**ΑΣΚΗΣΗ**

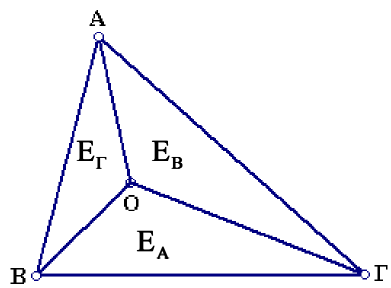
**Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και Ο ένα εσωτερικό σημείο του τριγώνου.**
**Ονομάζουμε** $E_A, E_B, E_\Gamma$ **τα εμβαδά των τριγώνων** $O B\Gamma, OA\Gamma, OAB$ **αντίστοιχα.**

**i. Δείξτε ότι:** $E_A\overrightarrow{OA}+E_B\overrightarrow{OB}+E_\Gamma\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{0}$ **.(Σχέση Καραθεοδωρή.Ο Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή υπήρξε ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς της εποχής του 1873-1950.Σημαντική υπήρξε η συμβολή του στο Μαθηματικό τομέα της Θεωρίας της Σχετικότητας του Einstein.)**

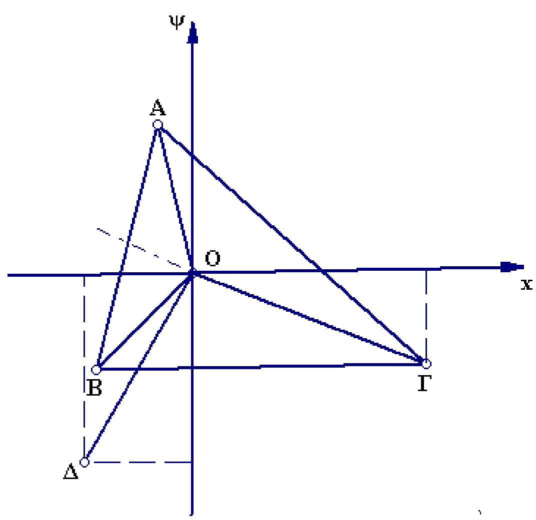
**ii. Αν το Ο είναι περίκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ και** $A\hat{O}B=90^0, \left(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{O\Gamma}}\right)=\omega$ **δείξτε ότι:** $\sigma\upsilon\nu\omega=-\dfrac{E_B}{E_\Gamma}$ **.**

**Λύση**

**i.**




Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή το Ο και άξονα τετμημένων $\chi'\chi$ παράλληλο στη $B\Gamma$.




Με βάση το παραπάνω σχήμα έχουμε $A(\kappa,\lambda), B(\mu,\nu), \Gamma(\rho,\nu)$ με $\kappa<0, \lambda>0, \mu<0, \nu<0$ και $\rho>0$. $\overrightarrow{OA}=(\kappa,\lambda), \overrightarrow{OB}=(\mu,\nu), \overrightarrow{O\Gamma}=(\rho,\nu)$.

$\det\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{O\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}\mu & \nu\\ \rho & \nu\end{vmatrix}=\mu\nu-\rho\nu>0, \det\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{O\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}\kappa & \lambda\\ \rho & \nu\end{vmatrix}=\kappa\nu-\rho\lambda$.

Θεωρούμε το σημείο $\Delta(\nu,-\rho)$.Είναι $\overrightarrow{O\Delta}=(\nu,-\rho)$ με $\overrightarrow{O\Gamma}.\overrightarrow{O\Delta}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{O\Gamma}\perp\overrightarrow{O\Delta}$ και

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}.\overrightarrow{\mathrm{O\Delta}}=\kappa\nu-\rho\lambda=\det\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}\right)$.Η γωνία $\mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\Delta$ είναι αμβλεία,οπότε $\overrightarrow{\mathrm{OA}}.\overrightarrow{\mathrm{O\Delta}}<0\Leftrightarrow\det\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}\right)<0$.

Επίσης $\det\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=\begin{vmatrix}\kappa & \lambda\\ \mu & \nu\end{vmatrix}=\kappa\nu-\mu\lambda>0$.

$\mathrm{E_A}=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}},\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}\right)\right|=\frac{1}{2}(\mu\nu-\rho\nu),\mathrm{E_B}=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}\right)\right|=\frac{1}{2}(\rho\lambda-\kappa\nu)$ και

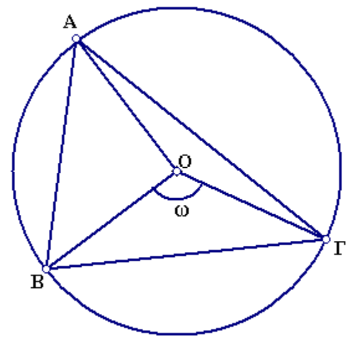
$\mathrm{E_\Gamma}=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\right|=\frac{1}{2}(\kappa\nu-\mu\lambda)$.

$\mathrm{E_A}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\mathrm{E_B}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\mathrm{E_\Gamma}\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}=\frac{1}{2}\left(\kappa\mu\nu-\kappa\nu\rho+\mu\rho\lambda-\kappa\mu\nu+\rho\kappa\nu-\mu\rho\lambda,\lambda\mu\nu-\lambda\nu\rho+\rho\lambda\nu-\kappa\nu^2+\kappa\nu^2-\lambda\mu\nu\right)=$

$\frac{1}{2}(0,0)=\vec{0}$.

**__Σημείωση:__** Η λύση του προβλήματος δεν επηρεάζεται από τη θέση του Α.Αν το Α είναι στην πρώτη γωνία των αξόνων,τότε $\kappa>0,\lambda>0$,οπότε απευθείας έχουμε $\kappa\nu-\rho\lambda<0$.

**ii.** Έχουμε $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}\Leftrightarrow\overrightarrow{\mathrm{OA}}.\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ και $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}\right|=R$,όπου $R$ η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.Απο το i ερώτημα είναι:




$\mathrm{E_A}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\mathrm{E_B}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\mathrm{E_\Gamma}\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}=\vec{0}\Rightarrow\mathrm{E_A}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}.\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)+\mathrm{E_B}\overrightarrow{\mathrm{OB}}^{2}+\mathrm{E_\Gamma}\overrightarrow{\mathrm{OB}}.\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}=0\Leftrightarrow$

$\mathrm{E_B}R^2+\mathrm{E_\Gamma}R^2\sigma\upsilon\nu\omega=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\omega=-\frac{\mathrm{E_B}}{\mathrm{E_\Gamma}}$.