Δ Ι Α Γ Ω Ν Ι Σ Μ Α

Θ Ε Μ Α 1ο: **Α.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με τη λέξη Σωστό ή Λάθος.

α. Αν $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R$ και $\gamma+\delta i\neq 0$,τότε ο μιγαδικός $z=\dfrac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$ γράφεται στη μορφή

$z=\dfrac{\alpha\gamma-\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\dfrac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i$. Μον.2

β. $(1+i)^{2008}+(1-i)^{2008}=2^{1005}$. Μον.2

γ. $\left|\dfrac{(1+i)z_1}{\sqrt{2}z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$. Μον.2

δ. Αν f,g,h συναρτήσεις και ορίζεται η συνάρτηση $ho(gof)$,τότε ορίζεται και η συνάρτηση $(hog)of$ και ισχύει $ho(gof)=(hog)of$. Μον.1

ε. Αν η συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to R$ είναι αντιστρέψιμη,τότε ισχύει $f^{-1}(f(\chi))=\chi$ για κάθε $\chi\in f(\mathrm{A})$. Μον.1

ζ. Αν $\lim\limits_{x\to 0} f(\chi)<0$,τότε είναι $f(\chi)\leq 0$ κοντά στο χ_0. Μον.1

η. Αν η f δεν είναι συνεχής στο χ_0,τότε είναι παραγωγίσιμη στο χ_0. Μον.1

Β.i. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι : **α.**Συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Μον.2

β. Παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$. Μον.2

ii. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο χ_0,να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο χ_0. Μον.5

iii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(\chi)=\sigma\upsilon\nu\chi,\chi\in R$ είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(\chi)=-\eta\mu\chi$. Μον.6

Θ Ε Μ Α 2ο: Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=\dfrac{\left|1+\dfrac{1}{z}\right|\chi^4+\dfrac{1}{|z|}\chi}{\chi^4+1},z\in C^*$.

α. Αν $\lim\limits_{\chi\to+\infty} f(\chi)=0$,να βρείτε τον z. Μον.5

β. Αν $\lim\limits_{\chi\to+\infty} f(\chi)=1$,να βρείτε το $\mathrm{Re}(z)$. Μον.5

γ. Αν $|z+1|<1$,δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_0\in(-1,1)$ τέτοιο ώστε $f(\chi_0)=0$. Μον.5

δ. Δείξτε ότι αν $|z+1|<1$ τότε είναι $\mathrm{Re}(z)<0$. Μον.5

ε. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z για τους οποίους ισχύει $|z|^2+2\mathrm{Re}(z)<0$. Μον.5

Θ Ε Μ Α 3ο: Θεωρούμε το μιγαδικό $z=\chi+\psi i,\chi,\psi\in R$.

Α. Δεχόμαστε ότι υπάρχει παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f ώστε να ισχύει:

$\left(\dfrac{z+\bar{z}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 i=f(\alpha)+(f(\beta)-1)i,\alpha<\beta$.

α. Αν $\mathrm{Im}(z)=0$,δείξτε ότι η εξίσωση $\chi^{2008}+f(\alpha)\chi-f(\beta)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1]$. Μον.8

Β. Αν η εικόνα του z βρίσκεται στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho=1$,δείξτε ότι υπάρχει σημείο της C_f στο οποίο ορίζεται εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα $\chi'\chi$. Μον.7

Β. Η εικόνα του z κινείται στον μοναδιαίο κύκλο και ο ρυθμός μεταβολής του πραγματικού του μέρους είναι $\chi'(t)=2t+1, t\in[0,\frac{1}{2}]$.Τη χρονική στιγμή $t=0$ ο μιγαδικός έχει πραγματικό μέρος μηδέν.

Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του φανταστικού μέρους του z τη χρονική στιγμή $t=\frac{1}{2}$ αν είναι γνωστό ότι $\chi(\frac{1}{2})\psi(\frac{1}{2})<0$. Μον.10

Θ Ε Μ Α 4$^{\text{ο}}$: Θεωρούμε την παραγωγίσιμη και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f:[0,1]\to R$ με $f(0)+f(1)=2\kappa>0$ καθώς και τις συναρτήσεις $g(\chi)=\chi(f(\chi)-\kappa)$, h .
Δείξτε ότι:

α. Υπάρχει ακριβώς ένα $\chi_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\chi_0)=\kappa$. Μον.5

β. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi \in (0,1)$ τέτοια ώστε $\frac{1}{f'(\xi_1)}+\frac{1}{f'(\xi_2)}=\frac{2}{f'(\xi)}$. Μον.5

γ. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\rho)=\frac{\kappa-f(\rho)}{\rho}$. Μον.6

δ. Αν η h είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $h''(\chi)-h(\chi)=0$,να βρείτε τον τύπο της h όταν $h(0)=1 \;\kappa\alpha\iota\; h\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{e}}$. Μον.9