ΠΑΝΕΝΩΣΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ Ε.Σ.Σ.Δ 1969

ΑΣΚΗΣΗ

Έστω το τριώνυμο $f(\chi)=\alpha\chi^2+b\chi+c$ με α φυσικό αριθμό και b,c ακεραίους.Αν η εξίσωση $f(\chi)=0$ έχει δύο διαφορετικές και θετικές ρίζες μικρότερες της μονάδας,να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή του φυσικού α.

Λύση

Έστω ρ_1,ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης $f(\chi)=0$. Έχουμε $\Delta=b^2-4ac>0$ (1) και $0<\rho_1+\rho_2<2\Leftrightarrow$ $0<-\frac{b}{a}<2\Leftrightarrow 0<-b<2a$ (2) και $0<\rho_1\rho_2<1\Leftrightarrow 0<\frac{c}{a}<1\Leftrightarrow 0<c<a$ (3).

Λόγω της (3) είναι $\alpha\geq 2$.

- Αν $\alpha=2$,τότε από τις (2),(3) έχουμε $b=-1,-2,-3$ και $c=1$.οπότε έχουμε $\Delta=b^2-8$.
  Η τιμή του b που μπορεί να ικανοποιεί την (1) είναι $b=-3$.
  Στην περίπτωση αυτή $f(\chi)=2\chi^2-3\chi+1$ και οι ρίζες του είναι $1,\frac{1}{2}$.Άρα το δεν μπορεί να είναι $\alpha=2$.
- Αν $\alpha=3$,τότε από τις $(3),(4)$ έχουμε $b=-1,-2,-3,-4,-5$ και $c=1,2$.
  - ✓ Για $c=1,\Delta=b^2-12$.Η τιμές του b που ικανοποιούν την (1) είναι $b=-4,-5$.
    Στην περίπτωση αυτή $f(\chi)=3\chi^2-4\chi+1$ με ρίζες $1,\frac{1}{3}$ ή $f(\chi)=3\chi^2-5\chi+1$ με ρίζες $\frac{5\pm\sqrt{13}}{6}$.Άρα η περίπτωση αυτή αποκλείεται.
  - ✓ Για $c=2,\Delta=b^2-24$.Η τιμή του b που μπορεί να ικανοποιεί την (1) είναι $b=-5$.
    Στην περίπτωση αυτή $f(\chi)=3\chi^2-5\chi+2$ με ρίζες $1,\frac{2}{3}$.Η περίπτωση αυτή αποκλείεται.
    Άρα δεν μπορεί να είναι $\alpha=3$.
- Αν $\alpha=4$,τότε από τις (3),(4) έχουμε $b=-1,-2,-3,-4,-5,-6,-7$ και $c=1,2,3$.
  - ✓ Για $c=1,\Delta=b^2-16$.Η τιμές του b που ικανοποιούν την (1) είναι $b=-5,-6,-7$.
    Στην περίπτωση αυτή $f(\chi)=4\chi^2-5\chi+1$ με ρίζες $1,\frac{1}{4}$. ή $f(\chi)=4\chi^2-6\chi+1$ με ρίζες $\frac{3\pm\sqrt{5}}{4}$ ή $f(\chi)=4\chi^2-7\chi+1$ με ρίζες $\frac{7\pm\sqrt{29}}{8}$.Η περίπτωση αυτή αποκλείεται.
    Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι και οι τιμές $c=2,3$ αποκλείονται.
    Άρα δεν μπορεί να είναι $\alpha=4$.
- Αν $\alpha=5$,τότε από τις (3),(4) έχουμε $b=-1,-2,\ldots,-9$ και $c=1,2,3,4$.
  - ✓ Για $c=1,\Delta=b^2-20$.Η τιμές του b που ικανοποιούν την (1) είναι $b=-5,-6,\ldots-9$
    Για $b=-5$,$f(\chi)=5\chi^2-5\chi+1$ με ρίζες $\frac{5\pm\sqrt{5}}{10}\in(0,1)$.

Άρα η ζητούμενη τιμή του α είναι $\alpha=5$.