

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΩΡΙΑ

ΑΛΓΕΒΡΑ - ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΑΝΑΖΗΤΩΝΤΑΣ ΤΟ ΘΕΜΑ ΘΕΩΡΙΑΣ
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗΣ
ΚΕΝΟΥ – ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗΣ –
ΣΩΣΤΟΥ ΛΑΘΟΥΣ

ΖΕΡΒΑΚΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

1. Τι καλείται μονώνυμο ; Τι καλείται συντελεστής μονωνύμου ; Τι καλείται κύριο μέρος μονωνύμου και τι γνωρίζεται για τον βαθμό ενός μονωνύμου;

Οι ακέραιες αλγεβρικές παραστάσεις, στις οποίες μεταξύ των μεταβλητών σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού, λέγονται μονώνυμα. Π.χ. 4χ , $3\chi^2\psi$.

Σε ένα μονώνυμο ο αριθμητικός παράγοντας λέγεται συντελεστής του μονωνύμου, ενώ το γινόμενο όλων των μεταβλητών του με τους αντίστοιχους εκθέτες τους λέγεται κύριο μέρος του μονωνύμου Π.χ. $3\chi^2\psi$ Το 3 είναι ο συντελεστής του μονωνύμου. Το $\chi^2\psi$ είναι το κύριο μέρος του μονωνύμου.

Ο εκθέτης μιας μεταβλητής λέγεται βαθμός του μονωνύμου ως προς τη μεταβλητή αυτή, ενώ ο βαθμός του μονωνύμου ως προς όλες τις μεταβλητές του λέγεται το άθροισμα των εκθετών των μεταβλητών του Π.χ. το μονώνυμο $3\chi^2\psi$ είναι : 2ου βαθμού ως προς χ 1ου βαθμού ως προς ψ και 3ου βαθμού ως προς χ και ψ .

2. Ποια μονώνυμα καλούνται όμοια; Ποια μονώνυμα καλούνται ίσα; Ποια αντίθετα; Ποια σταθερά; Ποιο μηδενικό και τι βαθμού είναι το μηδενικό μονώνυμο;

Όμοια μονώνυμα καλούνται εκείνα τα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος.

Τα όμοια μονώνυμα που έχουν τον ίδιο συντελεστή λέγονται ίσα ενώ, αν έχουν αντίθετους συντελεστές, λέγονται αντίθετα.

Για παράδειγμα τα μονώνυμα $2x^3 y$ και $-2x^3 y$ είναι αντίθετα. Συμφωνούμε ακόμη να θεωρούνται και οι αριθμοί ως μονώνυμα και τα ονομάζουμε σταθερά μονώνυμα. Ειδικότερα, ο αριθμός 0 λέγεται

μηδενικό μονώνυμο και δεν έχει βαθμό, ενώ όλα τα άλλα σταθερά μονώνυμα είναι μηδενικού βαθμού

Για παράδειγμα, ο αριθμός 5 είναι σταθερό μονώνυμο μηδενικού βαθμού.

3. Τι καλείται πολυώνυμο ; Τι καλείται όρος πολυωνύμου; Τι καλείται διώνυμο και τι τριώνυμο; Τι καλείται σταθερό πολυώνυμο; Τι καλείται μηδενικό πολυώνυμο και ποιος ο βαθμός του;

Το άθροισμα μονωνύμων στο οποίο δύο τουλάχιστον μονώνυμα δεν είναι όμοια, δεν είναι μονώνυμο αλλά μια αλγεβρική παράσταση, που λέγεται πολυώνυμο.

Κάθε μονώνυμο που περιέχεται σε ένα πολυώνυμο λέγεται όρος του πολυωνύμου.

Ειδικότερα, ένα πολυώνυμο που δεν έχει όμοιους όρους λέγεται - διώνυμο, αν έχει δύο όρους - τριώνυμο, αν έχει τρεις όρους.

Κάθε αριθμός μπορεί να θεωρηθεί ως πολυώνυμο που λέγεται σταθερό πολυώνυμο. Ειδικότερα, ο αριθμός μηδέν λέγεται μηδενικό πολυώνυμο και δεν έχει βαθμό, ενώ κάθε άλλο σταθερό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.

4. Τι καλείται ταυτότητα;

Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της.

5. Να αποδείξετε τις ταυτότητες: α) $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

Απόδειξη $(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta) = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

β) Τετράγωνο διαφοράς $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

Απόδειξη $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \alpha\beta - \beta\alpha + \beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

γ) Κύβος αθροίσματος $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

Απόδειξη $(\alpha + \beta)^3 = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) =$
 $\alpha^3 + 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 + \beta^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

δ) Κύβος διαφοράς $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

Απόδειξη $(\alpha - \beta)^3 = (\alpha - \beta)(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) =$
 $\alpha^3 - 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 - \beta^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

ε) Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$

Απόδειξη $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha \cdot \alpha - \alpha \cdot \beta + \beta \cdot \alpha + \beta \cdot \beta = \alpha^2 - \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \beta - \beta^2 = \alpha^2 - \beta^2$

6. Ποια είναι η γενική μορφή μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού με έναν άγνωστο; Ποιος είναι ο τύπος της διακρίνουσας; Πόσες λύσεις έχει μια εξίσωση δευτέρου βαθμού;

Η γενική μορφή μιας εξίσωσης 2ου βαθμού με άγνωστο x είναι

$ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$. Ο τύπος της διακρίνουσας είναι $\Delta = b^2 - 4a\gamma$.

Η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$.

1. