79ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ" 10 Νοεμβρίου 2018

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τους ακέραιους που ικανοποιούν συγχρόνως την εξίσωση $(x-1)(x^2-7x+10)=0$ και την ανίσωση $\frac{x(x-1)}{2}-2<\frac{x(x-5)}{2}+6$.

Λύση

$$(x-1)(x^2-7x+10)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \\ \text{ή} \\ x^2-7x+10=0 \Leftrightarrow x=5 \text{ ή } x=2 \end{cases}.$$

Για $x=1$ από την ανίσωση παίρνουμε $-2<4$ που ισχύει.
Για $x=2$ από την ανίσωση παίρνουμε $-1<3$ που ισχύει.
Για $x=5$ από την ανίσωση παίρνουμε $8<6$ αδύνατο.
Άρα $x=1$ ή $x=2$.

Πρόβλημα 2

Αν οι πραγματικοί αριθμοί είναι τέτοιοι ώστε να βρείτε τις δυνατές τιμές της παράστασης $\frac{5\alpha^2\beta^2}{\alpha^4-36\beta^4}=1$,να βρείτε τις δυνατές τιμές της παράστασης $K=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$.

Λύση

Δεν μπορεί να είναι $\alpha=0$ ή $\beta=0$ γιατί τότε θα έχουμε $0=1$.Άτοπο.Άρα $\alpha\neq 0$ και $\beta\neq 0$.

$$\frac{5\alpha^2\beta^2}{\alpha^4-36\beta^4}=1 \Leftrightarrow \frac{\alpha^4-36\beta^4}{5\alpha^2\beta^2}=1 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{5\beta^2}-\frac{36\beta^2}{5\alpha^2}=1 \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-36\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2=5 \ (1).$$

Θέτουμε $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2=t$.Είναι $t>0$.

Η (1) γράφεται $t-36\frac{1}{t}=5 \Leftrightarrow t^2-5t-36=0 \Leftrightarrow t=9$ ή $t=-4$ απορρίπτεται .

Άρα $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2=9 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta}=-3 \Leftrightarrow \alpha=-3\beta$ ή $\frac{\alpha}{\beta}=3 \Leftrightarrow \alpha=3\beta$.

- Αν $\alpha=-3\beta$,τότε $K=\frac{-4\beta}{-2\beta}=2$.
- $\alpha=3\beta$,τότε $K=\frac{2\beta}{4\beta}=\frac{1}{2}$.

Πρόβλημα 3

Να συγκριθούν οι αριθμοί:: $A=\frac{2}{3}+\frac{2}{6}+\frac{2}{9}+\ldots+\frac{2}{99}$ και

$$B=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+...+\frac{1}{95}+\frac{1}{97}+\frac{1}{98}+\frac{1}{100}.$$

Λύση

Οι προσθετέοι του Α είναι της μορφής $\frac{1}{3\nu},\nu=1,2,...,33$ και ανά δύο οι προσθετέοι του Β είναι της μορφής: $\frac{1}{3\nu-1}+\frac{1}{3\nu+1},\nu=1,2,...,33$,

$\frac{1}{3\nu-1}+\frac{1}{3\nu+1}=\frac{6\nu}{9\nu^2-1}>\frac{2}{3\nu}\Leftrightarrow 9\nu^2>9\nu^2-1\Leftrightarrow 0>-1$ που ισχύει.

Άρα $\frac{1}{3\nu-1}+\frac{1}{3\nu+1}>\frac{2}{3\nu}$ (1), $\nu=1,2,...,33$.

Για $\nu=1,2,...,33$ προσθέτουμε τις ανισοτικές σχέσεις που προκύπτουν από την (1) και παίρνουμε $B>A$.

