Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΤΙΚΗ - ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Η σωστή διαχείριση των θεωρητικών εννοιών και η δυνατότητα συνδυασμού των,είναι βασικό σημείο στη δημιουργία διαδικασιών για την αντιμετώπιση θεμάτων στην Ανάλυση και όχι μόνο.Για παράδειγμα οι μαθητές θα πρέπει να έχουν εξασκηθεί σε θέματα που απαιτείται η χρησιμοποίηση του θεωρήματος Bolzano μαζί με το θεώρημα Rolle ή μέσης τιμής.Επίσης να έχουν ευχέρεια σε θέματα με τη συνάρτηση $\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$.

Στα παρακάτω θέματα έγινε προσπάθεια ώστε για τη λύση τους να χρειάζονται εναλλαγές εννοιών και θεωρημάτων,στα πλαίσια βέβαια που μπορεί να γραφτεί ένα άρθρο για να βοηθήσει την επανάληψη των μαθητών ενόψει των πανελλαδικών εξετάσεων.

► 1ο: α) Η συνάρτηση $f : R \to R$ είναι γνησίως αύξουσα.Δείξτε ότι:
$f(\chi) < f(\psi) \Leftrightarrow \chi < \psi$.

β) Η συνάρτηση $g : R \to R$ είναι περιττή,γνησίως μονότονη και η C_g διέρχεται από το σημείο $A(-1,-2)$.

Αν για κάποιο $\chi_0 \in [-1,1]$ και $z \in C$ ισχύει $g(|z|^2 \chi_0^2 - 1) > 0$ (1),δείξτε ότι:

i) $|z| > 1$.

ii) Ορίζεται ο μιγαδικός $w = \dfrac{z}{z-i}$ και είναι $\mathrm{Re}(w) > \dfrac{1}{2}$.

Λύση

α) • Έστω $\chi, \psi \in R$ με $\chi < \psi$.Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα προκύπτει $f(\chi) < f(\psi)$.

• **Αντίστροφα:** Έστω ότι $f(\chi) < f(\psi)$ (2).Αν ήταν $\chi \ge \psi \overset{f\,\gamma\nu.\alpha\upsilon\xi}{\Rightarrow} f(\chi) \ge f(\psi)$.Άτοπο λόγω της (2).Άρα $\chi < \psi$.

β) i) Αφού η g είναι περιττή, για κάθε $\chi \in R$ έχουμε $g(-\chi) = -g(\chi)$,οπότε για $\chi = 0$ και $\chi = -1$ παίρνουμε $g(0) = 0$ και $g(1) = -g(-1) \overset{g(-1)=-2}{\Leftrightarrow} g(1) = 2$.
Επειδή η g είναι γνησίως μονότονη και $-1 < 1 \Rightarrow g(-1) = -2 < 2 = g(1)$,θα είναι γνησίως αύξουσα.

$(1) \Leftrightarrow g(|z|^2 \chi_0^2 - 1) > g(0) \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow} |z|^2 \chi_0^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow |z||\chi_0| > 1$.Άρα $\chi_0 \ne 0$ και $|z| > \dfrac{1}{|\chi_0|}$ (3).

Όμως , $-1 \le \chi_0 \le 1 \Leftrightarrow |\chi_0| \le 1 \overset{\chi_0 \ne 0}{\Leftrightarrow} \dfrac{1}{|\chi_0|} \ge 1$.Από την (3) έχουμε $|z| > \dfrac{1}{|\chi_0|} \ge 1 \Rightarrow |z| > 1$.

ii) Αν ήταν $z = i \Rightarrow |z| = 1$.Άτοπο με βάση το i) ερώτημα.Άρα $z \ne i$,οπότε ορίζεται ο w.

$w=\dfrac{z}{z-i}\Leftrightarrow wz-wi=z\Leftrightarrow (w-1)z=wi\Rightarrow |w-1||z|=|w|$ (4).

Είναι $z\neq 0$ (αφού $|z|>1$), οπότε $w\neq 0\Rightarrow |w|\neq 0$.Από την (4) προκύπτει $|w-1|\neq 0$ και

$|z|=\dfrac{|w|}{|w-1|}>1\Leftrightarrow |w|>|w-1|\Leftrightarrow |w|^2>|w-1|^2\Leftrightarrow w\bar{w}>(w-1)\overline{(w-1)}\Leftrightarrow w\bar{w}=(w-1)(\bar{w}-1)\Leftrightarrow$

$w+\bar{w}>1\Leftrightarrow 2\mathrm{Re}(w)>1\Leftrightarrow \mathrm{Re}(w)>\dfrac{1}{2}$.

★

▶ 2ο: Α. Έστω μια γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to R$.Δείξτε ότι:

i) Η f^{-1} είναι γνησίως μονότονη και έχει ίδιο είδος μονοτονίας με την f.

ii) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και $\Sigma=\mathrm{A}\cap f(\mathrm{A})\neq\varnothing$,τότε οι εξισώσεις:

$f(\chi)=f^{-1}(\chi)$ και $f(\chi)=\chi$ είναι ισοδύναμες στο σύνολο Σ.

Β. Η συνάρτηση $f:R\to R$ έχει σύνολο τιμών το R και για κάθε $\chi\in R$ ισχύει

$f(\chi)+e^{f(\chi)}=\chi+2$ (1).

i) Δείξτε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

ii) Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της f και τα κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$.

Λύση

Α. i) Η f ως γνησίως μονότονη είναι "$1-1$" ,οπότε είναι αντιστρέψιμη.Πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $f(\mathrm{A})$.

Ας υποθέσουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Έστω ότι υπάρχουν $\psi_1,\psi_2\in f(\mathrm{A})$ με $\psi_1<\psi_2$ και $f^{-1}(\psi_1)\geq f^{-1}(\psi_2)\overset{f\,\gamma\nu.\alpha\upsilon\xi}{\Rightarrow} f(f^{-1}(\psi_1))\geq$ $f(f^{-1}(\psi_2))\Leftrightarrow \psi_1\geq\psi_2$.Άτοπο.Άρα για κάθε $\psi_1,\psi_2\in f(\mathrm{A})$ με $\psi_1<\psi_2\Rightarrow f^{-1}(\psi_1)<f^{-1}(\psi_2)$ που σημαίνει ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

Όμοια αν η f είναι γνησίως φθίνουσα τότε και η f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα.

ii) • Έστω $\chi_0\in\Sigma$ μια λύση της εξίσωση $f(\chi)=f^{-1}(\chi)$,τότε $f(\chi_0)=f^{-1}(\chi_0)$ (2).

Αν δεχτούμε ότι $f(\chi_0)\neq\chi_0$,τότε θα έχουμε μία από τις περιπτώσεις: $f(\chi_0)<\chi_0$ ή $f(\chi_0)>\chi_0$.Έστω ότι $f(\chi_0)<\chi_0$.Σύμφωνα με το i) ερώτημα η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα $(2)\Rightarrow f^{-1}(f(\chi_0))<f^{-1}(\chi_0)\overset{(2)}{\Leftrightarrow}\chi_0<f(\chi_0)$.Άτοπο.

Όμοια καταλήγουμε σε άτοπο αν $f(\chi_0)>\chi_0$.Άρα τελικά είναι $f(\chi_0)=\chi_0$,οπότε το χ_0 είναι λύση της εξίσωσης $f(\chi)=\chi$.

• **<u>Αντίστροφα:</u>** Αν τώρα το $\chi_0\in\Sigma$ είναι λύση της εξίσωσης $f(\chi)=\chi$,έχουμε $f(\chi_0)=\chi_0\Leftrightarrow \chi_0=f^{-1}(\chi_0)\Leftrightarrow f(\chi_0)=f^{-1}(\chi_0)$,δηλαδή το χ_0 είναι λύση και της εξίσωσης $f(\chi)=f^{-1}(\chi)$.

Συνεπώς οι εξισώσεις $f(\chi)=f^{-1}(\chi)$ και $f(\chi)=\chi$ είναι ισοδύναμες στο Σ.

Β. i) Έστω $\chi_1,\chi_2\in R$ με $\chi_1<\chi_2\Leftrightarrow \chi_1+2<\chi_2+2\overset{(1)}{\Leftrightarrow} f(\chi_1)+e^{f(\chi_1)}<f(\chi_2)+e^{f(\chi_2)}$ (3).

Αν υποθέσουμε ότι είναι $f(\chi_1)\geq f(\chi_2)$, τότε έχουμε $\begin{cases} e^{f(\chi_1)}\geq e^{f(\chi_2)} \\ f(\chi_1)\geq f(\chi_2) \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} f(\chi_1)+e^{f(\chi_1)}\geq$ $f(\chi_2)+e^{f(\chi_2)}$. Άτοπο λόγω της (3). Άρα είναι $f(\chi_1)<f(\chi_2)$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Η f αφού είναι γνησίως αύξουσα είναι "$1-1$" οπότε είναι αντιστρέψιμη με πεδίο ορισμού το $f(R)=R$. Αντικαθιστούμε στην (1) το χ με $f^{-1}(\chi)$ και παίρνουμε:

$f(f^{-1}(\chi))+e^{f(f^{-1}(\chi))}=f^{-1}(\chi)+2 \Leftrightarrow \chi+e^{\chi}=f^{-1}(\chi)+2 \Leftrightarrow f^{-1}(\chi)=\chi+e^{\chi}-2$ για κάθε $\chi\in R$.

Αν υπάρχουν κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$, οι τετμημένες τους είναι λύσεις της εξίσωσης $f(\chi)=f^{-1}(\chi)$ στο $R\cap f(R)=R$ και σύμφωνα με το A ii) η εξίσωση αυτή είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $f(\chi)=\chi \Leftrightarrow f^{-1}(\chi)=\chi \Leftrightarrow e^{\chi}=2 \Leftrightarrow \chi=\ln 2$. Άρα οι $C_f, C_{f^{-1}}$ έχουν ένα κοινό σημείο το $(\ln 2, \ln 2)$.

<u>Σημείωση:</u> Το A ii) γεωμετρικά σημαίνει ότι αν η f είναι γνησίως αύξουσα και οι $C_f, C_{f^{-1}}$ έχουν κοινά σημεία τότε αυτά βρίσκονται πάνω στη διχοτόμο $\psi=\chi$. Πρέπει να προσέξουμε ότι αν η f είναι γνησίως φθίνουσα, το A ii) δεν ισχύει.

