ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΤΕΤΑΡΤΗ 18 ΜΑΪΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Μονάδες 7

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = G(\alpha)-G(\beta)$.

β) Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

γ) Κάθε συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, είναι σταθερή στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

δ) Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση $y=f(x)$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.

ε) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή Μ και μια ελάχιστη τιμή m.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f.

Μονάδες 6

Β2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Μονάδες 9

Β3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 7

Β4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα **Β1**, **Β2**, **Β3** να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό)

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2}-x^2-1=0$, $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Γ2. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση $f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

Γ3. Αν $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$, $x\in\mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι η f είναι κυρτή.

Μονάδες 4

Γ4. Αν f είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **Γ3**, να λυθεί η εξίσωση:

$$f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)=f(x+3)-f(x)$$

όταν $x\in[0,+\infty)$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

- $\displaystyle\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)ημx\,dx = π$
- $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{ημx}=1$
- $e^{f(x)}+x=f\left(f(x)\right)+e^{x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(π) = π$ (μονάδες 4) και $f'(0)=1$ (μονάδες 3).

Μονάδες 7

Δ2. **α)** Να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο $\mathbb{R}$. (μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (μονάδες 2)

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{ημx+συνx}{f(x)}$. **Μονάδες 6**

Δ4. Να δείξετε ότι $\displaystyle 0<\int_1^{e^{π}}\frac{f(\ln x)}{x}dx<π^2$. **Μονάδες 6**

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Α Π Α Ν Τ Η Σ Ε Ι Σ

ΘΕΜΑ Α

Α1,Α2,Α3 βλέπε σχ.βιβλίο.

Α4. α $\rightarrow$ **Λάθος**

β $\rightarrow$ **Σωστό**

γ $\rightarrow$ **Λάθος**

δ $\rightarrow$ **Σωστό**

ε $\rightarrow$ **Σωστό**

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=\frac{2x(x^2+1)-2x^3}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}\ .$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$. $f'(x)>0 \Leftrightarrow x>0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(0)=0$ ολ.ελαχ.	$\nearrow$	

Στο $(-\infty,0]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα και στο $[0,+\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα.
Στο 0 η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(0)=0$.

Β2. Η f' είναι παραγωγίσιμη με $f''(x)=\dfrac{2(x^2+1)^2-8x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4}=\dfrac{2(x^2+1)-8x^2}{(x^2+1)^3}=\dfrac{2(-3x^2+1)}{(x^2+1)^3}$.

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↷	$f(-\frac{\sqrt{3}}{3})=\frac{1}{4}$ Σ.Κ	↺	$f(-\frac{\sqrt{3}}{3})=\frac{1}{4}$ Σ.Κ	↷

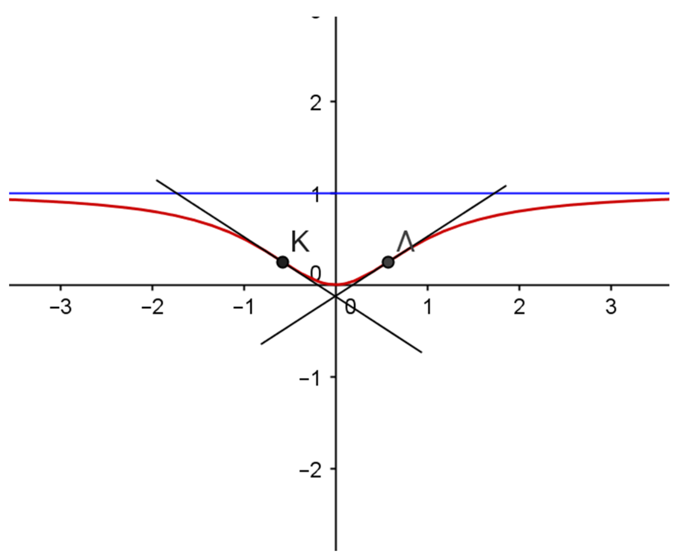
Η f είναι κυρτή στο διάστημα $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ και κοίλη στα διαστήματα $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right],\left[\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ Η C_f έχει δύο σημεία καμπής τα $\mathrm{K}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right),\Lambda\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)$.

