Ε Μ Β Α Δ Ο Ν   Ε Π Ι Π Ε Δ Ο Υ   Χ Ω Ρ Ι Ο Υ

Ε Ν Ο Τ Η Τ Α $1^{η}$

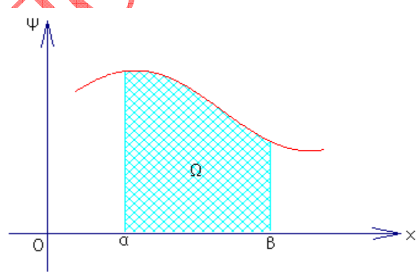
Θεωρητική προσέγγιση

Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος παρουσιάστηκε αρχικά σαν μία μέθοδος υπολογισμού του εμβαδού επίπεδου σχήματος με προσέγγιση από εμβαδά απλών σχημάτων.Η μέθοδος αυτή εφαρμόστηκε για πρώτη φορά από τον Αρχιμήδη για τον υπολογισμό του εμβαδού κύκλου,παραβολικού χωρίου κ.τ.λ και είναι γνωστή ως «μέθοδος της εξάντλησης».
Αυστηρή εισαγωγή στην έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος έγινε πρώτα από τον Riemann στα μέσα του $19^{ου}$ αιώνα και μετά ακολούθησαν γενικεύσεις της έννοιας αυτής από τον Lebesque.
Σήμερα η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος δεν περιορίζεται μόνο για την έκφραση εμβαδών αλλά επεκτείνεται στην έκφραση εννοιών της φυσικής, της θεωρίας των πιθανοτήτων,της στατιστικής κ.τ.λ.

Α. Εμβαδόν επίπεδου χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση συνάρτησης

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που ορίζεται από την C_f ,τον άξονα $\chi'\chi$ και τις ευθείες $\chi=\alpha$ και $\chi=\beta$.

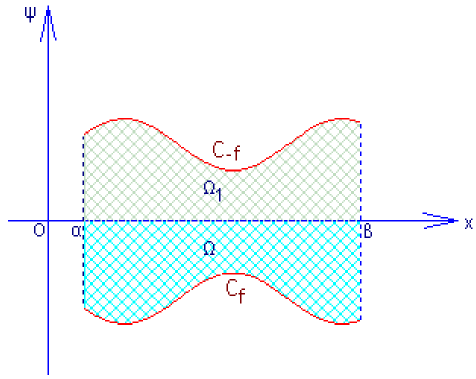
✓**α.** Όταν $f(\chi)\geq 0$ για κάθε $\chi\in[\alpha,\beta]$,τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω είναι η γεωμετρική ερμηνεία του ορισμένου ολοκληρώματος



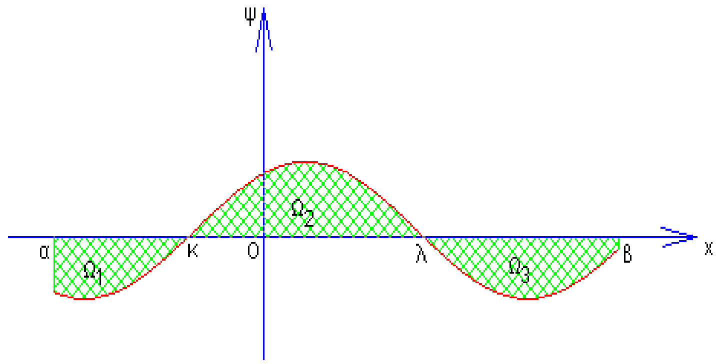
δηλαδή $\mathrm{E}(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi$.

✓**β.** Όταν $f(\chi)\leq 0$ για κάθε $\chi\in[\alpha,\beta]$,τότε είναι $-f(\chi)\geq 0$ για κάθε $\chi\in[\alpha,\beta]$.Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f,-f$ στο $[\alpha,\beta]$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $\chi'\chi$.
Έστω Ω_1 το χωρίο που ορίζεται από την C_{-f} ,τον $\chi'\chi$ και τις ευθείες $\chi=\alpha$ και $\chi=\beta$.Λόγω της συμμετρίας των χωρίων Ω και Ω_1 τα εμβαδά τους είναι ίσα και σύμφωνα με το α) έχουμε:

$$\mathrm{E}(\Omega)=\mathrm{E}(\Omega_1)=\int_{\alpha}^{\beta}[-f(\chi)]d\chi=-\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi=\int_{\alpha}^{\beta}|f(\chi)|d\chi.$$



✓γ. Αν η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$,τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω θα είναι το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω και κάτω από τον άξονα $\chi'\chi$.Άρα το $\mathrm{E}(\Omega)$ θα ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των αντίστοιχων ορισμένων ολοκληρωμάτων.



Για το παραπάνω σχήμα $\mathrm{E}(\Omega)=\mathrm{E}(\Omega_1)+\mathrm{E}(\Omega_2)+\mathrm{E}(\Omega_3)=-\int_\alpha^\kappa f(\chi)d\chi+\int_\kappa^\lambda f(\chi)d\chi-\int_\lambda^\beta f(\chi)d\chi=$ $\int_\alpha^\kappa|f(\chi)|d\chi+\int_\kappa^\lambda|f(\chi)|d\chi+\int_\lambda^\beta|f(\chi)|d\chi=\int_\alpha^\beta|f(\chi)|d\chi$.

✓δ. Συνοψίζοντας όλες τις παραπάνω περιπτώσεις το εμβαδόν του χωρίου Ω δίνεται από τον τύπο $\mathrm{E}(\Omega)=\int_\alpha^\beta|f(\chi)|d\chi$.

➢ Σχόλιο

Για να βρούμε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f τον άξονα $\chi'\chi$ και τις ευθείες $\chi=\alpha$ και $\chi=\beta$ με $\alpha<\beta$,ενεργούμε ως εξής:

● Εξασφαλίζουμε ότι η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

● Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\mathrm{E}=\int_\alpha^\beta|f(\chi)|d\chi$.Βρίσκουμε το πρόσημο της f στο $[\alpha,\beta]$ και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα.

Το πρόσημο της f πολλές φορές καθορίζεται με τη βοήθεια της μονοτονίας της.

<u>Σημείωση:</u> Όταν μας ζητάνε να βρούμε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f και τον άξονα $\chi'\chi$,βρίσκουμε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $\chi'\chi$ λύνοντας την εξίσωση $f(\chi)=0$.Η μικρότερη ρίζα και η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης δίνουν τις ευθείες $\chi=\alpha$ και $\chi=\beta$ από τις οποίες καθορίζεται το χωρίο.

Εφαρμογή 1η

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=\chi^3+\chi-2$.Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f ,τον άξονα $\chi'\chi$ και τις ευθείες $\chi=0$ και $\chi=2$.

Λύση

$D_f=R$.Η f ως πολυωνυμική είναι συνεχής,οπότε είναι συνεχής στο $[0,2]$.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\mathrm{E}=\int_0^2|f(\chi)|d\chi$.

$f(\chi)=(\chi-1)(\chi^2+\chi+2)$.Για κάθε $\chi\in R$ είναι $\chi^2+\chi+2>0$,γιατί η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι αρνητική.Άρα $f(\chi)\le 0$ για κάθε $\chi\in[0,1]$ και $f(\chi)\ge 0$ για κάθε $\chi\in[1,2]$.

$$\mathrm{E}=-\int_0^1 f(\chi)d\chi+\int_1^2 f(\chi)d\chi=-\left[\frac{\chi^4}{4}+\frac{\chi^2}{2}-2\chi\right]_0^1+\left[\frac{\chi^4}{4}+\frac{\chi^2}{2}-2\chi\right]_1^2=\frac{9}{2}$$ τετρ.μονάδες.

Εφαρμογή 2η

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=\chi^3-4\chi$.Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f και τον άξονα $\chi'\chi$.

Λύση

$$D_f=R.\ f(\chi)=0\Leftrightarrow \chi(\chi^2-4)=0\Leftrightarrow \begin{cases} \chi=0 \\ \acute{\eta} \\ \chi^2-4=0\Leftrightarrow \chi=-2\ \acute{\eta}\ \chi=2 \end{cases}.$$

Η f ως πολυωνυμική είναι συνεχής,οπότε είναι συνεχής στο $[-2,2]$.Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\mathrm{E}=\int_{-2}^2|f(\chi)|d\chi$. $f(\chi)=\chi(\chi^2-4)$.

χ	-2		0		2
χ		$-$	0	$+$	
χ^2-4	0	$-$		$-$	0
$f(\chi)$	0	$+$	0	$-$	0

Με βάση τον παραπάνω πίνακα έχουμε $\mathrm{E}=\int_{-2}^0 f(\chi)d\chi-\int_0^2 f(\chi)d\chi=\left[\frac{\chi^4}{4}-2\chi^2\right]_{-2}^0-\left[\frac{\chi^4}{4}-2\chi^2\right]_0^2=$

8 τετρ.μονάδες.

Εφαρμογή 3η

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(\chi)=\chi-e^\chi$.Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f ,τον άξονα $\chi'\chi$ και τις ευθείες $\chi=1$ και $\chi=2$.

Λύση

$D_f=R$.Η f είναι συνεχής στο R ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων,οπότε είναι συνεχής στο $[1,2]$.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\mathrm{E}=\int_1^2|f(\chi)|d\chi$.

Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(\chi)=1-e^\chi$.Για κάθε $\chi>0$, $e^\chi>1\Leftrightarrow 1-e^\chi<0\Leftrightarrow f'(\chi)<0$.Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$,οπότε $1\le\chi\le 2\Rightarrow f(2)\le f(\chi)\le f(1)=1-e<0$.

Συνεπώς για κάθε $\chi \in [1,2]$ είναι $f(\chi) < 0$.

$$\mathrm{E} = -\int_1^2 f(\chi)d\chi = \int_1^2 (e^\chi - \chi)d\chi = \left[e^\chi - \frac{\chi^2}{2}\right]_1^2 = e^2 - e - \frac{3}{2} \text{ τετρ.μον.}$$

<u>Σημείωση:</u> Το πρόσημο της f στο $[1,2]$ μπορούμε να το βρούμε και ως εξής:

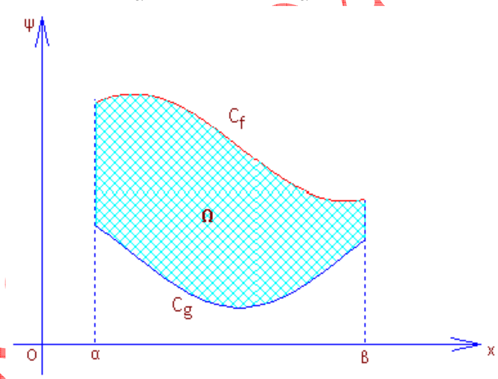
$$1 \le \chi \le 2 \Leftrightarrow e \le e^\chi \le e^2 . \begin{cases} 1 \le \chi \le 2 \\ \kappa\alpha\iota \\ -e^2 \le -e^\chi \le -e \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} 1 - e^2 \le \chi - e^\chi \le 2 - e \Rightarrow f(\chi) < 0 .$$

Β. Εμβαδόν χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων

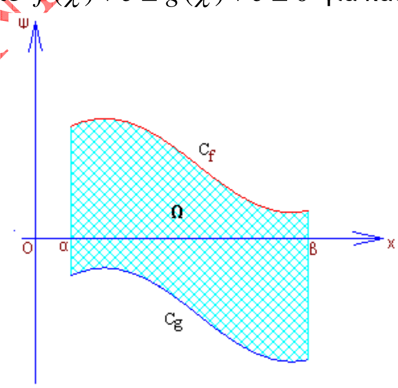
Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $\chi = \alpha$ και $\chi = \beta$.

