# ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2012

## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ Α

$\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \mathbf{A_3}$ (βλέπε σχ.βιβλίο)

$\mathrm{A}_4$. **α.** Σωστό

**β.** Σωστό

**γ.** Λάθος

**δ.** Λάθος

**ε.** Λάθος

### ΘΕΜΑ Β

$\mathrm{B}_1$. $(1) \Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}-1)+(z+1)(\bar{z}+1)=4 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow z\bar{z}=1 \Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow |z|=1.$

Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho=1$.

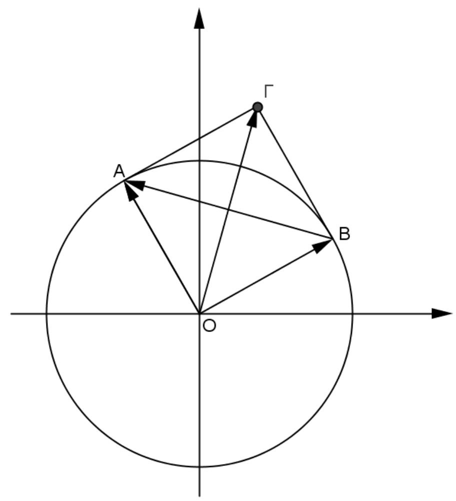
$\mathrm{B}_2$. **1ος τρόπος:** $|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2=(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})+(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})=\cdots=$

$2|z_1|^2+2|z_2|^2$ (3).

Από το $\mathrm{B}_1$ έχουμε: $|z_1|=|z_2|=1$.

Άρα $(3) \Leftrightarrow 2+|z_1+z_2|^2=4 \Leftrightarrow |z_1-z_2|=\sqrt{2}$.

**2ος τρόπος:** Έστω $A, B$ οι εικόνες των μιγαδικών $z_1, z_2$ αντίστοιχα και $\Gamma$ η εικόνα του $z_1+z_2$ που προκύπτει από τον κανόνα του παραλληλογράμμου.




Είναι $|\overrightarrow{OA}| = |z_1| = |z_2| = |\overrightarrow{OB}| = 1$.Το παραλληλόγραμμο $ΟΑΓΒ$ είναι ρόμβος. Επιπλέον $|\overrightarrow{BA}| = |z_1 - z_2| = \sqrt{2}$ .

$|\overrightarrow{BA}|^2 = 2 = 1 + 1 = |z_1|^2 + |z_2|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 \Rightarrow \widehat{AOB} = 90^0$.

Άρα το τετράπλευρο $ΟΑΓΒ$ είναι τετράγωνο.Επομένως $|\overrightarrow{O\Gamma}| = |\overrightarrow{BA}| \Leftrightarrow$

$|z_1 + z_2| = \sqrt{2}$.

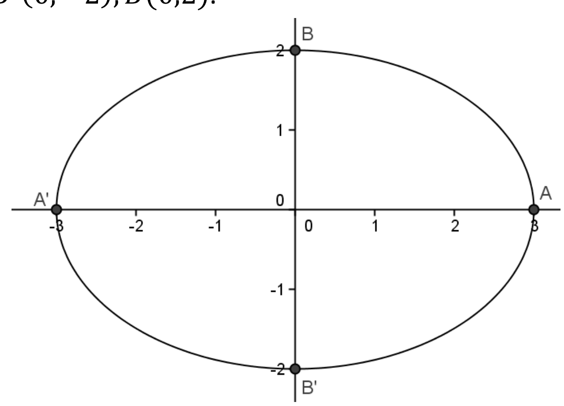
**$B_3$.** Ας είναι $w = \chi + \psi i, \chi, \psi \in R$.

$(2) \Leftrightarrow |\chi + \psi i - 5(\chi - \psi i)| = 12 \Leftrightarrow |-4\chi + 6\psi i| = 12 \Leftrightarrow |2\chi - 3\psi i| = 6 \Leftrightarrow$

$|2\chi - 3\psi i|^2 = 36 \Leftrightarrow 4\chi^2 + 9\psi^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{\chi^2}{9} + \frac{\psi^2}{4} = 1$.