Β3. Η f είναι συνεχής στο R ,οπότε η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.Άρα η ευθεία με εξίσωση $\psi=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Όμοια η ευθεία $\psi=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Β4. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι f είναι άρτια οπότε η C_f θα είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $\psi'\psi$ και με βάση τα συμπεράσματα των Β1,Β2,Β3 ,η f έχει την παρακάτω γραφική παράσταση



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^{x^2}-x^2-1, x\in R.$

Η g είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$g'(x)=2xe^2-2x=2x\left(e^{x^2}-1\right)$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow x=0$.

Αν $\chi<0\Rightarrow\chi^2>0\Rightarrow e^{x^2}-1>0$.Άρα $g'(x)<0$.

Αν $\chi>0\Rightarrow x^2>0\Rightarrow e^{x^2}>1\Rightarrow e^{x^2}-1>0$ Άρα $g'(x)>0$.

Η g είναι συνεχής στο 0 ,συνεπώς το $g(0)=0$ είναι ολικό ελάχιστο της g .

Άρα $g(x)\geq g(0)=0$.Το "=" ισχύει μόνο στο 0 .Συνεπώς $e^{x^2}-x^2-1=0\Leftrightarrow g(x)=0\Leftrightarrow x=0$.

Γ2. Για τη συνάρτηση g του Γ_1 έχουμε $g(x)>0\Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1>0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

$f^2(x)=\left(e^{2x}-x^2-1\right)^2\Leftrightarrow|f(x)|=\left|e^{2x}-x^2-1\right|\Leftrightarrow|f(x)|=e^{2x}-x^2-1$

Στο $(-\infty,0)$ η f είναι συνεχής με $f(x)\neq 0$ οπότε στο διάστημα αυτό η f διατηρεί σταθερό πρόσημο .

Άρα στο $(-\infty,0)$: $\begin{cases} f(x)=e^{x^2}-x^2-1 \ \alpha\nu\ f(x)>0 \ (1) \\ \acute{\eta} \\ f(x)=-(e^{x^2}-x^2-1) \ \alpha\nu\ f(x)<0 \ (2) \end{cases}$.

Όμοια η f στο $(0,+\infty)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Άρα στο $(0,+\infty)$: $\begin{cases} f(x)=e^{x^2}-x^2-1 \ \alpha\nu\ f(x)>0 \ (3) \\ \acute{\eta} \\ f(x)=-(e^{x^2}-x^2-1) \ \alpha\nu\ f(x)<0 \ (4) \end{cases}$.

Δεδομένου ότι $f(0)=0$ (5) από τους συνδυασμούς των (1),(2),(3),(4) και της (5) έχουμε τις παρακάτω συναρτήσεις:

— $(1),(3),(5)\Rightarrow f(x)=e^{2x}-x^2-1, x\in R$.

— $(1),(4),(5)\Rightarrow f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1, x\leq 0 \\ -(e^{x^2}-x^2-1), x>0 \end{cases}$.

— $(2),(3),(5)\Rightarrow f(x)=\begin{cases} -(e^{x^2}-x^2-1), x\leq 0 \\ e^{x^2}-x^2-1, x>0 \end{cases}$.

— $(2),(4),(5)\Rightarrow f(x)=-(e^{x^2}-x^2-1), x\in R$.

Γ3. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$f'(x)=2xe^{x^2}-2x$ και $f''(x)=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}-2=2\left(e^{x^2}-1\right)+4x^2e^{x^2}$.

Για κάθε $\chi\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ είναι $x^2>0\Leftrightarrow e^{x^2}>1\Leftrightarrow e^{x^2}>1$.Άρα $f''(x)>0$ και δεδομένου ότι η f' είναι συνεχής στο 0 ,ή f' είναι γνησίως αύξουσα στο R ,οπότε η f είναι κυρτή.

Γ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x+3)-f(x),x\in[0,+\infty)$.
Η h είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με $h'(x)=f'(x+3)-f'(x)$
Η f' είναι γνησίως αύξουσα και έχουμε:
Για κάθε $x\in[0,+\infty)$ $x<x+3\Rightarrow f'(x)<f'(x+3)\Rightarrow h'(x)>0$.Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα,οπότε είναι "1-1".
Για $x\in[0,+\infty)$

$f\left(|\eta\mu x|+3\right)-f\left(|\eta\mu\chi|\right)=f(x+3)-f(x)\Leftrightarrow h\left(|\eta\mu\chi|\right)=h(x)\overset{h\,\text{"1-1"}}{\Leftrightarrow}|\eta\mu\chi|=x=|x|\Leftrightarrow x=0$.(Γνωρίζουμε ότι: Για κάθε $x\in R$ $|\eta\mu x|\le|x|$.Το "=" ισχύει μόνο στο 0 .)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\int_0^\pi\left(f(x)+f''(x)\right)\eta\mu x\,dx=\pi\Leftrightarrow\int_0^\pi f(x)\eta\mu x\,dx+\int_0^\pi f''(x)\eta\mu x\,dx=\pi\Leftrightarrow$