★

▶ **3ο: Έστω οι συναρτήσεις $f,g:R\to R$ για τις οποίες έχουμε τη συνάρτηση φ με $\varphi(\chi)=f(f(\chi))+g(f(\chi))$ (1), $\chi\in R$. Έστω ότι η φ είναι "$1-1$", η C_φ διέρχεται από την αρχή των αξόνων και για κάποιο $\kappa\in R$ ισχύει $f(\kappa)+g(\kappa)=0$. Επιπλέον $f(R)=R$.**

α) Δείξτε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(\chi)=\kappa$ (2).

γ) Αν οι f,g είναι παραγωγίσιμες με f',g' συνεχείς, g κοίλη στο R και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(\chi)}{f(\chi)-\kappa}=$ $=f'(\kappa)$ τότε:

i) Δείξτε ότι κοντά στο 0 η f' δεν είναι σταθερή με τιμή μηδέν.

ii) Να βρείτε τα ακρότατα της g.

Λύση

α) Για κάθε $\chi_1,\chi_2\in R$ με $f(\chi_1)=f(\chi_2)\Rightarrow \begin{cases} f(f(\chi_1))=f(f(\chi_2)) \\ \text{και} \\ g(f(\chi_1))=g(f(\chi_2)) \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow}$

$f(f(\chi_1))+g(f(\chi_1))=f(f(\chi_2))+g(f(\chi_2)) \Leftrightarrow \varphi(\chi_1)=\varphi(\chi_2) \overset{\varphi\text{"1-1"}}{\Leftrightarrow} \chi_1=\chi_2$.

Άρα η f είναι "1-1", οπότε είναι αντιστρέψιμη με πεδίο ορισμού της f^{-1} το $f(R)=R$.

β) Αντικαθιστούμε στην (1) το χ με $f^{-1}(\kappa)$ και παίρνουμε $f(f(f^{-1}(\kappa)))+g(f(f^{-1}(\kappa)))=$

$$= \varphi(f^{-1}(\kappa)) \Leftrightarrow f(\kappa)+g(\kappa)=\varphi(f^{-1}(\kappa)) \Leftrightarrow \varphi(f^{-1}(\kappa))=0 \Leftrightarrow \varphi(f^{-1}(\kappa))=\varphi(0) \overset{\varphi\,"1-1"}{\Leftrightarrow}$$

$f^{-1}(\kappa)=0 \Leftrightarrow f(0)=\kappa$.Άρα το μηδέν είναι λύση της (2) και επειδή η f είναι "$1-1$" είναι μοναδική λύση της.

γ) i) Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε $f'(\chi)=0$ για κάθε $\chi\in(-\delta,0)\cup(0,\delta)$. Τότε η f σε καθένα των διαστημάτων $(-\delta,0)$ και $(0,\delta)$ θα είναι σταθερή.Άτοπο αφού η f είναι "$1-1$" .Άρα κοντά στο μηδέν η f δεν είναι σταθερή με τιμή μηδέν.

ii) Αφού οι f,g είναι παραγωγίσιμες και οι συναρτήσεις $f(f(\chi)), g(f(\chi))$ είναι παραγωγίσιμες ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων,οπότε η φ είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων με $\varphi'(\chi)=f'(\chi)f'(f(\chi))+f'(\chi)g'(f(\chi))$.

Οι f,g,ϕ είναι συνεχείς ως παραγωγίσιμες και έχουμε:

$$\lim_{x\to0}\frac{\varphi(\chi)}{f(\chi)-\kappa} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to0}\frac{\varphi'(\chi)}{f'(\chi)} = \lim_{x\to0}\left(f'(f(\chi))+g'(f(\chi))\right) = f'(f(0))+g'(f(0)) \overset{(\beta)}{=} f'(\kappa)+g'(\kappa) \Leftrightarrow$$

$f'(\kappa)=f'(\kappa)+g'(\kappa) \Leftrightarrow g'(\kappa)=0$.

Αφού η g είναι κοίλη στο R, η g' γνησίως φθίνουσα στο R.

Για $\chi<\kappa \Rightarrow g'(\chi)>g'(\kappa) \Leftrightarrow g'(\chi)>0$ και για $\chi>\kappa \Rightarrow g'(\chi)<g'(\kappa) \Leftrightarrow g'(\chi)<0$.Άρα η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $g(\kappa)$.

► <u>**4ο:**</u> **Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία έχουμε: $f(\chi)\neq1$ για κάθε $\chi\in R$ και $f(\chi+\psi)=(f(\chi)-1)(f(\psi)-1)+1$ (1) για κάθε $\chi,\psi\in R$.**

Δείξτε ότι: i) $f(\chi)>1$, για κάθε $\chi\in R$.

ii) $f(0)=2$. iii) $f(\chi)-1=\dfrac{1}{f(-\chi)-1}$, για κάθε $\chi\in R$.

iv) Αν το 2 είναι τιμή της f μόνο για $\chi=0$,τότε η f είναι "$1-1$".

v) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=1$ να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση

i) Αντικαθιστούμε στην (1) τα χ,ψ με $\dfrac{\chi}{2}$ και παίρνουμε $f(\chi)=(f(\frac{\chi}{2})-1)^2+1$ (2).Επειδή $f(\chi)\neq1$ είναι $(f(\frac{\chi}{2})-1)^2>0$.Άρα από τη (2) προκύπτει $f(\chi)>1$ για κάθε $\chi\in R$.

ii) Για $\chi=\psi=0$, $(1)\Rightarrow f(0)=(f(0)-1)^2+1 \Leftrightarrow f(0)-1=(f(0)-1)^2 \overset{f(0)\neq1}{\Leftrightarrow} 1=f(0)-1 \Leftrightarrow$ $f(0)=2$.

iii) Αντικαθιστούμε στην (1) το ψ με $-\chi$ και έχουμε $f(0)=(f(\chi)-1)(f(-\chi)-1)+1 \Leftrightarrow$

$$(f(\chi)-1)(f(-\chi)-1)=1 \overset{f(-\chi)\neq1}{\Leftrightarrow} f(\chi)-1=\frac{1}{f(-\chi)-1}.$$

iv) Για κάθε $\chi_1,\chi_2\in R$ με $f(\chi_1)=f(\chi_2) \Leftrightarrow f(\chi_1)-1=f(\chi_2)-1 \overset{iii)\,\varepsilon\rho\acute{\omega}\tau\eta\mu\alpha}{\Leftrightarrow} f(\chi_1)-1=$

$\dfrac{1}{f(-\chi_2)-1} \Leftrightarrow (f(\chi_1)-1)(f(-\chi_2)-1)+1=2 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} f(\chi_1-\chi_2)=2$ (3).Επειδή το 2 είναι τιμή της f μόνο για $\chi=0$,από την (3) προκύπτει ότι $\chi_1-\chi_2=0 \Leftrightarrow \chi_1=\chi_2$.Άρα η f είναι "$1-1$".

v) Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 έχουμε $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-2}{h}=f'(0)=1$ (4).

Για το τυχαίο $\chi\in R$ έχουμε $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\chi+h)-f(\chi)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(f(\chi)-1)(f(h)-1)+1-f(\chi)}{h}=$

$\lim\limits_{h\to 0}\left[(f(\chi)-1)\dfrac{f(h)-2}{h}\right]\overset{(4)}{=}f(\chi)-1$.Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(\chi)=f(\chi)-1$.

$f'(\chi)=f(\chi)-1\Leftrightarrow f'(\chi)-f(\chi)=-1\Leftrightarrow e^{-\chi}f'(\chi)-e^{-\chi}f(\chi)=-e^{-\chi}\Leftrightarrow (e^{-\chi}f(\chi))'=(e^{-\chi})'\Leftrightarrow$ $e^{-\chi}f(\chi)=e^{-\chi}+c$ (5),όπου $c\in R$ σταθερά.Για $\chi=0$ από την (5) προκύπτει $c=1$ και η (5) γράφεται $e^{-\chi}f(\chi)=e^{-\chi}+1\Leftrightarrow f(\chi)=e^{\chi}+1$.Η συνάρτηση που βρήκαμε είναι η ζητούμενη γιατί πληροί τις προϋποθέσεις.

5ο: Θεωρούμε την αντιστρέψιμη συνάρτηση $f:R\to R$ και τους μιγαδικούς $u=\alpha+if(\alpha),w=f(\beta)+\beta i$ με $\alpha,\beta\in R^*$ και $\alpha\neq\beta$.Οι μιγαδικοί u,w είναι ρίζες μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης με πραγματικούς συντελεστές.

i) Δείξτε ότι: $\alpha+\beta\neq 0$.

ii) Αν για κάποιο μιγαδικό z ισχύει: $f((|z-i|-2)\alpha)-f((2-|z-i|)\beta)=f(\alpha)+\beta$ (1), να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z|$.

iii) Αν η f είναι παραγωγίσιμη και $\alpha<\beta$,δείξτε ότι υπάρχουν $\kappa,\lambda\in(\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $f'(\kappa)f(\lambda)=-\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

Λύση

Λόγω της υπόθεσης οι μιγαδικοί u,w είναι συζηγείς,δηλαδή $u=\overline{w}\Leftrightarrow \alpha+if(\alpha)=f(\beta)-\beta i\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} f(\beta)=\alpha \\ \quad\kappa\alpha\iota \\ f(\alpha)=-\beta\end{cases}.$$

i) Επειδή η f είναι αντιστρέψιμη θα είναι "$1-1$",οπότε $\alpha\neq\beta\Rightarrow f(\alpha)\neq f(\beta)\Leftrightarrow -\beta\neq\alpha\Leftrightarrow$ $\alpha+\beta\neq 0$.

ii) $(1)\Leftrightarrow f((|z-i|-2)\alpha)=f((2-|z-i|)\beta)\overset{f\,"1-1"}{\Leftrightarrow}(|z-i|-2)\alpha=(2-|z-i|)\beta\Leftrightarrow$

$(|z-i|-2)(\alpha+\beta)=0\overset{\alpha+\beta\neq 0}{\Leftrightarrow}|z-i|-2=0\Leftrightarrow|z-i|=2$.

Είναι $|z|=|(z-i)+i|$,οπότε $\big||z-i|-|i|\big|\leq|(z-i)+i|\leq|z-i|+|i|\Leftrightarrow 1\leq|z|\leq 3$.