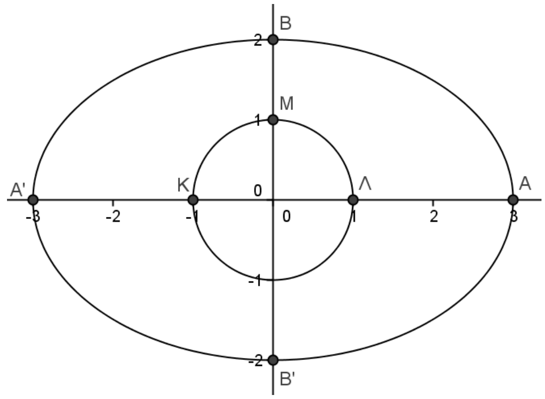
Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του $w$ είναι η έλλειψη με την παραπάνω εξίσωση.

Για την παραπάνω έλλειψη είναι $\alpha = 3$ και $\beta = 2$.Οι κορυφές της έλλειψης είναι τα σημεία $A'(-3,0), A(3,0)$ και $B'(0,-2), B(0,2)$.




$|w|_{max} = (OA) = a = 3$ και $|w|_{min} = (OB) = \beta = 2$.

**$B_4$.** Με βάσει τα ερωτήματα $B_1, B_2$ έχουμε το παρακάτω σχήμα.




$|z-w|_{min}=(MB)=1$ και $|z-w|_{max}=(KA)=4$.Άρα $1 \leq |z-w| \leq 4$.

## ΘΕΜΑ Γ

**$\Gamma_1$.** Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με $f'(\chi)=ln\chi+\frac{\chi-1}{\chi}$.

- $f'(1)=0$.
- Για κάθε $\chi \in (0,1)$ είναι $f'(\chi)<0$ και δεδομένου ότι η $f$ είναι συνεχής στο $(0,1]$ θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$.
- Για κάθε $\chi \in (1,+\infty)$ είναι $f'(\chi)>0$ και δεδομένου ότι η $f$ είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Έχουμε $\lim\limits_{\chi\to 0^+} f(\chi)=+\infty$.Η $f$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1$,οπότε

$f(\Delta_1)=[f(1),+\infty)=[-1,+\infty)$.

$\lim\limits_{\chi\to +\infty} f(\chi)=+\infty$. Η $f$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2$,οπότε $f(\Delta_2)=[f(1),+\infty)$

Δηλαδή $f(\Delta_2)=[-1,+\infty)$.

Το σύνολο τιμών της $f$ είναι $f((0,+\infty))=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=[-1,+\infty)$.

**$\Gamma_2$.** Αν $\chi>0$,$\chi^{\chi-1}=e^{2013}$$\Leftrightarrow$$\ln\chi^{\chi-1}=lne^{2013}$$\Leftrightarrow$$(\chi-1)ln\chi=2013$$\Leftrightarrow$$f(\chi)=2012$.

$2012\in f(\Delta_1)$ και επειδή η $f$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1$,η εξίσωση έχει ακριβώς μια ρίζα στο (0,1).

$2012\in f(\Delta_2)$ και επειδή η $f$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2$,η εξίσωση έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(1,+\infty)$.

Άρα η εξίσωση έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

**$\Gamma_3$.** Είναι $0<\chi_1<1<\chi_2$ και $f(\chi_1)=f(\chi_2)=2012$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(\chi)=f'(\chi)+f(\chi)-2012, \chi\in[\chi_1,\chi_2]$.

- Η $h$ είναι συνεχής στο $[\chi_1,\chi_2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- $h(\chi_1)=f'(\chi_1)$.

$f''(\chi)=\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\chi^2}>0$,για κάθε $\chi\in(0,+\infty)$.Άρα η $f'$ είναι γνησίως αύξουσα.

$0<\chi_1<1$$\Rightarrow$$f'(\chi_1)<f'(1)$$\Rightarrow$$f'(\chi_1)<0$$\Rightarrow$$h(\chi_1)<0$.

$\chi_2 > 1 \Rightarrow f'(\chi_2) > f'(1) \Rightarrow f'(\chi_2) > 0 \Rightarrow h(\chi_2) > 0$.
$h(\chi_1)h(\chi_2) < 0$.
Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_0 \in (\chi_1, \chi_2)$ τέτοιο ώστε $h(\chi_0) = 0 \Leftrightarrow f'(\chi_0) + f(\chi_0) = 2012$.