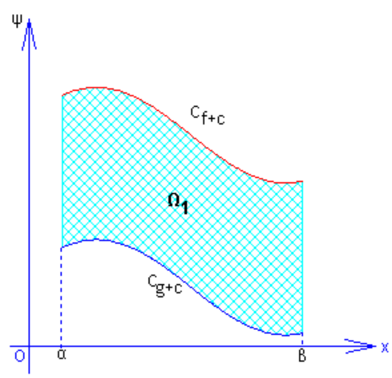
✓**α.** Αν $f(\chi) \ge g(\chi) \ge 0$ για κάθε $\chi \in [\alpha, \beta]$ και Ω_1, Ω_2 τα χωρία που ορίζονται αντίστοιχα από τις C_f, C_g ,τον άξονα $\chi'\chi$ και τις ευθείες $\chi = \alpha$ και $\chi = \beta$,τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω είναι

$$\mathrm{E}(\Omega) = \mathrm{E}(\Omega_1) - \mathrm{E}(\Omega_2) = \int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi - \int_\alpha^\beta g(\chi)d\chi = \int_\alpha^\beta [f(\chi) - g(\chi)]d\chi .$$



✓**β.** Αν $f(\chi) \ge g(\chi)$ για κάθε $\chi \in [\alpha, \beta]$,επειδή οι f, g είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ θα υπάρχει σταθερά $c \in R$ τέτοια,ώστε $f(\chi) + c \ge g(\chi) + c \ge 0$ για κάθε $\chi \in [\alpha, \beta]$.

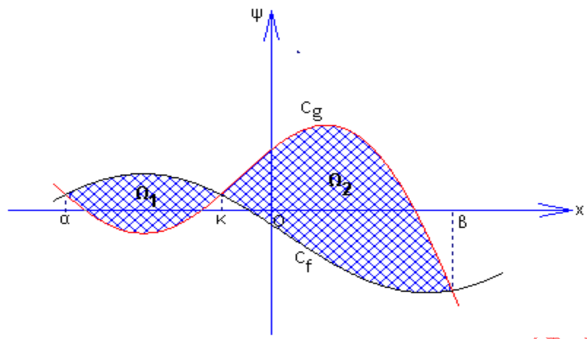




Το εμβαδόν του χωρίου Ω_1 που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των $f + c, g + c$ και τις ευθείες $\chi = \alpha$ και $\chi = \beta$ είναι ίσο με το εμβαδόν του χωρίου Ω λόγω μετατόπισης του Ω.

Σύμφωνα με το α) $\mathrm{E}(\Omega) = \mathrm{E}(\Omega_1) = \int_\alpha^\beta [(f(\chi) + c) - (g(\chi) + c)]d\chi = \int_\alpha^\beta [f(\chi) - g(\chi)]d\chi$.

✓**γ.** Αν η διαφορά $f(\chi)-g(\chi)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$,τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω με βάσει τα παραπάνω είναι το αλγεβρικό άθροισμα των ολοκληρωμάτων με πρώτο άκρο ολοκλήρωσης το α ,ενδιάμεσα άκρα ολοκλήρωσης τις τετμημένες των κοινών σημείων των C_f, C_g στο $[\alpha,\beta]$ και τελευταίο άκρο ολοκλήρωσης το β.



Έτσι για το παραπάνω σχήμα είναι $\mathrm{E}(\Omega)=\mathrm{E}(\Omega_1)+\mathrm{E}(\Omega_2)=\int_\alpha^\kappa [f(\chi)-g(\chi)]d\chi +$
$\int_\kappa^\beta [g(\chi)-f(\chi)]d\chi = \int_\alpha^\kappa |f(\chi)-g(\chi)|\,d\chi + \int_\kappa^\beta |f(\chi)-g(\chi)|d\chi = \int_\alpha^\beta |f(\chi)-g(\chi)|d\chi$.

✓**δ.** Συνοψίζοντας τις παραπάνω περιπτώσεις το εμβαδόν του χωρίου Ω δίνεται από τον τύπο
$\mathrm{E}(\Omega)=\int_\alpha^\beta |f(\chi)-g(\chi)|d\chi$.

➤ **Σχόλιο**

Για να βρούμε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g και τις ευθείες $\chi=\alpha$ και $\chi=\beta$ με $\alpha<\beta$,ενεργούμε ως εξής:

- **Εξασφαλίζουμε ότι οι συναρτήσεις είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$,οπότε και η διαφορά τους είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$.**
- **Το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από τον τύπο $\mathrm{E}=\int_\alpha^\beta |f(\chi)-g(\chi)|d\chi$.Βρίσκουμε το πρόσημο της διαφοράς $f(\chi)-g(\chi)$ στο $[\alpha,\beta]$ και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα.**

Σημείωση

- **Όταν το ζητούμενο εμβαδόν καθορίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και την εφαπτομένη της C_f σε ένα σημείο της,τότε για το πρόσημο της διαφοράς θα μας βοηθήσει η κυρτότητα της f .**
- **Όταν μας ζητάνε να βρούμε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g ,βρίσκουμε τις τετμημένες των κοινών σημείων των δύο γραφικών παραστάσεων, λύνοντας την εξίσωση $f(\chi)=g(\chi)$.Η μικρότερη και η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης δίνουν τις ευθείες $\chi=\alpha$ και $\chi=\beta$ από τις οποίες καθορίζεται το χωρίο.**

Προσοχή

Όταν το χωρίο του οποίου ζητάμε το εμβαδόν δεν καθορίζεται μόνο από τις C_f, C_g και τις ευθείες $\chi=\alpha$ και $\chi=\beta$,τότε χρειαζόμαστε σχήμα με βάση το οποίο το ζητούμενο εμβαδό προκύπτει ως αλγεβρικό άθροισμα επιμέρους εμβαδών.

Εφαρμογή 1η

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(\chi)=\eta\mu\chi, g(\chi)=\chi$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $\chi=0$ και $\chi=\pi$.

Λύση

$D_f=R, D_g=R$. Οι f, g είναι συνεχείς, οπότε είναι συνεχείς στο $[0,\pi]$.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\mathrm{E}=\int_0^{\pi}|f(\chi)-g(\chi)|d\chi$.

Έχουμε $|\eta\mu\chi|\le|\chi|$ για κάθε $\chi\in R$. Άρα για κάθε $\chi\in[0,\pi]$ είναι $\eta\mu\chi\le\chi \Leftrightarrow \chi-\eta\mu\chi\ge 0$.

Άρα $\mathrm{E}=\int_0^{\pi}(\chi-\eta\mu\chi)d\chi=\left[\frac{\chi^2}{2}+\sigma\upsilon\nu\chi\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2}-2=\frac{\pi^2-4}{2}$ τετρ.μονάδες.

Εφαρμογή 2η

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(\chi)=\chi^3-2\chi^2, g(\chi)=\chi-2$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g.

Λύση

$D_f=D_g=R$. $f(\chi)=g(\chi)\Leftrightarrow \chi^3-2\chi^2=\chi-2\Leftrightarrow \chi^3-2\chi^2-\chi+2=0\Leftrightarrow(\chi^2-1)(\chi-2)=0\Leftrightarrow$
$\chi=\pm1$ ή $\chi=2$.

Οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[-1,2]$, οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\mathrm{E}=\int_{-1}^{2}|f(\chi)-g(\chi)|$.

$f(\chi)-g(\chi)=\chi^3-2\chi^2-\chi+2=(\chi^2-1)(\chi-2)$.

χ	-1		1		2
χ^2-1	0	$-$	0	$+$	
$\chi-2$		$-$		$-$	0
$f(\chi)-g(\chi)$	0	$+$	0	$-$	0

Έχουμε $f(\chi)-g(\chi)\ge 0$ για κάθε $\chi\in[-1,1]$ και $f(\chi)-g(\chi)\le 0$ για κάθε $\chi\in[1,2]$.

Άρα $\mathrm{E}=\int_{-1}^{1}(\chi^3-2\chi^2-\chi+2)d\chi-\int_{1}^{2}(\chi^3-2\chi^2-\chi+2)d\chi=$

$\left[\frac{\chi^4}{4}-\frac{2\chi^3}{3}-\frac{\chi^2}{2}+2\chi\right]_{-1}^{1}-\left[\frac{\chi^4}{4}-\frac{2\chi^3}{3}-\frac{\chi^2}{2}+2\chi\right]_{1}^{2}=\ldots=\frac{37}{12}$ τετρ.μονάδες.

Εφαρμογή 3η

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(\chi)=\chi^3$.

Να βρείτε:

i. Την εφαπτομένη ε της C_f στο σημείο $\mathrm{A}(1, f(1))$.

ii. Το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f, τον άξονα $\chi'\chi$ και την ε.

iii. Την ευθεία $\chi=\alpha$ η οποία χωρίζει το Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

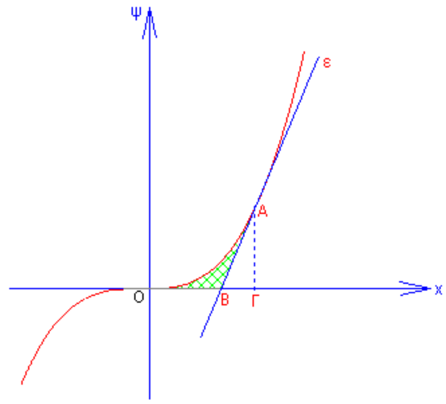
Λύση

$D_f=R$.

i. Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(\chi)=3\chi^2$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης ε είναι $\varepsilon: \psi-f(1)=f'(1)(\chi-1)\Leftrightarrow \psi=3\chi-2$.

ii.



Για $\psi = 0$ από την εξίσωση της εφαπτομένης παίρνουμε $\chi = \frac{2}{3}$.Άρα η ε τέμνει τον άξονα $\chi'\chi$ στο σημείο $\mathrm{B}(\frac{2}{3},0)$.

Έστω E_1 το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f ,τον άξονα $\chi'\chi$ και τις ευθείες $\chi = 0$ και $\chi = 1$.

Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ με $f(\chi) \geq 0$ για κάθε $\chi \in [0,1]$.Άρα $\mathrm{E}_1 = \int_0^1 \chi^3 d\chi = \left[\frac{\chi^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$ τετρ.μον

Το εμβαδόν του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$ είναι $(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2}(\mathrm{B\Gamma})(\mathrm{A\Gamma}) = \frac{1}{6}$ τετρ.μονάδες.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\mathrm{E}(\Omega) = \mathrm{E}_1 - (\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{12}$ τετρ.μονάδες.

iii. Αρχικά πρέπει $0 < \alpha < 1$.Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f ,τον άξονα $\chi'\chi$ και τις ευθείες $\chi = 0$ και $\chi = \alpha$ είναι $\mathrm{E}_2 = \int_0^\alpha \chi^3 d\chi = \left[\frac{\chi^4}{4}\right]_0^\alpha = \frac{\alpha^4}{4}$.