Άρα το μέτρο $|z|$ έχει ελάχιστη τιμή 1 και μέγιστη τιμή 3.

iii) Η f ως παραγωγίσιμη είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β),οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\kappa\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\kappa)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow$

$f'(\kappa)=\dfrac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha}$ (2).

Είναι $f(\alpha)\neq f(\beta)$,οπότε το $\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}=\dfrac{-\beta+\alpha}{2}=-\dfrac{\beta-\alpha}{2}$ περιέχεται μεταξύ των $f(\alpha), f(\beta)$.Σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $\lambda\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\lambda)=-\dfrac{\beta-\alpha}{2}\Leftrightarrow \beta-\alpha=-2f(\lambda)$ (3).

Η (2) με βάση τη (3) γράφεται $f'(\kappa)f(\lambda)=-\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

★

► **<u>6ο:</u> Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο $[\alpha,\beta]$.**

Δείξτε ότι: i) $f(\dfrac{\alpha+\beta}{2})<\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$.

ii) Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ με $\xi_1<\xi_2$ και $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ τέτοια ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f'(\xi_1)+f'(\xi_2)}{2}$.

Λύση

Η f είναι συνεχής στα $[\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}],[\dfrac{\alpha+\beta}{2},\beta]$ αφού είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στα $(\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}),(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\beta)$.Σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1\in(\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2})$ και $\xi_2\in(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\beta)$ έτσι ώστε να ισχύει $f'(\xi_1)=\dfrac{f(\frac{\alpha+\beta}{2})-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$ και

$$f'(\xi_2)=\dfrac{f(\beta)-f(\frac{\alpha+\beta}{2})}{\frac{\beta-\alpha}{2}}.$$

Αφού η f είναι κυρτή στο $[\alpha,\beta]$,η f' είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

i) Είναι $\xi_1<\xi_2\Rightarrow f'(\xi_1)<f'(\xi_2)\Rightarrow \dfrac{f(\frac{\alpha+\beta}{2})-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}<\dfrac{f(\beta)-f(\frac{\alpha+\beta}{2})}{\frac{\beta-\alpha}{2}}\overset{\frac{\beta-\alpha}{2}>0}{\Leftrightarrow}$

$f(\dfrac{\alpha+\beta}{2})-f(\alpha)<f(\beta)-f(\dfrac{\alpha+\beta}{2})\Leftrightarrow f(\dfrac{\alpha+\beta}{2})<\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$.

ii) Με βάση το i) ερώτημα $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=2\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ (1).Η f πληροί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο $[\alpha,\beta]$,οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ οπότε η (1) γράφεται $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=2f'(\xi)$ (2).

$$\alpha\text{-----------}\xi_1\text{-------------}\frac{\alpha+\beta}{2}\text{-----------}\xi_2\text{-----------}\beta$$

- Αν $\alpha<\xi<\xi_1$ τότε είναι και $\xi<\xi_2$,οπότε $f'(\xi)<f'(\xi_1)$ και $f'(\xi)<f'(\xi_2)$.Έτσι έχουμε $2f'(\xi)<f'(\xi_1)+f'(\xi_2)$.Άτοπο λόγω της (2).

• Αν $\xi_2 < \xi < \beta$ όπως παραπάνω καταλήγουμε σε άτοπο.

• Αν $\xi = \xi_1$ ή $\xi = \xi_2$,έστω $\xi = \xi_1$ από την (2) παίρνουμε $f'(\xi_2) = f'(\xi_1) \overset{f' \text{"1-1"}}{\Rightarrow} \xi_1 = \xi_2$.Άτοπο.

Άρα $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ ώστε $(2) \Leftrightarrow f'(\xi) = \dfrac{f'(\xi_1) + f'(\xi_2)}{2}$.

▶ **<u>7ο:</u> α) Θεωρούμε την εξίσωση** $\dfrac{e^{\chi}}{\chi} = \kappa - e$ **(1) με** $\kappa \le 2e$**.Αν δεχτούμε ότι η (1) έχει λύση στο** $(0,+\infty)$ **να βρείτε τις λύσεις της στο** $(0,+\infty)$**.**

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\chi) = e^{\chi} - \dfrac{1}{6}e\chi^3 + \chi + 2, \chi > 0$**.Να μελετήσετε την** g **ως προς τα κοίλα και να βρείτε αν υπάρχουν τα σημεία καμπής της** C_g**.**

Λύση

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(\chi) = \dfrac{e^{\chi}}{\chi}, \chi \in (0,+\infty)$.Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων με $f'(\chi) = \dfrac{e^{\chi}(\chi - 1)}{\chi^2}$.

$f'(\chi) = 0 \Leftrightarrow \chi = 1$ και $f'(\chi) > 0 \Leftrightarrow \chi > 1$.

χ	$-\infty$	0		1		$+\infty$
$f'(\chi)$			-	0	+	
$f(\chi)$			↘	e ολ.ελαχ.	↗	

Άρα στο $\chi = 1$ η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(1) = e$.

Για κάθε $\chi \in (0,+\infty)$ είναι $f(\chi) \ge e \Leftrightarrow \dfrac{e^{\chi}}{\chi} \ge e$ (2).Το «=» ισχύει για $\chi = 1$.

Έστω $\chi_0 \in (0,+\infty)$ λύση της (1),τότε $\dfrac{e^{\chi_0}}{\chi_0} = \kappa - e \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \kappa - e \ge e \Leftrightarrow \kappa \ge 2e$.Έχουμε επίσης $\kappa \le 2e$,οπότε $\kappa = 2e$.Η (1) γράφεται $\dfrac{e^{\chi}}{\chi} = e \Leftrightarrow \chi = 1$.

β) Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $g'(\chi) = e^{\chi} - \dfrac{1}{2}e\chi^2 + 1$ και $g''(\chi) = e^{\chi} - e\chi = \chi(\dfrac{e^{\chi}}{\chi} - e)$.

Στο ερώτημα α) έχουμε $\dfrac{e^{\chi}}{\chi} \ge e \Leftrightarrow \dfrac{e^{\chi}}{\chi} - e \ge 0$ για κάθε $\chi \in (0,+\infty)$ με το «=» να ισχύει για $\chi = 1$.Έτσι έχουμε $g''(\chi) > 0$ για κάθε $\chi \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ και η g' είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$.Άρα στο $(0,+\infty)$ η g' είναι γνησίως αύξουσα ,οπότε η g είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

Αφού η g είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$ η C_g δεν έχει σημεία καμπής.

► **8ο: Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\chi)=(\alpha\chi-1)\sqrt{\chi^2+2}$, $\chi\in R,\alpha\geq\frac{1}{4}$.**

Δείξτε ότι: i) Η f είναι αντιστέψιμη και να βρείτε για ποιες τιμές του α η εξίσωση $f(\chi)=2$ (1) έχει λύση στο $(0,\sqrt{2})$.

ii) Για κάθε $\chi>1$,είναι $\frac{\alpha e^{\chi}-1}{\sqrt{e^2+2}}>\frac{\alpha e-1}{\sqrt{e^{2\chi}+2}}$.

iii) Για κάποιο $\kappa>1$,είναι $f(\chi)-f'(\kappa)(\chi-\kappa)\geq f(\kappa)$ για κάθε $\chi\in(1,+\infty)$.

Λύση

i) Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(\chi)=\alpha\sqrt{\chi^2+2}+(\alpha\chi-1)\frac{2\chi}{2\sqrt{\chi^2+2}}=...=\frac{2\alpha\chi^2-\chi+2\alpha}{\sqrt{\chi^2+2}}$.

Το πρόσημο της f' είναι ίδιο με το πρόσημο του τριωνύμου $2\alpha\chi^2-\chi+2\alpha$ που έχει διακρίνουσα $\Delta=1-16\alpha^2$.

• Αν $\alpha\in(\frac{1}{4},+\infty)$ είναι $\Delta<0$,οπότε $f'(\chi)>0$ για κάθε $\chi\in R$.Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

• Αν $\alpha=\frac{1}{4}$,τότε $f'(\chi)=\frac{\chi^2-2\chi+1}{2\sqrt{\chi^2+2}}=\frac{(\chi-1)^2}{2\sqrt{\chi^2+2}}>0$ για κάθε $\chi\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.Επιπλέον η f είναι συνεχής στο R,άρα είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Άρα για κάθε $\alpha\geq\frac{1}{4}$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο R,οπότε είναι '$1-1$',συνεπώς είναι αντιστρέψιμη.

$f(0)=-\sqrt{2}, f(\sqrt{2})=2(a\sqrt{2}-1)$.Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0,\sqrt{2})$ και γνησίως αύξουσα έχουμε $f\left((0,\sqrt{2})\right)=\left(f(0),f(\sqrt{2})\right)=\left(-\sqrt{2},2(\alpha\sqrt{2}-1)\right)$.Η (1) έχει λύση στο $(0,\sqrt{2})$ όταν $2\in f\left((0,\sqrt{2})\right)\Leftrightarrow 2<2(\alpha\sqrt{2}-1)\Leftrightarrow\alpha>\sqrt{2}$.

ii) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.Για $\chi>1\Leftrightarrow e^{\chi}>e\Rightarrow f(e^{\chi})>f(e)\Leftrightarrow$

$(\alpha e^{\chi}-1)\sqrt{e^{2\chi}+2}>(\alpha e-1)\sqrt{e^2+2}\Leftrightarrow\frac{\alpha e^{\chi}-1}{\sqrt{e^2+2}}>\frac{\alpha e-1}{\sqrt{e^{2\chi}+2}}$.

iii) Η f' είναι παραγωγίσιμη με $f''(\chi)=\frac{(4\alpha\chi-1)\sqrt{\chi^2+2}-(2\alpha\chi^2-\chi+2\alpha)\frac{\chi}{\sqrt{\chi^2+2}}}{\chi^2+2}=...=$

$\frac{2\alpha\chi^3+6\alpha\chi-2}{(\chi^2+2)\sqrt{\chi^2+2}}$.Για κάθε $\chi\in(1,+\infty)$, $2\alpha\chi^3+6\alpha\chi-2>8\alpha-2\geq0\Rightarrow2\alpha\chi^3+6\alpha\chi-2>0\Rightarrow$

$f''(\chi)>0$.Άρα στο $(1,+\infty)$ η f είναι κυρτή,οπότε κάθε σημείο $P(\chi,f(\chi))$ της C_f με $\chi>1$ βρίσκεται πάνω από τα σημεία της εφαπτομένης ε της C_f στο $\mathrm{M}(\kappa,f(\kappa))$ με $\kappa>1$, που είναι στην ίδια κατακόρυφο με το P, εκτός του σημείου επαφής M.

