Σχολικό έτος 2013-2014

Τάξη: A

Θέματα Γραπτών Προαγωγικών Εξετάσεων

Περιόδου Μαΐου – Ιουνίου 2014 στο μάθημα:

Α Λ Γ Ε Β Ρ Α

Θέμα 1

Α. **α**. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό ή Λάθος τις παρακάτω προτάσεις:

i. Αν α, β πραγματικοί αριθμοί με $\beta < \alpha$,τότε η απόσταση των αριθμών α, β είναι $d(\alpha, \beta) = \alpha - \beta$.

ii. Αν $\alpha \geq 0$ και μ, ν θετικοί ακέραιοι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 2 τότε είναι $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}$

β. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις.

1. Αν για τους σταθερούς πραγματικούς αριθμούς α, β, γ έχουμε $\beta \neq 0$, $\alpha\gamma > 0$ και οι $|\alpha|, |\beta|, |\gamma|$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου τότε είναι Α) $2|\beta| = |\alpha| + |\gamma|$, Β) $\alpha^2 = \beta\gamma$, Γ) $2\alpha = \beta - \gamma$, Δ) $\beta^2 = \alpha\gamma$

2. Έστω οι ευθείες με εξισώσεις $\psi = (\alpha - 3)\chi$+1,$\psi = 2\alpha\chi + 2$.Οι ευθείες είναι παράλληλες όταν: Α) $a = 3$, Β) $a = -3$, Γ) $a < 3$, Δ) $a = 0$..

γ. Να αντιστοιχίσετε καθένα από τα τριώνυμα της A' ομάδας με την ισοδύναμη μορφή του από την B' ομάδα

A' ΟΜΑΔΑ	
1	$\chi^2 - 5\chi + 6$
2	$-\chi^2 + 5\chi - 6$
3	$2\chi^2 + \chi - 1$
4	$\chi^2 + \chi - 2$

B' ΟΜΑΔΑ	
1	$-(\chi - 2)(\chi - 3)$
2	$2(\chi + 1)(\chi - \frac{1}{2})$
3	$(\chi - 1)(\chi + 2)$
4	$(\chi - 2)(\chi - 3)$

Μον. Α 10

Β. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β δείξτε ότι: $|\alpha.\beta| = |\alpha|.|\beta|$ Μον. Β 15

Θέμα 2^ο (Τράπεζα θεμάτων)

Δίνονται οι παραστάσεις $K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9$ $\kappa\alpha\iota$ $B = 2\alpha(3-\beta)$,όπου $\alpha, \beta \in R$.

α. Να δείξετε ότι $\mathrm{K} - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$. (Μονάδες 3)

β. Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$,για κάθε τιμή των α, β. (Μονάδες 10)

γ. Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $\mathrm{K} = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

Θέμα 3^ο

Θεωρούμε τα σημεία $M(\alpha^2 - 3\alpha + 2, \alpha - 1)$,$\alpha \in R$.

Να βρείτε:

i. Για ποια τιμή του α το M βρίσκεται στον θετικό ημιάξονα $O\psi$.των τεταγμένων..

ii. Για ποιές τιμές του α τα σημεία M βρίσκονται στο 4^o τεταρτημόριο.

iii. Αν $\alpha = 0$,ποιό είναι το συμμετρικό του M ως προς:

- τον άξονα $\chi'\chi$.
- τον άξονα $\psi'\psi$.
- την αρχή των αξόνων. (Μονάδες: $\mathrm{i} \rightarrow 9$, $ii \rightarrow 10$, $iii \rightarrow 6$)

Θέμα 4^ο (Τράπεζα θεμάτων)

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2$ και $g(x) = \lambda x + (1-\lambda), x \in R$ και λ παράμετρος με $\lambda \neq 0$.

α. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο. (Μονάδες 8)

β. Για ποια τιμή του λ οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο;Ποιο είναι το σημείο αυτό; (Μονάδες 8)

γ. Αν $\lambda \neq 2$ και x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_f και C_g ,να βρεθεί η παράμετρος λ ώστε να ισχύει: $(x_1 + x_2)^2 = |x_1 + x_2| + 2$. (Μονάδες 9)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1°

Α. α. i $\to$ Σωστό , ii $\to$ Σωστό.

β. $1 \to \Delta$, $2 \to \mathrm{B}$

γ. $1\mathrm{A} \to 4\mathrm{B}$, $2\mathrm{A} \to 1\mathrm{B}$, $3\mathrm{A} \to 2\mathrm{B}$, $4\mathrm{A} \to 3\mathrm{B}$.

Β. Βλέπε σχ.βιβλίο

Θέμα 2°

α. $\mathrm{K} - \Lambda = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9 - 2\alpha(3-\beta) = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9 - 6\alpha + 2\alpha\beta =$

$\alpha^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 9 - 6\alpha + 2\alpha\beta \Leftrightarrow \mathrm{K} - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$.

β. Από το ερώτημα **α** έχουμε $\mathrm{K} - \Lambda = (\alpha+\beta)^2 + (\alpha-3)^2 \ge 0 \Rightarrow \mathrm{K} - \Lambda \ge 0 \Leftrightarrow \mathrm{K} \ge \Lambda$.

(Είναι γνωστό ότι για κάθε $m \in R$ είναι $m^2 \ge 0$)

γ. $\mathrm{K} = \Lambda \Leftrightarrow \mathrm{K} - \Lambda = 0 \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2 + (\alpha-3)^2 = 0$ (1).

Αν ήταν $\alpha + \beta \ne 0$ ή $\alpha - 3 \ne 0$ θα είχαμε $(\alpha+\beta)^2 > 0$ ή $(\alpha-3)^2 > 0$,οπότε:

$(\alpha+\beta)^2 + (\alpha-3)^2 > 0$.Άτοπο.λόγω της (1).(Είναι γνωστό ότι για κάθε $m \in R^*$ είναι $m^2 > 0$)

Άρα $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \ (2) \\ \kappa\alpha\iota \\ \alpha - 3 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 3 \end{cases}$. $(2) \Leftrightarrow \beta = -\alpha \overset{\alpha=3}{\Rightarrow} \beta = -3$.

Θέμα 3°

Λύση

i. Από τα σημεία M εκείνο που βρίσκεται στον $O\psi$ έχει $\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$ (1) και $\alpha - 1 > 0 \Leftrightarrow \alpha > 1$.(2).

Οι ρίζες της (1) είναι $\alpha = 1$ ή $\alpha = 2$.Λόγω της (2) δεκτή είναι η τιμή $\alpha = 2$.

Άρα το σημείο που βρίσκεται στον $\mathrm{O}\chi$ είναι το $\mathrm{M}(0,1)$.

ii. Για να έχουμε σημεία M στο 4° τεταρτημόριο πρέπει $\alpha^2 - 3\alpha + 2 > 0$ (3) και $\alpha - 1 < 0 \Leftrightarrow \alpha < 1$ (4).

Λύση της (3)

α	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$\alpha^2 - 3\alpha + 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $(3) \Leftrightarrow \alpha < 1 \; ή \; \alpha > 2$.Λαμβάνοντας υπόψη την (4),τα ζητούμενα α είναι $\alpha < 1$

iii. Για $\alpha = 0$ έχουμε το σημείο $\mathrm{M}(2,-1)$

- Το συμμετρικό του M ως προς τον άξονα $\chi'\chi$ είναι το σημείο $\mathrm{M}_1(2,1)$.
- Το συμμετρικό του M ως προς τον άξονα $\psi'\psi$ είναι το σημείο $\mathrm{M}_2(-2,-1)$.
- Το συμμετρικό του M ως προς την αρχή των αξόνων είναι το σημείο $\mathrm{M}_3(-2,1)$.

Θέμα 4^o:

Το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων είναι το R.

α. Για $x \in R$,θεωρούμε την εξίσωση:

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 = \lambda x + (1-\lambda) \Leftrightarrow x^2 - \lambda x + \lambda - 1 = 0$ (1)

Η (1) αν έχει ρίζες,αυτές θα είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f, C_g.

Η (1) είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού με διακρίνουσα

$\Delta = \lambda'^2 - 4(\lambda - 1) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 \geq 0$.Άρα η (1) θα έχει είτε μία διπλή ρίζα όταν $\Delta = 0$ είτε δύο άνισες πραγματικές ρίζες όταν $\Delta > 0$.Άρα οι C_f, C_g θα έχουν είτε ένα κοινό σημείο είτε δύο κοινά σημεία,οπότε για οποιοδήποτε $\lambda \in R$ θα έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

β. Με βάση αυτά που είπαμε παραπάνω οι C_f, C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο όταν η (1) έχει διπλή ρίζα,δηλαδή όταν και μόνο όταν $\Delta = 0 \Leftrightarrow (\lambda-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$

Η τετμημένη του κοινού σημείου είναι η διπλή ρίζα της (1),δηλαδή $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha} = \dfrac{\lambda}{2} \overset{\lambda=2}{=} 1$.

$f(1) = 1$.Άρα για $\lambda = 2$ οι C_f, C_g έχουν μόνο ένα κοινό σημείο το $M(1,1)$.

γ. Αν $\lambda \neq 2$ είναι $\Delta > 0$,οπότε τα x_1, x_2 είναι ρίζες της (1).(Οι C_f, C_g έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία).

Από του τύπους Vieta έχουμε: $x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha} = \lambda$.

$(x_1 + x_2)^2 = |x_1 + x_2| + 2 \Leftrightarrow \lambda^2 = |\lambda| + 2 \Leftrightarrow |\lambda|^2 - |\lambda| - 2 = 0$ (2).

Θέτουμε $|\lambda| = \omega$ και είναι $\omega \geq 0$.

Η (2) γράφεται $\omega^2 - \omega - 2 = 0$ (3).

Η διακρίνουσα της (3) είναι $\Delta = 9$,οπότε $\omega = \dfrac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \omega = -1 \; απορρίπτεται$ αφού $\omega \geq 0$ ή $\omega = 2 \; δεκτή$.

Άρα $|\lambda| = 2 \Leftrightarrow \lambda = -2 \; ή \; \lambda = 2 \; απορρίπτεται$ αφού είναι $\lambda \neq 2$.

Τελικά η ζητούμενη τιμή του λ είναι $\lambda = -2$.

Σπύρος Γιαννακόπουλος