

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ(4)

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Αν A και A' είναι δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδείξετε ότι για τις πιθανότητες τους ισχύει:

$$P(A') = 1 - P(A).$$

Μονάδες 7

- A2.** Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων.

Μονάδες 4

- A3.** Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$;

Μονάδες 4

- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν A και B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$, τότε για τις πιθανότητες τους ισχύει $P(A) \leq P(B)$.

β) Ο σταθμισμένος αριθμητικός μέσος ή σταθμικός μέσος είναι μέτρο διασποράς.

γ) Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες, τότε ισχύει ότι:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

δ) Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

ε) Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 1, x \in \mathbb{R}$.

Β1. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 9

Β2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(0, f(0))$.

Μονάδες 8

Β3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f'(x) - 12}{x + 1}$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Μεταξύ των οικογενειών με τρία παιδιά επιλέγουμε τυχαία μία οικογένεια και εξετάζουμε τα παιδιά της ως προς το φύλο και ως προς τη σειρά γέννησής τους.

Γ1. Να προσδιορίσετε το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος χρησιμοποιώντας ένα δένδροδιάγραμμα.

Μονάδες 4

Γ2. Να παρασταθούν με αναγραφή των στοιχείων τους τα ενδεχόμενα που προσδιορίζονται από την αντίστοιχη ιδιότητα:

A: «το πρώτο παιδί είναι κορίτσι»

B: «ο αριθμός των κοριτσιών υπερβαίνει τον αριθμό των αγοριών»

Γ: «τα δύο πρώτα παιδιά είναι του ίδιου φύλου».

Μονάδες 6

Γ3. Υποθέτουμε ότι ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από ισοπίθانا απλά ενδεχόμενα.

α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:

$$\Delta = A \cap B, \quad E = A \cup B, \quad Z = \Gamma - E.$$

(μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:

H: «δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A, B»

Θ: «πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα A, B».

(μονάδες 6)

Μονάδες 15

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ
ΝΕΟ & ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΘΕΜΑ Δ

Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν n υπολογιστές για να τρέξουν ένα πρόγραμμα, έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 ισοπλατείς κλάσεις πλάτους c , όπως στον παρακάτω πίνακα :

Χρόνος (σε λεπτά)	Κεντρική Τιμή x_i	Συχνότητα v_i
[8 ,)		20
[,)	14	15
[,)		10
[,)		v_4
ΣΥΝΟΛΟ		$v = \dots\dots\dots$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $c=4$.

Μονάδες 4

Δ2. Αν η μέση τιμή των χρόνων είναι $\bar{x}=14$, να αποδείξετε ότι $v_4=5$ (μονάδες 4) και στη συνέχεια να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Δ3. Αν οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανομημένες σε κάθε κλάση, να βρείτε πόσοι υπολογιστές χρειάστηκαν τουλάχιστον 9 λεπτά για να τρέξουν το πρόγραμμα.

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι η τυπική απόκλιση των χρόνων είναι $s=4$ και να εξετάσετε αν το δείγμα των χρόνων είναι ομοιογενές.

Μονάδες 6

Δ5. Αντικαθιστούμε τον επεξεργαστή κάθε υπολογιστή με έναν ταχύτερο και βρίσκουμε ότι κάθε υπολογιστής τρέχει τώρα το πρόγραμμα στο 80% του χρόνου που χρειαζόταν πριν. Να εξετάσετε ως προς την ομοιογένεια το καινούργιο δείγμα χρόνων.

Μονάδες 4

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας, να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.30 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A₁,A₂,A₃ βλέπε σχ. Βιβλίο.

A₄. α → Σωστό

β → Λάθος

γ → Σωστό

δ → Σωστό

ε → Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B₁. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x) = x^2 - 5x + 6$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 3.$$

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{11}{3}$	↘	$\frac{7}{2}$	↗

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 2], [3, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[2, 3]$

Έτσι η f για $x=2$ παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** το $f(2) = \frac{11}{3}$ και για $x=3$ παρουσιάζει

τοπικό ελάχιστο το $f(3) = \frac{7}{2}$.

