ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 19 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ(3)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 7

Α2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$;

Μονάδες 4

Α3. Αν ομαδοποιήσουμε τις παρατηρήσεις μιας μεταβλητής σε κλάσεις, τι ονομάζουμε πλάτος μιας κλάσης;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε ισχύει

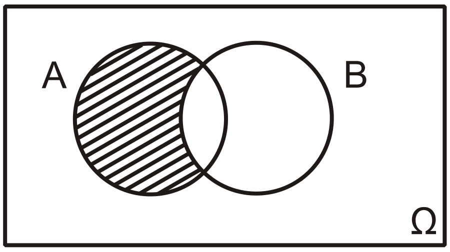
$$(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

β) Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$, με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

γ) Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ποσοτικών δεδομένων.

δ) Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει ότι $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

ε) Το γραμμοσκιασμένο χωρίο στο διπλανό σχήμα αντιστοιχεί στο ενδεχόμενο $B - A$.



Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι τιμές x_i και οι αντίστοιχες συχνότητες v_i που προέκυψαν από παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X.

x_i	v_i
1	2
3	3
5	4
9	1

Β1. Για τις παρατηρήσεις αυτές να υπολογιστούν :

- **α.** η μέση τιμή $\bar{x}$ (μονάδες 6)
- **β.** η διάμεσος δ (μονάδες 5)
- **γ.** η διακύμανση s^2. (μονάδες 7)

Μονάδες 18

Β2. Να εξετάσετε αν το δείγμα των παραπάνω παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x + 1,\ x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(2, f(2))$.

Μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η ευθεία (ε) του ερωτήματος **Γ2** τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y.

Μονάδες 4

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{f(x)} - 1}{x - 1}$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Ένα κουτί έχει τρεις μπάλες, μία άσπρη, μία μαύρη και μία κόκκινη.
Κάνουμε το εξής πείραμα: παίρνουμε από το κουτί μια μπάλα, καταγράφουμε το χρώμα της και την ξαναβάζουμε στο κουτί. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία άλλη μια φορά.

Δ1. Να κατασκευάσετε το δενδροδιάγραμμα που περιγράφει το παραπάνω πείραμα (μονάδες 3) και να γράψετε τον δειγματικό χώρο Ω του πειράματος. (μονάδες 2)

Μονάδες 5

Δ2. Να παρασταθούν με αναγραφή των στοιχείων τους τα ενδεχόμενα που προσδιορίζονται από την αντίστοιχη ιδιότητα:

A : «η δεύτερη μπάλα που θα εξαχθεί να είναι μαύρη»

B : «να εξαχθούν δυο μπάλες διαφορετικού χρώματος».

Μονάδες 6

Δ3. Υποθέτουμε ότι ο δειγματικός χώρος Ω του προηγούμενου πειράματος αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και A, B είναι τα ενδεχόμενα του ερωτήματος **Δ2**.

α. Να υπολογίσετε την πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:
A', $A \cap B$, $A - B$, $B - A$. (μονάδες 8)

β. Αν Γ είναι ένα ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου Ω, το οποίο είναι ασυμβίβαστο τόσο με το ενδεχόμενο A όσο και με το ενδεχόμενο B, να υπολογίσετε ποια είναι η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να έχει η πιθανότητα $P(\Gamma)$. (μονάδες 6)

Μονάδες 14

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας, να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Ε Ν Δ Ε Ι Κ Τ Ι Κ Ε Σ Α Π Α Ν Τ Η Σ Ε Ι Σ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ (Γ.Π)

ΘΕΜΑ Α

Α1,Α2,Α4. Βλέπε σχολικό βιβλίο.

Α4. α. Σωστό

β. Λάθος

γ. Λάθος

δ. Σωστό

ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

x_i	ν_ι	$x_i\nu_i$	N_i
1	2	2	2
3	3	9	5
5	4	20	9
9	1	9	10
Σύνολο	10	40	

Β1. α. $\bar{x} = \dfrac{\sum_{\iota=1}^{4} x_i\nu_\iota}{10} = \dfrac{40}{10} \Leftrightarrow \bar{x} = 4$ **.**

β. Επειδή το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιο έχουμε δύο μεσαίες παρατηρήσεις.

