Θ Ε Μ Α Α

A_1. Θεώρημα Fermat. Σχ.βιβλ. σελ.260

A_2. Σχ.βιβλ. σελ.280.

A_3. α. Σωστό

β. Σωστό

γ. Λάθος

δ. Λάθος

ε. Σωστό

Θ Ε Μ Α Β

B_1. $|z-3i|+|\overline{z}+3i|=2 \Leftrightarrow |z-3i|+|\overline{z-3i}|=2 \Leftrightarrow 2|z-3i|=2 \Leftrightarrow |z-(0+3i)|=1$.

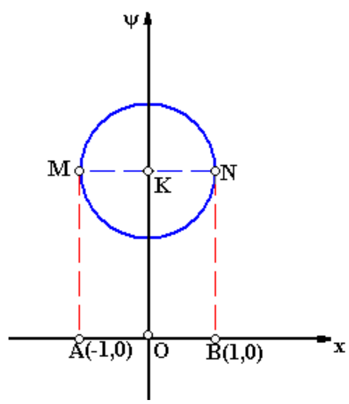
Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος με κέντρο $K(0,3)$,ακτίνα $\rho=1$ και εξίσωση $\chi^2+(\psi-3)^2=1$.

B_2. Από το B_1 έχουμε $|z-3i|=1 \Leftrightarrow |z-3i|^2=1 \Leftrightarrow (z-3i)(\overline{z-3i})=1 \Leftrightarrow (z-3i)(\overline{z}+3i)=1 \Leftrightarrow$ $\overline{z}+3i=\frac{1}{z-3i}$.

B_3. Με βάση το B_2 $w=z-3i+\overline{z}+3i=z+\overline{z}=2Re(z)\in R$.

B_4. Έστω $z=\chi+\psi i,\chi,\psi\in R$.Έχουμε $w=2\chi$.

Έστω MN διάμετρος του κύκλου του B_1 ερωτήματος,παράλληλη στον άξονα $\chi'\chi$ και A,B οι προβολές των M,N στον άξονα $\chi'\chi$ αντίστοιχα.



Έχουμε $-1\le\chi\le1 \Leftrightarrow -2\le 2\chi\le 2 \Leftrightarrow -2\le w\le 2$.

B_4. $|z-w|=|z-(z+\overline{z})|=|-\overline{z}|=|\overline{z}|=|z|$.

Θ Ε Μ Α Γ

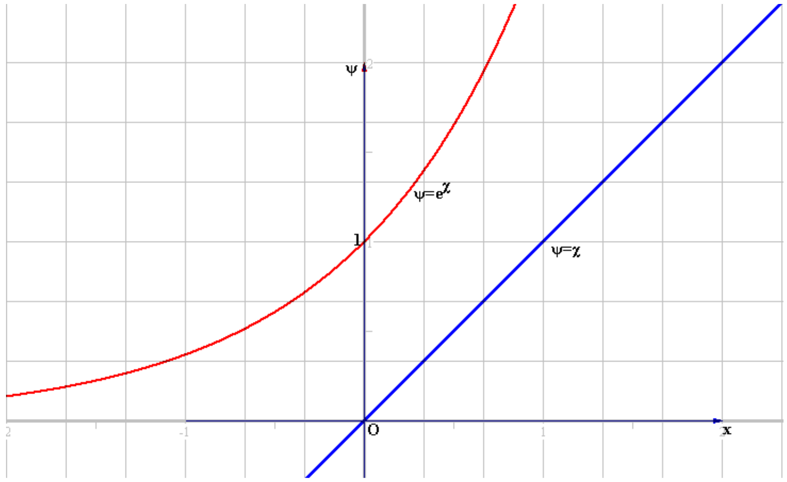
Γ_1. Για κάθε $\chi\in R$ $e^\chi(f'(\chi)+f''(\chi)-1)=f'(\chi)+\chi f''(\chi) \Leftrightarrow (e^\chi-1)f'(\chi)+(e^\chi-\chi)f''(\chi)=e^\chi \Leftrightarrow [(e^\chi-\chi)f'(\chi)]'=(e^\chi)' \Leftrightarrow (e^\chi-\chi)f'(\chi)=e^\chi+c_1$ (1).

Για $\chi=0$ από την (1) προκύπτει $c_1=-1$.Άρα η (1) γράφεται $(e^\chi-\chi)f'(\chi)=e^\chi-1$ (2).

Θα δείξουμε ότι για κάθε $\chi\in R$ είναι $e^\chi-\chi>0$.

<u>1ος τρόπος</u>

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\psi=e^\chi,\chi\in R$ και $\psi=\chi,\chi\in R$ από τις οποίες φαίνεται ότι $e^\chi>\chi \Leftrightarrow e^\chi-\chi>0$ για κάθε $\chi\in R$.



$2^{ος}$ τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\chi)=e^{\chi}-\chi, \chi\in R$. Η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(\chi)=e^{\chi}-1$.
$g'(\chi)=0 \Leftrightarrow e^{\chi}=1 \Leftrightarrow \chi=0. g'(\chi)>0 \Leftrightarrow e^{\chi}>1 \Leftrightarrow \chi>0$.

χ	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(\chi)$	$-$	0	$+$
$g(\chi)$	$\searrow$	1 *ολ.ελάχ.*	$\nearrow$

Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.Άρα για $\chi=0$ η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $g(0)=1$,οπότε για κάθε $\chi\in R, g(\chi)\geq 1>0 \Rightarrow e^{\chi}-\chi>0$.
$(2)\Leftrightarrow f'(\chi)=\frac{e^{\chi}-1}{e^{\chi}-\chi} \Leftrightarrow f'(\chi)=(\ln(e^{\chi}-\chi))' \Leftrightarrow f(\chi)=\ln(e^{\chi}-\chi)+c_2$ (2).
Για $\chi=0$ από την (2) παίρνουμε $c_2=0$,οπότε είναι $f(\chi)=\ln(e^{\chi}-\chi), \chi\in R$.
Γ₂. $f'(\chi)=\frac{e^{\chi}-1}{e^{\chi}-\chi}$. $f'(\chi)=0 \Leftrightarrow e^{\chi}-1=0 \Leftrightarrow \chi=0$.
$f'(\chi)>0 \overset{e^{\chi}-\chi>0}{\Longleftrightarrow} e^{\chi}-1>0 \Leftrightarrow \chi>0$.

χ	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(\chi)$	$-$	0	$+$
$f(\chi)$	$\searrow$	0 *ολ.ελάχ.*	$\nearrow$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και για $\chi=0$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(0)=0$.

Γ₃. Η f' είναι παραγωγίσιμη με $f''(\chi)=\cdots=\frac{2e^{\chi}-\chi e^{\chi}-1}{(e^{\chi}-\chi)^2}$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(\chi)=2e^{\chi}-\chi e^{\chi}-1, \chi\in R$.
Η φ είναι παραγωγίσιμη με $\varphi'(\chi)=e^{\chi}(1-\chi)$. $\varphi'(\chi)=0 \Leftrightarrow \chi=1$. $\varphi'(\chi)>0 \Leftrightarrow \chi<1$.

χ	$-\infty$		1		$+\infty$
$\varphi'(\chi)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(\chi)$		↗	$e-1$ ολ.μέγ.	↘	

$\lim_{\chi\to-\infty}(\chi e^{\chi}) = \lim_{\chi\to-\infty}\frac{\chi}{e^{-\chi}} = (L'Hospital)\lim_{\chi\to-\infty}(-e^{\chi}) = 0$.Άρα $\lim_{\chi\to-\infty}\varphi(\chi) = -1$.
$\lim_{\chi\to+\infty}\varphi(\chi) = \lim_{\chi\to+\infty}[e^{\chi}(2-\chi-\frac{1}{e^{\chi}})] = -\infty$.
Η φ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$,οπότε $\varphi\big((-\infty,1]\big) = (-1,e-1]$.
Επειδή $0 \in \varphi\big((-\infty,1]\big)$ υπάρχει ακριβώς ένα $\rho_1 \in (-\infty,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(\rho_1) = 0$.Η μοναδικότητα του ρ_1 προκύπτει από την μονοτονία.
Η φ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$,οπότε $\varphi([1,+\infty)) = (-\infty,e-1]$.
Επειδή $0 \in \varphi([1,+\infty))$ υπάρχει ακριβώς ένα $\rho_2 \in (1,+\infty)$ τέτοιο ώστε $\varphi(\rho_2) = 0$.Η μοναδικότητα του ρ_2 προκύπτει από την μονοτονία.
Άρα η εξίσωση $f''(\chi) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες τις ρ_1,ρ_2.
Με τη βοήθεια της μονοτονίας της φ έχουμε:

