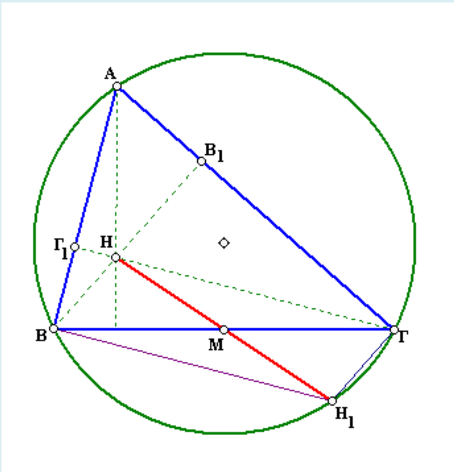
Θεώρημα

Α.Το συμμετρικό σημείο του ορθοκέντρου τριγώνου ως προς το μέσο της πλευράς του βρίσκεται πάνω στον περιγγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου.

Β.Το συμμετρικό σημείο του οθοκέντρου τριγώνου ως προς την πλευρά του βρίκεται πάνω στον περιγγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου.

Απόδειξη

Α.

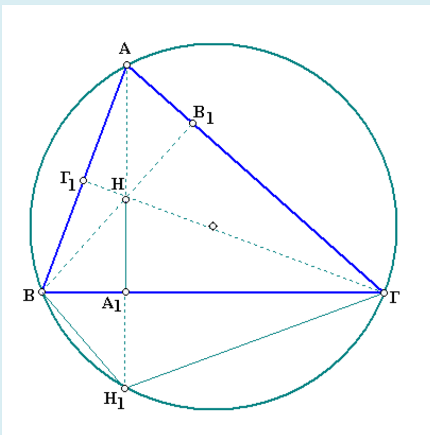


Έστω H το οθόκεντρο του τριγώνου.

$\widehat{H\varGamma_1 A}+\widehat{HB_1A}=1\llcorner+1\llcorner=2\llcorner$.Άρα το τετράπλευρο $A\varGamma_1HB_1$ είναι εγγράψιμμο σε κύκλο οπότε $\hat{A}+\widehat{\varGamma_1HB_1}=2\llcorner \Leftrightarrow \hat{A}+\widehat{BH\varGamma}=2\llcorner$ (1).

Έστω H_1 το συμμετρικό του H ως προς το μέσο M του $B\varGamma$.Το τετράπλευρο $BH\varGamma H_1$ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιές του διχοτομούνται.Άρα $\widehat{BH_1\varGamma}=\widehat{BH\varGamma}$,οπότε από την (1) έχουμε $\hat{A}+\widehat{BH_1\varGamma}=2\llcorner$,δηλαδή το τετράπλευρο $ABH_1\varGamma$ είναι εγγράψιμμο σε κύκλο,ο οποίος είναι ο περιγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $AB\varGamma$.

Β.



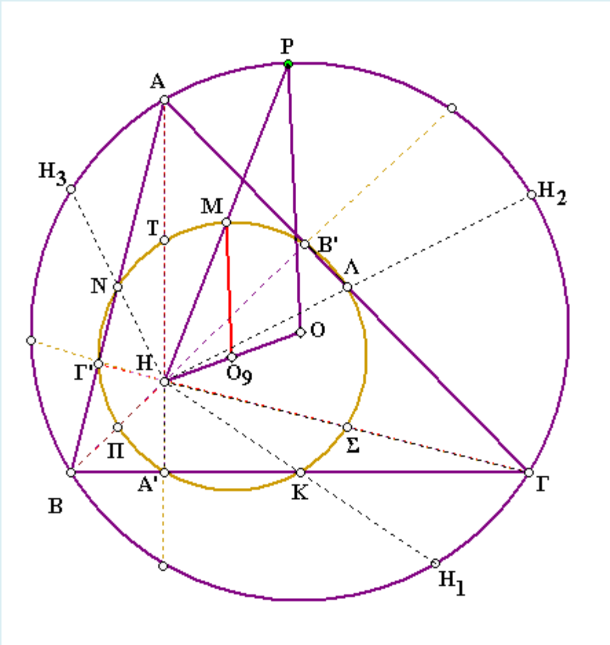
Έστω H_1 το συμμετρικό του ορθοκέντρου H ως προς την $B\varGamma$.Τα τρίγωνα $BHH_1, \varGamma HH_1$ είναι ισοσκελή με $\widehat{BH_1A_1}=\widehat{BHA_1}$ και $\widehat{\varGamma H_1A_1}=\widehat{\varGamma HA_1}$.Άρα $\widehat{BH_1\varGamma}=\widehat{BH\varGamma}$.

Είναι $\hat{A}+\widehat{BH\varGamma}=2\llcorner \Leftrightarrow \hat{A}+\widehat{BH_1\varGamma}=2\llcorner$.Άρα το τετράπλευρο $ABH_1\varGamma$ είναι εγγράψιμμο σε κύκλο,ο οποίος είναι ο περιγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $AB\varGamma$.

Θεώρημα

Έστω ένα τρίγωνο $AB\Gamma$.Τα ίχνη των υψών του τριγώνου,τα μέσα των πλευρών του και τα μέσα των αποστάσεων του ορθοκέντρου από τις κορυφές του τριγώνου είναι σημεία ενός κύκλου.Ο κύκλος αυτός ονομάζεται κύκλος Euler ή κύκλος των εννέα σημείων.

