ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι "1-1" είναι και γνησίως μονότονη.**»**

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η συνάρτηση $f(x)=\text{ημ}x$ με $x\in\mathbb{R}$ έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου.

β) Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ, η οποία είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\Delta$.

γ) Ισχύει $\lim_{x\to 0}\frac{1-\text{συν}x}{x}=0$.

δ) Αν η f είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$.

ε) Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \frac{4}{x^2}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

B1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

Μονάδες 8

B2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 4

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

B4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.
(**Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό με μελάνι που δε σβήνει.**)

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8 m, το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους x m, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.

Γ1. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του x, είναι

$$E(x) = \frac{(\pi + 4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, \quad x \in (0,8).$$

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

Μονάδες 10

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8 m, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με 5 m^2.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2e^{x-\alpha}-x^2, \quad x\in\mathbb{R}$ με $\alpha>1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του $\alpha>1$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

Μονάδες 3

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τέτοια ώστε η συνάρτηση f να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2.

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=f(1)$ είναι αδύνατη στο $(\alpha,\ x_2)$.

Μονάδες 6

Δ4. Αν $\alpha=2$ να αποδείξετε ότι :

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > -\frac{32}{15} \,.$$

Μονάδες 9

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Α Π Α Ν Τ Η Σ Ε Ι Σ

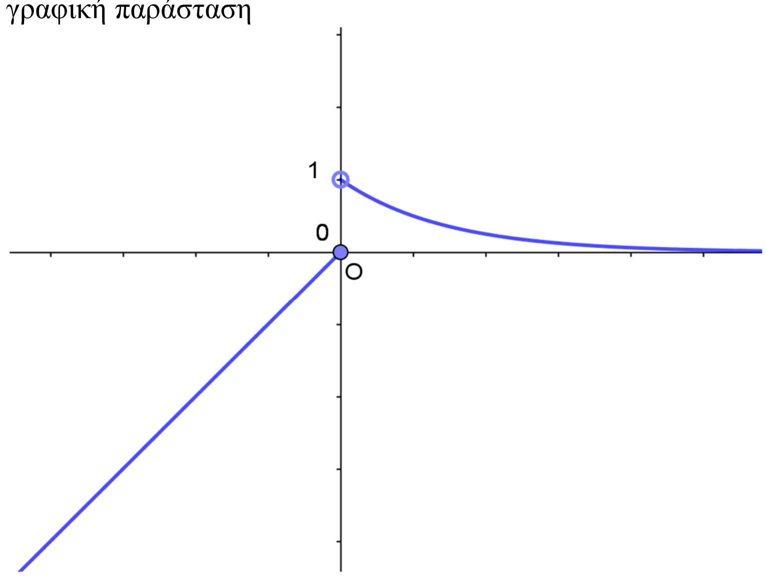
ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία (βλέπε σχ.βιβλίο)

Α2. **α** $\to$ Ψ.

β. Αντιπαράδειγμα: Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x, x\le 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x, x>0 \end{cases}$. Η f έχει την

παρακάτω γραφική παράσταση



Κάθε ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$ έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με την C_f. Άρα η f είναι "$1-1$". Από τη γραφική παράσταση της f έχουμε ότι η f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$. Δηλαδή ενώ η συνάρτηση είναι "1-1" δεν είναι γνησίως μονότονη.

Α3. Θεωρία (βλέπε σχ. Βιβλίο)

$\alpha \to$ Λάθος
$\beta \to$ Λάθος
Α4. $\gamma \to$ Σωστό
$\delta \to$ Σωστό
$\varepsilon \to$ Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=1+\frac{8x}{x^4}=\frac{x\left(x^3+8\right)}{x^4}.$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x\left(x^3+8\right)=0 \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} x^3+8=0 \Leftrightarrow x^3=-8 \Leftrightarrow x=-2$.

Αν $x^3+8>0 \Leftrightarrow x^3>-8 \Leftrightarrow x>-2$.

Πίνακας μονοτονίας της f .

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
x	$-$	$-$		$+$
x^3+8	$-$	0 $+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0 $-$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(-2)$ τοπ. μέγιστο $\searrow$		$\nearrow$

Στα διαστήματα $(-\infty,-2]$ και $(0,+\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα και στο διάστημα $[-2,0)$ είναι γνησίως φθίνουσα.Στο $x_0=-2$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(-2)=-3$.