Θέλουμε $\mathrm{E}_2 = \frac{\mathrm{E}(\Omega)}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha^4}{4} = \frac{1}{24} \Leftrightarrow \alpha^4 = \frac{1}{6} \overset{0<\alpha<1}{\Leftrightarrow} \alpha = \frac{1}{\sqrt[4]{6}} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\sqrt[4]{216}}{6}$.Άρα η ζητούμενη ευθεία είναι η $\chi = \frac{\sqrt[4]{216}}{6}$.

ΕΝΟΤΗΤΑ $2^η$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

✓α. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\chi)\geq 0$ για κάθε $\chi\in[\alpha,\beta]$,τότε $\int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi\geq 0$.

✓β. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\chi)\geq 0$ για κάθε $\chi\in[\alpha,\beta]$ και δεν είναι παντού μηδέν στο $[\alpha,\beta]$,τότε $\int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi>0$.

✓γ. Αν f,g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\chi)\leq g(\chi)$ (1) για κάθε $\chi\in[\alpha,\beta]$,τότε $\int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi\leq\int_\alpha^\beta g(\chi)d\chi$.

Απόδειξη

Η συνάρτηση $h(\chi)=g(\chi)-f(\chi),\chi\in[\alpha,\beta]$ είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Για κάθε $\chi\in[\alpha,\beta]$ λόγω της (1) είναι $h(\chi)\geq 0\Leftrightarrow g(\chi)-f(\chi)\geq 0\Rightarrow\int_\alpha^\beta[g(\chi)-f(\chi)]d\chi\geq 0\Leftrightarrow$

$\int_\alpha^\beta g(\chi)d\chi-\int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi\geq 0\Leftrightarrow\int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi\leq\int_\alpha^\beta g(\chi)d\chi$.

✓δ. Αν f,g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\chi)\leq g(\chi)$ για κάθε $\chi\in[\alpha,\beta]$ και οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες στο $[\alpha,\beta]$,τότε $\int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi<\int_\alpha^\beta g(\chi)d\chi$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

$1^η$: Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,3]$ με $f(2)\neq 0$.Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(\chi)=5\left(\int_1^3 f^{2008}(\chi)d\chi\right)\chi^4+2\chi-1.$$

i. Δείξτε ότι η εξίσωση $g(\chi)=0$ στο $(0,+\infty)$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

ii. Να βρείτε το εμβαδόν $\mathrm{E}(\Omega)$ του χωρίου Ω που ορίζεται από την C_g,τους άξονες $\chi'\chi,\psi'\psi$ και την ευθεία $\chi=\rho$,όπου ρ η θετική ρίζα της εξίσωσης $g(\chi)=0$.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της g είναι το R.

i. Έχουμε $f^{2008}(\chi)\geq 0$ για κάθε $\chi\in[1,3]$.Αφού $f(2)\neq 0$ η f^{2008} δεν είναι παντού μηδέν στο $[1,3]$,επομένως $\int_1^3 f^{2008}(\chi)d\chi>0$.

Η g είναι συνεχής και $g(0)=-1<0$, $g(\frac{1}{2})=\frac{5}{16}\int_1^3 f^{2008}(\chi)d\chi>0$.Άρα $g(0)g(\frac{1}{2})<0$,οπότε σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(0,\frac{1}{2})$ τέτοιο,ώστε $g(\rho)=0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $g'(\chi)=20\left(\int_1^3 f^{2008}(\chi)d\chi\right)\chi^3+2$.Για κάθε $\chi\in[0,+\infty)$ είναι $g'(\chi)>0$,οπότε στο $[0,+\infty)$ η g είναι γνησίως αύξουσα.Άρα το ρ είναι το μόνο σημείο μηδενισμού της g στο $(0,+\infty)$.

ii. Από το ερώτημα i) είναι $g(\rho)=0\Leftrightarrow 5\left(\int_1^3 f^{2008}(\chi)d\chi\right)\rho^4+2\rho-1=0\Leftrightarrow\int_1^3 f^{2008}(\chi)d\chi=\frac{1-2\rho}{5\rho^4}$.

Αφού η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ έχουμε $0\leq\chi\leq\rho\Rightarrow g(0)\leq g(\chi)\leq g(\rho)\Rightarrow g(\chi)\leq 0$.

Είναι $E(\Omega)=\int_0^{\rho}|g(\chi)|d\chi=-\int_0^{\rho}g(\chi)d\chi=-\int_0^{\rho}\left[5(\int_1^3 f^{2008}(\chi)d\chi)\chi^4+2\chi-1\right]d\chi=$

$-5(\int_1^3 f^{2008}(\chi)d\chi)\int_0^{\rho}\chi^4 d\chi-\int_0^{\rho}(2\chi-1)d\chi=-5(\int_1^3 f^{2008}(\chi)d\chi)\left[\frac{\chi^5}{5}\right]_0^{\rho}-\left[\chi^2-\chi\right]_0^{\rho}=$

$-(\int_1^3 f^{2008}(\chi)d\chi)\rho^5-\rho^2+\rho=-\frac{\rho-2\rho^2}{5}-\rho^2+\rho=\frac{4\rho-3\rho^2}{5}$ τετρ.μονάδες.

2η: α. Η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$ είναι συνεχής με $\int_{\alpha}^{\beta}f^2(\chi)d\chi=0$.Δείξτε ότι $f(\chi)=0$ για κάθε $\chi\in[\alpha,\beta]$.

β. Η συνάρτηση $g:[1,4]\to R$ είναι συνεχής και $\int_1^4 g^2(\chi)d\chi+2\ln 2=2\int_1^4\frac{g(\chi)}{\sqrt{\chi}}d\chi$ (1).

i. Να βρείτε το εμβαδόν E του χωρίου που ορίζεται από την C_g ,τον άξονα $\chi'\chi$ και τις ευθείες $\chi=1$ και $\chi=4$.

ii. Για ένα μιγαδικό w έχουμε $|w-1|=E$.Να δείξετε ότι $-|w|\le\frac{|w|^2-3}{2}\le|w|$.

iii. Δείξτε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi\in(1,4)$ τέτοιο,ώστε $g(\xi)=\frac{\xi}{3}-\frac{1}{6}$.

Λύση

α. Έστω ότι για κάποιο $\chi_0\in[\alpha,\beta]$ είναι $f(\chi_0)\neq 0$.Έχουμε $f^2(\chi)\ge 0$ για κάθε $\chi\in[\alpha,\beta]$ και η f^2 δεν είναι παντού μηδέν στο $[\alpha,\beta]$,οπότε $\int_{\alpha}^{\beta}f^2(\chi)d\chi>0$.Άτοπο.Άρα $f(\chi)=0$ για κάθε $\chi\in[\alpha,\beta]$.

β. i. $(1)\Leftrightarrow\int_1^4 g^2(\chi)d\chi-\int_1^4 2\frac{g(\chi)}{\sqrt{\chi}}d\chi+\ln 4=0\Leftrightarrow\int_1^4 g^2(\chi)d\chi-\int_1^4 2\frac{g(\chi)}{\sqrt{\chi}}d\chi+[\ln\chi]_1^4=0\Leftrightarrow$

$\int_1^4 g^2(\chi)d\chi-\int_1^4 2\frac{g(\chi)}{\sqrt{\chi}}d\chi+\int_1^4\frac{1}{\chi}d\chi=0\Leftrightarrow\int_1^4[g^2(\chi)-2\frac{g(\chi)}{\sqrt{\chi}}+\frac{1}{\chi}]d\chi=0\Leftrightarrow$

$\int_1^4(g(\chi)-\frac{1}{\sqrt{\chi}})^2d\chi=0$.Σύμφωνα με το α) πρέπει $g(\chi)-\frac{1}{\sqrt{\chi}}=0\Leftrightarrow g(\chi)=\frac{1}{\sqrt{\chi}}$ για κάθε $\chi\in[1,4]$

Η g είναι συνεχής στο $[1,4]$ με $g(\chi)>0$.Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E=\int_1^4|g(\chi)|d\chi=$

$\int_1^4 g(\chi)d\chi=\int_1^4\frac{1}{\sqrt{\chi}}d\chi=\left[2\sqrt{\chi}\right]_1^4=2$ τετρ.μονάδες.

ii. Έχουμε $|w-1|=2\Leftrightarrow|w-1|^2=4\Leftrightarrow(w-1)(\overline{w-1})=4\Leftrightarrow(w-1)(\overline{w}-1)=4\Leftrightarrow w\overline{w}-(w+\overline{w})=3\Leftrightarrow$

$|w|^2-2\mathrm{Re}(w)=3\Leftrightarrow\mathrm{Re}(w)=\frac{|w|^2-3}{2}$.

Αρκεί να δείξουμε ότι: $-|w|\le\mathrm{Re}(w)\le|w|\Leftrightarrow|\mathrm{Re}(w)|\le|w|\Leftrightarrow|\mathrm{Re}(w)|\le\sqrt{(\mathrm{Re}(w))^2+(\mathrm{Im}(w))^2}\Leftrightarrow$

$(\mathrm{Re}(w))^2\le(\mathrm{Re}(w))^2+(\mathrm{Im}(w))^2\Leftrightarrow(\mathrm{Im}(w))^2\ge 0$,που ισχύει.

iii. <u>1ος τρόπος:</u> $g(\xi)=\frac{\xi}{3}-\frac{1}{6}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{\xi}}=\frac{\xi}{3}-\frac{1}{6}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi(\chi)=\frac{1}{\sqrt{\chi}}-\frac{1}{3}\chi+\frac{1}{6},\chi\in[1,4]$.

Η ϕ είναι συνεχής στο $[1,4]$ και $\phi(1)=\frac{5}{6}>0, \phi(4)=-\frac{2}{3}<0$,οπότε $\phi(1)\phi(4)<0$.Σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,4)$ τέτοιο,ώστε $\phi(\xi)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\xi}}=\frac{\xi}{3}+\frac{1}{6}$.

Η ϕ είναι παραγωγίσιμη στο $[1,4]$ με $\phi'(\chi)=-\frac{1}{2\chi\sqrt{\chi}}-\frac{1}{3}=-\left(\frac{1}{2\chi\sqrt{\chi}}+\frac{1}{3}\right)<0$,οπότε η ϕ είναι γνησίως φθίνουσα και άρα το ξ είναι μοναδικό.

<u>2ος τρόπος:</u> Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(\chi)=\int_1^{\chi} g(t)dt-\frac{\chi^2}{6}+\frac{1}{6}\chi, \chi\in[1,4]$.

Η h είναι συνεχής στο $[1,4]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων,παραγωγίσιμη στο $(1,4)$ ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με $h'(\chi)=g(\chi)-\frac{\chi}{3}+\frac{1}{6}$.Επιπλέον $h(1)=h(4)=0$.

Σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,4)$ τέτοιο,ώστε $h'(\xi)=0 \Leftrightarrow$ $g(\xi)=\frac{\xi}{3}-\frac{1}{6}$.

Η h' είναι παραγωγίσιμη με $h''(\xi)=-\left(\frac{1}{2\chi\sqrt{\chi}}+\frac{1}{3}\right)<0$.Άρα η h' είναι γνησίως φθίνουσα,οπότε το ξ είναι μοναδικό.

3η: Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=\begin{cases}\chi, \chi\le 0\\ \chi\ln\chi, \chi>0\end{cases}$.

i. Να βρείτε το εμβαδόν $\mathrm{E}(\Omega)$ του χωρίου Ω που ορίζεται από την C_f ,τον άξονα $\chi'\chi$ και τις ευθείες $\chi=-1$ και $\chi=1$.

ii. Δείξτε ότι υπάρχει ευθεία $\varepsilon: \psi=\chi+\kappa, \kappa<-1$ τέτοια,ώστε το χωρίο που περικλείεται από την C_f ,την ε και τις ευθείες $\chi=1$ και $\chi=e$ να είναι ισοδύναμο του Ω.