- $\chi < \rho_1 \Rightarrow \varphi(\chi) < \varphi(\rho_1) \Rightarrow \varphi(\chi) < 0 \Rightarrow f''(\chi) < 0$.
- $\rho_1 < \chi < 1 \Rightarrow \varphi(\rho_1) < \varphi(\chi) \Rightarrow \varphi(\chi) > 0 \Rightarrow f''(\chi) > 0$.
- $1 < \chi < \rho_2 \Rightarrow \varphi(\chi) > \varphi(\rho_2) \Rightarrow \varphi(\chi) > 0 \Rightarrow f''(\chi) > 0$.
- $\rho_2 < \chi \Rightarrow \varphi(\chi) < \varphi(\rho_2) \Rightarrow \varphi(\chi) < 0 \Rightarrow f''(\chi) < 0$.

Με βάση τα παραπάνω έχουμε τον παρακάτω πίνακα κυρτών – κοίλων της f.

$-\infty$	$-\infty$		ρ_1		ρ_2		$+\infty$
$f''(\chi)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(\chi)$		$\cap$	$f(\rho_1)$ Σ.Κ	$\cup$	$f(\rho_2)$ Σ.Κ	$\cap$	

Από τον παραπάνω πίνακα φαίνεται ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.
Γ₄. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(\chi) = \ln(e^{\chi}-\chi) - \sigma\upsilon\nu\chi, \chi \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

- Η h είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
- $h(0) = -1 < 0$ και $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln\left(e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}\right)$.Στο Γ_1 έχουμε δείξει ότι $e^{\chi}-\chi \geq 1$.Η ισότητα ισχύει μόνο για $\chi = 0$.Άρα είναι $e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2} > 1$,οπότε $h\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$.Άρα $h(0)h\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$.Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,\frac{\pi}{2})$ τέτοιο ώστε $h(\xi) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(e^{\xi}-\xi\right) = \sigma\upsilon\nu\xi$.