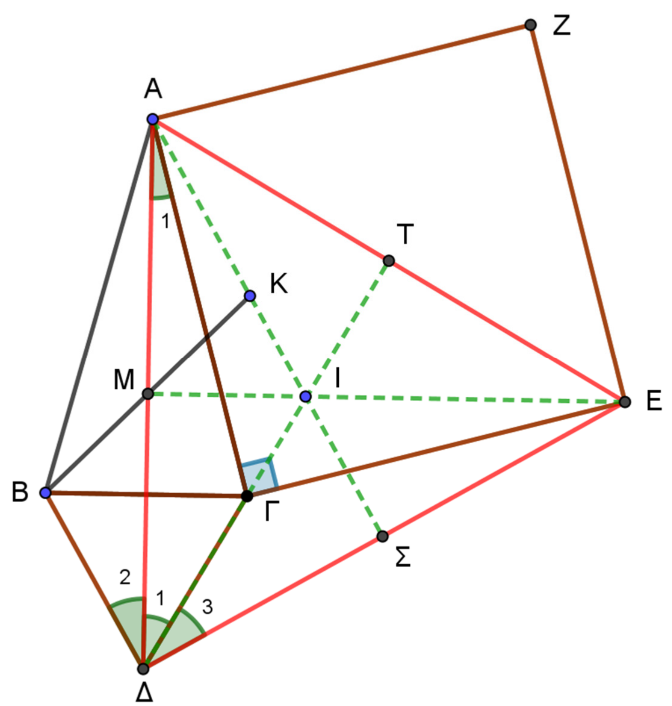
Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με . Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΒΓΔ και τετράγωνο ΑΓΕΖ. Αν το σημείο Μ είναι το μέσο της ΑΔ και το σημείο Κ είναι το συμμετρικό της κορυφής Β ως προς το σημείο Μ, να αποδείξετε ότι:

(α) Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.

(β) Οι ευθείες ΑΚ, ΕΜ και ΔΓ περνάνε από το ίδιο σημείο.

Λύση



(α) Τα σημεία Α,Δ ισαπέχουν από τα σημεία Β,Γ,άρα η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετος του ΒΓ,οπότε το τμήμα ΑΔ διχοτομεί την $\hat{A}$ και την $B\hat{\Delta}\Gamma$ αφού το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με κορυφή Α και το τρίγωνο ΔΒΓ είναι ισόπλευρο.Έτσι έχουμε $\hat{A}_1=15^0$ και $\hat{\Delta}_1=\hat{\Delta}_2=30^0$.

Αφού το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές έχουμε: $\hat{A}+2\hat{B}=180^0\Leftrightarrow\hat{B}=75^0$.

$\Delta\hat{A}E=\hat{A}_1+\Gamma\hat{A}E=15^0+45^0=60^0$.

Στο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε $A\hat{\Gamma}\Delta=180^0-\hat{A}_1-\hat{\Delta}_1=135^0$.

Έχουμε: $\Delta\hat{\Gamma}E+\Delta\hat{\Gamma}B+B\hat{\Gamma}A+A\hat{\Gamma}E=360^0\Leftrightarrow\Delta\hat{\Gamma}E=135^0$.

Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΓΔΕ είναι ίσα αφού ΑΓ=ΓΕ,ΔΓ κοινή πλευρά και $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta = \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{E} = 135^0$. (κριτήριο Π-Γ-Π).Άρα ΑΔ=ΔΕ.

Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με μία γωνία του 60^0 ,άρα είναι ισόπλευρο.

(β) Η ευθεία ΑΚ τέμνει το τμήμα ΔΓ στο σημείο Σ και η ευθεία τέμνει το τμήμα ΑΕ στο σημείο Τ. Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι τα τρίγωνα ΑΜΚ και ΜΒΔ είναι ίσα,οπότε $\mathrm{M}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{K} = \hat{\Delta}_2 = 30^0$.Άρα $\mathrm{K}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = 30^0$.Συνεπώς η ΑΣ είναι διχοτόμος της $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}$.

Η ΕΜ είναι διάμεσος του τριγώνου ΔΑΕ ,οπότε είναι και διχοτόμος,αφού το τρίγωνο ΔΑΕ είναι ισόπλευρο.

Αφού $\hat{\Delta}_1 = 30^0$ θα είναι και $\hat{\Delta}_3 = 30^0$ γιατί $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E} = 60^0$,Άρα η ΔΤ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E}$

Άρα πάνω στις ευθείες ΑΚ,ΕΜ,ΔΓ βρίσκονται οι διχοτόμοι του τριγώνου ΑΔΕ,οπότε οι ευθείες αυτές διέρχονται από το ίδιο σημείο Ι (έγκεντρο του τριγώνου ΑΔΕ).