτομένη των C_f, C_g.
Συνεπώς η κοινή εφαπτομένη των C_f, C_g έχει εξίσωση $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow$ $y - 1 = -x + 1 \Leftrightarrow y = -x + 2$.