Θέση $1^{ης}$ μεσαίας παρατήρησης $\dfrac{\nu}{2} = 5 \to N_2 \Rightarrow$ $1^{η}$ μεσαία παρατήρηση το 3.

Θέση $2^{ης}$ μεσαίας παρατήρησης $\dfrac{\nu}{2} + 1 = 6 \to N_3 \Rightarrow$ $2^{η}$ μεσαία παρατήρηση το 5 .

Άρα $\delta = \dfrac{1^{η}\ \text{μεσαία παρατήρηση} + 2^{η}\ \text{μεσαία παρατήρηση}}{2} = \dfrac{3+5}{2} = 4$.

Σημείωση: Μπορούμε να βρούμε τη διάμεσο βάζοντας τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά:

$1,1,3,3,\boxed{3,5},5,5,5,9$,οπότε η $1^{η}$ μεσαία παρατήρηση είναι το 3 και η δεύτερη μεσαία παρατήρηση είναι το 5.Αρα $\delta = \dfrac{3+5}{2} = 4$.

γ. $s^2=\dfrac{\left(x_1-\overline{x}\right)^2 \nu_1+\left(x_2-\overline{x}\right)^2 \nu_2+\left(x_3-\overline{x}\right)^2 \nu_3+\left(x_4-\overline{x}\right)^2 \nu_4}{\nu}=$

$=\dfrac{(1-4)^2.2+(3-4)^2.3+(5-4)^2.4+(9-4)^2.1}{10}=\dfrac{18+3+4+25}{10}=\dfrac{50}{10}=5\Leftrightarrow s^2=5$**.**

Β2. $s=\sqrt{s^2}\Leftrightarrow s=\sqrt{5}$**.**

Ο συντελεστής μεταβολής είναι: $CV=\dfrac{s}{\left|\overline{x}\right|}=\dfrac{\sqrt{5}}{4}>0{,}1$**,**που σημαίνει ότι το δείγμα των παρατηρήσεων δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το πεδίο ορισμού της f είναι $A=R$.

Η f ως πολυωνυμική συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\left(x^2-x+1\right)'=2x-1$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow 2x-1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

$f'(x)>0\Leftrightarrow 2x-1>0\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{2}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f\left(\frac{1}{2}\right)$ Ολ.ελαχ.	$\nearrow$	

Με βάση τον παραπάνω πίνακα μονοτονίας,στο διάστημα $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα και στο διάστημα $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ είναι γνησίως αύξουσα.Άρα για $x=\dfrac{1}{2}$ η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$.

Γ2. $f(2)=3$ και $f'(2)=3$.

Στο σημείο Α η γραφική παράσταση της f δέχεται εφαπτομένη ε με εξίσωση $y=f'(2)x+\kappa\Leftrightarrow$
$y=3x+\kappa$.

$A\in\varepsilon\Leftrightarrow f(2)=3.2+\kappa\Leftrightarrow 3=6+\kappa\Leftrightarrow\kappa=-3$.

Άρα $\varepsilon: y=3x-3$.

Γ3. Κοινό σημείο της ε με τον άξονα $x'x$.

$y=0 \Leftrightarrow 3x-3=0 \Leftrightarrow x=1$.Άρα η ε και ο $x'x$ έχουν κοινό σημείο το $K(1,0)$.

Κοινό σημείο της ε με τον άξονα $y'y$.

Για $x=0$ από την εξίσωση της ε παίρνουμε $y=-3$.Άρα η ε και ο $y'y$ έχουν κοινό σημείο το $\Lambda(0,-3)$.

Γ4. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{f(x)}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left(\sqrt{x^2-x+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=$

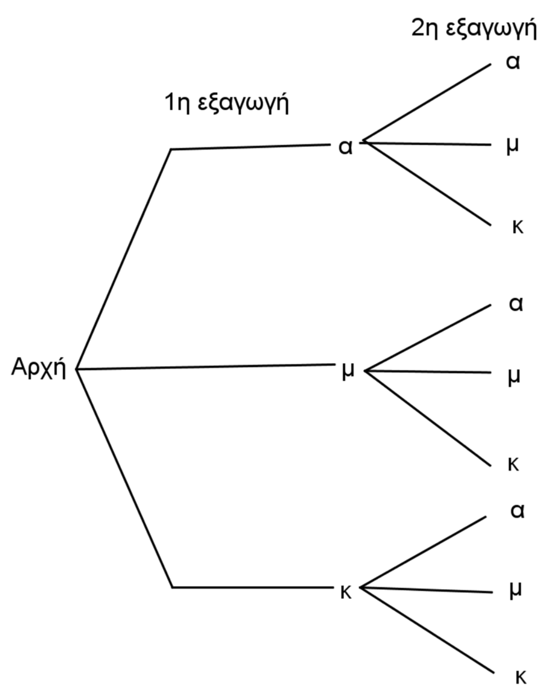
$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-x+1-1}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{x}{\sqrt{x^2-x+1}+1}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{f(x)}-1}{x-1}=\frac{1}{2}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θέτουμε: $\text{Άσπρη μπάλα}=\alpha, \text{Μαύρη μπάλα}=\mu$ και $\text{Κόκκινη μπάλα}=\kappa$.

Το ζητούμενο δεντροδιάγραμμα είναι το παρακάτω:



Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι:

$\Omega=\{(\alpha,\alpha),(\alpha,\mu),(\alpha,\kappa).(\mu,\alpha),(\mu,\mu),(\mu,\kappa),(\kappa,\alpha),(\kappa,\mu),(\kappa,\kappa)\}$.

Δ2 . $A=\{(\alpha,\mu),(\mu,\mu),(\kappa,\mu)\}$, $B=\{(\alpha,\mu),(\alpha,\kappa),(\mu,\alpha),(\mu,\kappa).(\kappa,\alpha).(\kappa,\mu)\}$.

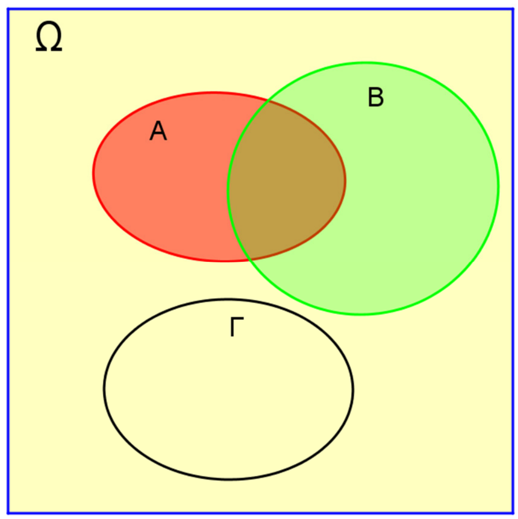
Δ3. $P(A)=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$.Άρα $P(A')=1-P(A)=1-\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow P(A')=\dfrac{2}{3}$.

$A\cap B=\{(\alpha,\mu),(\kappa,\mu)\}$.Άρα $P(A\cap B)=\dfrac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}=\dfrac{2}{9}$.

$A-B=\{(\mu,\mu)\}$.Άρα $P(A-B)=\dfrac{N(A-B)}{N(\Omega)}=\dfrac{1}{9}$.

$B-A=\{(\alpha,\kappa),(\mu,\alpha),(\mu,\kappa),(\kappa,\alpha)\}$.Άρα $P(B-A)=\dfrac{N(B-A)}{N(\Omega)}=\dfrac{4}{9}$.

Δ3. A,Γ ασυμβίβαστα και B,Γ ασυμβίβαστα.Έτσι έχουμε το παρακάτω διάγραμμα Venn .



Το ενδεχόμενο $(A\cup B)'$ είναι το κίτρινο μέρος του Ω .

Άρα $\Gamma\subseteq(A\cup B)'\Rightarrow P(\Gamma)\le P\left[(A\cup B)'\right]$ (1).

$A\cup B=\{(\alpha,\mu),(\mu,\mu),(\kappa,\mu),(\alpha,\kappa),(\mu,\alpha),(\mu,\kappa).(\kappa,\alpha)\}\Rightarrow(A\cup B)'=\{(\alpha,\alpha),(\mu,\mu)\}\Rightarrow$

$P\left(\left[(A\cup B)'\right]\right)=\dfrac{2}{9}$.Άρα $(1)\Rightarrow P(\Gamma)\le\dfrac{2}{9}\Rightarrow P(\Gamma)_{max}=\dfrac{2}{9}$.