ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ Η.Π.Α 1974

ΑΣΚΗΣΗ

Έστω $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ και $\boldsymbol{c}$ τρεις διαφορετικοί ακέραιοι και $\boldsymbol{P(\chi)}$ ένα πολυώνυμο που έχει όλους τους συντελεστές του ακέραιους.Δείξτε ότι δεν μπορεί να είναι $\boldsymbol{P(a)=b, P(b)=c}$ και $\boldsymbol{P(c)=a}$.

Λύση

Δεν βλάπτεται η γενικότητα αν θεωρήσουμε ότι $\alpha<b<c$.

Οι διαιρέσεις $P(\chi):(\chi-\alpha), P(\chi):(\chi-b), P(\chi):(\chi-c)$ δίνουν τις παρακάτω ταυτότητες.

$P(\chi)=(\chi-\alpha)\Pi_1(\chi)+P(a) \Leftrightarrow P(\chi)=(\chi-\alpha)\Pi_1(\chi)+b$ (1)

$P(\chi)=(\chi-b)\Pi_2(\chi)+P(b) \Leftrightarrow P(\chi)=(\chi-b)\Pi_2(\chi)+c$ (2)

$P(\chi)=(\chi-c)\Pi_3(\chi)+P(c) \Leftrightarrow P(\chi)=(\chi-c)\Pi_3(\chi)+\alpha$ (3)

Όπου $\Pi_1(\chi), \Pi_2(\chi), \Pi_3(\chi)$ πολυώνυμα με ακέραιους συντελεστές.

Για $\chi=b, \chi=c$ και $\chi=\alpha$ από τις (1),(2),(3) αντίστοιχα παίρνουμε: $c-b=(b-\alpha)\Pi_1(b)$ (4)

$a-c=(c-b)\Pi_2(c)$ (5) και $b-a=(a-c)\Pi_3(a)$ (6).

Πολλαπλασιάζουμε τις (4),(5),(6) κατά μέλη και έχουμε:

$(c-b)(a-c)(b-a)=(b-a)(c-b)(a-c)\Pi_1(b)\Pi_2(c)\Pi_3(\alpha) \Leftrightarrow \Pi_1(b)\Pi_2(c)\Pi_3(\alpha)=1$ (I).

Οι αριθμοί $\Pi_1(b), \Pi_2(c), \Pi_3(\alpha)$ είναι ακέραιοι,οπότε λόγω της (I) ή θα είναι ίσοι με την μονάδα ή δύο από αυτούς θα είναι ίσοι με -1 και ο τρίτος ίσος με 1.

- Αν $\Pi_1(b)=\Pi_2(c)=\Pi_3(\alpha)=1$ από την (5) παίρνουμε $a-c=c-b$.Άτοπο γιατί $a-c<0$ και $c-b>0$.
- Αν $\Pi_1(b)=\Pi_2(c)=-1$ και $\Pi_3(\alpha)=1$,από την (4) παίρνουμε $c-b=a-b \Leftrightarrow c=a$.Άτοπο. Όμοια και στις άλλες περιπτώσεις.

Άρα δεν μπορεί να είναι $P(a)=b, P(b)=c$ και $P(c)=a$.