ΠΑΝΕΝΩΣΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ Ε.Σ.Σ.Δ 1968 (α) – 1970 (β)

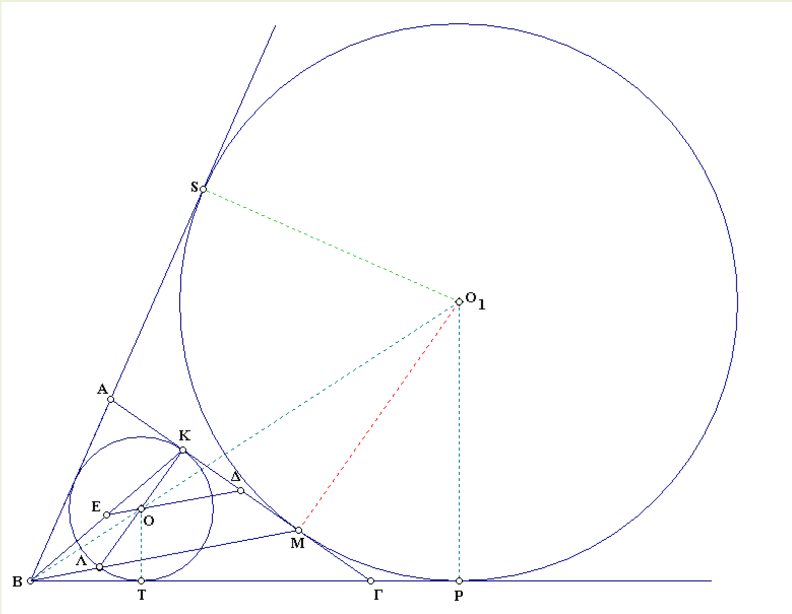
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και ο εγγεγραμμένος του κύκλος κέντρου O.

α. Έστω Δ το μέσο της πλευράς $A\Gamma$ και K το σημείο επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου με την πλευρά $A\Gamma$.Δείξτε ότι η ΔO διέρχεται από το μέσο του BK.

β. Εστω Z το μέσο της πλευράς $B\Gamma$ και AH το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$.Η ZO τέμνει το ύψος AH στο σημείο Σ.Δείξτε ότι το τμήμα $A\Sigma$ είναι ίσο με την ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου.

Λύση

α.



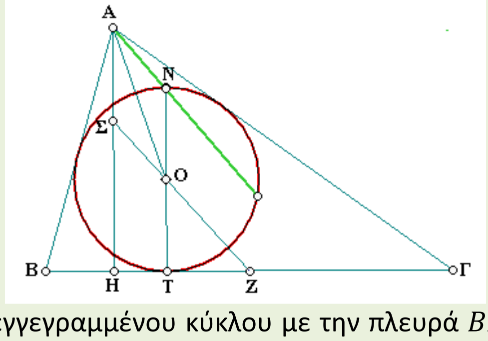
Έστω Λ το αντιδιαμμετρικό σημείο του K.Η $B\Lambda$ τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο M.

Από το M φέρουμε παράλληλο προς την $K\Lambda$ που τέμνει την ημιευθεία BO στο σημείο O_1.Επειδή $K\Lambda \perp A\Gamma$ θα είναι και $O_1M \perp A\Gamma$.Τα τρίγωνα $BO\Lambda, BMO_1$ είναι όμοια,οπότε $\frac{O\Lambda}{O_1M} = \frac{BO}{BO_1}$ (1).

Έστω $O_1P \perp B\Gamma, OS \perp AB$ και $OT \perp B\Gamma$.Είναι $OT // O_1P$ και από την ομοιότητα των τριγώνων BOT, BO_1P έχουμε $\frac{OT}{O_1P} = \frac{BO}{BO_1}$ (2).Από τις (1),(2) και δεδομένου ότι $O\Lambda = OT$ προκύπτει ότι $O_1M = O_1P$,οπότε $O_1M = O_1P = O_1S$.Άρα το O_1 είναι το κέντρο του παρεγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$ που εφάπτεται στην πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο M.Είναι $AM = \tau - \gamma = \Gamma K \Rightarrow A\Delta + \Delta M = \Gamma\Delta + \Delta K \Leftrightarrow \Delta M = \Delta K$,δηλαδή το Δ είναι μέσο του KM.Το ΔO ενώνει τα μέσα των πλευρών $KM, K\Lambda$ του τριγώνου $K\Lambda M$,οπότε είναι $\Delta O // \Lambda M$.

Το ΔO τέμνει το τμήμα BK στο E.Στο τρίγωνο KBM έχουμε: Δ μέσο του KM και $\Delta E // BM$.Άρα το E είναι μέσο του BK.

β.



Έστω T το σημείο επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου με την πλευρά $B\Gamma$ και N το αντιδιαμμετρικό του σημείο.Από το α ερώτημα είναι $AN // Z\Sigma$.Επίσης είναι $A\Sigma // NO$ ως κάθετα στην $B\Gamma$.Άρα το τετράπλευρο $A\Sigma ON$ είναι παραλληλόγραμμο,οπότε $A\Sigma = ON = \rho$.

Σπύρος Γιαννακόπουλος