B₂. $f(0) = -1$, $f'(0) = 6$.

Έστω ε η ζητούμενη εφαπτομένη. Η εξίσωση της ε είναι $\psi = f'(0)x + k \Leftrightarrow \psi = 6x + k$.

Οι συντεταγμένες του σημείου A οφείλουν να επαληθεύουν την εξίσωση της ε , οπότε

$$A \in \varepsilon \Leftrightarrow f(0) = k \Leftrightarrow k = -1. \text{ Άρα η εξίσωση της } \varepsilon \text{ είναι } \boxed{\psi = 6x - 1}.$$

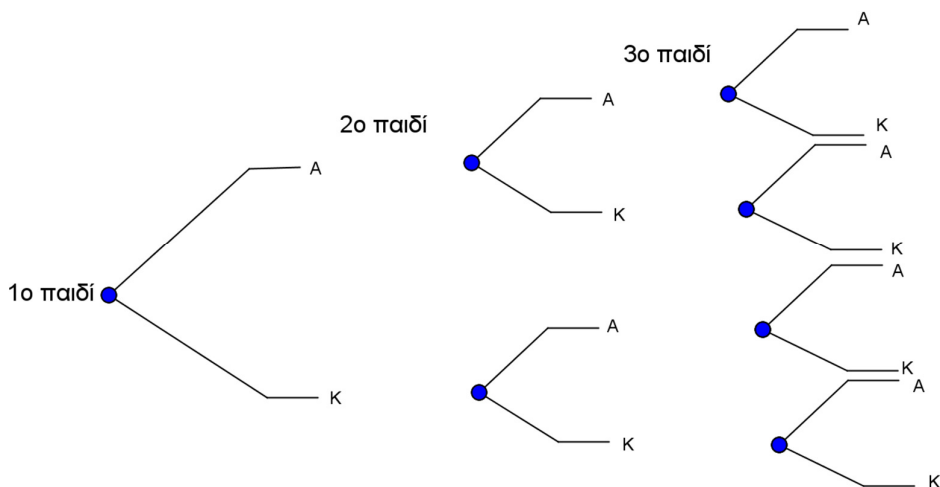
B₃. $A = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f'(x) - 12}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 5x - 6}{x + 1}$. Το τριώνυμο $x^2 - 5x - 6$ έχει ρίζες τις $-1, 6$ οπότε

$$\text{γράφεται } x^2 - 5x - 6 = (x + 1)(x - 6).$$

$$\text{Άρα } A = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-6)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x-6) \Leftrightarrow \boxed{A = -7} .$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Συμβολίζουμε με A το αγόρι και K το κορίτσι.



Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι:

$$\Omega = \{AAA, AAK, AKA, AKK, KAA, KAK, KKA, KKK\} .$$

$$\Gamma_2. \alpha) A = \{KAA, KAK, KKA, KKK\} .$$

$$B = \{AKK, KAK, KKA, KKK\} .$$

$$\Gamma = \{AAA, AAK, KKA, KKK\} .$$

Γ3. Είναι $N(\Omega) = 8$

$$\Delta = \{KAK, KKA, KKK\} \Rightarrow N(\Delta) = 3 .$$

$$P(\Delta) = \frac{N(\Delta)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow \boxed{P(\Delta) = \frac{3}{8}} .$$

$$E = \{KAA, KAK, KKA, KKK, AKK\} \Rightarrow N(E) = 5 .$$

$$P(E) = \frac{N(E)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow \boxed{P(E) = \frac{5}{8}} .$$

$$Z = \{AAA, AAK\} \Rightarrow N(Z) = 2 .$$

$$P(Z) = \frac{N(Z)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow P(Z) = \frac{2}{8} \Leftrightarrow \boxed{P(Z) = \frac{1}{4}} .$$

$$\beta) P(H) = P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(E) \Leftrightarrow P(H) = 1 - \frac{5}{8} \Leftrightarrow \boxed{P(H) = \frac{3}{8}} ,$$