Λύση

i. Στο $[-1,0)$ η f είναι συνεχής .Επίσης στο $(0,1]$ η f είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων. $f(0)=0$. $\lim\limits_{\chi\to 0^-} f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 0^-}\chi=0=f(0)$.

$\lim\limits_{\chi\to 0^+} f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 0^+}(\chi\ln\chi)\overset{0(-\infty)}{=}\lim\limits_{\chi\to 0^+}\frac{\ln\chi}{\frac{1}{\chi}}\overset{(\frac{-\infty}{+\infty})}{=}\lim\limits_{\chi\to 0^+}\frac{(\ln\chi)'}{\left(\frac{1}{\chi}\right)'}=\lim\limits_{\chi\to 0^+}\frac{\frac{1}{\chi}}{-\frac{1}{\chi^2}}=\lim\limits_{\chi\to 0^+}(-\chi)=0=f(0)$.Άρα η f είναι συνεχής στο μηδέν,οπότε είναι συνεχής στο $[-1,1]$.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\mathrm{E}(\Omega)=\int_{-1}^{1}|f(\chi)|d\chi$.

Είναι $f(\chi)\le 0$ για κάθε $\chi\in[-1,0]$ και $f(\chi)\le 0$ για κάθε $\chi\in(0,1]$.Άρα για κάθε $\chi\in[-1,1]$ έχουμε $f(\chi)\le 0$,οπότε $\mathrm{E}(\Omega)=-\int_{-1}^{1}f(\chi)d\chi$ (1).

Εδώ πρέπει να παρατηρήσουμε ότι δεν μπορούμε το $\int_{-1}^{1}f(\chi)d\chi$ να το γράψουμε $\int_{-1}^{0}\chi d\chi+\int_{0}^{1}\chi\ln\chi d\chi$ γιατί ο $\ln\chi$ δεν ορίζεται στο μηδέν.

Αφού η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ υπάρχει παράγουσα της f στο $[-1,1]$.

Στο $[-1,0]$ το σύνολο των παραγουσών της f είναι $\int \chi d\chi = \frac{\chi^2}{2} + c_1$.

Στο $(0,1]$ το σύνολο των παραγουσών της f είναι $\int \chi \ln \chi d\chi = \int \left(\frac{\chi^2}{2}\right)' \ln \chi d\chi =$

$\frac{\chi^2}{2}\ln \chi - \int \frac{\chi}{2} d\chi = \frac{\chi^2}{2}\ln \chi - \frac{\chi^2}{4} + c_2$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $G(\chi) = \begin{cases} \frac{\chi^2}{2} + c_1, \chi \in [-1,0] \\ \frac{\chi^2}{2}\ln \chi - \frac{\chi^2}{4} + c_2, \chi \in (0,1] \end{cases}$.

Θέλουμε η G να είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν.Απαιτούμε η G να είναι συνεχής στο μηδέν γιατί σε διαφορετική περίπτωση δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν.

$\lim_{\chi \to 0^-} G(\chi) = \lim_{\chi \to 0^-} (\frac{\chi^2}{2} + c_1) = c_1 = G(0)$, $\lim_{\chi \to 0^+} G(\chi) = \lim_{\chi \to 0^+} (\frac{\chi^2}{2}\ln \chi - \frac{\chi^2}{4} + c_2) = ... = c_2$.

Άρα η G είναι συνεχής στο μηδέν αν και μόνο αν $c_1 = c_2$.

Αν $c_1 = c_2$,έχουμε $\lim_{\chi \to 0^-} \frac{G(\chi) - G(0)}{\chi - 0} = \lim_{\chi \to 0^-} \frac{\chi}{2} = 0$, $\lim_{\chi \to 0^+} \frac{G(\chi) - G(0)}{\chi - 0} = \lim_{\chi \to 0^+} \left(\frac{\chi \ln \chi}{2} - \frac{\chi}{4}\right) = ... = 0$.

Άρα $\lim_{\chi \to 0} \frac{G(\chi) - G(0)}{\chi - 0} = 0 = f(0)$,οπότε η G είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν με $G'(0) = f(0)$.

Συνεπώς,αν $c_1 = c_2$ η G είναι παραγωγίσιμη στο $[-1,1]$ με $G'(\chi) = f(\chi)$.

Άρα η συνάρτηση $G(\chi) = \begin{cases} \frac{\chi^2}{2} + c_1, \chi \in [-1,0] \\ \frac{\chi^2}{2}\ln \chi - \frac{\chi^2}{4} + c_1, \chi \in (0,1] \end{cases}$ εκφράζει το σύνολο των παραγουσών της f στο $[-1,1]$,οπότε $(1) \Leftrightarrow \mathrm{E}(\Omega) = -\left[G(\chi)\right]_{-1}^{1} = -(G(1) - G(-1)) = \frac{1}{4} - c_1 + \frac{1}{2} + c_1 = \frac{3}{4}$ τετρ. μονάδες.

ii. Οι συναρτήσεις f και $\psi(\chi) = \chi + \kappa, \kappa < -1$ είναι συνεχείς στο $[1,e]$,οπότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f ,την ευθεία ε και τις ευθείες $\chi = 1, \chi = e$ είναι $\mathrm{E} = \int_1^e |f(\chi) - \psi(\chi)| d\chi$.

Για κάθε $\chi \in [1,e]$, $f(\chi) - \psi(\chi) = \chi \ln \chi - \chi - \kappa$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(\chi) = \chi \ln \chi - \chi - \kappa, \chi \in [1,e]$.

Η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(\chi) = \ln \chi$.Για κάθε $\chi \in (1,e]$ είναι $h'(\chi) > 0$ και επιπλέον η h είναι συνεχής στο $[1,e]$,οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,e]$.Επομένως $1 \le \chi \le e \Rightarrow h(\chi) \ge h(1) = -1 - \kappa > 0$

Άρα $h(\chi) > 0$ για κάθε $\chi \in [1,e]$.

Από το ερώτημα i) έχουμε βρει $\int \chi \ln \chi d\chi = \frac{\chi^2}{2}\ln \chi - \frac{\chi^2}{4} + c$.

$$\mathrm{E} = \int_1^e (\chi \ln \chi - \chi - \kappa) d\chi = \int_1^e \chi \ln \chi d\chi - \int_1^e \chi d\chi - \int_1^e \kappa d\chi = \left[\int \chi \ln \chi\right]_1^e - \left[\frac{\chi^2}{2}\right]_1^e - \kappa(e-1) =$$

$$\left[\frac{\chi^2}{2}\ln \chi - \frac{\chi^2}{4} + c\right]_1^e - \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2} - \kappa(e-1) = -\frac{e^2}{4} + \frac{3}{4} - \kappa(e-1).$$

Θέλουμε $\mathrm{E}=\mathrm{E}(\Omega) \Leftrightarrow -\frac{e^2}{4}+\frac{3}{4}-\kappa(e-1)=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \kappa=-\frac{e^2}{4(e-1)}$.

$-\frac{e^2}{4(e-1)}<-1 \Leftrightarrow e^2>4(e-1) \Leftrightarrow e^2-4e+4>0 \Leftrightarrow (e-2)^2>0$ που ισχύει.

Άρα η ευθεία $\varepsilon: \psi=\chi-\frac{e^2}{4(e-1)}$, η C_f και οι ευθείες $\chi=1$ και $\chi=e$ ορίζουν χωρίο ισοδύναμο του Ω.

4η: Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$ με συνεχή παράγωγο για την οποία ισχύει:
$\int_0^{\chi} tf'(t)dt+f(\chi)=\chi f'(\chi)-\int_0^{\chi} f(t)dt$ **(1) για κάθε $\chi \in R$.**

Η C_f διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(-1,e^{-1})$ και η εφαπτομένη της C_f στο $\mathrm{B}(1,f(1))$ είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: \chi+\psi-1=0$.

i. Να βρείτε τον τύπο της f.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία,τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, την εφαπτομένη της C_f στο B και τις ευθείες $\chi=1$ και $\chi=5$.

Λύση

i) $(1) \Leftrightarrow [tf(t)]_0^{\chi}-\int_0^{\chi} f(t)dt+f(\chi)=\chi f'(\chi)-\int_0^{\chi} f(\chi)d\chi \Leftrightarrow \chi f(\chi)+f(\chi)=\chi f'(\chi)$ (2).

Για κάθε $\chi \in R^*$, $(2) \Leftrightarrow \chi f'(\chi)-f(\chi)=\chi f(\chi) \Leftrightarrow \frac{\chi f'(\chi)-f(\chi)}{\chi^2}=\frac{f(\chi)}{\chi} \Leftrightarrow$

$\left(\frac{f(\chi)}{\chi}\right)'=\frac{f(\chi)}{\chi}$ (3).

• Για κάθε $\chi \in (-\infty,0)$, $(3) \Leftrightarrow \frac{f(\chi)}{\chi}=c_1 e^{\chi} \Leftrightarrow f(\chi)=c_1\chi e^{\chi}$ (4).

Είναι $f(-1)=e^{-1} \overset{(4)}{\Leftrightarrow} c_1=-1$. Άρα για κάθε $\chi \in (-\infty,0)$, $f(\chi)=-\chi e^{\chi}$.

• Για κάθε $\chi \in (0,+\infty)$, $(3) \Leftrightarrow \frac{f(\chi)}{\chi}=c_2 e^{\chi} \Leftrightarrow f(\chi)=c_2\chi e^{\chi}$ (5).

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ε είναι $\lambda_{\varepsilon}=-1$. Πρέπει $f'(1)\lambda_{\varepsilon}=-1 \Leftrightarrow f'(1)=1$ (6).

Για $\chi=1$ από την (2) λόγω της (6) παίρνουμε $f(1)=\frac{1}{2}$ και από την (5) $f(1)=c_2 e \Leftrightarrow c_2=\frac{1}{2e}$

Άρα για κάθε $\chi \in (0,+\infty)$, $f(\chi)=\frac{1}{2e}\chi e^{\chi}$.

• Για $\chi=0$ από την (2) παίρνουμε $f(0)=0$.

Άρα ο τύπος της f είναι $f(\chi)=\begin{cases} -\chi e^{\chi}, & \chi \in (-\infty,0] \\ \frac{1}{2e}\chi e^{\chi}, & \chi \in (0,+\infty) \end{cases}$.

ii. • Στο $(-\infty,0)$ έχουμε $f'(\chi)=-e^{\chi}-\chi e^{\chi}=-e^{\chi}(\chi+1)$.

$f'(\chi)=0 \Leftrightarrow \chi=-1$.Είναι $f'(\chi)>0$ για κάθε $\chi\in(-\infty,-1)$ και $f'(\chi)<0$ για κάθε $\chi\in(-1,0)$.

• Στο $(0,+\infty)$ έχουμε $f'(\chi)=\dfrac{1}{2e}(e^{\chi}+\chi e^{\chi})>0$.

Στο μηδέν η f είναι συνεχής.