**Γ₄.** $D_g = (0, +\infty).g(\chi) = 0 \Leftrightarrow (\chi - 1)ln\chi = 0 \Leftrightarrow \chi = 1$.
Προφανώς η $g$ στο $[1, e]$ είναι συνεχής και αφού για κάθε $\chi \in [1, e]$ είναι $f(\chi) \geq -1 \Leftrightarrow g(\chi) \geq 0$.Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = \int_1^e g(\chi)d\chi = \int_1^e (\chi - 1)ln\chi d\chi =$
$\int_1^e \left(\frac{\chi^2}{2} - \chi\right)' ln\chi d\chi = \left[\left(\frac{\chi^2}{2} - \chi\right) ln\chi\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{\chi^2}{2} - \chi\right)\frac{1}{\chi} d\chi = \left[\left(\frac{\chi^2}{2} - \chi\right) ln\chi\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{\chi}{2} - 1\right) d\chi$
$= \frac{e^2}{2} - e - \left[\frac{\chi^2}{4} - \chi\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - e - \frac{e^2}{4} + e + \frac{1}{4} - 1 = \frac{e^2-3}{4}$ τετραγωνικές μονάδες.

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ₁.** Η $f$ στο $(0, +\infty)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο.
Αφού η $f$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$,η συνάρτηση $\int_1^\chi f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(\chi) = \int_1^{\chi^2-\chi+1} f(t)dt - \frac{\chi-\chi^2}{e}, \chi \in (0, +\infty)$.
Παρατηρούμε ότι $h(1) = 0$ και λόγω της υπόθεσης είναι $h(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow h(\chi) \geq h(1)$.Άρα στο $\chi_0 = 1$ η $h$ παρουσιάζει ελάχιστο.
Η $h$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με
$h'(\chi) = (2\chi - 1)f(\chi^2 - \chi + 1) - \frac{1-2\chi}{e}$.
Σύμφωνα με το θεώρημα Fermat $h'(1) = 0 \Leftrightarrow f(1) + \frac{1}{e} = 0 \Leftrightarrow f(1) = -\frac{1}{e} < 0$.
Άρα $f(\chi) < 0$ για κάθε $\chi \in (0, +\infty)$.
Η τρίτη υπόθεση γράφεται: $ln\chi - \chi = \left(\int_1^\chi \frac{lnt-1}{f(t)} dt + e\right) f(\chi)$ (1).
Για κάθε $\chi \in (0, +\infty)$ είναι (εφαρμογή βιβλ. Σελ.266) $ln\chi \leq \chi - 1 < \chi \Rightarrow ln\chi < \chi \Leftrightarrow ln\chi - \chi < 0$.Άρα από την (1) προκύπτει ότι: $\int_1^\chi \frac{lnt-1}{f(t)} dt + e > 0$.
$(1) \Leftrightarrow f(\chi) = \frac{ln\chi-\chi}{\int_1^\chi \frac{lnt-1}{f(t)}dt+e}$.Η $f$ είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων.
$(1) \Leftrightarrow \frac{ln\chi-\chi}{f(\chi)} = \int_1^\chi \frac{lnt-t}{f(t)} dt + e \Rightarrow \left(\frac{ln\chi-\chi}{f(\chi)}\right)' = \frac{ln\chi-\chi}{f(\chi)} \Leftrightarrow \frac{ln\chi-\chi}{f(\chi)} = ce^\chi$ (2).
Για $\chi = 1$ από την (2) παίρνουμε $\frac{-1}{f(1)} = ce \Leftrightarrow c = 1$.
$(2) \Leftrightarrow f(\chi) = e^{-\chi}(ln\chi - \chi)$.Εύκολα μπορούμε να επαληθεύσουμε για τη συνάρτηση που βρήκαμε ότι ισχύει η (1),οπότε είναι η ζητούμενη συνάρτηση.

**Δ₂.** Θέτουμε $\frac{1}{f(\chi)} = u$. $\lim_{\chi \to 0^+} f(\chi) = -\infty \Rightarrow \lim_{\chi \to 0^+} \frac{1}{f(\chi)} = 0 \Rightarrow u \to 0^-$ (αφού $f(\chi) < 0$).

$$\lim_{\chi \to 0^+}\left[\left(f(\chi)\right)^2 \eta\mu\frac{1}{f(\chi)} - f(\chi)\right] = \lim_{u \to 0^-}\left(\frac{\eta\mu u}{u^2} - \frac{1}{u}\right) = \lim_{u \to 0^-}\frac{\eta\mu u - u}{u^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{u \to 0^-}\frac{(\eta\mu u - u)'}{(u^2)'} =$$

$$\lim_{u\to 0^-}\left(\frac{1}{2}\frac{\sigma\upsilon\nu u-1}{u}\right)=0.$$

**$\Delta_3$.** Η συνάρτηση $F$ είναι παραγωγίσιμη με $F'(\chi)=f(\chi)$.Η $F'$ είναι παραγωγίσιμη με $F''(\chi)=f'(\chi)=-e^{-\chi}(ln\chi-\chi)+e^{-\chi}\left(\frac{1}{\chi}-1\right)=-e^{-\chi}\left(ln\chi-\chi+1-\frac{1}{\chi}\right)$ (3).
Για κάθε $\chi>0$ $ln\chi\leq\chi-1\Leftrightarrow ln\chi-\chi+1-\frac{1}{\chi}\leq-\frac{1}{\chi}<0\Rightarrow ln\chi-\chi+1-\frac{1}{\chi}<0.$
Άρα (3)$\Rightarrow F''(\chi)>0$ για κάθε $\chi\in(0,+\infty)$,που σημαίνει ότι η $F$ είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.
Για $\chi>0$ η $F$ είναι συνεχής στα διαστήματα $[\chi,2\chi],[2\chi,3\chi]$ και παραγωγίσιμη στα $(\chi,2\chi)$ $(2\chi,3\chi)$.Σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχουν $\xi_1\in(\chi,2\chi),\xi_2\in(2\chi,3\chi)$ τέτοια ώστε: $F'(\xi_1)=\frac{F(2\chi)-F(\chi)}{\chi}$ και $F'(\xi_2)=\frac{F(3\chi)-F(2\chi)}{\chi}$.
Αφού η $F$ είναι κυρτή,η $F'$ είναι γνησίως αύξουσα,οπότε $\xi_1<\xi_2\Rightarrow F'(\xi_1)<F'(\xi_2)\Leftrightarrow$ $F(2\chi)-F(\chi)<F(3\chi)-F(2\chi)\Leftrightarrow F(\chi)+F(3\chi)>2F(2\chi)$.

**$\Delta_4$.** $F'(\chi)=f(\chi)<0$ για κάθε $\chi\in(0,+\infty)$,δηλαδή η $F$ είναι γνησίως φθίνουσα.
- Η $F$ είναι συνεχής στο $[\beta,2\beta]$ (αφού είναι παραγωγίσιμη).
- $\beta<2\beta\Rightarrow F(\beta)>F(2\beta)$.

Για $\chi=\beta$ από το $\Delta_3$ ερώτημα είναι $F(2\beta)<\frac{F(\beta)+F(3\beta)}{2}$.
$\frac{F(\beta)+F(3\beta)}{2}<F(\beta)\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow F(3\beta)<F(\beta)$ που ισχύει,αφού $\beta<3\beta$ και η $F$ είναι γνησίως φθίνουσα.Άρα $F(2\beta)<\frac{F(\beta)+F(3\beta)}{2}<F(\beta)$.Σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $\xi\in(\beta,2\beta)$ τέτοιο ώστε $F(\xi)=\frac{F(\beta)+F(3\beta)}{2}\Leftrightarrow F(\beta)+F(3\beta)=2F(\xi)$.

**Σχόλια:**
- **Το $B_4$ θα μπορούσε να λυθεί χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $\left||z|-|w|\right|\leq|z-w|\leq|z|+|w|$.**
- **Το $\Gamma_3$ θα μπορούσε να λυθεί εφαρμόζοντας για τη συνάρτηση $\varphi(\chi)=e^{\chi}(f(\chi)-2012)$ το θεώρημα Rolle στο $[\chi_1,\chi_2]$.**
- **Το $\Delta_4$ θα μπορούσε να λυθεί εφαρμόζοντας για τη συνάρτηση $P(\chi)=2F(\chi)-F(\beta)-F(3\beta)$ το θεώρημα Bolzano στο $[\beta,2\beta]$.**