Είναι $\varepsilon:\psi-f(\kappa)=f'(\kappa)(\chi-\kappa)\Leftrightarrow\psi=f(\kappa)+f'(\kappa)(\chi-\kappa)$.Συνεπώς για κάθε $\chi\in(1,+\infty)$ έχουμε $f(\chi)\geq\psi=f(\kappa)+f'(\kappa)(\chi-\kappa)\Leftrightarrow f(\chi)-f'(\kappa)(\chi-\kappa)\geq f(\kappa)$.

▶ **9ο: Για τις παραγωγίσιμες στο R συναρτήσεις f, g ισχύει:**
$2g(\chi)+f(1)\ge \chi f(\chi)+2g(1)$ **(1) για κάθε $\chi\in R$ και η εφαπτομένη ε της C_f στο σημείο** $A(1,f(1))$ **διέρχεται από την αρχή των αξόνων.**
α) Δείξτε ότι η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $B(1,g(1))$ είναι παράλληλη της ε.
β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(\chi)=f(\chi^2)-g(\chi^2)+\dfrac{\chi^{2006}}{2006}, \chi\in[-1,1]$. Δείξτε ότι:
i) Σε κάποιο $\xi\in(-1,1)$ η φ παρουσιάζει ελάχιστο.
ii) Η φ έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο.

Λύση
α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(\chi)=2g(\chi)-\chi f(\chi)+f(1)-2g(1), \chi\in R$. Παρατηρούμε ότι $h(1)=0$ και λόγω της (1) έχουμε $h(\chi)\ge 0 \Leftrightarrow h(\chi)\ge h(1)$ για κάθε $\chi\in R$. Άρα το 1 είναι θέση ολικού ελαχίστου της h.
Η h είναι παραγωγίσιμη στο R ως άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων με $h'(\chi)=2g'(\chi)-f(\chi)-\chi f'(\chi)$. Σύμφωνα με το θεώρημα Fermat πρέπει $h'(1)=0 \Leftrightarrow$ $2g'(1)=f(1)+f'(1)$ (2).
Η εξίσωση της εφαπτομένης ε της C_f στο A είναι $\psi-f(1)=f'(1)(\chi-1)$ (3).
Αφού η ε διέρχεται από την αρχή των αξόνων οι συντεταγμένες του $O(0,0)$ επαληθεύουν την (3) οπότε έχουμε $f(1)=f'(1)$. Έτσι από τη (2) παίρνουμε $g'(1)=f'(1)$ που σημαίνει ότι η εφαπτομένη της C_g στο B είναι παράλληλη στην ε.
β) i) Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $[-1,1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, οπότε υπάρχει $\xi\in[-1,1]$ στο οποίο η φ παίρνει ελάχιστη τιμή.
Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $[-1,1]$ με $\varphi'(\chi)=2\chi f'(\chi^2)-2\chi g'(\chi^2)+\chi^{2005}$.
Από το ερώτημα α) έχουμε $f'(1)=g'(1)$.
$\varphi'(-1)=-2f'(1)+2g'(1)-1=-1\Rightarrow \varphi'(-1)<0\Rightarrow \lim\limits_{\chi\to -1^+}\dfrac{\varphi(\chi)-\varphi(-1)}{\chi+1}<0$. Άρα υπάρχει $\kappa\in(-1,0)$ έτσι ώστε $\dfrac{\varphi(\chi)-\varphi(-1)}{\chi+1}<0 \overset{\chi+1>0}{\Leftrightarrow} \varphi(\chi)-\varphi(-1)<0\Leftrightarrow \varphi(\chi)<\varphi(-1)$ για κάθε $\chi\in(-1,\kappa)$. Άρα το $\varphi(-1)$ δεν μπορεί να είναι ελάχιστη τιμή της φ στο $[-1,1]$, οπότε $\xi\ne -1$.
$\varphi'(1)=2f'(1)-2g'(1)+1=1\Rightarrow \varphi'(1)>0\Rightarrow \lim\limits_{\chi\to 1^-}\dfrac{\varphi(\chi)-\varphi(1)}{\chi-1}>0$. Άρα υπάρχει $\lambda\in(0,1)$ έτσι ώστε $\dfrac{\varphi(\chi)-\varphi(1)}{\chi-1}>0 \overset{\chi-1<0}{\Leftrightarrow} \varphi(\chi)-\varphi(1)<0\Leftrightarrow\varphi(\chi)<\varphi(1)$ για κάθε $\chi\in(\lambda,1)$. Άρα ούτε το $\varphi(1)$ είναι ελάχιστη τιμή της φ στο $[-1,1]$, οπότε $\xi\ne 1$. Τελικά $\xi\in(-1,1)$ στο οποίο η φ παίρνει ελάχιστη τιμή.
ii) Σύμφωνα με το i) ερώτημα και το θεώρημα Fermat έχουμε $\varphi'(\xi)=0$, δηλαδή η φ έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο.

▶ **10ο: Έστω οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ με $\alpha<\beta<\gamma<\delta$ και η συνάρτηση $f:[\alpha,\delta]\to R$ η οποία είναι δυό φορές παραγωγίσιμη και η f' είναι κυρτή στο $[\alpha,\delta]$.**
**Θεωρούμε τους μιγαδικούς z_1,z_2,z_3 με $z_1=|z_2|+(|z_1|-|z_2|)i$, $z_2=(f(\alpha)-|z_1|)+(f(\beta)-$
$-|z_1|)i$ και $z_3=f'(\gamma)|z_1|+f'(\delta)i$ για τους οποίους έχουμε: $z_1\neq 0,|z_1|\neq|z_2|$ και**
$\overline{z_3f'(\gamma)+z_1}=z_3f'(\gamma)+z_1$ (1).
Δείξτε ότι: i) Η f στο (α,δ) έχει δύο τουλάχιστον κρίσιμα σημεία.
ii) Η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

Λύση

i) Είναι $|z_1|=\sqrt{|z_2|^2+(|z_1|-|z_2|)^2}\Leftrightarrow |z_1|^2-|z_2|^2=(|z_1|-|z_2|)^2\overset{|z_1|\neq|z_2|}{\Leftrightarrow}|z_1|+|z_2|=|z_1|-|z_2|\Leftrightarrow$
$|z_2|=0\Leftrightarrow z_2=0\Leftrightarrow f(\alpha)=|z_1|$ και $f(\beta)=|z_1|$. Άρα $f(\alpha)=f(\beta)$.
Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και $f(\alpha)=f(\beta)$. Σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1)=0$.
Αφού $z_2=0$, είναι $z_1=|z_1|i$.
$(1)\Leftrightarrow z_3f'(\gamma)+z_1-\overline{(z_3f'(\gamma)+z_1)}=0\Leftrightarrow 2\,\mathrm{Im}(z_3f'(\gamma)+z_1)i=0\Leftrightarrow \mathrm{Im}(z_3f'(\gamma)+z_1)=0$ (2).
$z_3f'(\gamma)+z_1=(f'(\gamma))^2|z_1|+(f'(\gamma)f'(\delta)+|z_1|)i$. Λόγω της (2) πρέπει $f'(\gamma)f'(\delta)+|z_1|=0\Leftrightarrow$
$f'(\gamma)f'(\delta)=-|z_1|<0$.
Η f' ως παραγωγίσιμη είναι συνεχής στο $[\gamma,\delta]$ με $f'(\gamma)f'(\delta)<0$. Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2\in(\gamma,\delta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2)=0$.
Άρα στο $[\alpha,\delta]$ η f έχει δύο τουλάχιστον κρίσιμα σημεία.
ii) Από το ερώτημα i) υπάρχουν ξ_1,ξ_2 με $\xi_1<\xi_2$ και $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$.
Η f' είναι συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$, παραγωγίσιμη στο (ξ_1,ξ_2) και $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$. Σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.
Αφού η f' στο $[\alpha,\delta]$ είναι κυρτή, τότε η f'' στο (α,δ) είναι γνησίως αύξουσα.
Για $\alpha<\chi<\xi\Rightarrow f''(\chi)<f''(\xi)\Leftrightarrow f''(\chi)<0$ και για $\xi<\chi<\delta\Rightarrow f''(\chi)>f''(\xi)\Leftrightarrow f''(\chi)>0$.
Άρα το σημείο $(\xi,f(\xi))$ είναι μοναδικό σημείο καμπής της C_f.

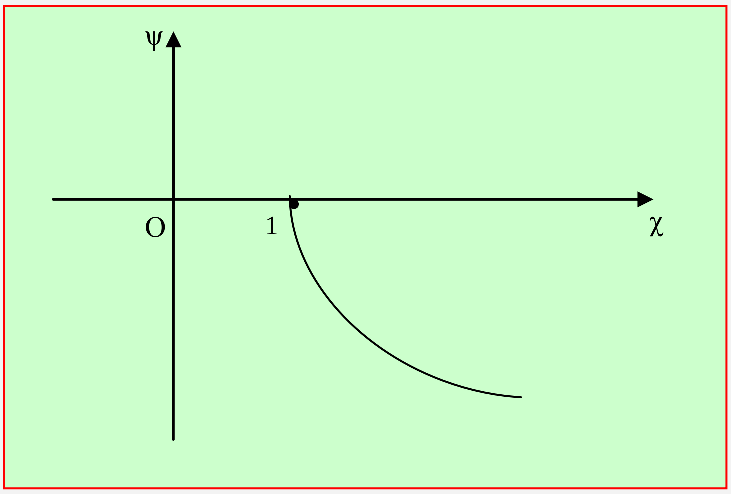
★

▶ **11ο: Η συνάρτηση $f:[1,+\infty)\to R$ με $f^2(\chi)=\chi^2-1$ είναι γνησίως φθίνουσα.**
i) Να βρείτε τον τύπο της f.
ii) Να φτιάξετε τη γραφική παράσταση της f.
iii) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $g(\chi)=\ln(\chi-f(\chi))$.
iv) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τον άξονα $\chi'\chi$, την C_f και τις ευθείες $\chi=2,\chi=3$.