$P(\Theta) = P[(A - B) \cup (B - A)]$. Τα ενδεχόμενα $A - B, B - A$ είναι ασυμβίβαστα οπότε

$$P(\Theta) = P(A - B) + P(B - A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(B \cap A) \Leftrightarrow$$

$$P(\Theta) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$P(\Theta) = P(E) - P(\Delta) = \frac{5}{8} - \frac{3}{8} \Leftrightarrow \boxed{P(\Theta) = \frac{1}{4}}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. 1^η κλάση: $[8, 8 + c)$

2^η κλάση: $[8 + c, 8 + 2c)$. Πρέπει $\frac{(8 + c) + (8 + 2c)}{2} = 14 \Leftrightarrow 16 + 3c = 28 \Leftrightarrow 3c = 12 \Leftrightarrow \boxed{c = 4}$.

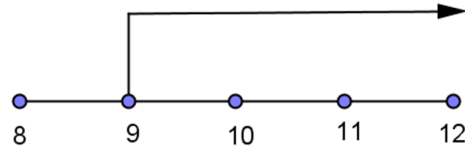
Δ2. Επειδή το πλάτος των κλάσεων είναι 4 έχουμε τον πίνακα:

Χρόνος (σε λεπτά)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα v_i	$x_i v_i$
$[8, 12)$	10	20	200
$[12, 16)$	14	15	210
$[16, 20)$	18	10	180
$[20, 24)$	22	v_4	$22v_4$
ΣΥΝΟΛΟ		$v = 45 + v_4$	$590 + 22v_4$

Είναι $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^v x_i v_i}{v} \Leftrightarrow 14 = \frac{590 + 22v_4}{45 + v_4} \Leftrightarrow 630 + 14v_4 = 590 + 22v_4 \Leftrightarrow 8v_4 = 40 \Leftrightarrow \boxed{v_4 = 5}$.

Χρόνος (σε λεπτά)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα v_i
$[8, 12)$	10	20
$[12, 16)$	14	15
$[16, 20)$	18	10
$[20, 24)$	22	5
ΣΥΝΟΛΟ		50

Δ3. Χωρίζουμε τη κλάση $[8, 12)$ σε τέσσερα ίσα τμήματα



Επειδή οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανομημένες στις κλάσεις, το ζητούμενο πλήθος των υπολογιστών είναι το πλήθος των υπολογιστών που βρίσκονται στα $\frac{3}{4}$ της 1ης κλάσης και στις υπόλοιπες κλάσεις, δηλαδή $\frac{3}{4}20 + 15 + 10 + 5 = \boxed{45}$ υπολογιστές.

$$\Delta 4. s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 v_1 + (x_2 - \bar{x})^2 v_2 + (x_3 - \bar{x})^2 v_3 + (x_4 - \bar{x})^2 v_4}{v} \Leftrightarrow$$

$$s^2 = \frac{16 \cdot 20 + 0,15 + 16 \cdot 10 + 64 \cdot 5}{50} = \frac{320 + 160 + 320}{50} = \frac{800}{50} \Leftrightarrow s^2 = 16.$$

$$s = \sqrt{s^2} \Rightarrow \boxed{s = 4}.$$

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} \Rightarrow CV > \frac{1}{10}. \text{ Άρα το δείγμα των χρόνων δεν είναι ομοιογενές.}$$

$\Delta 5.$ Αν $t_i, i = 1, \dots, 50$ είναι οι νέοι χρόνοι, τότε $t_i = 0,8x_i$. Η νέα μέση τιμή είναι $\bar{t} = 0,8\bar{x}$ και η νέα τυπική απόκλιση $s_1 = |0,8|s \Leftrightarrow s_1 = 0,8s$.

$$CV' = \frac{s_1}{\bar{t}} = \frac{0,8s}{0,8\bar{x}} = \frac{s}{\bar{x}} = CV > \frac{1}{10}. \text{ Άρα και το καινούργιο δείγμα χρόνων δεν είναι ομοιογενές.}$$