B2. Η f' είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με $f''(x)=-\dfrac{24}{x^4}<0$ για κάθε $x\in R-\{0\}$.Άρα η f είναι κοίλη στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$,οπότε δεν υπάρχουν σημεία καμπής.

B3. • Η f είναι συνεχής οπότε πιθανή κατακόρυφη ασύμπτωτη είναι η ευθεία με εξίσωση $x=0$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x-\dfrac{4}{x^2}\right)=-\infty$. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x-\dfrac{4}{x^2}\right)=-\infty$.Άρα η ευθεία με εξίσωση $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

• Πλάγια-Οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $\pm\infty$

— $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{4}{x^3}\right)=1$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{4}{x^2}\right)=0$.Άρα η ευθεία με εξίσωση $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

— Όμοια βρίσκουμε ότι η ευθεία με εξίσωση $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

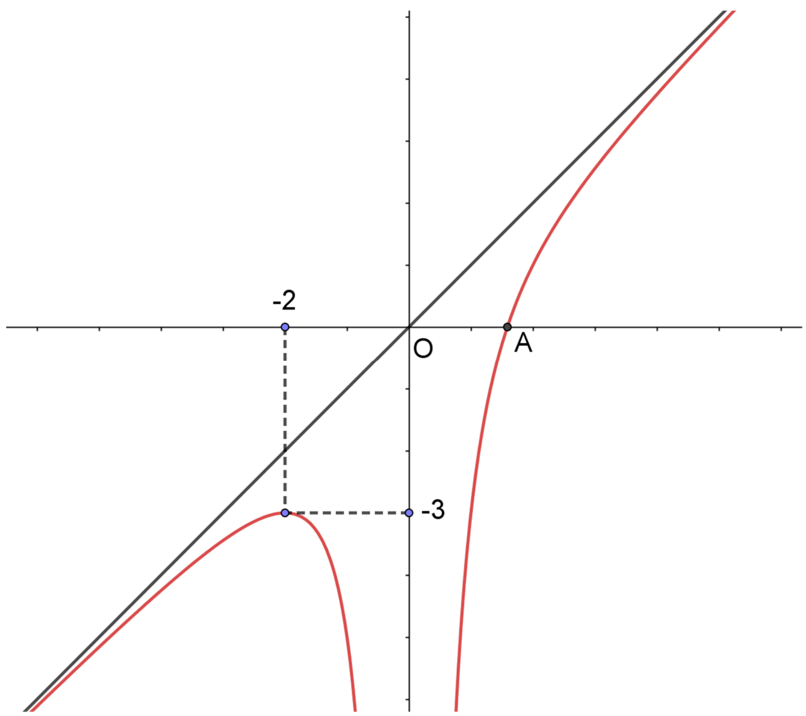
B4. $f(x)=0 \Leftrightarrow x^3=4 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{4}$.Άρα η C_f έχει με τον άξονα $x'x$ ένα κοινό σημείο το $A\left(\sqrt[3]{4},0\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Πίνακας μεταβολών της f .

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(-2)$ τοπ. μέγιστο	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	

Με βάση των παραπάνω πίνακα μεταβολών της f η γραφική παράσταση της f είναι η παρακάτω.



ΘΕΜΑ Γ

Πλευρά τετραγώνου: $\frac{x}{4}$.

Αν R είναι η ακτίνα του κύκλου,το μήκος του είναι $2\pi R = 8 - x \Leftrightarrow R = \frac{8-x}{2\pi}$.

Πρέπει $0 < x < 8$.

Γ1. $E(x) = E_{\text{τετρ.}} + E_{\text{κύκλου}} = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \pi\left(\frac{8-\pi}{2\pi}\right)^2 = \ldots = \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}$, $x \in (0,8)$.

Γ2. Η συνάρτηση E είναι παραγωγίσιμη γιατί έχει πολυωνυμική μορφή με

$E'(x)=...=\dfrac{(\pi+4)x-32}{8\pi}$. $E'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{32}{\pi+4}$ και $E'(x)>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{32}{\pi+4}$.

$\dfrac{32}{\pi+4}<8 \Leftrightarrow 32<8\pi+32 \Leftrightarrow 8\pi>0$ που ισχύει.

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας της E .

x	$-\infty$ 0	$\dfrac{32}{\pi+4}$	8 $+\infty$
$E'(x)$		$-$ 0 $+$	
$E(x)$		$\searrow$ $E\left(\dfrac{32}{\pi+4}\right)$ $\nearrow$ ολ. ελάχιστο	

Άρα το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται όταν $x=\dfrac{32}{\pi+4}$.