Λύση

i) Είναι $f(1)=0$. Αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα έχουμε: $\chi\geq 1\Rightarrow f(\chi)\leq f(1)\Leftrightarrow$
$f(\chi)\leq 0$. Άρα $f(\chi)=-\sqrt{\chi^2-1}$, $\chi\in[1,+\infty)$.

ii) Έστω (χ,ψ) τυχαίο σημείο της C_f ,τότε έχουμε $\psi^2=\chi^2-1 \Leftrightarrow \chi^2-\psi^2=1$ (1).Η (1) είναι εξίσωση ισοσκελούς υπερβολής με εστίες στον άξονα $\chi'\chi$.Επειδή $\chi \geq 1$ και $\psi \leq 0$ η γραφική παράσταση της f είναι το τμήμα του δεξιού κλάδου της παραπάνω υπερβολής που βρίσκεται στην τέταρτη γωνία των αξόνων.



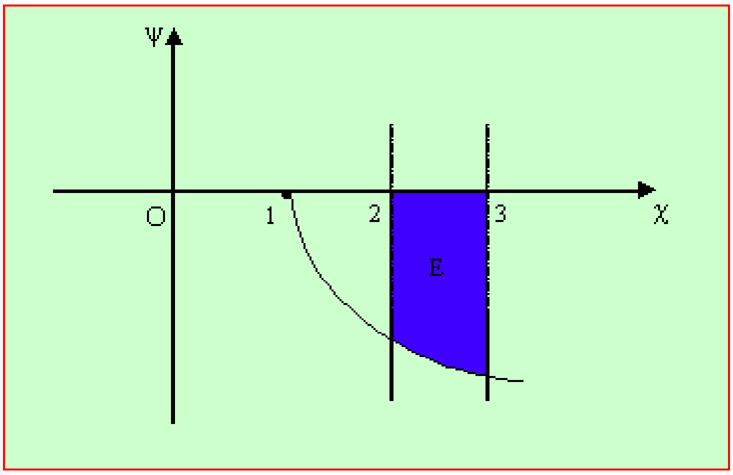
iii) Για το πεδίο ορισμού της g πρέπει $\chi \in D_f$ και $\chi - f(\chi) > 0$.Για κάθε $\chi \geq 1$ είναι $\chi - f(\chi) = \chi + \sqrt{\chi^2-1} > 0$.Άρα $D_g = [1,+\infty)$.

$g(\chi) = \ln(\chi + \sqrt{\chi^2-1})$.Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων με $g'(\chi) = \dfrac{(\chi+\sqrt{\chi^2-1})'}{\chi+\sqrt{\chi^2-1}} = \dfrac{1+\dfrac{\chi}{\sqrt{\chi^2-1}}}{\chi+\sqrt{\chi^2-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{\chi^2-1}}$.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{g(\chi)-g(1)}{\chi-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(\chi+\sqrt{\chi^2-1})}{\chi-1} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to 1^+}\frac{[\ln(\chi+\sqrt{\chi^2-1})]'}{(\chi-1)'} = \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\sqrt{\chi^2-1}} = +\infty .$$

Άρα η g δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.

iv) Η f είναι συνεχής στο $[2,3]$ με $f(\chi) < 0$ για κάθε $\chi \in [2,3]$.



Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\text{E} = \int_2^3 |f(\chi)|d\chi = -\int_2^3 f(\chi)d\chi = \int_2^3 \sqrt{\chi^2-1}d\chi =$

$\int_2^3 (\chi)'\sqrt{\chi^2-1}d\chi = [\chi\sqrt{\chi^2-1}]_2^3 - \int_2^3 \chi(\sqrt{\chi^2-1})'d\chi = 6\sqrt{2}-2\sqrt{3} - \int_2^3 \frac{\chi^2}{\sqrt{\chi^2-1}}d\chi =$

$6\sqrt{2}-2\sqrt{3} - \int_2^3 \frac{(\chi^2-1)+1}{\sqrt{\chi^2-1}}d\chi = 6\sqrt{2}-2\sqrt{3} - \int_2^3 (\sqrt{\chi^2-1} + \frac{1}{\sqrt{\chi^2-1}})d\chi \overset{(ii)}{=}$

$6\sqrt{2}-2\sqrt{3} - \text{E} - \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{\chi^2-1}}d\chi \Leftrightarrow 2\text{E} = 6\sqrt{2}-2\sqrt{3} - [\ln(\chi+\sqrt{\chi^2-1})]_2^3 = 6\sqrt{2}-2\sqrt{3} -$

$-[\ln(3+2\sqrt{2}) - \ln(2+\sqrt{3})] = 6\sqrt{2}-2\sqrt{3} - \ln\frac{3+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}} \Leftrightarrow \text{E} = 3\sqrt{2}-\sqrt{3}-\frac{1}{2}\ln\frac{3+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}}$ τετρ.μον.

► **12ο: Η συνάρτηση $f:(0,1)\cup(1,+\infty)\to R$ είναι συνεχής με $f(\chi)\neq 0$ για κάθε $\chi\in(1,+\infty)$.**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\chi) = \int_1^{\ln\chi} f(e^t)dt$.

α) i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $g(\chi)=0$.

β) Έστω $\alpha,\beta\in R$ με $1<\alpha<\beta$.Δείξτε ότι: i) Για οποιονδήποτε $\lambda\in R$ ισχύει:

$(\int_\alpha^\beta f^2(\chi)d\chi)\lambda^2 + 2(\int_\alpha^\beta f(\chi)g(\chi)d\chi)\lambda + \int_\alpha^\beta g^2(\chi)d\chi \geq 0$ **(1).**

ii) $(\int_\alpha^\beta f(\chi)g(\chi)d\chi)^2 \leq (\int_\alpha^\beta f^2(\chi)d\chi).(\int_\alpha^\beta g^2(\chi)d\chi)$.

Λύση

α) i) Για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(t)=f(e^t)$ πρέπει: $0<e^t$ που ισχύει και $e^t\neq 1 \Leftrightarrow t\neq 0$.Άρα $D_h = R^*$.

Η g είναι σύνθεση των συναρτήσεων $\varphi(\chi)=\ln\chi$ και $F(\chi)=\int_1^x h(t)dt$,οπότε $g(\chi)=F(\ln\chi)$.

Η h είναι συνεχής στο R^* και επειδή $1\in(0,+\infty)$ το πεδίο ορισμού της F είναι το $(0,+\infty)$.

Για το πεδίο ορισμού της g πρέπει: $\begin{cases}\chi>0\\ \text{και}\\ \ln\chi\in D_F\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\chi>0\\ \text{και}\\ \ln\chi>0\end{cases} \Leftrightarrow \chi>1$.Άρα $D_g=(1,+\infty)$.

ii) <u>1ος τρόπος</u>: Παρατηρούμε ότι $g(e)=0$.Η g είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση των παραγωγισίμων συναρτήσεων φ, F που αναφέρονται στο i) ερώτημα με $g'(\chi)=(\ln\chi)'f(e^{\ln\chi}) \Leftrightarrow g'(\chi)=\frac{f(\chi)}{\chi}$.

Υποθέτουμε ότι $g(\chi_0)=0$ με $\chi_0\neq e$.Έστω ότι $1<\chi_0<e$.Η g είναι συνεχής στο $[\chi_0,e]$, παραγωγίσιμη στο (χ_0,e) και $g(\chi_0)=g(e)=0$.Σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\chi_0,e)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)=0$.Άτοπο.Όμοια όταν $\chi_0>e$.Άρα η εξίσωση $g(\chi)=0$ έχει μοναδική λύση την $\chi=e$.

<u>2ος: τρόπος</u>: Για κάθε $\chi \in (1,+\infty)$ είναι $g'(\chi) = \dfrac{f(\chi)}{\chi} \neq 0$.Επιπλέον στο $(1,+\infty)$ η g' είναι συνεχής οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο.Άρα η g είναι γνησίως μονότονη .Συνεπώς η g είναι "$1-1$".
$g(\chi) = 0 \Leftrightarrow g(\chi) = g(e) \Leftrightarrow x = e$.

β) i) Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.Επίσης η g ως παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.
$(1) \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta (f^2(\chi)\lambda^2 + 2\lambda f(\chi)g(\chi) + g^2(\chi))d\chi \geq 0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta (\lambda f(\chi)+g(\chi))^2 d\chi \geq 0$ (2).Αρκεί να δείξουμε τη (2).Για κάθε $\lambda \in R$ έχουμε $(\lambda f(\chi)+g(\chi))^2 \geq 0 \Rightarrow \int_\alpha^\beta (\lambda f(\chi)+g(\chi))^2 d\chi \geq 0$.

ii) Επειδή για κάθε $\chi \in [\alpha,\beta]$ είναι $f^2(\chi) > 0 \Rightarrow \int_\alpha^\beta f^2(\chi)d\chi > 0$,το πρώτο μέλος της (1) του β) i) είναι τριώνυμο ως προς λ.Άρα για να ισχύει η (1) για κάθε $\lambda \in R$ πρέπει $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow$
$4(\int_\alpha^\beta f(\chi)g(\chi)d\chi)^2 - 4(\int_\alpha^\beta f^2(\chi)d\chi).(\int_\alpha^\beta g^2(\chi)d\chi) \leq 0 \Leftrightarrow (\int_\alpha^\beta f(\chi)g(\chi)d\chi)^2 \leq \int_\alpha^\beta f^2(\chi)d\chi \cdot$
$\int_\alpha^\beta g^2(\chi)d\chi$.

<u>Σημείωση:</u> Η ανισότητα του β) ii) ονομάζεται ανισότητα Schwarz.

► **<u>13ο:</u> Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο R.**
Δείξτε ότι: α) Για κάθε $\chi \in R$ ισχύει: $\int_0^\chi e^{-t} f(\chi - t)dt = \dfrac{1}{e^\chi}\int_0^\chi e^t f(t)dt$.
β) Αν η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ τέτοιο,ώστε: $\int_0^1 e^{-t} f(1-t)dt + \int_0^1 e^{t-1} f'(t)dt = e^{\xi-1}(f(\xi)+f'(\xi))$.

