ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2015
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: 5(ΠΕΝΤΕ)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι

$$\left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x),\ x\in\mathbb{R}$$

Μονάδες 7

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α3. Αν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ είναι οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους ν και $w_1, w_2, \ldots, w_\nu$ είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας), να ορίσετε τον σταθμικό μέσο της μεταβλητής Χ.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0)=0$ για $x_0\in(\alpha,\beta)$, $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο διάστημα (α,β) για $x=x_0$.

β) Ένα τοπικό ελάχιστο μιας συνάρτησης στο πεδίο ορισμού της μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο.

γ) Η διακύμανση των παρατηρήσεων μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

δ) Αν για τους συντελεστές μεταβολής των δειγμάτων Α και Β ισχύει $CV_B > CV_A$, τότε λέμε ότι το δείγμα Β εμφανίζει μεγαλύτερη ομοιογένεια από το δείγμα Α.

ε) Αν Α, Β είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, τότε η έκφραση «η πραγματοποίηση του Α συνεπάγεται την πραγματοποίηση του Β» δηλώνει ότι $A \subseteq B$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω Α, Β και Γ ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Οι πιθανότητες των ενδεχομένων A, $A \cap B$ και $A \cup B$ ανήκουν στο σύνολο λύσεων της εξίσωσης

$$(3x-1)\cdot(8x^2-6x+1)=0.$$

Η πιθανότητα του ενδεχομένου Γ ανήκει στο σύνολο λύσεων της εξίσωσης

$$9x^2-3x-2=0.$$

Β1. Να αποδείξετε ότι $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(A \cap B)=\frac{1}{4}$ και $P(A \cup B)=\frac{1}{2}$.

Μονάδες 5

Β2. Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(A'-B')$, καθώς επίσης και την πιθανότητα του ενδεχομένου

Δ: «πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα ενδεχόμενα Α και Β».

Μονάδες 8

Β3. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου
Ε: «πραγματοποιείται μόνο ένα από τα ενδεχόμενα Α και Β».

Μονάδες 6

Β4. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα Β και Γ είναι ασυμβίβαστα.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε ένα δείγμα ν παρατηρήσεων μιας συνεχούς ποσοτικής μεταβλητής Χ, τις οποίες ομαδοποιούμε σε 5 ισοπλατείς κλάσεις, όπως παρουσιάζονται στον **Πίνακα Ι**, όπου $f_i\%$, $i=1,2,3,4,5$ είναι οι σχετικές συχνότητες επί τοις εκατό των αντιστοίχων κλάσεων. Θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες. Δίνεται ότι :

- Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μικρότερες του 10 είναι 10%.
- Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 16 είναι 30%.
- Στο κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων, η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην 3η κλάση είναι 108^o.
- Η μέση τιμή των παρατηρήσεων του δείγματος είναι $\bar{x}=14$.

Κλάσεις	f_i%
[**8** , **10**)	
[**10** , **12**)	
[**12** , **14**)	
[**14** , **16**)	
[**16** , **18**)	

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f_1\%=10, f_2\%=10, f_3\%=30, f_4\%=20, f_5\%=30$. Δεν είναι απαραίτητο να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον **Πίνακα Ι** συμπληρωμένο.

Μονάδες 6

Γ2. Να εξετάσετε αν το δείγμα των παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.

Δίνεται ότι $\sqrt{6,6} \simeq 2,57$.

Μονάδες 7

Γ3. Έστω x_1, x_2, x_3 και x_4 τα κέντρα της $1^{ης}$, $2^{ης}$, $3^{ης}$ και $4^{ης}$ κλάσης αντίστοιχα και ν_1, ν_2, ν_3 και ν_4 οι συχνότητες της $1^{ης}$, $2^{ης}$, $3^{ης}$ και $4^{ης}$ κλάσης αντίστοιχα. Αν $\sum_{i=1}^{4} x_i \nu_i = 1780$, βρείτε το πλήθος ν των παρατηρήσεων του δείγματος.

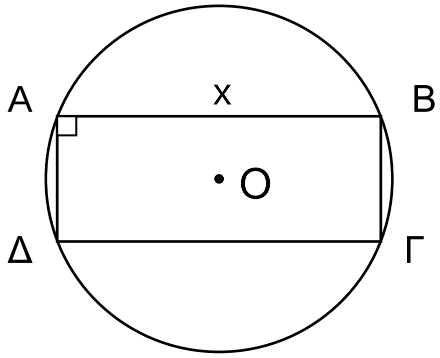
Μονάδες 5

Γ4. Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ πέντε τυχαία επιλεγμένες παρατηρήσεις διαφορετικές μεταξύ τους από το παραπάνω δείγμα ν παρατηρήσεων. Ορίζουμε ως $\bar{\alpha}$ τη μέση τιμή των πέντε αυτών παρατηρήσεων και S_α την τυπική τους απόκλιση. Εάν $\beta_i = \dfrac{\alpha_i - \bar{\alpha}}{S_\alpha}$, για i=1, 2, 3, 4, 5, να δείξετε ότι η μέση τιμή $\bar{\beta}$ του δείγματος β_i, i=1, 2, 3, 4, 5 είναι ίση με 0 και η τυπική του απόκλιση S_β είναι ίση με 1.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται κύκλος (Ο,ρ) με κέντρο Ο και ακτίνα ρ=5 και ορθογώνιο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο στον κύκλο αυτόν με πλευρά ΑΒ=x, όπως φαίνεται στο **Σχήμα Ι**.



ΣΧΗΜΑ Ι

Δ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, ως συνάρτηση του x, δίνεται από τον τύπο $f(x) = x \cdot \sqrt{100 - x^2}$, $0 < x < 10$.

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε την τιμή του x για την οποία το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ γίνεται μέγιστο. Για την τιμή αυτήν του x, δείξτε ότι το ορθογώνιο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.

Μονάδες 5

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(1+x) - \sqrt{99}}{98 \cdot x}$.

Μονάδες 8

Δ4. Έστω Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Αν P(A-B)>0, να δείξετε ότι

$$f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}}\right) \le f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}}\right).$$

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.30 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Α Π Α Ν Τ Η Σ Ε Ι Σ

Θέμα Α

Α$_1$,Α$_2$,Α$_3$ βλέπε σχολικό βιβλίο.

Α$_4$. **α.** Λάθος
β. Σωστό
γ. Λάθος
δ. Λάθος
ε. Σωστό

Θέμα Β

Αρχικά: $(3\chi-1)(8\chi^2-6\chi+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3\chi-1=0 \Leftrightarrow \chi=\dfrac{1}{3} \\ \acute{\eta} \\ 8\chi^2-6\chi+1=0 \Leftrightarrow \chi=\dfrac{1}{4} \ \acute{\eta}\ \chi=\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Το σύνολο λύσεων της παραπάνω εξίσωσης είναι $L=\left\{\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right\}$.

Β$_1$. Είναι $A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B \Rightarrow P(A\cap B)\leq P(A)\leq P(A\cup B)$.Αφού $P(A\cap B),P(A),P(A\cup B)\in L$ έχουμε $P(A\cap B)=\dfrac{1}{4},P(A)=\dfrac{1}{3},P(A\cup B)=\dfrac{1}{2}$.

Β$_2$.

- $P(A'-B')=P(A')-P(A'\cap B')=1-P(\mathrm{A})-P[(A\cup B)'] \Leftrightarrow$
  $P(A'-B')=1-P(\mathrm{A})-1+P(A\cup B)=\dfrac{1}{6}$.
- $P(\Delta)=P[(A\cap B)']=1-P(A\cap B)=\dfrac{3}{4}$.

Β$_3$. Τα ενδεχόμενα $A-B, B-A$ είναι ασυμβίβαστα.

$P(E)=P[(A-B)\cup(B-A)]=P(A-B)+P(B-A)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)-P(A\cap B)=$
$P(A\cup B)-P(A\cap B)=\dfrac{1}{4}$

Β$_4$. $9\chi^2-3\chi-2=0 \Leftrightarrow \chi=\dfrac{2}{3}\ \acute{\eta}\ \chi=-\dfrac{1}{3}$.Άρα $P(\Gamma)=\dfrac{2}{3}$.

Αν υποθέσουμε ότι τα ενδεχόμενα B,Γ είναι ασυμβίβαστα,από τον απλό προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων είναι $P(B\cup\Gamma)=P(B)+P(\Gamma)=\dfrac{13}{12}>1$. Άτοπο.Άρα τα ενδεχόμενα B,Γ δεν είναι ασυμβίβαστα.

Θέμα Γ

Γ₁. Σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε: $f_1\%=10, f_5\%=30$ και $\alpha_3=360f_3 \Leftrightarrow f_3=\frac{108}{360}=0,3\Rightarrow$

$f_3\%=30$.

Οι κεντρικές τιμές των κλάσεων είναι: $\chi_1=9, \chi_2=11, \chi_3=13, \chi_4=15, \chi_5=17$.

$\overline{\chi}=\chi_1 f_1+\chi_2 f_2+\chi_3 f_3+\chi_4 f_4+\chi_5 f_5=9.0,1+11.f_1+13.0,3+15.f_4+17.0,3\Leftrightarrow$

$11f_2+14f_4=4,1$ (1).

Έχουμε $f_1+f_2+f_3+f_4+f_5=1\Leftrightarrow f_2+f_4=0,3$ (2).Απο τη λύση του συστήματος των (1),(2) βρίσκουμε: $f_2=0,1\Rightarrow f_2\%=10$ και $f_4=0,2\Rightarrow f_4\%=20$.

Γ₂. $s^2=(\chi_1{}^2-\overline{\chi})^2 f_1+(\chi_2{}^2-\overline{\chi})^2 f_2+(\chi_3{}^2-\overline{\chi})^2 f_3+(\chi_4{}^2-\overline{\chi})^2 f_4+(\chi_5{}^2-\overline{\chi})^2 f_5\Leftrightarrow$

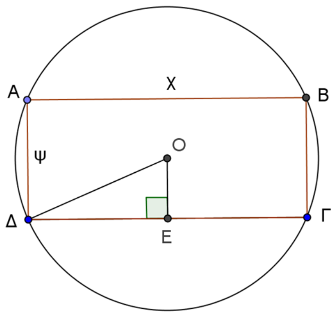
$s^2=25.0,1+9.0,1+0,3+0,2+9.0,3=6,6\Rightarrow \mathrm{s}=\sqrt{6,6}\cong 2,57$.

$CV=\frac{s}{|\overline{\chi}|}=\frac{2,57}{14}\cong 0,18>0,1$.Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Γ₃. Είναι $\overline{\chi}=\frac{\sum_{i=1}^{4}\chi_i v_i+\chi_5 v_5}{v}=\frac{1780}{v}+\chi_5 f_5\Leftrightarrow 14=\frac{1780}{v}+5,1\Leftrightarrow v=200$.

Γ₄. $\beta_i=\frac{1}{s_\alpha}.\alpha_i-\frac{\overline{\alpha}}{s_\alpha}\Rightarrow\begin{cases}\overline{\beta}=\frac{1}{s_\alpha}.\overline{\alpha}-\frac{\overline{\alpha}}{s_\alpha}=0\\ \kappa\alpha\iota\\ s_\beta=\left|\frac{1}{s_\alpha}\right|s_\alpha=\frac{1}{s_\alpha}.\mathrm{s}_\alpha=1\end{cases}$.

Θέμα Δ



Δ₁. Έστω ψ η δεύτερη διάσταση του ορθογωνίου.Φέρουμε $\mathrm{OE}\perp\Delta\Gamma$.Το OE είναι μεσοκάθετος του ΔΓ.

Είναι $0<\frac{\chi}{2}<\rho=5\Rightarrow 0<\chi<10$.

© Γιαννακόπουλος Σπύρος

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΟΔ έχουμε $(\text{OE})=\sqrt{25-\frac{\chi^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{100-\chi^2}$.

Άρα $\psi=2(\text{OE})=\sqrt{100-\chi^2}$.

Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $f(\chi)=\chi\psi=\chi\sqrt{100-\chi^2}$,$0<\chi<10$.

Δ₂. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,10)$ ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$$f'(\chi)=(\chi)'\sqrt{100-\chi^2}+\chi\left(\sqrt{100-\chi^2}\right)'=\sqrt{100-\chi^2}+\frac{1}{2\sqrt{100-\chi^2}}.(100-\chi^2)'=$$

$$\sqrt{100-\chi^2}-\frac{\chi}{\sqrt{100-\chi^2}}\Leftrightarrow f'(\chi)=\frac{2(50-\chi^2)}{\sqrt{100-\chi^2}}.$$

$f'(\chi)=0\overset{0<\chi<10}{\Leftrightarrow}\chi=5\sqrt{2}$.Το πρόσημο του $f'(\chi)$ εξαρτάται από το πρόσημο του τριωνύμου $50-\chi^2$.
Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας της f .

χ	$-\infty$	0		$5\sqrt{2}$		10	$+\infty$
$f'(\chi)$			$+$	0	$-$		
$f(\chi)$			↗	$f\left(5\sqrt{2}\right)$ ολ.μέγ.	↘		

Άρα για $\chi=5\sqrt{2}$ το εμβαδόν του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο.

Για $\chi=5\sqrt{2}$, $\psi=\sqrt{100-50}=5\sqrt{2}$,οπότε το ορθογώνιο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.

Δ₃. $f(1+\chi)=(1+\chi)\sqrt{100-(1+\chi)^2}$.

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1+\chi)-\sqrt{99}}{98\chi}=\lim_{x\to0}\frac{(1+\chi)\sqrt{100-(1+\chi)^2}-\sqrt{99}}{98\chi}=\lim_{x\to0}\frac{(1+\chi)^2\left[100-(1+\chi)^2\right]-99}{98\chi\left[(1+\chi)\sqrt{100-(1+\chi)^2}+\sqrt{99}\right]}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+2\chi+\chi^2)(99-2\chi-\chi^2)-99}{98\chi\left[(1+\chi)\sqrt{100-(1+\chi)^2}+\sqrt{99}\right]}=........=\lim_{x\to0}\frac{-\chi^3-4\chi^2+94\chi+196}{98\left[(1+\chi)\sqrt{100-(1+\chi)^2}+\sqrt{99}\right]}=$$

$$\frac{196}{98.2\sqrt{99}}=\frac{1}{\sqrt{99}}\Leftrightarrow\lim_{x\to0}f(\chi)=\frac{\sqrt{99}}{99}\ .$$

<u>**Σημείωση:**</u> Το Δ₃ μπορεί να απαντηθεί αμέσως με την παρατήρηση ότι $f(1)=\sqrt{99}$,οπότε

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1+\chi)-\sqrt{99}}{98\chi}=\frac{1}{98}\lim_{x\to0}\frac{f(1+\chi)-f(1)}{\chi}=\frac{1}{98}f'(1)=\frac{1}{\sqrt{99}}=\frac{\sqrt{99}}{99}$$

Δ₄. Είναι $A-B\subseteq A\Rightarrow P(A-B)\le P(A)$ και $P(A-B),P(A)\in(0,1]$.Η f στο $(0,1]$ είναι γνησίως φθίνουσα,οπότε $f\left(P(A-B)\right)\le f\left(P(A)\right)\Leftrightarrow P(A-B)\sqrt{100-P^2(A-B)}\le P(A)\sqrt{100-P^2(A)}\Leftrightarrow$

$$\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\le\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\quad(1).$$

Προφανώς $0<\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}<1$ και $0<\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}<1$ και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο (0,1],από την (1) προκύπτει $f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\right)\leq f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\right)$.

© Γιαννακόπουλος Σπύρος