Η πλευρά του τετραγώνου είναι $\dfrac{x}{4}=\dfrac{8}{\pi+4}$.

Η διάμετρος του κύκλου είναι $2R=\dfrac{8-x}{\pi}=\dfrac{8-\dfrac{32}{\pi+4}}{\pi}=...=\dfrac{8}{\pi+4}$.

Έτσι έχουμε ότι για $x=\dfrac{32}{\pi+4}$ η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

Γ3. Ζητάμε να δείξουμε ότι η εξίσωση $E(x)=5$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,8)$.Για το σκοπό αυτό θα βρούμε τις εικόνες των διαστημάτων μονοτονίας.

$\lim\limits_{x\to 0^+} E(x)=\dfrac{16}{\pi}$, $E\left(\dfrac{32}{\pi+4}\right)=\dfrac{16}{\pi+4}$ και $\lim\limits_{x\to 8^-} E(x)=4$.

Στο διάστημα $\left(0,\dfrac{32}{\pi+4}\right]$ η E είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα,οπότε

$E\left(\left(0,\dfrac{32}{\pi+4}\right]\right)=\left[E\left(\dfrac{32}{\pi+4}\right),\lim\limits_{x\to 0^+} E(x)\right)=\left[\dfrac{16}{\pi+4},\dfrac{16}{\pi}\right)$.Επειδή $5\in E\left(\left(0,\dfrac{32}{\pi+4}\right]\right)$ η εξίσωση $E(x)=5$ έχει ακριβώς (λόγω της μονοτονίας) μία ρίζα στο $\left(0,\dfrac{32}{\pi+4}\right)$.

Στο διάστημα $\left[\dfrac{32}{\pi+4},8\right)$ η E είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα οπότε

$E\left(\left[\dfrac{32}{\pi+4},8\right)\right)=\left[E\left(\dfrac{32}{\pi+4}\right),\lim\limits_{x\to 8^-}E(x)\right)=\left[\dfrac{16}{\pi+4},4\right)$.

$5\notin E\left(\left[\dfrac{32}{\pi+4},8\right)\right)$.Συνεπώς η εξίσωση $E(x)=5$ δεν έχει ρίζα στο $\left[\dfrac{32}{\pi+4},8\right)$.

Τελικά η εξίσωση $E(x)=5$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\left(0,\dfrac{32}{\pi+4}\right)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με $f'(x)=2e^{x-\alpha}-2x$.
Ομοίως η f' είναι παραγωγίσιμη με $f''(x)=2e^{x-\alpha}-2=2\left(e^{x-\alpha}-1\right)$.
$f''(x)=0\Leftrightarrow e^{x-\alpha}=1\Leftrightarrow x=\alpha$. $f''(x)>0\Leftrightarrow e^{x-\alpha}>1\Leftrightarrow x-\alpha>0\Leftrightarrow x>\alpha$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\frown$	$f(\alpha)$ Σημείο καμπής	$\smile$	

Άρα το σημείο $A\left(\alpha,f(\alpha)\right)=\left(\alpha,2-\alpha^2\right)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Δ2. $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2e^{x-\alpha}-2x\right)=+\infty$ δεδομένου ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x-\alpha}=0$.
$f'(\alpha)=2\left(1-\alpha\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2e^{x-\alpha}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2x\left(\dfrac{e^{x-\alpha}}{x}-1\right)\right]$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\chi-\alpha}}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(e^{x-\alpha}\right)'}{\left(x\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x-\alpha}=+\infty$.Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$.

Η f' είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty,\alpha\right]$ ($Δ_1$ ερώτημα),οπότε
$f'\left(\left(-\infty,\alpha\right]\right)=\left[f'(\alpha),\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)\right)=\left[2\left(1-\alpha\right),+\infty\right)$ Επειδή $0\in f'\left(\left(-\infty,\alpha\right]\right)$ η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει ακριβώς (λόγω της μονοτονίας) μία ρίζα $x_1\in\left(-\infty,\alpha\right)$.
Η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\alpha,+\infty\right)$ ($Δ_1$ ερώτημα),οπότε
$f'\left(\left[\alpha,+\infty\right)\right)=\left[f'(\alpha),\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)\right)=\left[2\left(1-\alpha\right),+\infty\right)$.Επειδή $0\in f'\left(\left[\alpha,+\infty\right)\right)$ η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα $x_2\in\left(\alpha,+\infty\right)$.

