ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έχουμε $\bar{\chi} = \frac{t_2+t_2+\cdots+t_\nu}{\nu} \Leftrightarrow t_1 + t_2 + \cdots + t_\nu = \nu\bar{\chi}$ (1)

Θέτουμε $\psi_i = t_i - \bar{\chi}$, $i = 1,2,3,\ldots,\nu$ και έχουμε $\bar{\psi} = \frac{\psi_1+\psi_2+\cdots+\psi_\nu}{\nu} = \frac{(t_1+t_2+\cdots+t_\nu)-\nu\bar{\chi}}{\nu} = (\lambda \acute{o} \gamma \omega\ \tau \eta \varsigma\ (1)) \frac{\nu\bar{\chi}-\nu\bar{\chi}}{\nu} = 0.$

Α2. Ο σταθμικός μέσος της μεταβλητής X ορίζεται από την ισότητα $\bar{\chi} = \frac{\chi_1 w_1+\chi_2 w_2+\cdots+\chi_\nu w_\nu}{w_1+w_2+\cdots+w_\nu}$.

Α3. Βέβαιο ενδεχόμενο είναι το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται σε κάθε εκτέλεση του πειράματος

(Ο δειγματικός χώρος Ω).

Αδύνατο ενδεχόμενο είναι το ενδεχόμενο που δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος (Το $\emptyset$ ενδεχόμενο).

Α4. $\alpha \rightarrow \Sigma\omega\sigma\tau\acute{o}$

$\beta \rightarrow \Lambda\acute{\alpha}\theta o\varsigma$

$\gamma \rightarrow \Sigma\omega\sigma\tau\acute{o}$

$\delta \rightarrow \Lambda\acute{\alpha}\theta o\varsigma$

$\varepsilon \rightarrow \Lambda\acute{\alpha}\theta o\varsigma$

ΘΕΜΑ Β

Για το πεδίο ορισμού της f πρέπει $\chi^2 - \chi + 1 \geq 0$ που ισχύει για κάθε $\chi \in R$,γιατί το τριώνυμο έχει διακρίνουσα αρνητική.

Β1. $\mathrm{Lim}_{\chi\to 1} \frac{f(\chi)-1}{\chi-1} = \lim_{\chi\to 1} \frac{2\sqrt{\chi^2-\chi+1}-2}{\chi-1} = \lim_{\chi\to 1} \frac{2\left(\sqrt{\chi^2-\chi+1}-1\right)\left(\sqrt{\chi^2-\chi+1}+1\right)}{(\chi-1)\left(\sqrt{\chi^2-\chi+1}+1\right)} =$

$\lim_{\chi\to 1} \frac{2\chi(\chi-1)}{(\chi-1)(\sqrt{\chi^2-\chi+1}+1)} = \lim_{\chi\to 1} \frac{2\chi}{\sqrt{\chi^2-\chi+1}+1} = 1.$

Β2. Η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$$f'(\chi) = 2\frac{1}{2\sqrt{\chi^2-\chi+1}}(\chi^2 - \chi + 1)' = \frac{2\chi-1}{\sqrt{\chi^2-\chi+1}}.$$

Ο ζητούμενος συντελεστής διεύθυνσης είναι $f'(0) = -1$.

Β2. Έστω ω η ζητούμενη γωνία.Είναι $\omega \in [0,\pi)$ και $\varepsilon\varphi\omega = f'(0) = -1 \Leftrightarrow \omega = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η πρώτη κλάση είναι $[0,c)$.Η δεύτερη κλάση είναι $[c,2c)$.Πρέπει $\frac{c+2c}{2} = 6 \Leftrightarrow c = 4$.

Γ2.

ΑΠΩΛΕΙΑ ΒΑΡΟΥΣ ΣΕ ΚΙΛΑ	ΚΕΝΤΡΟ ΚΛΑΣΗΣ χ_i	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ν_i
[0,4)	2	20
[4,8)	6	40
[8,12)	10	45
[12,16)	14	30
[16,20)	18	25
ΣΥΝΟΛΟ		160

$$\bar{\chi} = \frac{2.20+6.40+10.45+14.30+18.25}{160} = \frac{40+240+450+420+450}{160} = \frac{1600}{160} = 10\,.$$

$$s^2 = \frac{(2-10)^2.20 + (6-10)^2.40 + (10-10)^2.45 + (14-10)^2.30 + (18-10)^2.25}{160} =$$

$$\frac{64.20+16.40+16.30+64.25}{160} = \frac{1280+640+480+1600}{160} = \frac{4000}{160} = 25.$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Γ3. $CV = \frac{s}{|\bar{\chi}|} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} > \frac{1}{10}$.Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Γ4. Βρισκόμαστε στο κλασικό ορισμό των πιθανοτήτων.

Επειδή τα δεδομένα είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα στις κλάσεις,το βάρος των ατόμων που έχουν επιλεγεί, βρίσκονται στο $\frac{1}{4}$ της 2ης κλάσης,στην τρίτη κλάση και στο $\frac{1}{2}$ της 4ης κλάσης.

Άρα $N(A) = 10 + 45 + 15 = 70$,οπότε $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{70}{160} = \frac{7}{16}$.

ΘΕΜΑ Δ.

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(\chi) = \frac{1}{\chi - P(A)} - (\chi - P(A) = \frac{1-(\chi-P(A))^2}{\chi-P(A)} = \frac{(-\chi+P(A)+1)(\chi-P(A)+1)}{\chi-P(A)}$.

Έχουμε $\chi > P(A) \Leftrightarrow \chi - P(A) > 0 \Rightarrow \chi - P(A) + 1 > 0$.

$f'(\chi) = 0 \Leftrightarrow -\chi + P(A) + 1 = 0 \Leftrightarrow \chi = P(A) + 1$.

$f'(\chi) > 0 \Leftrightarrow -\chi + P(A) + 1 > 0 \Leftrightarrow \chi < P(A) + 1$.

χ	$-\infty$	$P(A)$		$P(A)+1$		$+\infty$
f'(χ)			+	0	-	
f(χ)			↗	f(P(A)+1) **ολ.μέγιστο**	↘	

Στο διάστημα $(P(A), P(A) + 1]$ η f είναι γνησίως αύξουσα και στο διάστημα $[P(A) + 1, +\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα και στο $P(A) + 1$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f(P(A) + 1) = P(B) - \frac{1}{2}$.

Δ2. Σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε $P(A) + 1 = \frac{5}{3} \Leftrightarrow P(A) = \frac{2}{3}$ και $P(B) - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{2}$.

Δ3. Ζητάμε την πιθανότητα $P[(A \cap B)'] = 1 - P(A \cap B)$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{6} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{3}$.Άρα $P[(A \cap B)'] = 1 - \frac{1}{3} \Leftrightarrow P[(A \cap B)'] = \frac{2}{3}$.

Δ4. Ζητάμε την πιθανότητα $P[(A - B) \cup (B - A)]$.Τα ενδεχόμενα $A - B, B - A$ είναι ασυμβίβαστα οπότε $P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A - B) + P(B - A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(B \cap A) =$

$$P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \Leftrightarrow P[(A - B) \cup (B - A)] = \frac{1}{2}.$$