

## ΜΑΓΙΣΣΑ ΤΗΣ ΑΝΙΕ ΣΙ (Agnesi)

Πρόκειται για μία καμπύλη που είχε μελετηθεί από τον Pierre Fermat (1601-1665).

Ο Λουίτζι Γκουίντο Γκράντι (1671-1742), καθηγητής μαθηματικών στο πανεπιστήμιο της Πίζας, ονόμασε την καμπύλη, λόγω της μορφής της, *versiera* («γυριστή» από το λατινικό *vertere* που σημαίνει «γυρίζω»). Στην ιταλική γλώσσα υπάρχει και η λέξη *aversiera* που σημαίνει «γυναίκα του διαβόλου». Όταν η Ιταλίδα φιλόσοφος και μαθηματικός Maria Agnesi (1718-1799) διαπραγματεύτηκε στο βιβλίο της "Instituzioni Analitiche" την καμπύλη του Fermat, οι κατοπινοί μεταφραστής του έργου της αντί να χρησιμοποιήσουν την ονομασία του Γκράντι, από λάθος μετάφραση χρησιμοποίησαν τη λέξη *aversiera*. Έτσι η καμπύλη του Fermat έμεινε με την ονομασία «μάγισσα της Ανιέσι».

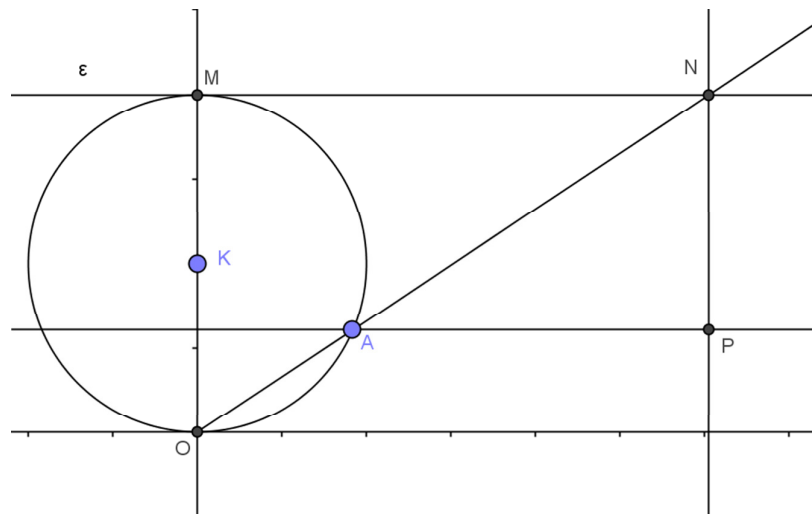
Αφορμή για το άρθρο αυτό είναι το ερώτημα  $B_4$  των θεμάτων Μαθηματικά Προσανατολισμού 2016. Η γραφική παράσταση του  $B_4$  αν «αναποδογυριστεί» μοιάζει με τη «μάγισσα της Ανιέσι».

### Πρόβλημα

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων  $Ox\psi$  θεωρούμε κύκλο  $(K, \alpha)$ ,  $\alpha > 0$  με  $K(0, \alpha)$  και την εφαπτομένη του  $\varepsilon$  στο σημείο του  $M(0, 2\alpha)$ . Έστω  $A$  ένα τυχαίο σημείο του κύκλου διαφορετικό του  $O$ . Η ημιευθεία  $OA$  τέμνει την  $\varepsilon$  στο σημείο  $N$ . Από το  $A$  φέρουμε παράλληλο προς τον άξονα  $\chi'\chi$  που τέμνει την παράλληλο από το  $N$  προς τον άξονα  $\psi'\psi$  στο σημείο  $P$ . Αν το σημείο  $A$  διαγράφει τον κύκλο, να βρείτε τη γραμμή που διαγράφει το σημείο  $P$ .

Λύση

1<sup>ος</sup> τρόπος: Αναλυτική προσέγγιση



Έστω τυχαία θέση του  $A$  πάνω στον κύκλο διαφορετική του  $M$  και του  $O$ .

Η εξίσωση της  $OA$  είναι:  $OA: \psi = \lambda \chi, \lambda \neq 0$ .

Επίσης η εξίσωση του κύκλου  $(K, \alpha)$  είναι:  $C: \chi^2 + (\psi - \alpha)^2 = \alpha^2$ .

Οι συντεταγμένες του σημείου A προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} \psi = \lambda\chi \\ \chi^2 + (\psi - \alpha)^2 = \alpha^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi = \lambda\chi \\ \chi = \frac{2\alpha\lambda}{1+\lambda^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi = \frac{2\alpha\lambda^2}{1+\lambda^2} \\ \chi = \frac{2\alpha\lambda}{1+\lambda^2} \end{cases} . \text{Άρα } A \left( \frac{2\alpha\lambda}{1+\lambda^2}, \frac{2\alpha\lambda^2}{1+\lambda^2} \right) .$$

Η τεταγμένη του A είναι τεταγμένη και του P.

Οι συντεταγμένες του N προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} \psi = 2\alpha \\ \psi = \lambda\chi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi = 2\alpha \\ \chi = \frac{2\alpha}{\lambda} \end{cases} . \text{Άρα } N \left( \frac{2\alpha}{\lambda}, 2\alpha \right) .$$

Η τετμημένη του N είναι τετμημένη και του P.

$$\text{Άρα } P \left( \frac{2\alpha}{\lambda}, \frac{2\alpha\lambda^2}{1+\lambda^2} \right) .$$

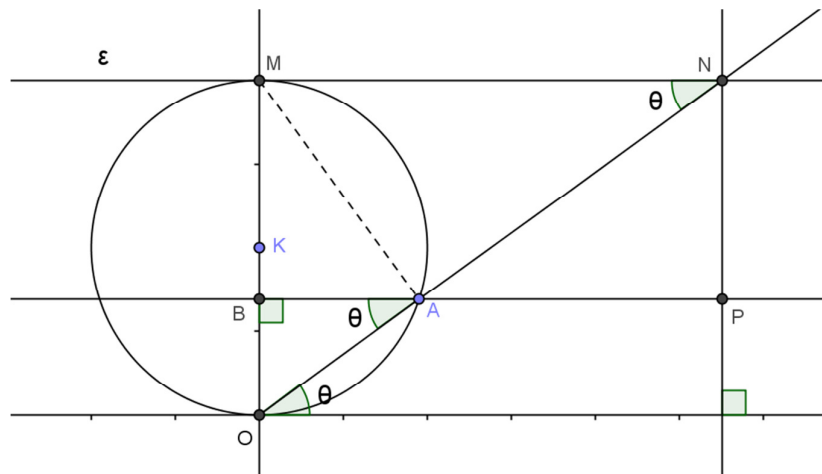
Έστω  $(\chi, \psi)$  τυχαίο από τα σημεία P, τότε για κάποια τιμή του  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  έχουμε:

$$\begin{cases} \chi = \frac{2\alpha}{\lambda} \neq 0 \\ \psi = \frac{2\alpha\lambda^2}{1+\lambda^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{2\alpha}{\chi} \\ \psi = \frac{\frac{8\alpha^3}{\chi^2}}{1 + \frac{4\alpha^2}{\chi^2}} \Leftrightarrow \psi = \frac{8\alpha^3}{\chi^2 + 4\alpha^2} \end{cases} \quad (1)$$

Παρατηρούμε ότι και οι συντεταγμένες του M επαληθεύουν την (1),

Άρα το σημείο P διαγράφει την καμπύλη με εξίσωση την (1). Η καμπύλη αυτή ονομάζεται “Μάγισσα της Agnesi” και είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \frac{8\alpha^3}{x^2 + 4\alpha^2}, x \in \mathbb{R}$ .

2<sup>ος</sup> τρόπος:



Έστω  $\theta$  η γωνία που σχηματίζει η ημιευθεία OA με τον άξονα  $\chi'\chi$ . Λόγω των παραλληλίων

$\widehat{OAB} = \widehat{ANM} = \theta$ , με  $0 < \theta < \pi$ . Έστω  $P(x(\theta), y(\theta))$ .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο MON έχουμε:  $\sigma\varphi\theta = \frac{MN}{OM} = \frac{x(\theta)}{2\alpha} \Leftrightarrow x(\theta) = 2\alpha\sigma\varphi\theta$ .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο BOA έχουμε:  $\eta\mu\theta = \frac{OB}{OA} = \frac{y(\theta)}{OA} \Leftrightarrow y(\theta) = OA\eta\mu\theta$  (1').

$\widehat{MAO} = 90^\circ$ , ως εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο,

$\widehat{OMA} = \widehat{OAB} = \theta$ , ως οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες.

Στο τρίγωνο AOM έχουμε:  $\eta\mu\theta = \frac{OA}{OM} \Leftrightarrow \eta\mu\theta = \frac{OA}{2\alpha} \Leftrightarrow OA = 2\alpha\eta\mu\theta$  (2).

(1')  $\Leftrightarrow y(\theta) = 2\alpha\eta\mu^2\theta$ .

Άρα  $P(2\alpha\sigma\varphi\theta, 2\alpha\eta\mu^2\theta)$ .

Έστω  $(x, y)$  τυχαίο από τα σημεία  $P$ , τότε για κάποια τιμή του  $\theta \in (0, \pi)$  έχουμε:

$$\begin{cases} x = 2\alpha\sigma\varphi\theta \\ y = 2\alpha\eta\mu^2\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma\varphi\theta = \frac{x}{2\alpha} \\ \eta\mu^2\theta = \frac{y}{2\alpha} > 0 \Rightarrow y > 0 \end{cases} \text{ . Όμως } 1 + \sigma\varphi^2\theta = \frac{1}{\eta\mu^2\theta} \Leftrightarrow 1 + \frac{x^2}{4\alpha^2} = \frac{2\alpha}{y} \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{8\alpha^3}{x^2 + 4\alpha^2} .$$

Άρα το σημείο  $P$  κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \frac{8\alpha^3}{x^2 + 4\alpha^2}, x \in \mathbb{R}$ .

**Σημείωση:** Οι συντεταγμένες του  $P$  είναι η παραμετρική έκφραση της “Μάγισσας της Agnesi”.

### Για τη γραφική παράσταση της $f$

#### ► Μονοτονία-Ακρότατα της $f$

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = -\frac{16\alpha^3 x}{(x^2 + 4\alpha^2)^2} .$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ . } f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ και } f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 0 \text{ .}$$

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	$f(0) = 2\alpha$ ολ.μέγιστο	↘

Η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(-\infty, 0]$  και γνησίως φθίνουσα στο  $[0, +\infty)$ .

Για  $x = 0$  παρουσιάζει ολικό μέγιστο το  $f(0) = 2\alpha$ .

► **Κυρτότητα – Σημεία καμπής της  $C_f$**

Η  $f'$  είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$$f''(x) = \dots = \frac{16\alpha^3(3x^2 - 4\alpha^2)}{(x^2 + 4\alpha^2)^3}.$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4\alpha^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3}\alpha^2 \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}\alpha.$$

$x$	$-\infty$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}\alpha$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}\alpha$	$+\infty$	
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↪	$f\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\alpha\right)$ σημ.καμπής	↻	$f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\alpha\right)$ σημ.καμπής	↪

Η  $f$  είναι κυρτή στα διαστήματα  $\left(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\alpha\right]$ ,  $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\alpha, +\infty\right)$  και κοίλη στο διάστημα  $\left[-\frac{2\sqrt{3}}{3}\alpha, \frac{2\sqrt{3}}{3}\alpha\right]$ .

Η γραφική παράσταση της  $f$  παρουσιάζει δύο σημεία καμπής τα  $\text{K}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\alpha, \frac{3a}{2}\right)$ ,  $\Lambda\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\alpha, \frac{3a}{2}\right)$ .

► **Ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$**

Η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , οπότε η  $C_f$  δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . Άρα ο άξονας  $\chi\chi$  είναι ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $-\infty$  και στο  $+\infty$

► **Γραφική παράσταση της  $f$**

Η  $f$  είναι άρτια, οπότε η  $C_f$  είναι συμμετρική ως προς τον άξονα  $\psi\psi$ .

Με βάση τα παραπάνω έχουμε την παρακάτω γραφική παράσταση της  $f$ .