Λόγω του $Δ_1$ έχουμε:
- f' γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,\alpha\right]$.

$x<x_1\Rightarrow f'(x)>f'(x_1)\Rightarrow f'(x)>0$.

$x_1 < x < \alpha \Rightarrow f'(x) < f'(x_1) \Rightarrow f'(x) < 0$ ..

- f' γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, +\infty)$.

$\alpha < x < x_2 \Rightarrow f'(x) < f'(x_2) \Rightarrow f'(x) < 0$.

$x > x_2 \Rightarrow f'(x) > f'(x_2) \Rightarrow f'(x) > 0$.

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας.

x	$-\infty$		x_1		α		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(x_1)$ τοπ. μέγιστο		$\searrow$		$f(x_2)$ τοπ. ελάχιστο	$\nearrow$	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, x_1]$,γνησίως φθίνουσα στο $[x_1, x_2]$,αφού $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_1, \alpha) \cup (\alpha, x_2)$ και η f είναι συνεχής στα x_1, α, x_2 . Επίσης είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_2, +\infty)$. Άρα η f στο x_1 παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και στο x_2 παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο.

Δ3. 1ος τρόπος: Η f στο διάστημα (α, x_2) αφού είναι γνησίως φθίνουσα θα είναι '!-1".

Αν δεχτούμε ότι κάποιο $\rho \in (\alpha, x_2)$ είναι ρίζα της εξίσωσης,τότε $f(\rho) = f(1) \Leftrightarrow \rho = 1$.Ατοπο, γιατί $\rho > \alpha > 1 \Rightarrow \rho > 1$.Άρα η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο (α, x_2) .

2ος τρόπος: Θα δείξουμε ότι $x_1 < 1$.

Έστω ότι $x_1 \geq 1$.Η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, \alpha]$ οπότε $f'(x_1) \leq f'(1) \Leftrightarrow f'(1) \geq 0 \Leftrightarrow$ $2e^{1-\alpha} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow e^{1-\alpha} \geq e^0 \Leftrightarrow 1 - \alpha \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \leq 1$.Άτοπο.Άρα $x_1 < 1$.

Αν υποθέσουμε ότι το $\rho \in (\alpha, x_2)$ είναι ρίζα της εξίσωσης τότε έχουμε $f(\rho) = f(1)$.

Στο $[1, \rho]$ εφαρμόζεται για την f το θεώρημα του Rolle οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον

$\xi \in (1, \rho)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.Άτοπο ,γιατί για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ είναι $f'(x) < 0$.

Άρα η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο (α, x_2).

Δ4. Αν $\alpha = 2$ είναι $f(x) = 2e^{x-2} - x^2$ και $f'(x) = 2e^{x-2} - 2x$.

$f(2) = -2$ και $f'(2) = -2$.Έστω ε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(2, f(2))$,τότε η εξίσωση της ε είναι $y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y + 2 = -2x + 4 \Leftrightarrow y = -2x + 2$.

Στο διάστημα $[2, +\infty)$ η f είναι κυρτή,οπότε στο διάστημα αυτό τα σημεία της C_f είναι πάνω από τα αντίστοιχα σημεία της ε εκτός του σημείου A.

Άρα για κάθε $x \in [2,+\infty)$ είναι $f(x) \geq -2x+2 \Leftrightarrow f(x)\sqrt{x-2} \geq -2(x-1)\sqrt{x-2}$ (1).

Στο $[2,3]$ η συνάρτηση $f(x)\sqrt{x-2}$ είναι συνεχής.Η (1) ισχύει ως ισότητα μόνο για $x=2$.

Άρα $(1) \Rightarrow \int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > \int_2^3 \left(-2(x-1)\sqrt{x-2}\right)dx \Leftrightarrow$

$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > -2\int_2^3 (x-1)\sqrt{x-2}dx$ (2).

Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $I = \int_2^3 (x-1)\sqrt{x-2}\,dx$.

Θέτουμε $\sqrt{x-2} = u \Leftrightarrow x = u^2+2 \Rightarrow dx = 2udu$.
Για $x=2 \to u=0$
Για $x=3 \to u=1$.

Άρα $I = \int_0^1 (u^2+1)2u^2du = 2\int_0^1 (u^4+u^2)du = 2\left[\frac{u^5}{5}+\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{15}$.

Άρα $(2) \Rightarrow \int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > -\frac{32}{15}$.