Λύση

α) Θέτουμε $\chi - t = u$ (1) και έχουμε $du = (\chi - t)'dt \Leftrightarrow du = -dt \Leftrightarrow dt = -du$.Για $t = 0, t = \chi$ από την (1) παίρνουμε $u = \chi$ και $u = 0$ αντίστοιχα.Ακόμα είναι $t = \chi - u$.
$$\int_0^\chi e^{-t} f(\chi - t)dt = -\int_\chi^0 e^{-\chi+u} f(u)du = \frac{1}{e^\chi}\int_0^\chi e^u f(u)du = \frac{1}{e^\chi}\int_0^\chi e^t f(t)dt.$$

β) Για $\chi = 1$ από την ισότητα του α) ερωτήματος παίρνουμε $\int_0^1 e^{-t} f(1-t)dt = \dfrac{1}{e}\int_0^1 e^t f(t)dt =$
$$= \frac{1}{e}\int_0^1 (e^t)'f(t)\,dt = \frac{1}{e}([e^t f(t)]_0^1 - \int_0^1 e^t f'(t)dt) = \frac{1}{e}(ef(1) - f(0)) - \int_0^1 e^{t-1} f'(t)dt \quad (2).$$
Η συνάρτηση $g(\chi) = e^\chi f(\chi), \chi \in [0,1]$ είναι συνεχής στο $[0,1]$,παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $g'(\chi) = e^\chi f(\chi) + e^\chi f'(\chi)$.
Σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής,υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ τέτοιο,ώστε $g'(\xi) = \dfrac{g(1)-g(0)}{1-0} = ef(1) - f(0) \Leftrightarrow e^\xi f(\xi) + e^\xi f'(\xi) = ef(1) - f(0)$ (3).
Η (2) με βάση την (3) γράφεται $\int_0^1 e^{-t} f(1-t)dt + \int_0^1 e^{t-1} f'(t)dt = e^{\xi-1}(f(\xi)+f'(\xi))$.

▶ **14ο: Η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ είναι παραγωγίσιμη και δεχόμαστε ότι για κάθε $\chi\in(0,+\infty)$ είναι $\chi f'(\chi)-f(\chi)>0$ (1).Για τους $\alpha,\beta\in R$ με $0<\alpha<\beta$ έχουμε $\int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi=$ $=\kappa\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}$,όπου κ σταθερός πραγματικός αριθμός.**

α) Δείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $\int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi=\frac{f(\xi)}{\xi}\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}$.

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\chi)=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}\int_\alpha^\chi\frac{f(t)}{t}dt-\chi\int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi$, $\chi>0$.

Να δείξετε ότι: i) Στο ξ του ερωτήματος α) η g παρουσιάζει ακρότατο και να βρείτε το είδος του.

ii) Για κάθε $\chi>0$ ισχύει: $\xi\int_\xi^\chi\frac{f(t)}{t}dt\ge f(\xi)(\chi-\xi)$.

Λύση

α) Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $\frac{f(\xi)}{\xi}=\kappa\Leftrightarrow$ $f(\xi)=\kappa\xi$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(\chi)=\int_\alpha^\chi(f(t)-\kappa t)dt=\int_a^\chi f(t)dt-\kappa\int_\alpha^\chi tdt=\int_\alpha^\chi f(t)dt-\kappa[\frac{t^2}{2}]_\alpha^\chi\Leftrightarrow$

$h(\chi)=\int_\alpha^\chi f(t)dt-\kappa\frac{\chi^2-\alpha^2}{2},\chi\in[\alpha,\beta]$.

Η h είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) με $h'(\chi)=f(\chi)-\kappa x$.Επίσης $h(\alpha)=h(\beta)=0$.Σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)=\kappa\xi$.

β) i) Η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(\chi)=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}\frac{f(\chi)}{\chi}-\int_\beta^\alpha f(\chi)d\chi\overset{(\alpha)}{=}\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}(\frac{f(\chi)}{\chi}-\frac{f(\xi)}{\xi})$.

Λόγω της (1) έχουμε $(\frac{f(\chi)}{\chi})'>0$,οπότε η συνάρτηση $\varphi(\chi)=\frac{f(\chi)}{\chi},\chi>0$ είναι γνησίως αύξουσα.

Είναι $g'(\xi)=0$.Για κάθε $\chi\in(0,\xi)$ έχουμε $\chi<\xi\Rightarrow\varphi(\chi)<\varphi(\xi)\Leftrightarrow\frac{f(\chi)}{\chi}<\frac{f(\xi)}{\xi}\Rightarrow g'(\chi)<0$

και για $\chi\in(\xi,+\infty)$ έχουμε $\chi>\xi\Rightarrow\varphi(\chi)>\varphi(\xi)\Rightarrow\frac{f(\chi)}{\chi}>\frac{f(\xi)}{\xi}\Rightarrow g'(\chi)>0$.Άρα στο ξ η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

ii) Αφού το $g(\xi)$ είναι ολικό ελάχιστο της g για κάθε $\chi\in(0,+\infty)$ έχουμε $g(\chi)\ge g(\xi)\Leftrightarrow$

$\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}\int_\alpha^\chi\frac{f(t)}{t}dt-\chi\int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi\ge\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}\int_\alpha^\xi\frac{f(t)}{t}dt-\xi\int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi\Leftrightarrow\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}\int_\alpha^\chi\frac{f(t)}{t}dt-$

$$-\frac{\chi f(\xi)}{\xi}\frac{\beta^2-\alpha^2}{2} \ge \frac{\beta^2-\alpha^2}{2}\int_\alpha^\xi \frac{f(t)}{t}dt - \frac{\xi f(\xi)}{\xi}\frac{\beta^2-\alpha^2}{2} \Leftrightarrow \int_a^\chi \frac{f(t)}{t}dt - \frac{\chi f(\xi)}{\xi} \ge \int_\alpha^\xi \frac{f(t)}{t}dt - f(\xi) \Leftrightarrow$$

$$\int_\alpha^\xi \frac{f(t)}{t}dt + \int_\xi^\chi \frac{f(t)}{t}dt - \frac{\chi f(\xi)}{\xi} \ge \int_\alpha^\xi \frac{f(t)}{t}dt - f(\xi) \Leftrightarrow \int_\xi^\chi \frac{f(t)}{t}dt \ge \frac{\chi f(\xi)}{\xi} - f(\xi) \Leftrightarrow$$

$$\xi\int_\xi^\chi \frac{f(t)}{t}dt \ge f(\xi)(\chi-\xi).$$

► **15ο: Η συνάρτηση $f:[2,+\infty)\to R$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $\chi\in[2,+\infty)$ ισχύει: $(\chi-2)f'(\chi)=f(\chi)+(\chi-2)^2e^{-\chi}$ (1).Επιπλέον η ευθεία $\varepsilon:\psi=\chi-2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.**

i) Να βρείτε τον τύπο της f.

ii) Δείξτε ότι η εφαπτομένη της C_f στο $\mathrm{A}(4,f(4))$ διαπερνά την C_f.

iii) Να βρείτε σημείο Μ της C_f που έχει τη μεγαλύτερη απόσταση από την ευθεία ε και να δείξετε ότι η εφαπτομένη ε_1 της C_f στο Μ είναι παράλληλη της ε.

iv) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f,τον άξονα $\chi'\chi$,την εφαπτομένη ε_1 του iii) ερωτήματος και την ευθεία $\chi=4$.

Λύση

i) Για κάθε $\chi\in(2,+\infty)$ έχουμε (1) $\Leftrightarrow \dfrac{(\chi-2)f'(\chi)-f(\chi)}{(\chi-2)^2}=e^{-\chi} \Leftrightarrow \left(\dfrac{f(\chi)}{\chi-2}\right)'=e^{-\chi} \Leftrightarrow$

$\int\left(\dfrac{f(\chi)}{\chi-2}\right)'d\chi=\int e^{-\chi}d\chi \Leftrightarrow \dfrac{f(\chi)}{\chi-2}=-e^{\chi}+c \Leftrightarrow f(\chi)=-(\chi-2)e^{-\chi}+c(\chi-2)$,όπου c σταθερός πραγματικός.

Επειδή η ευθεία ε είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$,έχουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(\chi)-(\chi-2)\right]=0 \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\dfrac{\chi-2}{e^{\chi}}+(\chi-2)(c-1)\right]=0$ (2). $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\chi-2}{e^{\chi}} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\chi-2)'}{(e^{\chi})'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{\chi}}=0$.

Αν ήταν $c-1\neq 0$ θα είχαμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\chi-2}{e^{\chi}}+(\chi-2)(c-1)\right]=\pm\infty$.Άτοπο λόγω της (2).Άρα $c=1$.

Για κάθε $\chi\in(2,+\infty)$ είναι $f(\chi)=-(\chi-2)e^{-\chi}+\chi-2 \Leftrightarrow f(\chi)=(\chi-2)(1-e^{-\chi})$.Επειδή $f(2)=0$,τελικά είναι $f(\chi)=(\chi-2)(1-e^{-\chi})$ (3) για κάθε $\chi\in[2,+\infty)$.Η (3) ικανοποιεί τις υποθέσεις (η επαλήθευση της (1) είναι απλή),συνεπώς είναι ο τύπος της f.

ii) Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με $f''(\chi)=e^{-\chi}(4-\chi)$ για κάθε $\chi\in[2,+\infty)$.

$f''(\chi)=0 \Leftrightarrow \chi=4$.

χ	$-\infty$	2		4		$+\infty$
$f''(\chi)$			+	0	-	
$f(\chi)$			↗	$f(4)$	↗	

Σ.Κ

Άρα το Α είναι σημείο καμπής της C_f ,οπότε η εφαπτομένη της C_f στο Α διαπερνά την C_f .

iii) Έχουμε $\varepsilon: \chi-\psi-2=0$.Έστω $(\chi, f(\chi)) = (\chi,(\chi-2)(1-e^{-\chi}))$ με $x>2$ σημείο της C_f (το σημείο $(2,0)\in\varepsilon$).

Η απόσταση του σημείου αυτού από την ε είναι $d=\dfrac{|\chi-(\chi-2)(1-e^{-\chi})-2|}{\sqrt{2}}=\dfrac{(\chi-2)e^{-\chi}}{\sqrt{2}}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\chi)=(\chi-2)e^{-\chi}, \chi>2$.

Η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(\chi)=(3-\chi)e^{-\chi}$.

$g'(\chi)=0 \Leftrightarrow \chi=3$.

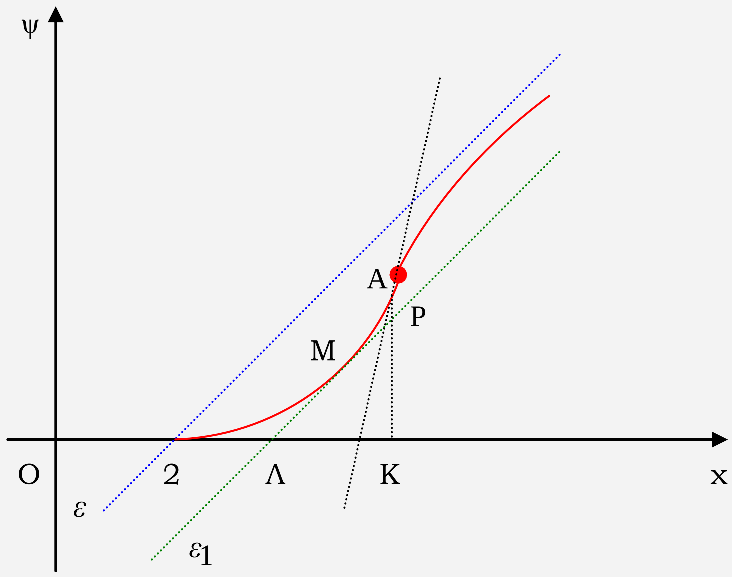
χ	$-\infty$	2		3		$+\infty$
$g'(\chi)$			+	0	-	
$g(\chi)$			↗	$g(3)$ ολ.μέγ.	↘	

Άρα η d γίνεται μέγιστη όταν $\chi=3$,οπότε το σημείο $M(3, f(3)=(3,1-e^{-3})$ είναι το σημείο της C_f που έχει τη μεγαλύτερη απόσταση από την ε .

$f'(\chi)=1-e^{-\chi}+(\chi-2)e^{-\chi} \Rightarrow f'(3)=1=\lambda_\varepsilon$ Άρα η εφαπτομένη ε_1 της C_f στο Μ είναι παράλληλη στην ε .

iv) • Για κάθε $\chi\in[2,+\infty)$ είναι $f(\chi)\geq 0$ με $f(2)=0$ και $f(\chi)>0$ για κάθε $\chi>2$

• Για κάθε $\chi>2, (\chi-2)>(\chi-2)(1-e^{-\chi}) \Leftrightarrow 1>1-e^{-\chi}$ που ισχύει.Η C_f βρίσκεται κάτω από την ε εκτός του σημείου $(2,0)$ που είναι κοινό με την ε .Με βάση τα παραπάνω έχουμε το παρακάτω σχήμα:



Το ζητούμενο εμβαδόν είναι: $\mathrm{E} = \int_2^4 f(\chi)d\chi - (P\mathrm{K}\Lambda)$ (4).

$\varepsilon_1 : \psi - f(3) = f'(3)(\chi - 3) \Leftrightarrow \psi = \chi - 2 - e^{-3}$.

$\begin{cases} \psi = \chi - 2 - e^{-3} \\ \chi = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi = 2 - e^{-3} \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow P(4{,}2 - e^{-3})$.

Για $\psi = 0$ από την εξίσωση της ε_1 παίρνουμε $\chi = 2 + e^{-3}$,οπότε $\Lambda(2 + e^{-3},0)$

$\int_2^4 f(\chi)d\chi = \int_2^4 (\chi - 2)(1 - e^{-\chi})d\chi = \int_2^4 (\chi + e^{-\chi})'(\chi - 2)d\chi = [(\chi + e^{-\chi})(\chi - 2)]_2^4 - \int_2^4 (\chi + e^{-\chi})d\chi =$

$2(4 + e^{-4}) - [\frac{\chi^2}{2} - e^{-\chi}]_2^4 = 2(4 + e^{-4}) - (8 - e^{-4}) + (2 - e^{-2}) = 3e^{-4} - e^{-2} + 2$.

$(P\mathrm{K}\Lambda) = \frac{1}{2}(\mathrm{K}\Lambda)(P\mathrm{K}) = \frac{1}{2}(2 - e^{-3})^2$.

Άρα $(4) \Leftrightarrow \mathrm{E} = 3e^{-4} - e^{-2} + 2 - \frac{1}{2}(2 - e^{-3})^2$ τετρ.μονάδες.

▶ **16ο: Η συνάρτηση $f:[\alpha,\gamma] \to R$ είναι συνεχής με $f(\chi) \neq 0$.Για κάποιο β με $\alpha < \beta < \gamma$ έχουμε $\int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi < \int_\gamma^\beta f(\chi)d\chi$ (1).**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\chi) = (\int_\alpha^\gamma f(\chi)d\chi)\int_\alpha^x f(t)dt$, $\chi \in [\alpha,\gamma]$.

i) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία.

ii) Αν το σύνολο τιμών της g είναι το διάστημα $[0,m]$,να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f ,τον άξονα $\chi'\chi$ και τις ευθείες με εξισώσεις $\chi = \alpha, \chi = \gamma$.

Λύση

i) $(1) \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi - \int_\gamma^\beta f(\chi)d\chi < 0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi + \int_\beta^\gamma f(\chi)d\chi < 0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\gamma f(\chi)d\chi < 0$ (2).

Η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(\chi) = f(\chi)\int_\alpha^\gamma f(\chi)d\chi$.

Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\gamma]$ με $f(\chi) \neq 0$,οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\gamma]$.

Είναι $f(\chi) < 0$ για κάθε $\chi \in [\alpha,\gamma]$,γιατί αν $f(\chi) > 0 \Rightarrow \int_\alpha^\gamma f(\chi)d\chi > 0$,άτοπο λόγω της (2).

Άρα για κάθε $\chi \in [\alpha,\gamma]$ είναι $g'(\chi) > 0$,οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Αφού η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\gamma]$ το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $[g(\alpha), g(\gamma)] = [0,(\int_\alpha^\gamma f(\chi)d\chi)^2]$.

Σύμφωνα με την υπόθεση πρέπει $(\int_\alpha^\gamma f(\chi)d\chi)^2 = m \overset{(2)}{\underset{m>0}{\Leftrightarrow}} \int_\alpha^\gamma f(\chi)d\chi = -\sqrt{m}$ (3).

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\mathrm{E} = \int_\alpha^\gamma |f(\chi)|d\chi = -\int_\alpha^\gamma f(\chi)d\chi \overset{(3)}{=} \sqrt{m}$ τετρ.μονάδες.

► **17ο: Η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι παραγωγίσιμη, f' γνησίως αύξουσα και $f(0)=0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\chi)=2\int_0^{\chi} f(t)dt-\chi f(\chi)$.**

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g.

ii) Δείξτε ότι στο $[0,+\infty)$ η g είναι γνησίως φθίνουσα.

iii) Δείξτε ότι: $\int_0^1 \chi f(\chi)d\chi>\frac{2}{3}\int_0^1 f(\chi)d\chi$.

Λύση

i) Η f είναι συνεχής στο R ως παραγωγίσιμη και επειδή $0\in R$ είναι $D_g=R$.

ii) Η g είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$g'(\chi)=f(\chi)-\chi f'(\chi)$.

Έστω τυχαίο $\chi>0$. Η f είναι συνεχής στο $[0,\chi]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,\chi)$.

Σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,\chi)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(\chi)-f(0)}{\chi}\Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{f(\chi)}{\chi}.$$

Έχουμε $0<\xi<\chi \overset{f'\,γν.αύξ.}{\Rightarrow} f'(\xi)<f'(\chi)\Leftrightarrow \frac{f(\chi)}{\chi}<f'(\chi)\Leftrightarrow f(\chi)-\chi f'(\chi)<0$.

Η g είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ με $g'(\chi)<0$ για κάθε $\chi\in(0,+\infty)$. Συνεπώς η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.

iii) Επειδή η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$, έχουμε $\chi\ge 0\Rightarrow g(\chi)\le g(0)\Leftrightarrow g(\chi)\le 0$.

Έστω Ε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_g, τον άξονα $\chi'\chi$ και τις ευθείες $\chi=0,\chi=1$.

$$\text{E}>0\Leftrightarrow \int_0^1|g(\chi)|d\chi>0\Leftrightarrow-\int_0^1 g(\chi)d\chi>0\Leftrightarrow\int_0^1 g(\chi)d\chi<0\Leftrightarrow\int_0^1(\chi)'g(\chi)d\chi<0\Leftrightarrow[\chi g(\chi)]_0^1-$$

$$\int_0^1\chi g'(\chi)d\chi<0\Leftrightarrow g(1)-\int_0^1\left(\chi f(\chi)-\chi^2 f'(\chi)\right)d\chi<0\Leftrightarrow g(1)-\int_0^1\chi f(\chi)d\chi+\int_0^1\chi^2 f'(\chi)d\chi<0\Leftrightarrow$$

$$2\int_0^1 f(\chi)d\chi-f(1)-\int_0^1\chi f(\chi)d\chi+[\chi^2 f(\chi)]_0^1-2\int_0^1\chi f(\chi)d\chi<0\Leftrightarrow$$

$$2\int_0^1 f(\chi)d\chi-f(1)-3\int_0^1\chi f(\chi)d\chi+f(1)<0\Leftrightarrow\int_0^1\chi f(\chi)d\chi>\frac{2}{3}\int_0^1 f(\chi)d\chi.$$

► **18ο: Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(\chi)\neq 0, f(0)>0$ και $f(\chi)\le 2$. Έστω η συνάρτηση $g(\chi)=\chi^2\int_0^1 f(\chi^2 t)dt+\chi^2+1$, $\chi\in R$ τότε:**

i) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Δείξτε ότι: $g(\chi)\ge\chi^2+1$ για κάθε $\chi\in R$.

iii) Έστω η συνάρτηση $\varphi(\chi)=g(1)-f(\chi)$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_φ, τον άξονα $\chi'\chi$ και τις ευθείες $\chi=0,\chi=1$.

Λύση

Θέτουμε $\chi^2 t = u \Rightarrow du = \chi^2 dt$.Για $t=0$ και $t=1$ παίρνουμε αντίστοιχα $u=0, u=\chi^2$.Έτσι έχουμε $g(\chi) = \int_0^{\chi^2} f(u)du + \chi^2 + 1$ (1).

i) Η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(\chi) = 2\chi f(\chi^2) + 2\chi = 2\chi(f(\chi^2)+1)$.
Επειδή η f ως παραγωγίσιμη είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται,διατηρεί στο R σταθερό πρόσημο.Έχουμε $f(0)>0$,οπότε $f(\chi)>0$ για κάθε $\chi \in R$.
$g'(\chi) = 0 \Leftrightarrow \chi = 0$.

χ	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(\chi)$	-	0	+
$g(\chi)$	↘	1	↗
		ολ.ελάχ.	

Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.Στο μηδέν η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $g(0)=1$.

ii) Αν $\chi \neq 0$,τότε $\chi^2 > 0$ οπότε $\int_0^{\chi^2} f(u)du > 0$,αφού $f(u)>0$.Για κάθε $\chi \in R^*$ είναι

$g(\chi) - \chi^2 - 1 = \int_0^{\chi^2} f(u)du > 0 \Rightarrow g(\chi) > \chi^2 + 1$.Επιπλέον $g(0)=1$.Άρα $g(\chi) \geq \chi^2 + 1$ για κάθε $\chi \in R$.

iii) Η φ είναι συνεχής,οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\mathrm{E} = \int_0^1 |\varphi(\chi)| d\chi$.

$g(1) = \int_0^1 f(u)du + 2 > 2 \geq f(\chi) \Rightarrow g(1) - f(x) > 0$.

Άρα $\mathrm{E} = \int_0^1 g(1)d\chi - \int_0^1 f(\chi)d\chi \Leftrightarrow \mathrm{E} = g(1) - \int_0^1 f(\chi)d\chi \Leftrightarrow \mathrm{E} = 2$ τετρ.μονάδες.

★

► **19ο: α) Αν f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(\chi) \leq g(\chi)$ (1) για κάθε $\chi \in [\alpha, \beta]$,τότε δείξτε ότι: $\int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi \leq \int_\alpha^\beta g(\chi)d\chi$.**

β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$,δείξτε ότι: $\left| \int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi \right| \leq \int_\alpha^\beta |f(\chi)| d\chi$.

γ) Για μια συνάρτηση f έχουμε ότι είναι συνεχής στο R και $\alpha, \beta \in R$ με $\alpha < \beta$.

Έστω οι μιγαδικοί $z = \chi + \psi i, \chi, \psi \in R$ και $w = \chi \int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-\chi)d\chi + (\psi \int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi)i$.

Αν η εικόνα του z βρίσκεται στον κυκλικό δίσκο που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 2$,επιπλέον $|w| = 8$,να βρείτε την ελάχιστη τιμή που μπορεί να έχει το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τον άξονα $\chi'\chi$,την C_f και τις ευθείες με εξισώσεις $\chi = \alpha, \chi = \beta$.

Λύση

α) Για κάθε $\chi \in [\alpha, \beta]$ έχουμε (1) $\Leftrightarrow g(\chi) - f(\chi) \geq 0 \Rightarrow \int_\alpha^\beta (g(\chi) - f(\chi))d\chi \geq 0 \Leftrightarrow$

$\int_\alpha^\beta g(\chi)d\chi - \int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi \geq 0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi \leq \int_\alpha^\beta g(\chi)d\chi$.

β) Η $|f|$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.Για κάθε $\chi \in [\alpha,\beta]$ είναι $|f(\chi)| \geq 0 \Rightarrow \int_\alpha^\beta |f(\chi)|d\chi \geq 0$.

Επιπλέον έχουμε $-|f(\chi)| \leq f(\chi) \leq |f(\chi)| \overset{(\alpha)}{\Rightarrow} -\int_\alpha^\beta |f(\chi)|d\chi \leq \int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi \leq \int_\alpha^\beta |f(\chi)|d\chi \Leftrightarrow$

$\left|\int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi\right| \leq \int_\alpha^\beta |f(\chi)|d\chi$.

γ) Για το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-\chi)d\chi$ θέτουμε $\alpha+\beta-\chi=u$ (2) και έχουμε $du=-d\chi \Leftrightarrow d\chi=-du$.Για $\chi=\alpha, \chi=\beta$ από την (2) παίρνουμε $u=\beta, u=\alpha$ αντίστοιχα,οπότε έχουμε $\int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-\chi)d\chi = -\int_\beta^\alpha f(u)du = \int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi$.

Ο w γράφεται $w = (\int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi)(\chi+\psi i) = (\int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi)z$.

Έχουμε $|z| \leq 2$,οπότε $|w| = \left|\int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi\right||z| \leq 2\left|\int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi\right| \overset{(\beta)}{\leq} 2\int_\alpha^\beta |f(\chi)|d\chi \Rightarrow |w| \leq 2\int_\alpha^\beta |f(\chi)|d\chi$

$\Leftrightarrow 2\int_\alpha^\beta |f(\chi)|d\chi \geq 8 \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta |f(\chi)|d\chi \geq 4 \Leftrightarrow \mathrm{E} \geq 4$.Άρα $\mathrm{E}_{min} = 4$ τετρ. μονάδες.

★

► **20ο: Θεωρούμε τις συναρτήσεις** $f(\chi) = \frac{\kappa^4}{2e}\chi e^{\chi^2} + (\kappa-2)^2\chi + 2 + \frac{\kappa^4}{4e}, \chi \in R, \kappa \in R$.

α) Να βρείτε από τις παραπάνω συναρτήσεις εκείνη τη συνάρτηση f που το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τον άξονα $\chi'\chi$,την C_f και τις ευθείες $\chi=0, \chi=1$ είναι ελάχιστο.

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση του ερωτήματος α).Δείξτε ότι είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη $C_{f^{-1}}$,τον άξονα $\chi'\chi$ και τις ευθείες με εξισώσεις $\chi = f(0), \chi = f(1)$.

Λύση

α) Για κάθε $\kappa \in R$ η f είναι συνεχής και για κάθε $\chi \in [0,1]$, $f(\chi) > 0$,οπότε το εμβαδόν του χωρίου Ω είναι:

$$\mathrm{E}(\Omega) = \int_0^1 |f(\chi)|d\chi = \int_0^1 f(\chi)d\chi = \frac{\kappa^4}{4e}\int_0^1 (2\chi e^{\chi^2})d\chi + (\kappa-2)^2\int_0^1 \chi d\chi + \int_0^1 (2+\frac{\kappa^2}{4e})d\chi =$$

$$= \frac{\kappa^4}{4e}[e^{\chi^2}]_0^1 + (\kappa-2)^2[\frac{\chi^2}{2}]_0^1 + 2 + \frac{\kappa^4}{4e} = \ldots = \frac{\kappa^4}{4} + \frac{1}{2}(\kappa-2)^2 + 2.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\kappa) = \frac{\kappa^4}{4} + \frac{1}{2}(\kappa-2)^2 + 2, \kappa \in R$.

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη με $g'(\kappa) = \kappa^3 + \kappa - 2 = (\kappa-1)(\kappa^2+\kappa+2)$.

$g'(\kappa) = 0 \overset{\kappa^2+\kappa+2>0}{\Leftrightarrow} \kappa = 1$.

κ	$-\infty$	1	$+\infty$

$g'(\kappa)$	-	0	+
$g(\kappa)$	$\searrow$	$g(1)=\dfrac{11}{4}$ ολ.ελαχ.	$\nearrow$

Άρα το χωρίο Ω έχει ελάχιστο εμβαδόν όταν κ=1.

Συνεπώς η ζητούμενη συνάρτηση είναι $f(\chi)=\dfrac{1}{2e}\chi e^{\chi^2}+\chi+2+\dfrac{1}{4e}$.

β) Για τη συνάρτηση $f(\chi)=\dfrac{1}{2e}\chi e^{\chi^2}+\chi+2+\dfrac{1}{4e}, \chi\in R$ έχουμε ότι είναι παραγωγίσιμη με $f'(\chi)=\dfrac{1}{2e}e^{\chi^2}+\dfrac{1}{e}\chi^2 e^{\chi^2}+1>0$. Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι "$1-1$" και άρα είναι αντιστρέψιμη.

Έχουμε $\lim\limits_{\chi\to-\infty} f(\chi)=-\infty$ και $\lim\limits_{\chi\to+\infty} f(\chi)=+\infty$. Άρα το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $f(R)=R$. Αφού η f είναι συνεχής και η f^{-1} είναι συνεχής (η C_f είναι συνεχόμενη γραμμή, οπότε και η $C_{f^{-1}}$ αφού είναι συμμετρική της C_f ως προς την ευθεία $\psi=\chi$ είναι συνεχόμενη γραμμή).

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε $f(0)<f(1)$. Αν δεχτούμε ότι για κάποιο $\rho\in[f(0),f(1)]$ είναι $f^{-1}(\rho)<0$, από τη μονοτονία της f προκύπτει $f(f^{-1}(\rho))<f(0)\Leftrightarrow$ $\rho<f(0)$. Άτοπο. Άρα για κάθε $\chi\in[f(0),f(1)]$ είναι $f^{-1}(\chi)\geq 0$.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\mathrm{E}_1=\int_{f(0)}^{f(1)} f^{-1}(\chi)d\chi$ τετρ.μονάδες.

Θέτουμε $f^{-1}(\chi)=\omega\Leftrightarrow\chi=f(\omega)$ (1) και έχουμε $d\chi=f'(\omega)d\omega$.

Για $\chi=f(0)$ $(1)\Rightarrow f(0)=f(\omega)\overset{f\,\text{"1–1"}}{\Rightarrow}\omega=0$ και για $\chi=f(1)$ $(1)\Rightarrow f(1)=f(\omega)\overset{f\,\text{"1–1"}}{\Rightarrow}\omega=1$.

Άρα $\mathrm{E}_1=\int_0^1 f^{-1}(f(\omega))f'(\omega)d\omega=\int_0^1\omega f'(\omega)d\omega=[\omega f(\omega)]_0^1-\int_0^1 f(\omega)d\omega=\dfrac{7}{2}+\dfrac{1}{4e}-\int_0^1 f(\omega)d\omega$ (2).

Από το ερώτημα α) έχουμε $\int_0^1 f(\omega)d\omega=\dfrac{11}{4}$, οπότε από την (2) παίρνουμε $\mathrm{E}_1=\dfrac{3e+1}{4e}$ τετρ.μον.