ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 8

Α2. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ;

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;

Μονάδες 3

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει $z-\bar{z}=2\mathrm{Im}(z)$

(μονάδες 2)

β) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)}=0$

(μονάδες 2)

γ) Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.

(μονάδες 2)

δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)\,dx$$

(μονάδες 2)

ε) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της είναι υποχρεωτικά αρνητική στο εσωτερικό του Δ.

(μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση

$$2|z|^2 + (z + \bar{z})i - 4 - 2i = 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

Β1. Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

Μονάδες 9

Β2. Αν $z_1=1+i$ και $z_2=1-i$ είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$w = 3\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{39}$$

είναι ίσος με $-3i$

Μονάδες 8

Β3. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών u για τους οποίους ισχύει

$$|u + w| = |4z_1 - z_2 - i|$$

όπου w, z_1, z_2 οι μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος Β2.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = x - \ell n(e^x + 1), \quad x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να μελετήσετε την h ως προς την κυρτότητα.

Μονάδες 5

Γ2. Να λύσετε την ανίσωση

$$e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h στο $+\infty$, καθώς και την πλάγια ασύμπτωτή της στο $-\infty$.

Μονάδες 6

Γ4. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = e^x\left(h(x) + \ell n2\right), \quad x \in \mathbb{R}$

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $\varphi(x)$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & , \text{ αν } x \neq 0 \\ 1 & , \text{ αν } x = 0 \end{cases}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ και, στη συνέχεια, ότι είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 7

Δ2. Δίνεται επιπλέον ότι η f είναι κυρτή.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\int_1^{2f'(x)} f(u)\,du = 0$$

έχει ακριβώς μία λύση, η οποία είναι η $x = 0$ (μονάδες 7)

β) Ένα υλικό σημείο M ξεκινά τη χρονική στιγμή $t=0$ από ένα σημείο $A\left(x_0, f(x_0)\right)$ με $x_0<0$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x),\ x\geq x_0$ με $x=x(t),\ y=y(t),\ t\geq 0$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης $x(t)$ του σημείου M είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του $y(t)$, αν υποτεθεί ότι $x'(t)>0$ για κάθε $t\geq 0$.

(μονάδες 4)

Μονάδες 11

Δ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=\left(x f(x)+1-e\right)^2\left(x-2\right)^2,\quad x\in\left(0,+\infty\right)$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει δύο θέσεις τοπικών ελαχίστων και μία θέση τοπικού μεγίστου.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα Ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Α Π Α Ν Τ Η Σ Ε Ι Σ

Θέμα Α

A_1,A_2,A_3 βλέπε σχ.βιβλίο

A_4.

α. Λάθος

β. Σωστό

γ. Σωστό

δ. Σωστό

ε. Λάθος

Θέμα Β

B_1. Θέτουμε $z = x + yi, x, y \in R$ και η εξίσωση γράφεται:

$$2(x^2 + y^2) + 2xi - 4 - 2i = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2) - 4 + (2x - 2)i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2(x^2 + y^2) - 4 = 0 \\ \kappa\alpha\iota \\ 2\chi - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ \kappa\alpha\iota \\ \chi = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \ ή \ y = 1 \\ \kappa\alpha\iota \\ x = 1 \end{cases}.$$

Άρα $z = 1 + i \ ή \ z = 1 - i$,

B_2. $w = 3\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{39} = 3\dfrac{(1+i)^{38}(1+i)}{(1-i)^{38}(1-i)} = 3\dfrac{[(1+i)^2]^{19}(1+i)}{[(1-i)^2]^{19}(1-i)} =$

$$3\frac{(2i)^{19}(1+i)}{(-2i)^{19}(1-i)} = -3\frac{1+i}{1-i} = -3\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = -3\frac{2i}{2} = -3i.$$

B_3. $|u + w| = |4z_1 - z_2 - i| \Leftrightarrow |u - 3i| = |3 + 4i| \Leftrightarrow |u - 3i| = 5$.

Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος με κέντρο $K(0,3)$ και ακτίνα $\rho = 5$ και έχει εξίσωση $x^2 + (y-3)^2 = 25$.

Θέμα Γ

Γ₁. Η h είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$$h'(x)=1-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{1}{e^x+1}.$$

Επίσης η h' είναι παραγωγίσιμη με $h''(x)=-\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}<0$. Άρα η h είναι κοίλη στο R.

Γ₂. $e^{h(2h'(x))}<\frac{e}{e+1}\overset{\ln\ \gamma\nu.\alpha\upsilon\xi.}{\Leftrightarrow}\ln e^{h(2h'(x))}<\ln\frac{e}{e+1}\Leftrightarrow h(2h'(x))<\ln e-\ln(e+1)\Leftrightarrow$
$h(2h'(x))<1-\ln(e+1)\Leftrightarrow h(2h'(x))<h(1)$ (1).

Έχουμε $h'(x)>0$, για κάθε $x\in R$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα.

$(1)\Leftrightarrow 2h'(x)<1\Leftrightarrow h'(x)<\frac{1}{2}\Leftrightarrow h'(x)<h'(0)$ (2).

Η h' είναι γνησίως φθίνουσα οπότε $(2)\Leftrightarrow x>0$.

Γ₃. • $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln e^x-\ln(e^x+1)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{e^x}{e^x+1}$.

Θέτουμε $\frac{e^x}{e^x+1}=u$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(e^x+1)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$. Άρα $u\to1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{u\to1}\ln u=0$.

Άρα η γραφική παράσταση της h στο $+\infty$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $y=0$, δηλαδή τον άξονα $x'x$.

• — $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\ln(e^x+1)\right)=1$, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ και

$\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(e^x+1)\overset{e^x+1=u}{=}\lim\limits_{u\to1}\ln u=0$.

— $\lim\limits_{x\to-\infty}(h(x)-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(e^x+1)=0$.

Άρα η γραφική παράσταση της h στο $-\infty$ έχει πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $y=x$.

Γ₄. Θα βρούμε την τετμημένη του σημείου τομής της γραφικής παράστασης της ϕ με τον άξονα $x'x$.

$\phi(x)=0\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}h(x)+\ln2=0\Leftrightarrow h(x)=-\ln2\Leftrightarrow h(x)=h(0)$ (3).

Επειδή η h είναι γνησίως αύξουσα είναι «1-1», οπότε $(3)\Leftrightarrow x=0$.

Η ϕ είναι συνεχής στο $[0,1]$, οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$\mathrm{E}=\int_0^1|\phi(x)|dx$.

Σπύρος Γιαννακόπουλος

$$0 \le x \le 1 \Rightarrow x \ge 0 \overset{h\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi.}{\Rightarrow} h(x) \ge h(0) \Leftrightarrow h(x) \ge -\ln 2 \Leftrightarrow h(x) + \ln 2 \ge 0.$$

Άρα $\phi(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [0,1]$,οπότε:

$$E = \int_0^1 \phi(x)dx = \int_0^1 (e^x)'(h(x) + \ln 2) = \left[e^x(h(x) + \ln 2)\right]_0^1 - \int_0^1 e^x h'(x)dx =$$

$$e(1 - \ln(e+1) + \ln 2) - \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1}dx = e(1 - \ln(e+1) + \ln 2) - [\ln(e^x + 1)]_0^1 =$$

$$e - e\ln(e+1) + e\ln 2 - \ln(e+1) + \ln 2 = e - (e+1)\ln(e+1) + (e+1)\ln 2 =$$

$$e + (e+1)\big(\ln 2 - \ln(e+1)\big) = e + (e+1)\ln\frac{2}{e+1} \text{ τετρ.μονάδες.}$$

Θέμα Δ

Δ1. $D_f = R$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x - 1)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to 0} e^x = e^0 = 1 = f(0)$.Άρα η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο R^* ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \ldots = \frac{e^x(x-1) + 1}{x^2}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi(x) = e^x(x-1) + 1, x \in R$.

Η ϕ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$\phi'(x) = e^x(x-1) + e^x = xe^x$.

$\phi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Για $x < 0$ είναι $\phi'(x) < 0$ και για $x > 0$ είναι $\phi'(x) > 0$.Επίσης η ϕ είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ Άρα για $x = 0$ η ϕ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $\phi(0) = 0$.Συνεπώς για κάθε $x \in R$ έχουμε $\phi(x) \ge \phi(0) \Leftrightarrow \phi(x) \ge 0$ (1).

Η (1) ισχύει ως ισότητα μόνο για $x = 0$.Άρα για κάθε $x \in R^*$ $\phi(x) > 0 \Leftrightarrow e^x(x-1) + 1 > 0$.

Έτσι έχουμε: Για κάθε $x \in R^*$ $f'(x) > 0$ και αφού η f είναι συνεχής στο μηδέν,είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Δ2. α. Αρχικά θα δείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(e^x - 1 - x)'}{(x^2)'} =$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1)'}{(2x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{2}=\dfrac{e^0}{2}=\dfrac{1}{2}$.

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

$\int_1^{2f'(0)} f(u)du=\int_1^1 f(u)du=0$.

Η f είναι συνεχής στο R.

Μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $H(x)=\int_1^x f(u)du, x\in R$ και η εξίσωση γράφεται $H(2f'(x))=H(1)$ (2)

Η H είναι παραγωγίσιμη ως παράγουσα της f στο R με $H'(x)=f(x)$.

$x<0\Leftrightarrow e^x<1\Rightarrow \dfrac{e^x-1}{x}>0\Rightarrow f(x)>0\Rightarrow H'(x)>0$.

$x>0\Leftrightarrow e^x>1\Rightarrow \dfrac{e^x-1}{x}>0\Rightarrow f(x)>0\Rightarrow H'(x)>0$.

Η H ως παραγωγίσιμη είναι συνεχής στο R και $H'(x)>0$ για κάθε $x\in R^*$.

Άρα η H είναι γνησίως αύξουσα,οπότε είναι «1-1».

(2) $\Leftrightarrow 2f'(x)=1\Leftrightarrow f'(x)=f'(0)$ (3).

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη και κυρτή,η f' είναι γνησίως αύξουσα,οπότε είναι «1-1».

$(3)\Leftrightarrow x=0$.

β. $y(t)=f(x(t))\Rightarrow y'(t)=x'(t)f'(x(t))$

Έστω $t_0\geq 0$ η χρονική στιγμή που $x'(t_0)=2y'(t_0)\Leftrightarrow x'(t_0)=2x'(t_0)f'(x(t_0))\overset{x'(t_0)>0}{\Leftrightarrow}$

$f'(x(t_0))=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow f'(x(t_0))=f'(0)\overset{f'\ 1-1}{\Leftrightarrow} x(t_0)=0$.Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $M(0,1)$

.**Δ3.** Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $g(x)=\left(e^x-e\right)^2(x-2)^2$,αφού $xf(x)=e^x-1$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$g'(x)=\ldots=2(e^x-e)(x-2)[(x-1)e^x-e]$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases} e^x-e=0\Leftrightarrow x=1\\ x-2=0\Leftrightarrow x=2\\ (x-1)e^x-e=0\ (4)\end{cases}$$

Στο $[1,2]$ εφαρμόζεται για την g το θεώρημα Rolle ,αφού είναι συνεχής στο $[1,2]$, παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ και $g(1)=g(2)=0$,οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)=0$.Άρα το ξ είναι ρίζα της (4).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=(x-1)e^{x}-e, x>0$

Η h είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με $h'(x)=\ldots=xe^{x}>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα.

Αν $0<x<\xi \Rightarrow h(x)<h(\xi)=0 \Rightarrow h(\xi)<0$.

Αν $x>\xi \Rightarrow h(x)>h(\xi)=0 \Rightarrow h(x)>0$.

x	$-\infty$	0		1		ξ		2		$+\infty$
$2(e^{x}-e)$			$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$			$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$h(x)$			$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$g'(x)$			$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$			$\searrow$	$g(1)$ τοπ.ελ.	$\nearrow$	$g(\xi)$ τοπ.μέγ	$\searrow$	$g(2)$ τοπ.ελ.	$\nearrow$	

Από τον παραπάνω πίνακα μονοτονίας της g έχουμε ότι η g για $x=1$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο,για $x=\xi$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και για $x=2$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο.