ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΔΕΥΤΕΡΑ 25 ΜΑΪΟΥ 2015

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$,

τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό **η** μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$, τέτοιος ώστε $f(x_0)=\eta$.

Μονάδες 7

Α2. Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0;

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0\in A$ τοπικό ελάχιστο;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι συναρτήσεις $f\circ g$ και $g\circ f$, τότε ισχύει πάντοτε ότι $f\circ g = g\circ f$.

β) Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

γ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $(\text{συν}\,x)'=\text{ημ}x$.

δ) Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν ισχύει ότι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$.

ε) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=+\infty$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$|z-4|=2|z-1|.$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων αυτών των μιγαδικών αριθμών z είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ=2.

Μονάδες 7

Β2. Έστω $w=\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}$, όπου z_1, z_2 δύο μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος Β1.

Να αποδείξετε ότι:

α) O w είναι πραγματικός και

(μονάδες 4)

β) $-4\leq w\leq 4$.

(μονάδες 7)

Μονάδες 11

Β3. Αν $w=-4$, όπου w είναι ο μιγαδικός αριθμός του ερωτήματος Β2, να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 και να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τις εικόνες $A(z_1), B(z_2), \Gamma(z_3)$ των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 και z_3, με $z_3=2iz_1$, είναι ισοσκελές.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(0,+\infty)$.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f\left(e^{3-x}\cdot(x^2+1)\right)=\frac{e^2}{5}$$

έχει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών μία ακριβώς ρίζα.

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι

$$\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt < 2x f(4x)$$

για κάθε $x>0$.

Μονάδες 4

Γ4. Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt, & x>0\\ 2, & x=0\end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f'(x)\left[e^{f(x)}+e^{-f(x)}\right]=2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και
- $f(0)=0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ell n\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Δ2. **α)** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

(μονάδες 3)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, την ευθεία $y = x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.

(μονάδες 4)

Μονάδες 7

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to 0^+} \left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt} - 1 \right) \ell n \left| f(x) \right| \right].$$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{1 - 3\int_0^{x-2} f(t^2)dt}{x - 3} + \frac{8 - 3\int_0^x f^2(t)dt}{x - 2} = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (2,3).

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Α Π Α Ν Τ Η Σ Ε Ι Σ

Θέμα Α

A_1,A_2,A_3 βλέπε σχολικό βιβλίο

A_4. α. Λάθος

β. Σωστό

γ. Λάθος

δ. Σωστό

ε. Σωστό

Θέμα Β

B_1. $|z-4|=2|z-1| \Leftrightarrow |z-4|^2=4|z-1|^2 \Leftrightarrow (z-4)\overline{(z-4)}=4(z-1)\overline{(z-1)} \Leftrightarrow$

$(z-4)(\overline{z}-4)=4(z-1)(\overline{z}-1) \Leftrightarrow .... \Leftrightarrow z\overline{z}=4 \Leftrightarrow |z|^2=4 \Leftrightarrow |z|=2$.Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho=2$.

B_2. α. Για τους z_1,z_2 έχουμε: $z_1\overline{z_1}=4 \Leftrightarrow \overline{z_1}=\dfrac{4}{z_1}$ και $\overline{z_2}=\dfrac{4}{z_2}$.

$$w-\overline{w}=\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}-\frac{2\overline{z_1}}{\overline{z_2}}-\frac{2\overline{z_2}}{\overline{z_1}}=\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}-\left(\frac{2\frac{4}{z_1}}{\frac{4}{z_2}}+\frac{2\frac{4}{z_2}}{\frac{4}{z_1}}\right)=...=0 \Leftrightarrow$$

$2i\mathrm{Im}(w)=0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(w)=0 \Leftrightarrow w\in R$.

β. $|w|=\left|\dfrac{2z_1}{z_2}+\dfrac{2z_2}{z_1}\right| \le \left|\dfrac{2z_1}{z_2}\right|+\left|\dfrac{2z_2}{z_1}\right|=2\dfrac{|z_1|}{|z_2|}+2\dfrac{|z_2|}{|z_1|}=2+2=4 \Leftrightarrow |w|\le 4 \overset{w\in R}{\Leftrightarrow} -4\le w\le 4$.

B_3. $w=-4 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow z_1{}^2+z_2{}^2+2z_1z_2=0 \Leftrightarrow (z_1+z_2)^2=0 \Leftrightarrow z_1+z_2=0 \Leftrightarrow z_2=-z_1$.

$(\Gamma A)=|z_1-z_3|=|z_1-2iz_1|=|z_1(1-2i)|=|z_1||1-2i|=2\sqrt{5}$.

$(\Gamma B)=|z_2-z_3|=|-z_1-2iz_1|=|z_1(1+2i)|=|z_1||1+2i|=2\sqrt{5}$.

Αφού $(\Gamma A)=(\Gamma B)$,το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Θέμα Γ

Γ_1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$$f'(\chi)=\frac{e^{\chi}(\chi^2+1)-2\chi e^{\chi}}{(\chi^2+1)^2}=...=\frac{e^{\chi}}{(\chi^2+1)^2}(\chi-1)^2 \ .$$

Είναι $f'(\chi)>0$ για κάθε $\chi\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ και επιπλέον η f είναι συνεχής στο 1.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R .

$$\lim_{\chi\to-\infty} f(\chi)=\lim_{\chi\to-\infty}\left[\frac{1}{\chi^2+1}e^{\chi}\right]=0$$ και

$$\lim_{\chi\to+\infty} f(\chi)=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{e^{\chi}}{\chi^2+1}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{\chi\to+\infty}\frac{(e^{\chi})'}{\left(\chi^2+1\right)'}=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{e^{\chi}}{2\chi}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{\chi\to+\infty}\frac{(e^{\chi})'}{(2\chi)'}=\lim_{\chi\to+\infty}\frac{e^{\chi}}{2}=+\infty\ .$$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα $f(R)=\left(\lim\limits_{\chi\to-\infty} f(\chi),\lim\limits_{\chi\to+\infty} f(\chi)\right)=(0,+\infty)$.

Γ₂. Η f ως γνησίως αύξουσα είναι «1-1».

$$f\left(e^{3-\chi}(\chi^2+1)\right)=\frac{e^2}{5}\Leftrightarrow f\left(e^{3-\chi}(\chi^2+1)\right)=f(2)\overset{f\,"1-1"}{\Leftrightarrow} e^{3-\chi}(\chi^2+1)=2\Leftrightarrow e^3\frac{\chi^2+1}{e^2}=2\Leftrightarrow$$

$\dfrac{e^{\chi}}{\chi^2+1}=\dfrac{e^3}{2}\Leftrightarrow f(\chi)=\dfrac{e^3}{2}$ (1).Επειδή $\dfrac{e^3}{2}\in f(R)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα η (1) έχει μοναδική ρίζα στο R .

Γ₃. Θεωρούμε τη συνάρτηση $G(\chi)=\int_{\alpha}^{\omega} f(t)dt,\omega\in R$ με α σταθερό πραγματικό αριθμό.

Η f είναι παραγωγίσιμη με $G'(\omega)=f(\omega)$.Με $\chi>0$ για την G εφαρμόζεται στο $[2\chi,4\chi]$ το θεώρημα της μέσης τιμής,οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(2\chi,4\chi)$ τέτοιο ώστε:

$$G'(\chi)=\frac{G(4\chi)-G(2\chi)}{4\chi-2\chi}=\frac{\int_{\alpha}^{4\chi} f(t)dt-\int_{\alpha}^{2\chi} f(t)dt}{2\chi}=\frac{\int_{\alpha}^{4\chi} f(t)dt+\int_{2\chi}^{\alpha} f(t)dt}{2\chi}\Leftrightarrow$$

$f(\xi)=\dfrac{\int_{2\chi}^{4\chi} f(t)dt}{2\chi}$.Η f είναι γνησίως αύξουσα,οπότε $2\chi<\xi<4\chi\Rightarrow \xi<4\chi\Rightarrow f(\xi)<f(4\chi)\Rightarrow$

$$\frac{\int_{2\chi}^{4\chi} f(t)dt}{2\chi}<f(4\chi)\Leftrightarrow\int_{2\chi}^{4\chi} f(t)dt<2\chi f(4\chi)\ .$$

Γ₄. Για $\chi>0$ $g(\chi)=\dfrac{1}{\chi}\left(\int_{2\chi}^{1} f(t)dt+\int_{1}^{4\chi} f(t)dt\right)=\dfrac{1}{\chi}\left(-\int_{1}^{2\chi} f(t)dt+\int_{1}^{4\chi} f(t)dt\right)$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$$g'(\chi)=\frac{\chi\left(-2f(2\chi)+4f(4\chi)\right)-\int_{2\chi}^{4\chi} f(t)dt}{\chi^2}=\frac{2\chi f(4\chi)-\int_{2\chi}^{4\chi} f(t)dt+2\chi\left(f(4\chi)-f(2\chi)\right)}{\chi^2}\ .$$

Είναι $2\chi<4\chi\overset{f\,\gamma\nu.\alpha\upsilon\xi}{\Rightarrow} f(2\chi)<f(4\chi)\Leftrightarrow f(4\chi)-f(2\chi)>0$ και λόγω του Γ₃ είναι $g'(\chi)>0$ για κάθε $\chi\in(0,+\infty)$.

$$\lim_{\chi\to0^+} g(\chi)=\lim_{\chi\to0^+}\frac{\int_{2\chi}^{4\chi} f(t)dt}{\chi}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{\chi\to0^+}\frac{\left(\int_{2\chi}^{4\chi} f(t)dt\right)'}{(\chi)'}=\lim_{\chi\to0^+}\frac{\left(-\int_{1}^{2\chi} f(t)dt+\int_{1}^{4\chi} f(t)dt\right)'}{(\chi)'}=$$

$$\lim_{\chi\to0^+}\left(-2f(2\chi)+4f(4\chi)\right)\overset{f\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ 0}{=}-2f(0)+4f(0)=2f(0)=2=g(0)\ .$$

Άρα η g είναι γνησίως στο $[0,+\infty)$.

Θέμα Δ

Δ₁. $f'(\chi)\left[e^{f(\chi)}+e^{-f(\chi)}\right]=2 \Leftrightarrow f'(\chi)e^{f(\chi)}+f'(\chi)e^{-f(\chi)}=2 \Leftrightarrow \left(e^{f(\chi)}-e^{-f(\chi)}\right)'=(2\chi)' \Leftrightarrow$
$e^{f(\chi)}-e^{-f(\chi)}=2\chi+c$ (1).Για $\chi=0$ (1) $\Rightarrow c=0$.

Άρα (1) $\Leftrightarrow e^{f(\chi)}-\dfrac{1}{e^{f(\chi)}}=2\chi \Leftrightarrow e^{2f(\chi)}-2\chi e^{f(\chi)}=1 \Leftrightarrow e^{2f(\chi)}-2\chi e^{f(\chi)}+\chi^2=\chi^2+1 \Leftrightarrow$

$\left(e^{f(\chi)}-\chi\right)^2=\chi^2+1$ (2).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\chi)=e^{f(\chi)}-\chi, \chi\in R$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και λόγω της (2) $g(\chi)\neq 0$ για κάθε $\chi\in R$.Άρα η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R και επειδή $g(0)=1>0$ είναι $g(\chi)>0 \Leftrightarrow e^{f(\chi)}-\chi>0$ για κάθε $\chi\in R$.

Έτσι από την (2) παίρνουμε $e^{f(\chi)}-\chi=\sqrt{\chi^2+1} \Leftrightarrow e^{f(\chi)}=\chi+\sqrt{\chi^2+1}$ (3).

Για κάθε $\chi\in R$ $\chi^2+1>\chi^2 \Rightarrow \sqrt{\chi^2+1}>\sqrt{\chi^2}=|\chi|\geq -\chi \Rightarrow \sqrt{\chi^2+1}>-\chi \Leftrightarrow \sqrt{\chi^2+1}+\chi>0$.

Άρα η (3) είναι καλά ορισμένη.Συνεπώς $f(\chi)=\ln\left(\chi+\sqrt{\chi^2+1}\right)$.

Δ₂.

$$f'(\chi)=\frac{1}{\chi+\sqrt{\chi^2+1}}\left(\chi+\sqrt{\chi^2+1}\right)'=\frac{1}{\chi+\sqrt{\chi^2+1}}\left(1+\frac{\chi}{\sqrt{\chi^2+1}}\right)=\frac{1}{\chi+\sqrt{\chi^2+1}}\left(\frac{\chi+\sqrt{\chi^2+1}}{\sqrt{\chi^2+1}}\right)\Leftrightarrow$$

$$f'(\chi)=\frac{1}{\sqrt{\chi^2+1}} .$$

$$f''(\chi)=-\frac{\left(\sqrt{\chi^2+1}\right)'}{\chi^2+1}=\ldots=\frac{-\chi}{\left(\chi^2+1\right)\sqrt{\chi^2+1}} .$$

$f''(\chi)=0 \Leftrightarrow \chi=0$ και $f''(\chi)>0 \Leftrightarrow \chi<0$

χ	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(\chi)$		+	0	−	
$f(\chi)$		κυρτή	$f(0)$ Σ.Κ	κοίλη	

Στο $(-\infty,0]$ η f είναι κυρτή και στο $[0,+\infty)$ είναι κοίλη.Το $(0,f(0))=(0,0)$ είναι σημείο καμπής της C_f .

Στο σημείο καμπής ορίζεται εφαπτομένη με εξίσωση $\psi-f(0)=f'(0)(\chi-0)\Leftrightarrow\psi=\chi$.

Στο $[0,1]$ η f είναι κοίλη οπότε $f(\chi)\leq\chi$.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι :

$$E=\int_0^1|f(\chi)-\chi|d\chi=\int_0^1(\chi-f(\chi))d\chi=\int_0^1\chi d\chi-\int_0^1 f(\chi)d\chi=\left[\frac{\chi^2}{2}\right]_0^1-\int_0^1(\chi)'\ln\left(\chi+\sqrt{\chi^2+1}\right)=$$

$$\frac{1}{2}-\left[\chi\ln(\chi+\sqrt{\chi^2+1})\right]_0^1+\int_0^1\frac{\chi}{\sqrt{\chi^2+1}}d\chi=\frac{1}{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\left[\sqrt{\chi^2+1}\right]_0^1=$$

$\sqrt{2}-\frac{1}{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ τετρ.μον.

Δ3. Είναι $f'(\chi)>0$ για κάθε $\chi\in R$,οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα.
$\chi>0\Rightarrow f(\chi)>f(0)\Rightarrow f(\chi)>0$.

$\mathrm{A}=\lim_{\chi\to0^+}\left[\left(e^{\int_0^\chi f^2(t)dt}-1\right)\ln f(\chi)\right]$.Για $\chi>0$ είναι $\int_0^\chi f^2(t)dt>0$.

$$\mathrm{A}=\lim_{\chi\to0^+}\left[\left(\frac{e^{\int_0^\chi f^2(t)dt}-1}{\int_0^x f^2(t)dt}\right)\int_0^x f^2(t)dt.\ln f(\chi)\right]$$

Η συνάρτηση $\int_0^\chi f^2(t)dt,\chi\in R$ είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη οπότε

$\lim_{\chi\to0^+}\int_0^\chi f^2(t)dt=\int_0^0 f^2(t)dt=0$.

Κοντά στο 0 από μεγαλύτερές του τιμές θέτουμε $\int_0^\chi f^2(t)dt$ =u>0.Άρα $u\to0^+$.

$$\lim_{\chi\to0^+}\frac{e^{\int_0^\chi f^2(t)dt}-1}{\int_0^\chi f^2(t)dt}=\lim_{u\to0^+}\frac{e^u-1}{u}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{u\to0^+}\frac{\left(e^u-1\right)'}{(u)'}=\lim_{u\to0^+}e^u=1.$$

$$\lim_{\chi\to0^+}(\chi+\sqrt{\chi^2+1})=1\Rightarrow\lim_{\chi\to0^+}\ln\left(\chi+\sqrt{\chi^2+1}\right)=0\ .$$

Κοντά στο 0 από μεγαλύτερές του τιμές θέτουμε $\ln\left(\chi+\sqrt{\chi^2+1}\right)$=w>0.Άρα $w\to0^+$.

$$\lim_{\chi\to0^+}\ln f(\chi)=\lim_{w\to0^+}\ln w=-\infty\ .$$

$$\lim_{\chi\to0^+}\int_0^x f^2(t)dt.\ln f(\chi)=\lim_{\chi\to0^+}\frac{\int_0^x f^2(t)dt}{\frac{1}{\ln f(\chi)}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{\chi\to0^+}\frac{\left(\int_0^x f^2(t)dt\right)'}{\left(\frac{1}{\ln f(\chi)}\right)'}=\lim_{\chi\to0^+}\frac{f^2(\chi)}{-\frac{f'(\chi)}{f(\chi)}}=$$

$\lim_{\chi\to0^+}\left(-\frac{f^3(\chi)}{f'(\chi)}\right)=0$.Άρα A=0

Δ₄. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(\chi)=(\chi-2)\left(1-3\int_0^{\chi-2} f(t^2)\,\mathrm{dt}\right)+(\chi-3)\left(8-3\int_0^{x} f^2(\mathrm{t})\,\mathrm{dt}\right)$ με $\chi\in[2,3]$.

- Η h είναι συνεχής στο $[2,3]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
- $h(2)=-\left(8-3\int_0^2 f^2(\mathrm{t})\,\mathrm{dt}\right)$ $,h(3)=1-3\int_0^1 f(t^2)\,\mathrm{dt}$.

Έχουμε $f(t)\le t\Rightarrow f^2(t)\le t^2$. Το '=' ισχύει μόνο για $t=0$.

Άρα $\int_0^2 f^2(t)dt<\int_0^2 t^2=\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2=\frac{8}{3}\Rightarrow 8-3\int_0^2 f^2(t)dt>0\Rightarrow h(2)<0$.

Όμοια $f(t^2)\le t^2\Rightarrow\int_0^1 f(t^2)dt<\int_0^1 t^2dt=\frac{1}{3}\Rightarrow 1-3\int_0^1 f(t^2)dt>0\Rightarrow h(3)>0$.

Συνεπώς $h(2)h(3)<0$.

Σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_0\in(2,3)$ τέτοιο ώστε

$$h(\chi_0)=0\Leftrightarrow\ \frac{1-3\int_0^{\chi_0-2} f(t^2)\,\mathrm{dt}}{\chi_0-3}+\frac{8-3\int_0^{x_0} f^2(\mathrm{t})\,\mathrm{dt}}{\chi_0-2}=0\ .$$