Απόδειξη



Έστω τυχαίο σημείο P του περιγγεγραμμένου κύκλου (O,R) του τριγώνου $AB\Gamma$ και M,O_9 τα μέσα των τμημάτων HP και HO αντίστοιχα.Στο τρίγωνο HOP έχουμε $O_9M=\frac{1}{2}OP \Leftrightarrow O_9M=\frac{1}{2}R$.Άρα το P είναι σημείο του κύκλου $(O_9,\frac{1}{2}R)$.

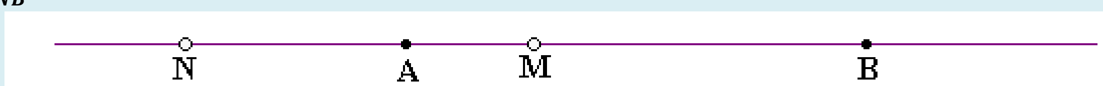
<u>Αντίστροφα:</u> Αν M τυχαίο σημείο του κύκλου $(O_9,\frac{1}{2}R)$ εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το M είναι μέσο του τμήματος HP,όπου P το σημείο που το τμήμα HM τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $AB\Gamma$.

Άρα ο γεωμετρικός τόπος του μέσου των τμημάτων HP με P σημείο του περιγεγγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ο κύκλος $(O_9,\frac{1}{2}R)$.

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα,τα μέσα των πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$,τα ίχνη των υψών του τριγώνου,οφείλουν να βρίσκονται πάνω στον κύκλο $(O_9,\frac{1}{2}R)$.

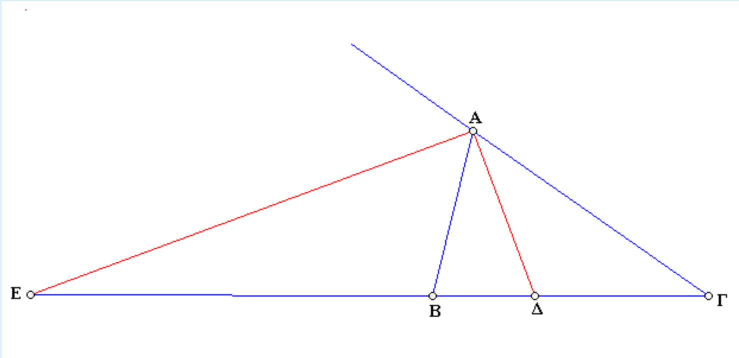
Τελικά ο κύκλος $(O_9,\frac{1}{2}R)$ διέρχεται από τα μέσα των τμημάτων $HA,HB,H\Gamma$,από τα μέσα των πλευρών του τριγώνου καθώς και από τα ίχνη των υψών του.

Ορισμός 1: **Έστω δύο σημεία A,B.Αν M εσωτερικό σημείο του τμήματος AB διαφορετικό από το μέσο του AB και N σημείο στο φορέα του AB εξωτερικό του AB,που χωρίζουν το AB στον ίδιο λόγο δηλαδή $\frac{MA}{MB}=\frac{NA}{NB}$,τότε λέμε ότι τα σημεία M,N είναι αρμονικά συζυγή των A,B.**



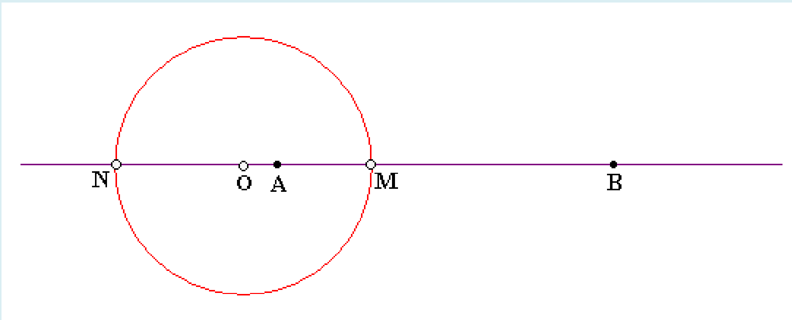
- ✓ **Τα σημεία A,B,M,N λέμε ότι αποτελούν μία αρμονική τετράδα.**

✓



Αν $Α\Delta, ΑΕ$ εσωτερική και εξωτερική διχοτόμος αντίστοιχα του τριγώνου $ΑΒ\Gamma$,τότε τα σημεία $\Delta, Ε$ είναι αρμονικά συζυγή των Β,Γ.

Ορισμός 2: Αν τα σημεία M, N είναι αρμονικά συζυγή των A, B,τότε ο κύκλος με διάμετρο το MN ονομάζεται Απολλώνιος κύκλος ως προς τα A, B ή Αρμονικός κύκλος ή κύκλος του Αριστοτέλη.



- ✓ Γενικά υπάρχουν άπειροι Απολλώνιοι κύκλοι.Για να ορισθεί κάποιος από αυτούς χρειάζεται να γνωρίζουμε το λόγο στον οποίο χωρίζουν τα σημεία M, N εσωτερικά και εξωτερικά αντίστοιχα το τμήμα AB ή ένα από τα σημεία M, N η ένα τυχαίο σημείο του κύκλου.
  (Βλέπε παράγραφο 7.9 σχ.βιβλίου «Ευκλείδια Γεωμετρία»).