Η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(\chi) = \frac{e^{\chi}-1}{(e^{\chi}-\chi)^2} + \eta\mu\chi$.Για $\chi \in (0,\frac{\pi}{2})$ έχουμε $e^{\chi}-1 > 0$ και $\eta\mu\chi > 0$.
Άρα για κάθε $\chi \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $h'(\chi) > 0$,οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,\frac{\pi}{2})$.Επομένως το ξ είναι μοναδικό.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ₁. Θέτουμε $\chi + t = u$,τότε $du = dt$.Για $t = 0$ είναι $u = \chi$ και για $t = -\chi$ είναι $u = 0$.
Άρα $\int_0^{-\chi} \frac{e^{2t}}{g(\chi+t)} dt = \int_\chi^0 \frac{e^{2u-2\chi}}{g(u)} du = -e^{-2\chi} \int_0^\chi \frac{e^{2u}}{g(u)} du$ και $\int_0^{-\chi} \frac{e^{2t}}{f(\chi+t)} dt = -e^{-2\chi} \int_0^\chi \frac{e^{2u}}{f(u)} du$.
$\frac{1-f(\chi)}{e^{2\chi}} = \int_0^{-\chi} \frac{e^{2t}}{g(\chi+t)} dt \Leftrightarrow \frac{1-f(\chi)}{e^{2\chi}} = -e^{-2\chi} \int_0^\chi \frac{e^{2u}}{g(u)} du \Leftrightarrow f(\chi) = 1 + \int_0^\chi \frac{e^{2u}}{g(u)} du$.
$\frac{1-g(\chi)}{e^{2x}} = \int_0^{-\chi} \frac{e^{2t}}{g(\chi+t)} dt \Leftrightarrow g(\chi) = 1 + \int_0^\chi \frac{e^{2u}}{f(u)} du$.
Οι συναρτήσεις $\int_0^\chi \frac{e^{2u}}{g(u)} du$, $\int_0^\chi \frac{e^{2u}}{f(u)} du$ είναι παραγωγίσιμες ως παράγουσες των συνεχών συναρτήσεων $\frac{e^{2u}}{g(u)}$ και $\frac{e^{2u}}{f(u)}$ αντίστοιχα στο R.Άρα οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες ως άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων.
$f'(\chi) = \frac{e^{2\chi}}{g(\chi)} \Leftrightarrow f'(\chi)g(\chi) = e^{2\chi}$ και $g'(\chi) = \frac{e^{2\chi}}{f(\chi)} \Leftrightarrow g'(\chi)f(\chi) = e^{2\chi}$.
Άρα $f'(\chi)g(\chi) = g'(\chi)f(\chi) \Leftrightarrow \frac{f'(\chi)}{f(\chi)} = \frac{g'(\chi)}{g(\chi)} \Leftrightarrow \left(lnf(\chi)\right)' = \left(lng(\chi)\right)' \Leftrightarrow lnf(\chi) = lng(\chi) + c$ (1),για κάθε $\chi \in R$.
Είναι $f(0) = g(0) = 1$.Για $\chi = 0$ από την (1) προκύπτει $c = 0$.
Άρα (1)$\Leftrightarrow lnf(\chi) = lng(\chi) \Leftrightarrow f(\chi) = g(\chi)$,για κάθε $\chi \in R$.
Δ₂. Έχουμε $f'(\chi) = \frac{e^{2\chi}}{g(\chi)} \overset{\Delta_1}{\Leftrightarrow} f'(\chi) = \frac{e^{2\chi}}{f(\chi)} \Leftrightarrow 2f(\chi)f'(\chi) = 2e^{2\chi} \Leftrightarrow \left(f^2(\chi)\right)' = (e^{2\chi})' \Leftrightarrow$
$f^2(\chi) = e^{2\chi} + c_1$ (2),για κάθε $\chi \in R$.Για $\chi = 0$ από την (2) προκύπτει $c_1 = 0$.
$(2) \Leftrightarrow f^2(\chi) = e^{2\chi} \overset{f(\chi)>0}{\Longleftrightarrow} f(\chi) = e^\chi, \chi \in R$.
Δ₃. $A = \lim_{\chi\to 0^-} \frac{lnf(\chi)}{f\left(\frac{1}{\chi}\right)} = \lim_{\chi\to 0^-} \frac{\chi}{e^{\frac{1}{\chi}}} = \lim_{\chi\to 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{\chi}}}{\frac{1}{\chi}}$.
Για $\chi < 0$ θέτουμε $\frac{1}{\chi} = u$,οπότε είναι $u < 0$.$\lim_{\chi\to 0^-} \frac{1}{\chi} = -\infty$.Άρα $u \to -\infty$.
$A = \lim_{u\to -\infty} \frac{e^{-v}}{u} = (L'Hospital) = \lim_{u\to -\infty}(-e^{-u}) = -\infty$.
Δ₄. Η συνάρτηση $f(t^2)$ είναι συνεχής στο R ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων και αφού $1 \in R$,το πεδίο ορισμού της F είναι το R.Η F είναι παραγωγίσιμη ως παράγουσα της $f(t^2)$ στο R.
$F'(\chi) = f(\chi^2) > 0$ για κάθε $\chi \in R$.Άρα η F είναι γνησίως αύξουσα.
$0 \le \chi \le 1 \Rightarrow \chi \le 1 \Rightarrow F(\chi) \le F(1) \Leftrightarrow F(\chi) \le 0$.Επιπλέον η F ως παραγωγίσιμη είναι συνεχής.
Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = -\int_0^1 F(\chi)d\chi = -\int_0^1 (\chi)'F(\chi)d\chi = -[\chi F(\chi)]_0^1 + \int_0^1 \chi F'(\chi)d\chi =$
$-F(1) + \int_0^1 \chi f(\chi^2)d\chi = \int_0^1 \chi e^{\chi^2} d\chi = \frac{1}{2}[e^{\chi^2}]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)$ τετρ.μονάδες.