χ	$-\infty$ $\quad$ -1 $\quad$ 0 $\quad$ $+\infty$
$f'(\chi)$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$ $\quad$ ⋮ $\quad$ $+$
$f(\chi)$	□ $\quad$ $f(-1)$ τοπ.μεγ. $\quad$ □ $\quad$ $f(0)$ τοπ.ελάχ. $\quad$ □

Στα διαστήματα $(-\infty,-1],[0,+\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα και στο διάστημα $[-1,0]$ είναι γνησίως φθίνουσα.Στο -1 η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(-1)=e^{-1}$ και στο 0 παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(0)=0$.

$$\lim_{\chi\to-\infty} f(\chi)=\lim_{\chi\to-\infty}(-\chi e^{\chi})=\lim_{\chi\to-\infty}\left(\frac{-\chi}{e^{-\chi}}\right)\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{\chi\to-\infty}\frac{(-\chi)'}{(e^{-\chi})'}=\lim_{\chi\to-\infty}\frac{1}{e^{-\chi}}=\lim_{\chi\to-\infty}e^{\chi}=0.$$

$$\lim_{\chi\to+\infty} f(\chi)=\lim_{\chi\to+\infty}(\frac{1}{2e}\chi e^{\chi})=+\infty.$$

$$f(R)=(\lim_{\chi\to-\infty}f(\chi),f(-1)]\cup[f(0),f(-1)]\cup[f(0),\lim_{\chi\to+\infty}f(\chi))=(0,e^{-1}]\cup[0,e^{-1}]\cup[e^{-1},+\infty)=$$
$[0,+\infty)$.

iii. Η εφαπτομένη ε_1 της C_f στο Β είναι $\varepsilon_1:\psi-f(1)=f'(1)(\chi-1)\Leftrightarrow\psi-\dfrac{1}{2}=\chi-1\Leftrightarrow\psi=\chi-\dfrac{1}{2}$.

Θέτουμε $g(\chi)=\chi-\dfrac{1}{2}$.Δεδομένου ότι οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο $[1,5]$ το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\mathrm{E}=\int_1^5|f(\chi)-g(\chi)|d\chi$.

Στο $[1,5]$ έχουμε $f'(\chi)=\dfrac{1}{2e}(e^{\chi}+\chi e^{\chi})\Rightarrow f''(\chi)=\dfrac{1}{2e}(2e^{\chi}+\chi e^{\chi})>0$,οπότε στο $[1,5]$ η f είναι κυρτή,άρα $f(\chi)\geq g(\chi)$ για κάθε $\chi\in[1,5]$.Έτσι έχουμε $\mathrm{E}=\int_1^5[f(\chi)-g(\chi)]d\chi=$

$$\int_1^5(\frac{1}{2e}\chi e^{\chi}-\chi+\frac{1}{2})d\chi=\frac{1}{2e}\int_1^5\chi e^{\chi}d\chi-\int_1^5(\chi-\frac{1}{2})d\chi=\frac{1}{2e}\int_1^5\chi(e^{\chi})'d\chi-\left[\frac{\chi^2}{2}-\frac{1}{2}\chi\right]_1^5=$$

$$\frac{1}{2e}\left(\left[\chi e^{\chi}\right]_1^5-\int_1^5 e^{\chi}d\chi\right)-10=\ldots=2e^4-10$$ τετρ.μονάδες.

5η: Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to R$ με $g(\chi)>0$, $g'(\chi)>0$ για κάθε $\chi\in(0,+\infty)$ και $\lim\limits_{\chi\to+\infty} g(\chi)=+\infty$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $G(\chi)=\int_{\chi}^{2\chi} g(t)dt$.

α. Να βρείτε:

i. Το πεδίο ορισμού της G.

ii. Το $\lim\limits_{\chi\to+\infty} G(\chi)$.

β. Έστω Ε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_g, τον άξονα $\chi'\chi$ και τις ευθείες $\chi=1$ και $\chi=2$. Δείξτε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $\mathrm{E}=g(\xi)+\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{1}{G(\chi)}$.

Λύση

α.i. Η g ως παραγωγίσιμη είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$. Για να ορίζεται η G πρέπει $\begin{cases}\chi>0\\ \kappa\alpha\iota\\ 2\chi>0\end{cases}\Leftrightarrow \chi>0$.

Άρα $D_G=(0,+\infty)$.

ii. Αφού $g'(\chi)>0$ για κάθε $\chi\in(0,+\infty)$, η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Για $\chi>0$ είναι $\chi\le t\le 2\chi \Rightarrow g(\chi)\le g(t)\le g(2\chi)\Rightarrow \int_{\chi}^{2\chi} g(\chi)dt\le\int_{\chi}^{2\chi} g(t)dt\le\int_{\chi}^{2\chi} g(2\chi)dt \Leftrightarrow$ $\chi g(\chi)\le G(\chi)\le \chi g(2\chi)$.

Έχουμε $\lim\limits_{\chi\to+\infty}(\chi g(\chi))=+\infty$ και $\lim\limits_{\chi\to+\infty} g(2\chi)\overset{u=2\chi}{=}\lim\limits_{u\to+\infty} g(u)=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{\chi\to+\infty}(\chi g(2\chi))=+\infty$. Σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{\chi\to+\infty} G(\chi)=+\infty$.

β. Είναι $\mathrm{E}=\int_1^2 |g(\chi)|d\chi=\int_1^2 g(\chi)d\chi$ και $1\le\chi\le 2\Rightarrow g(1)\le g(\chi)\le g(2)$ (1). Αφού η g είναι γνησίως αύξουσα δεν μπορεί παντού στο $[1,2]$ να είναι $g(\chi)=g(1)$ ή $g(\chi)=g(2)$, οπότε από την (1) παίρνουμε $\int_1^2 g(1)d\chi<\int_1^2 g(\chi)d\chi<\int_1^2 g(2)d\chi\Leftrightarrow g(1)<\mathrm{E}<g(2)$.

Για την g εφαρμόζεται στο $[1,2]$ το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, οπότε υπάρχει ακριβώς ένα $\xi\in(1,2)$, αφού η g είναι γνησίως αύξουσα, τέτοιο, ώστε $\mathrm{E}=g(\xi)$. Επιπλέον $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{1}{G(\chi)}=0$, οπότε ισχύει το ζητούμενο.

6η: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(\chi)=3\chi+\dfrac{1}{2\chi^2}$.

i. Να βρείτε την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, την ασύμπτωτη του ερωτήματος i) και τις ευθείες $\chi=1$ και $\chi=e^{\alpha}-e\ln\alpha$ με $\alpha>0$.

iii. Αν το α του ερωτήματος ii) αυξάνει με ρυθμό $1cm/s$, να δείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E του ερωτήματος ii) όταν η ευθεία $\chi=e^{\alpha}-e\ln\alpha$ $\mu\varepsilon$ $a>1$ και η ασύμπτωτη του ερωτήματος i) τέμνονται στο σημείο $\mathrm{A}\left(e^{\alpha}-e\ln\alpha, 3(e^2-e\ln 2)\right)$, ισούται με $\dfrac{1}{2}\dfrac{2e-1}{e(e-\ln 2)^2}\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\mathrm{E}(\alpha)\ cm^2/s$.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι $D_f=R^*$.

i. $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\frac{f(\chi)}{\chi}=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(3+\frac{1}{2\chi^3}\right)=3$, $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(f(\chi)-3\chi\right)=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\frac{1}{2\chi^2}=0$.Άρα η ευθεία $\psi=3\chi$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

ii. Θέτουμε $\psi(\chi)=3\chi, \chi\in R$.

Θα βρούμε τη διάταξη των αριθμών $1, e^{\alpha}-e\ln\alpha, \alpha>0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\chi)=e^{\chi}-e\ln\chi, \chi>0$.

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη με $g'(\chi)=e^{\chi}-\frac{e}{\chi}$.Παρατηρούμε ότι $g'(1)=0$.Η g' είναι επίσης παραγωγίσιμη με $g''(\chi)=e^{\chi}+\frac{e}{\chi^2}>0$.Άρα η g' είναι γνησίως αύξουσα.

Για $0<\chi<1\Rightarrow g'(\chi)<g'(1)\Rightarrow g'(\chi)<0$ και για $\chi>1\Rightarrow g'(\chi)>g'(1)\Leftrightarrow g'(\chi)>0$.

Άρα για $\chi=1$ η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $g(1)=e$,οπότε $g(\chi)\geq e\Rightarrow g(\chi)>1$ για κάθε $\chi>0$.Συνεπώς $1<e^{\alpha}-e\ln\alpha$.Θέτουμε $e^{\alpha}-e\ln\alpha=\kappa$

Οι συναρτήσεις f,ψ είναι συνεχείς στο $[1,\kappa]$,οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$\mathrm{E}=\int_1^{\kappa}|f(\chi)-\psi(\chi)|d\chi=\int_1^{\kappa}\left|\frac{1}{2\chi^2}\right|d\chi=\int_1^{\kappa}\frac{1}{2\chi^2}d\chi=\frac{1}{2}\int_1^{\kappa}\frac{1}{\chi^2}d\chi=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{\chi}\right]_1^{\kappa}=$$

$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\kappa}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e^{\alpha}-e\ln\alpha}\right)$ τετρ.μονάδες.

iii. Το εμβαδόν συναρτήσει του χρόνου t είναι $\mathrm{E}(t)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e^{\alpha(t)}-e\ln\alpha(t)}\right)$.

$$\mathrm{E}'(t)=\frac{1}{2}\frac{\alpha'(t)e^{\alpha(\tau)}-\frac{e}{\alpha(t)}\alpha'(t)}{(e^{\alpha(t)}-e\ln\alpha(t))^2}.$$

Η συνάρτηση g που θεωρήσαμε στο ερώτημα i) είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$,οπότε στο διάστημα αυτό είναι «1-1».

Έστω t_0 η χρονική στιγμή που $\alpha>1$ και οι ευθείες $\chi=e^{\alpha}-e\ln\alpha$ και $\psi=3\chi$ τέμνονται στο A.Τότε

$e^2-e\ln 2=e^{\alpha(t_0)}-e\ln\alpha(t_0)\Leftrightarrow g(2)=g(a(t_0))\overset{g\ \text{"1-1"}}{\Leftrightarrow}\alpha(t_0)=2$.

$$\mathrm{E}'(t_0)=\frac{1}{4}\frac{2e^2-e}{(e^2-e\ln 2)^2}=\frac{1}{4}\frac{2e-1}{e(e-\ln 2)^2}cm^2/\mathrm{s}.$$

$$\lim_{\alpha\to+\infty}(e^{\alpha}-e\ln\alpha)=\lim_{\alpha\to+\infty}\left[e^{\alpha}(1-e\frac{\ln\alpha}{e^{\alpha}})\right],\ \lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\ln\alpha}{e^{\alpha}}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{(\ln\alpha)'}{(e^{\alpha})'}=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{1}{\alpha e^{\alpha}}=0.$$

Άρα $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}(e^{\alpha}-e\ln\alpha)=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{a\to+\infty}\frac{1}{e^{\alpha}-e\ln\alpha}=0$.

$\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\mathrm{E}(\alpha)=\frac{1}{2}$.Άρα $\mathrm{E}'(t_0)=\frac{1}{2}\frac{2e-1}{e(e-\ln 2)^2}\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\mathrm{E}(\alpha)\ cm^2/s$.

7η: Η συνάρτηση $f:[\alpha,\gamma]\to R$ είναι συνεχής με $f(\chi)\neq 0$ για κάθε $\chi\in[\alpha,\gamma]$.Για κάποιο β με $\alpha<\beta<\gamma$ έχουμε $\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi<\int_{\gamma}^{\beta} f(\chi)d\chi$ (1).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\chi)=(\int_{\alpha}^{\gamma} f(\chi)d\chi)\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$, $\chi\in[\alpha,\gamma]$.

i. Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία.

ii. Αν το σύνολο τιμών της g είναι το διάστημα $[0,m]$,να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f ,τον άξονα $\chi'\chi$ και τις ευθείες $\chi=\alpha$ και $\chi=\gamma$.

Λύση

i. $(1)\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi-\int_{\gamma}^{\beta} f(\chi)d\chi<0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi+\int_{\beta}^{\gamma} f(\chi)d\chi<0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\gamma} f(\chi)d\chi<0$ (2).

Η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(\chi)=f(\chi)\int_{\alpha}^{\gamma} f(\chi)d\chi$.

Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\gamma]$ με $f(\chi)\neq 0$,οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\gamma]$.

Είναι $f(\chi)<0$ για κάθε $\chi\in[\alpha,\gamma]$,γιατί αν ήταν $f(\chi)>0 \Rightarrow \int_{\alpha}^{\gamma} f(\chi)d\chi>0$,άτοπο λόγω της (2).

Άρα για κάθε $\chi\in[\alpha,\gamma]$ είναι $g'(\chi)>0$,οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Αφού η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\gamma]$ το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $[g(\alpha),g(\gamma)]=[0,(\int_{\alpha}^{\gamma} f(\chi)d\chi)^2]$.

Σύμφωνα με την υπόθεση πρέπει $(\int_{\alpha}^{\gamma} f(\chi)d\chi)^2=m \underset{m>0}{\overset{(2)}{\Leftrightarrow}} \int_{\alpha}^{\gamma} f(\chi)d\chi=-\sqrt{m}$ (3).

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\mathrm{E}=\int_{\alpha}^{\gamma} |f(\chi)|d\chi=-\int_{\alpha}^{\gamma} f(\chi)d\chi \overset{(3)}{=} \sqrt{m}$ τετρ.μονάδες.

8η: Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(0)>0$, $f(\chi)\neq 0$ και $f(\chi)<2$ για κάθε $\chi\in[0,1]$. Έστω η συνάρτηση $g(\chi)=\chi^2\int_0^1 f(\chi^2 t)dt+\chi^2+1$, $\chi\in R$.

i. Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Δείξτε ότι: $g(\chi)\geq \chi^2+1$ για κάθε $\chi\in R$.

iii. Έστω η συνάρτηση $\varphi(\chi)=g(1)-f(\chi)$.Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_φ ,τον άξονα $\chi'\chi$ και τις ευθείες $\chi=0$ και $\chi=1$.

Λύση

Θέτουμε $\chi^2 t=u \Rightarrow du=\chi^2 dt$.Για $t=0$ και $t=1$ παίρνουμε αντίστοιχα $u=0, u=\chi^2$.Έτσι έχουμε $g(\chi)=\int_0^{\chi^2} f(u)du+\chi^2+1$ (1).

i. Η συνάρτηση $\int_0^{\chi^2} f(u)du$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων,οπότε η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(\chi)=2\chi f(\chi^2)+2\chi=2\chi(f(\chi^2)+1)$.

Επειδή η f ως παραγωγίσιμη είναι συνεχής και αφού δεν μηδενίζεται,διατηρεί στο R σταθερό πρόσημο.Έχουμε $f(0)>0$,οπότε $f(\chi)>0 \Rightarrow f(\chi^2)+1>0$ για κάθε $\chi\in R$.

$g'(\chi)=0 \Leftrightarrow \chi=0$.

χ	$-\infty$ 0 $+\infty$
$g'(\chi)$	$-$ 0 $+$
$g(\chi)$	□ 1 □ ολ.ελάχ.

Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.Στο μηδέν η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $g(0)=1$.

ii. Αν $\chi \neq 0$,τότε $\chi^2 > 0$ οπότε $\int_0^{\chi^2} f(u)du > 0$,αφού $f(u)>0$.Για κάθε $\chi \in R^*$ είναι

$g(\chi)-\chi^2-1=\int_0^{\chi^2} f(u)du > 0 \Rightarrow g(\chi) > \chi^2+1$.Επιπλέον $g(0)=1$.Άρα $g(\chi) \geq \chi^2+1$ για κάθε $\chi \in R$.

iii. $D_\phi = R$.Η φ είναι συνεχής στο R,οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\mathrm{E}=\int_0^1 |\varphi(\chi)| d\chi$.

$\phi(\chi)=g(1)-f(\chi)=\int_0^1 f(u)du+2-f(\chi)>0$ για κάθε $\chi \in [0,1]$.

Άρα $\mathrm{E}=\int_0^1 \phi(\chi)d\chi=\int_0^1 g(1)d\chi-\int_0^1 f(\chi)d\chi \Leftrightarrow \mathrm{E}=g(1)-\int_0^1 f(\chi)d\chi$.

Από την (1) παίρνουμε $g(1)=\int_0^1 f(u)du+2 \Leftrightarrow g(1)-\int_0^1 f(\chi)d\chi=2 \Leftrightarrow \mathrm{E}=2$ τετρ.μονάδες.

9η: Α. Η συνάρτηση $f:\Delta \to R$ είναι συνεχής στο διάστημα Δ.Αν η f είναι αντιστρέψιμη,δείξτε ότι και η f^{-1} είναι συνεχής.

Β. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(\chi)=\frac{\kappa^4}{2e}\chi e^{\chi^2}+(\kappa-2)^2\chi+2+\frac{\kappa^4}{4e}, \chi \in R, \kappa \in R$.

α. Να βρείτε από τις παραπάνω συναρτήσεις εκείνη τη συνάρτηση f που το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τον άξονα $\chi'\chi$ την C_f και τις ευθείες $\chi=0$ και $\chi=1$ είναι ελάχιστο.

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση του ερωτήματος α).Δείξτε ότι είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη $C_{f^{-1}}$,τον άξονα $\chi'\chi$ και τις ευθείες $\chi=f(0)$ και $\chi=f(1)$.

Λύση

Α. Επειδή η f είναι αντιστρέψιμη δεν είναι σταθερή και αφού είναι συνεχής στο Δ το $f(\Delta)$ είναι διάστημα.Είναι $f^{-1}:f(\Delta)\to R$.Για κάθε $\chi \in \Delta$ ισχύει $f^{-1}(f(\chi))=\chi$ (1).

Έστω τυχαίος $u_0 \in f(\Delta)$,τότε για τον u_0 υπάρχει ακριβώς ένα $\chi_0 \in \Delta$ τέτοιο,ώστε $f(\chi_0)=u_0 \Leftrightarrow$ $f^{-1}(u_0)=\chi_0$.

Κοντά στο χ_0 θέτουμε $f(\chi)=u$ και αφού η f είναι συνεχής στο χ_0 έχουμε $\lim_{\chi\to\chi_0} f(\chi)=f(\chi_0)=u_0$.

Άρα $u \to u_0$. $(1) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f^{-1}(f(\chi))=\chi_0 \Rightarrow \lim_{u\to u_0} f^{-1}(u)=f^{-1}(u_0)$.Συνεπώς η f^{-1} είναι συνεχής στο u_0,οπότε είναι συνεχής στο $f(\Delta)$.

Β. α. Για κάθε $\kappa \in R$ η f είναι συνεχής και $f(\chi)>0$ για κάθε $\chi \in [0,1]$,οπότε το εμβαδόν του χωρίου Ω είναι: $\mathrm{E}(\Omega)=\int_0^1 |f(\chi)|d\chi=\int_0^1 f(\chi)d\chi=\frac{\kappa^4}{4e}\int_0^1(2\chi e^{\chi^2})d\chi+(\kappa-2)^2\int_0^1 \chi d\chi+\int_0^1(2+\frac{\kappa^2}{4e})d\chi=$

$$=\frac{\kappa^4}{4e}[e^{\chi^2}]_0^1+(\kappa-2)^2[\frac{\chi^2}{2}]_0^1+2+\frac{\kappa^4}{4e}=\ldots=\frac{\kappa^4}{4}+\frac{1}{2}(\kappa-2)^2+2 \text{ (2).}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\kappa)=\frac{\kappa^4}{4}+\frac{1}{2}(\kappa-2)^2+2, \kappa \in R$.

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη με $g'(\kappa)=\kappa^3+\kappa-2=(\kappa-1)(\kappa^2+\kappa+2)$.

$g'(\kappa)=0 \overset{\kappa^2+\kappa+2>0}{\Leftrightarrow} \kappa=1$.

κ	$-\infty$ 1 $+\infty$
$g'(\kappa)$	$-$ 0 $+$
$g(\kappa)$	□ $g(1)=\frac{11}{4}$ □ ολ.ελάχ.

Άρα το χωρίο Ω έχει ελάχιστο εμβαδόν όταν $\kappa=1$.

Συνεπώς η ζητούμενη συνάρτηση είναι $f(\chi)=\frac{1}{2e}\chi e^{\chi^2}+\chi+2+\frac{1}{4e}, \chi \in R$.

β. Για τη συνάρτηση $f(\chi)=\frac{1}{2e}\chi e^{\chi^2}+\chi+2+\frac{1}{4e}, \chi \in R$ έχουμε ότι είναι παραγωγίσιμη με $f'(\chi)=\frac{1}{2e}e^{\chi^2}+\frac{1}{e}\chi^2 e^{\chi^2}+1>0$. Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι "$1-1$" και άρα είναι αντιστρέψιμη.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(\chi)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(\chi)=+\infty$. Άρα το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $f(R)=R$. Αφού η f είναι συνεχής στο R σύμφωνα με το Α) και η f^{-1} είναι συνεχής στο $f(R)=R$. Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα έχουμε $f([0,1])=[f(0),f(1)]$. Άρα για κάθε $\chi \in [f(0),f(1)]$ είναι $f^{-1}(\chi)\in[0,1]$, οπότε $f^{-1}(\chi)\geq 0$ για κάθε $\chi\in[f(0),f(1)]$.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E_1=\int_{f(0)}^{f(1)}|f^{-1}(\chi)|d\chi=\int_{f(0)}^{f(1)}f^{-1}(\chi)d\chi$.

Θέτουμε $\chi=f(\omega)$ (3) και έχουμε $d\chi=f'(\omega)d\omega$.

Για $\chi=f(0)$, $(3)\Rightarrow f(0)=f(\omega)\overset{f \text{"1-1"}}{\Rightarrow}\omega=0$ και για $\chi=f(1)$, $(3)\Rightarrow f(1)=f(\omega)\overset{f \text{"1-1"}}{\Rightarrow}\omega=1$.

Άρα $E_1=\int_0^1 f^{-1}(f(\omega))f'(\omega)d\omega=\int_0^1\omega f'(\omega)d\omega=[\omega f(\omega)]_0^1-\int_0^1 f(\omega)d\omega=\frac{7}{2}+\frac{1}{4e}-\int_0^1 f(\omega)d\omega$ (4).

Από την (2) του ερωτήματος α) για $\kappa=1$ παίρνουμε $\int_0^1 f(\omega)d\omega=\frac{11}{4}$, οπότε από την (4) έχουμε $E_1=\frac{3e+1}{4e}$ τετρ.μονάδες.

10[η]: Η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$ είναι αντιστρέψιμη, συνεχής στο μηδέν, δυό φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f''(\chi)>0$ και η C_f διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{O}(0,0), \mathrm{A}(1,1)$.

α. Δείξτε ότι:

i. $f(\chi) \neq \chi$ **για κάθε** $\chi \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ **.**

ii. Για κάθε $\chi \in [0,1]$ **είναι** $f(\chi) \leq \chi$ **.**

β. Αν $\int_0^1 \chi f'(\chi) d\chi = \kappa$ **(1) με** $\kappa > \frac{1}{2}$ **,να βρείτε συναρτήσει του κ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις** $C_f, C_{f^{-1}}$ **.**

Λύση

α.i. Έχουμε $f(0)=0$ και $f(1)=1$. Έστω ότι για κάποιο $\chi_0 \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ είναι $f(\chi_0)=\chi_0$.

• Αν $\chi_0 \in (0,1)$ εφαρμόζεται για την f στα διαστήματα $[0,\chi_0]$ και $[\chi_0,1]$ το θεώρημα μέσης τιμής οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (0,\chi_0), \xi_2 \in (\chi_0,1)$ τέτοια,ώστε $f'(\xi_1)=\frac{f(\chi_0)}{\chi_0}=1$ και $f'(\xi_2)=\frac{f(1)-f(\chi_0)}{1-\chi_0}=1$

Στο $[\xi_1,\xi_2]$ εφαρμόζεται για την f' το θεώρημα Rolle,οπότε υπάρχει $\xi \in (\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο,ώστε $f''(\xi)=0$.Άτοπο.

• Αν $\chi_0 \in (1,+\infty)$ εφαρμόζεται για την f το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[0,1],[1,\chi_0]$ οπότε υπάρχουν $\kappa_1 \in (0,1), \kappa_2 \in (1,\chi_0)$ τέτοια,ώστε $f'(\kappa_1)=f(1)-f(0)=1$ και $f'(\kappa_2)=\frac{f(\chi_0)-f(1)}{\chi_0-1}=1$.

Στο $[\kappa_1,\kappa_2]$ εφαρμόζεται για την f' το θεώρημα Rolle,οπότε υπάρχει $\rho \in (\kappa_1,\kappa_2)$ τέτοιο,ώστε $f''(\rho)=0$.Άτοπο.

Άρα για κάθε $\chi \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ είναι $f(\chi) \neq \chi$.

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi(\chi)=\frac{f(\chi)}{\chi}, \chi \in (0,1]$.Η ϕ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1]$ με

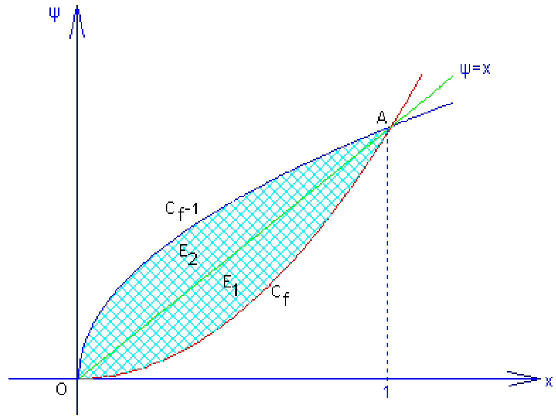
$\phi'(\chi)=\frac{\chi f'(\chi)-f(\chi)}{\chi^2}$.Αν $\chi \in (0,1)$,στο $[0,\chi]$ εφαρμόζεται για την f το θεώρημα μέσης τιμής,οπότε υπάρχει $\chi_0 \in (0,\chi)$ τέτοιο ώστε $f'(\chi_0)=\frac{f(\chi)}{\chi}$.

Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.Άρα $\chi_0 < \chi \Rightarrow f'(\chi_0) < f'(\chi) \Leftrightarrow \frac{f(\chi)}{\chi} < f'(\chi) \Leftrightarrow$

$\chi f'(\chi) - f(\chi) > 0$.Συνεπώς $\phi'(\chi) > 0$ για κάθε $\chi \in (0,1)$.Επιπλέον η ϕ είναι συνεχής στο $(0,1]$,οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$.Για κάθε $\chi \in (0,1] \Rightarrow \chi \leq 1 \Rightarrow \phi(\chi) \leq \phi(1)=1 \Rightarrow f(\chi) \leq \chi$.

Επιπλέον $f(0)=0$ και άρα έχουμε $f(\chi) \leq \chi$ για κάθε $\chi \in [0,1]$.

β. Τα σημεία O, A είναι κοινά σημεία της C_f με την ευθεία $\psi=\chi$.Οι $C_f, C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $\psi=\chi$,οπότε τα σημεία O, A είναι κοινά τους σημεία.Με βάση το ερώτημα α) και από το γεγονός ότι η f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$ ένα ενδεικτικό σχήμα στο [0,1] είναι το παρακάτω:



Αν E_1, E_2 είναι τα εμβαδά των χωρίων που ορίζονται από την $C_f, C_{f^{-1}}$ αντίστοιχα με την ευθεία $\psi=\chi$ λόγω συμμετρίας των $C_f, C_{f^{-1}}$ ως προς την $\psi=\chi$ έχουμε $E_1=E_2$, οπότε το ζητούμενο εμβαδόν

είναι $E=2E_1=2\int_0^1(\chi-f(\chi))d\chi=2\int_0^1\chi d\chi-2\int_0^1 f(\chi)d\chi=2\left[\frac{\chi^2}{2}\right]_0^1-2\int_0^1(\chi)'f(\chi)d\chi=$

$1-2\left[\chi f(\chi)\right]_0^1+2\int_0^1\chi f'(\chi)d\chi\overset{(2)}{=}-1+2\kappa\Leftrightarrow E=2\kappa-1$ τετρ. μονάδες.

<u>Σημείωση:</u> Η f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$, επιπλέον ως αντιστρέψιμη είναι «1-1» και αφού είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Άρα το ερώτημα α) μπορεί να προκύψει γεωμετρικά.

11η: Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g:[0,+\infty)\to R$ για τις οποίες έχουμε ότι:

- **$f(0)=0, f(\chi)>0$ για κάθε $\chi\in(0,+\infty)$ και $f'(\chi)=2\sqrt{f(\chi)}$ (1) για κάθε $\chi\in[0,+\infty)$.**
- **g' συνεχής, $g(1)=-1$ και $\int_0^{\chi}\left(g(t)-\int_0^1 g(\chi)d\chi\right)dt=-\chi f(\chi)+\frac{2}{3}\chi^3+\int_0^{\chi}\left(\int_0^1\chi g'(\chi)d\chi\right)dt+\chi$ (2)**

για κάθε $\chi\in[0,+\infty)$.

i. Να βρείτε το εμβαδόν Ε του χωρίου Ω που περικλείεται από τις C_f, C_g και την ευθεία $\chi=2$.

ii. Αν για το μιγαδικό z έχουμε $|z|=\frac{3}{8}E$ και $z^2\bar{z}=z-i+1$, όπου E το εμβαδόν του ερωτήματος i), εξετάστε αν η εικόνα του z ανήκει στο χωρίο Ω.

Λύση

i. Για κάθε $\chi\in(0,+\infty)$, $(1)\Leftrightarrow\frac{f'(\chi)}{2\sqrt{f(\chi)}}=1\Leftrightarrow(\sqrt{f(\chi)})'=1\Leftrightarrow\sqrt{f(\chi)}=\chi+c$.

Η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, οπότε $\lim_{\chi\to0^+}\sqrt{f(\chi)}=\lim_{\chi\to0^+}(\chi+c)\Leftrightarrow\sqrt{f(0)}=c\Leftrightarrow c=0$.

Άρα $\sqrt{f(\chi)}=\chi\Leftrightarrow f(\chi)=\chi^2$, $\chi>0$. Επιπλέον $f(0)=0$, άρα $f(\chi)=\chi^2$ για κάθε $\chi\in[0,+\infty)$.

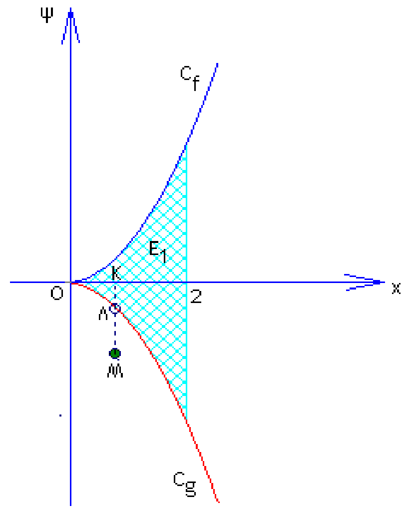
Η (2) γράφεται $\int_0^{\chi}g(t)dt-\chi\int_0^1 g(\chi)d\chi=-\frac{1}{3}\chi^3+\chi\int_0^1\chi g'(\chi)d\chi+\chi$ (3).

Παραγωγίζουμε την (3) και παίρνουμε :

$g(\chi)-\int_0^1 g(\chi)d\chi=-\chi^2+\int_0^1\chi g'(\chi)d\chi+1\Leftrightarrow g(\chi)-\int_0^1 g(\chi)d\chi=-\chi^2+[\chi g(\chi)]_0^1-\int_0^1 g(\chi)d\chi+1$

$\Leftrightarrow g(\chi)=-\chi^2+g(1)+1\Leftrightarrow g(\chi)=-\chi^2$ για κάθε $\chi\in[0,+\infty)$.

Αν $g(\chi)=-\chi^2,\chi\geq 0$ επαληθεύεται η (2),οπότε είναι η συνάρτηση που προκύπτει από την (2).
Οι C_f,C_g είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $\chi'\chi$.



Έστω E_1 το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f ,τον άξονα $\chi'\chi$ και την ευθεία $\chi=2$. Λόγω συμμετρίας είναι $\mathrm{E}=2\mathrm{E}_1=2\int_0^2\chi^2 d\chi=2[\frac{\chi^3}{3}]_0^2=\frac{16}{3}$ (4).

ii. Για τον μιγαδικό z λόγω της (4) έχουμε $|z|=2$.

$z^2\bar{z}=z-i+1\Leftrightarrow z|z|^2=z-i+1\Leftrightarrow 4z=z-i+1\Leftrightarrow z=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}i$.Η εικόνα του z είναι $\mathrm{M}(\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$.

Παρατηρούμε ότι το M βρίσκεται στο 4ο τεταρτημόριο.Από το M φέρνουμε $\mathrm{MK}\perp\chi'\chi$ και έστω Λ το σημείο τομής του MK με την C_g.Έχουμε $(\mathrm{MK})=\left|-\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}$ και $(\Lambda\mathrm{K})=\left|g(\frac{1}{3})\right|=\frac{1}{9}$.

Είναι $(\mathrm{MK})>(\Lambda\mathrm{K})$,οπότε το M βρίσκεται έξω από το χωρίο Ω.

12η: α. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$,δείξτε ότι: $\left|\int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi\right|\leq\int_\alpha^\beta|f(\chi)|d\chi$.

β. Για μια συνάρτηση f έχουμε ότι είναι συνεχής στο R και $\alpha,\beta\in R$ με $\alpha<\beta$.

Έστω οι μιγαδικοί $z=\chi+\psi i,\chi,\psi\in R$ και $w=\chi\int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-\chi)d\chi+(\psi\int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi)i$.

Αν η εικόνα του z βρίσκεται στον κυκλικό δίσκο που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho=2$,επιπλέον $|w|=8$,να βρείτε την ελάχιστη τιμή που μπορεί να έχει το εμβαδόν E του χωρίου που ορίζεται από την C_f ,τον άξονα $\chi'\chi$ και τις ευθείες $\chi=\alpha$ και $\chi=\beta$.

Λύση

α. Η $|f|$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.Για κάθε $\chi\in[\alpha,\beta]$ είναι $|f(\chi)|\geq 0\Rightarrow\int_\alpha^\beta|f(\chi)|\,d\chi\geq 0$.

Επιπλέον έχουμε $-|f(\chi)|\leq f(\chi)\leq|f(\chi)|\Rightarrow-\int_\alpha^\beta|f(\chi)|d\chi\leq\int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi\leq\int_\alpha^\beta|f(\chi)|d\chi\Leftrightarrow$

$\left|\int_\alpha^\beta f(\chi)d\chi\right|\leq\int_\alpha^\beta|f(\chi)|d\chi$.

β. Για το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha+\beta-\chi)d\chi$ θέτουμε $\alpha+\beta-\chi=u$ (1) και έχουμε $du=-d\chi \Leftrightarrow d\chi=-du$. Για $\chi=\alpha, \chi=\beta$ από την (1) αντίστοιχα παίρνουμε $u=\beta, u=\alpha$, οπότε είναι $\int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha+\beta-\chi)d\chi = -\int_{\beta}^{\alpha} f(u)du = \int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi$.

Ο w γράφεται $w=\chi\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi + (\psi\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi)i = (\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi)(\chi+\psi i) = (\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi)z$.

Έχουμε $|z|\le 2$, οπότε $|w| = \left|\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi\right||z| \le 2\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi\right| \overset{(\alpha)}{\le} 2\int_{\alpha}^{\beta}|f(\chi)|d\chi \Rightarrow |w| \le 2\int_{\alpha}^{\beta}|f(\chi)|d\chi$

$\Leftrightarrow 2\int_{\alpha}^{\beta}|f(\chi)|d\chi \ge 8 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta}|f(\chi)|d\chi \ge 4 \Leftrightarrow \mathrm{E} \ge 4$. Άρα $\mathrm{E}_{min}=4$ τετρ. μονάδες.

13η: Η συνάρτηση $f:[1,+\infty)\to R$ με $f^2(\chi)=\chi^2-1$ είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $f'(\chi)<0$ για κάθε $\chi\in(1,+\infty)$.

i. Να βρείτε τον τύπο της f.

ii. Να φτιάξετε τη γραφική παράσταση της f.

iii. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $g(\chi)=\ln(\chi-f(\chi))$.

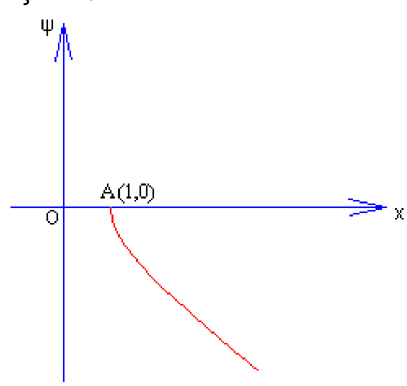
iv. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τον άξονα $\chi'\chi$, την C_f και τις ευθείες $\chi=2$ και $\chi=3$.

Λύση

i. Είναι $f(1)=0$. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$ οπότε έχουμε:

$\chi\ge1 \Rightarrow f(\chi)\le f(1) \Leftrightarrow f(\chi)\le 0$. Άρα $f(\chi)=-\sqrt{\chi^2-1}$, $\chi\in[1,+\infty)$.

ii. Έστω (χ,ψ) τυχαίο σημείο της C_f, τότε έχουμε $\psi^2=\chi^2-1 \Leftrightarrow \chi^2-\psi^2=1$ (1). Η (1) είναι εξίσωση ισοσκελούς υπερβολής με εστίες στον άξονα $\chi'\chi$ και κορυφές $\mathrm{A}'(-1,0), \mathrm{A}(1,0)$. Επειδή $\chi\ge1$ και $\psi\le0$ η γραφική παράσταση της f είναι το μέρος του δεξιού κλάδου της παραπάνω υπερβολής που βρίσκεται στην τέταρτη γωνία των αξόνων.



iii. Για το πεδίο ορισμού της g πρέπει $\chi\in D_f$ και $\chi-f(\chi)>0$. Για κάθε $\chi\ge1$ είναι

$\chi-f(\chi)=\chi+\sqrt{\chi^2-1}>0$. Άρα $D_g=[1,+\infty)$.

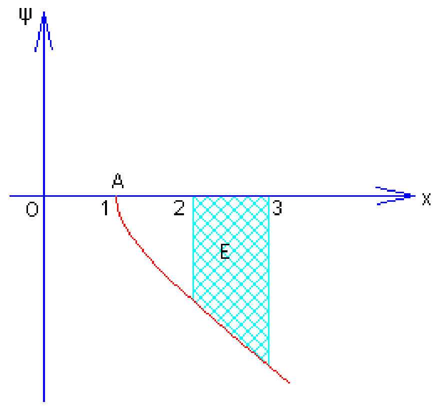
$g(\chi)=\ln(\chi+\sqrt{\chi^2-1})$.Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσε-

ων με $g'(\chi)=\dfrac{(\chi+\sqrt{\chi^2-1})'}{\chi+\sqrt{\chi^2-1}}=\dfrac{1+\dfrac{\chi}{\sqrt{\chi^2-1}}}{\chi+\sqrt{\chi^2-1}}=\dfrac{1}{\sqrt{\chi^2-1}}$.

$$\lim_{x\to1^+}\frac{g(\chi)-g(1)}{\chi-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\ln(\chi+\sqrt{\chi^2-1})}{\chi-1}\overset{(\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to1^+}\frac{[\ln(\chi+\sqrt{\chi^2-1})]'}{(\chi-1)'}=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{\sqrt{\chi^2-1}}=+\infty.$$

Άρα η g δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.Τελικά η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $g'(\chi)=\dfrac{1}{\sqrt{\chi^2-1}}$

iv. Η f είναι συνεχής στο $[2,3]$ με $f(\chi)<0$ για κάθε $\chi\in[2,3]$.



Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\mathrm{E}=\int_2^3|f(\chi)|d\chi=-\int_2^3 f(\chi)d\chi=\int_2^3\sqrt{\chi^2-1}d\chi$.

$$\mathrm{E}=\int_2^3(\chi)'\sqrt{\chi^2-1}d\chi=[\chi\sqrt{\chi^2-1}]_2^3-\int_2^3\chi(\sqrt{\chi^2-1})'d\chi=6\sqrt2-2\sqrt3-\int_2^3\frac{\chi^2}{\sqrt{\chi^2-1}}d\chi=$$

$$6\sqrt2-2\sqrt3-\int_2^3\frac{(\chi^2-1)+1}{\sqrt{\chi^2-1}}d\chi=6\sqrt2-2\sqrt3-\int_2^3(\sqrt{\chi^2-1}+\frac{1}{\sqrt{\chi^2-1}})d\chi=$$

$$6\sqrt2-2\sqrt3-\mathrm{E}-\int_2^3\frac{1}{\sqrt{\chi^2-1}}d\chi\Leftrightarrow2\mathrm{E}=6\sqrt2-2\sqrt3-[\ln(\chi+\sqrt{\chi^2-1})]_2^3=6\sqrt2-2\sqrt3-$$

$$-\left(\ln(3+2\sqrt2)-\ln(2+\sqrt3)\right)=6\sqrt2-2\sqrt3-\ln\frac{3+2\sqrt2}{2+\sqrt3}\Leftrightarrow\mathrm{E}=3\sqrt2-\sqrt3-\frac12\ln\frac{3+2\sqrt2}{2+\sqrt3}$$ τετρ.μον.

14η: Η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ είναι συνεχής με $f(\chi)\neq 0$ για κάθε $\chi\in(0,+\infty)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\chi)=\int_1^{\ln\chi} f(e^t)dt$.

α. i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $g(\chi)=0$.

β. Έστω ότι $f(1)<0$. Αν $\mathrm{E}(\Omega)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_g, τον άξονα $\chi'\chi$ και τις ευθείες $\chi=1$ και $\chi=e$, επίσης $\mathrm{E}(\Omega_1)$ το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f, τον άξονα $\chi'\chi$ και τις ευθείες $\chi=1$ και $\chi=e$, δείξτε ότι:

i. $g(1)=\mathrm{E}(\Omega_1)-\mathrm{E}(\Omega)$.

ii. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $(e-1)f(\xi)=\xi[\mathrm{E}(\Omega)-\mathrm{E}(\Omega_1)]$.

Λύση

α. i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(\chi)=\int_1^{\chi} f(e^t)dt$ και τη συνάρτηση $h(t)=f(e^t)$. Για το πεδίο ορισμού της h πρέπει $e^t>0$ που ισχύει για κάθε $t\in R$. Άρα $D_h=R$.

Η h είναι συνεχής στο R και επειδή $1\in R$ το πεδίο ορισμού της F είναι $D_F=R$.

$g(\chi)=F(\ln\chi)$.

Για το πεδίο ορισμού της g πρέπει: $\begin{cases}\chi>0\\ \kappa\alpha\iota\\ \ln\chi\in D_F\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\chi>0\\ \kappa\alpha\iota\\ \ln\chi\in R\end{cases}\Leftrightarrow \chi>0$. Άρα $D_g=(0,+\infty)$.

ii. Παρατηρούμε ότι $g(e)=0$. Για κάθε $\chi\in(0,+\infty)$ είναι $g'(\chi)=\frac{1}{\chi}f(e^{\ln\chi})=\frac{f(\chi)}{\chi}\neq 0$. Επιπλέον στο $(0,+\infty)$ η g' είναι συνεχής, οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο. Άρα η g είναι γνησίως μονότονη. Συνεπώς το e είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(\chi)=0$.

β.i. Αν $f(1)<0$ είναι $g'(1)<0$ και αφού η g' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,+\infty)$ είναι $g'(\chi)<0$ για κάθε $\chi\in(0,+\infty)$. Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα.

$1\le\chi\le e\Rightarrow g(\chi)\ge g(e)=0$. Είναι $\mathrm{E}(\Omega)=\int_1^e g(\chi)d\chi$.

Επίσης η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,+\infty)$ και αφού $f(1)<0$ είναι $f(\chi)<0$ για κάθε $\chi\in(0,+\infty)$. Άρα $\mathrm{E}(\Omega_1)=-\int_1^e f(\chi)d\chi$.

$\mathrm{E}(\Omega)=\int_1^e g(\chi)d\chi=\int_1^e(\chi)'g(\chi)d\chi=\left[\chi g(\chi)\right]_1^e-\int_1^e f(\chi)d\chi=-g(1)+\mathrm{E}(\Omega_1)\Leftrightarrow$

$g(1)=\mathrm{E}(\Omega_1)-\mathrm{E}(\Omega)$.

ii. Η g είναι συνεχής στο $[1,e]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,e)$ με $g'(\chi)=\frac{f(\chi)}{\chi}$. Σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,e)\subseteq(0,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi)=\frac{g(e)-g(1)}{e-1}\Leftrightarrow$

$\frac{f(\xi)}{\xi}=\frac{-g(1)}{e-1}\overset{(i)}{\Leftrightarrow}(e-1)f(\xi)=\xi[\mathrm{E}(\Omega)-\mathrm{E}(\Omega_1)]$.

Σπύρος Γιαννακόπουλος
E-mail: sp10@otenet.gr
Τηλ. 2623033611