Μάιος - Ιούνιος 2011 (Άσκηση του Μήνα)

Προτείνων : **Αντώνης Κυριακόπουλος**

Εκφώνηση :

Να βρείτε τους πραγματικούς θετικούς αριθμούς x, y και z για τους οποίους να ισχύει:

$$(x+y)(xy+1)(z^2+1)=8xyz. \qquad (1)$$

Λύση

$(1) \Leftrightarrow (x+y)(xy+1)z^2 - 8xyz + (x+y)(xy+1) = 0$ (2).

Αφού $(x+y)(xy+1) > 0$,η (2) είναι εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με άγνωστο τον z και διακρίνουσα

$\Delta = 64(xy)^2 - 4[(x+y)(xy+1)]^2 = 4[4xy+(x+y)(xy+1)][4xy-(x+y)(xy+1)] =$

$4[4xy+(x+y)(xy+1)][4xy - x^2y - x - xy^2 - y] =$

$$4xy[4xy+(x+y)(xy+1)]\left[4 - x - \frac{1}{y} - y - \frac{1}{x}\right] =$$

$$4xy[4xy+(x+y)(xy+1)]\left[4 - (x+\tfrac{1}{x}) - (y+\tfrac{1}{y})\right].$$

Είναι $x+\frac{1}{x} \geq 2$ (3) και $y+\frac{1}{y} \geq 2$ (4).Οι (3),(4) ισχύουν ως ισότητες μόνο όταν: $x=1$ και $y=1$.

(3)+(4)$\Rightarrow$ $x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y} \geq 4 \Leftrightarrow 4-(x+\frac{1}{x})-(y+\frac{1}{y}) \leq 0$ (5).Η (5) ισχύει ως ισότητα όταν ταυτόχρονα ισχύουν ως ισότητες οι (3),(4),δηλαδή μόνο όταν: $x=y=1$.

Μας ενδιαφέρει η περίπτωση που η (2) μπορεί να έχει ρίζες.

Η (2) έχει πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν, $\Delta \geq 0 \xLeftrightarrow{4xy[4xy+(x+y)(xy+1)]>0}$

$4-(x+\frac{1}{x})-(y+\frac{1}{y}) \geq 0$ (6).

Από τις (5),(6) προκύπτει ότι: $4-\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(y+\frac{1}{y}\right)=0 \Leftrightarrow x=y=1$.

Άρα η (2) έχει ρίζες και μάλιστα ίσες μόνο όταν: $x=y=1$.

Η διπλή ρίζα της (2) είναι $z=-\frac{\beta}{2\alpha}=\frac{4xy}{(x+y)(xy+1)}=1$.

Άρα οι μοναδικοί θετικοί πραγματικοί x,y,z που ικανοποιούν την (1) είναι: $x=y=z=1$.