$\int_0^\pi f(x)\eta\mu x\,dx+\left[f'(x)\eta\mu\chi\right]_0^\pi-\int_0^\pi f'(x)\sigma\upsilon\nu\chi\,dx=\pi\Leftrightarrow$

$\int_0^\pi f(x)\eta\mu x\,dx-\left[f(x)\sigma\upsilon\nu\chi\right]_0^\pi-\int_0^\pi f(x)\eta\mu x\,dx=\pi\Leftrightarrow-\left[f(x)\sigma\upsilon\nu\chi\right]_0^\pi=\pi\Leftrightarrow$

$-\left(-f(\pi)-f(0)\right)=\pi$ (1).

Κοντά στο 0 θέτουμε $\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}=g(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)\eta\mu\chi$. Η f ως παραγωγίσιμη είναι συνεχής οπότε $\lim_{x\to0}f(x)=0\Rightarrow f(0)=0$. Άρα (1) $\Rightarrow f(\pi)=\pi$.

Η f' ως παραγωγίσιμη είναι συνεχής. $\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu\chi}=f'(0)\Rightarrow f'(0)=1$.

Δ2. α) Αν δεχτούμε προς στιγμή ότι η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0\in R$,τότε από το θεώρημα του Fermat $f'(x_0)=0$.
$e^{f(x)}+x=f(f(x))+e^x\Rightarrow f'(x)e^{f(x)}+1=f'(x)f'(f(x))+e^x$ (2) για κάθε $x\in R$.
Για $x=x_0$ από τη (2) παίρνουμε $e^{x_0}=1\Leftrightarrow x_0=0$,δηλαδή $f'(0)=0$.Άτοπο αφού $f'(0)=1$.
Άρα η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο R.
β) $(2)\Leftrightarrow f'(x)\left(e^{f(x)}-f'(f(x)\right)=e^x-1$ (3).

Για $x\neq0\Rightarrow e^x-1\neq0\overset{(3)}{\Rightarrow}f'(x)\left(e^x-f'(f(x))\right)\neq0\Rightarrow f'(x)\neq0$ και αφού $f'(0)\neq0$ έχουμε

$f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$.Άρα η f' διατηρεί στο R σταθερό πρόσημο και αφού $f'(0) > 0$ είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in R$.Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα.

Δ3. Αφού η $f(R) = R$ και η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής θα έχουμε $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$.Άρα αν $\mathrm{M} > 0$,τότε για $x > \mathrm{M}$, $f(x) > 0$

Για $x > \mathrm{M}$, $\left|\frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu\chi}{f(x)}\right| = \frac{1}{|f(x)|}|\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi| \leq \frac{1}{|f(x)|}\left(|\eta\mu x| + |\sigma\upsilon\nu x|\right) \leq \frac{2}{f(x)} \Rightarrow$

$\left|\frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu\chi}{f(x)}\right| \leq \frac{2}{f(x)} \Leftrightarrow -\frac{2}{f(x)} \leq \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu\chi}{f(x)} \leq \frac{2}{f(x)}$.Είναι $\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{f(x)} = 0$,οπότε από το κριτήριο της περεμβολής $\lim_{x \to +\infty} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} = 0$.

Δ4. Για $1 \leq x \leq e^{\pi} \Rightarrow 0 \leq \ln x \leq \pi \overset{f\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha}{\Rightarrow} f(0) \leq f(\ln x) \leq f(\pi) \Rightarrow$

$0 \leq f(\ln x) < \pi \Rightarrow 0 \leq \frac{f(\ln x)}{x} \leq \frac{\pi}{x}$ (4).

Η (4) δεν ισχύει παντού ως ισότητα στο $[1, \mathrm{e}^{\pi}]$ οπότε έχουμε :

$\int_1^{e^{\pi}} 0\,dx < \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x}dx < \pi\int_1^{e^{\pi}} \frac{1}{x}dx = \pi\left[\ln x\right]_1^{e^{\pi}} = \pi^2 \Rightarrow 0 < \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x}dx < \pi^2$.