ΠΑΝΕΝΩΣΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ Ε.Σ.Σ.Δ 1973

ΑΣΚΗΣΗ

Οι πραγματικοί αριθμοί α,b,c είναι τέτοιοι ώστε για όλους τους αριθμούς χ που ικανοποιούν τη συνθήκη $-1 \le \chi \le 1$ να αληθεύει η ισότητα $\left|\alpha\chi^2 + b\chi + c\right| \le 1$ (1).Αποδείξτε ότι για τις τιμές αυτές του χ αληθεύει η ισότητα $\left|c\chi^2 + b\chi + \alpha\right| \le 2$.

Λύση.

Αντικαθιστούμε στη (1) το χ με 1 και -1 και έχουμε αντίστοιχα:

$|\alpha + b + c| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le a + b + c \le 1$ (2) ,$|\alpha - b + c| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \alpha - b + c \le 1$ (3).

Προσθέτουμε τις (2),(3) κατά μέλη και παίρνουμε $-2 \le 2\alpha + 2c \le 2 \Leftrightarrow -1 \le a + c \le 1 \Leftrightarrow |a + c| \le 1$.

$|c\chi^2 + b\chi + \alpha| = |c\chi^2 + \alpha\chi^2 - \alpha\chi^2 + b\chi + c - c + a| = |(\alpha + c)(\chi^2 + 1) - (\alpha\chi^2 - b\chi + c)| \Leftrightarrow$

$|c\chi^2 + b\chi + a| = |(c + a)(\chi^2 + 1) - (\alpha\chi^2 - b\chi + c)|$ (3).

Όταν $\chi \in [-1,1]$ είναι και $-\chi \in [-1,1]$.Αντικαθιστούμε στην (1) το χ με –χ και παίρνουμε:

$|\alpha\chi^2 - b\chi + c| \le 1$.Άρα από την (3) έχουμε $|c\chi^2 + b\chi + \alpha| \le |(\alpha + c)(\chi^2 + 1)| + |\alpha\chi^2 - b\chi + c| \Rightarrow$

$|c\chi^2 + b\chi + \alpha| \le |\alpha + c|(\chi^2 + 1) + 1 \le \chi^2 + 2 \Rightarrow |c\chi^2 + b\chi + \alpha| \le \chi^2 + 2$ (II).

Στο $[-1,1]$ το τριώνυμο $\chi^2 + 2$ παρουσιάζει ελάχιστη για χ=0 το 2.Άρα λόγω της (II) για κάθε $\chi \in [-1,1]$ η παράσταση $|c\chi^2 + b\chi + \alpha|$ θα είναι μικρότερη ή ίση και από την ελάχιστη τιμή του $\chi^2 + 2$,δηλαδή για κάθε $\chi \in [-1,1]$, $|c\chi^2 + b\chi + \alpha| \le 2$.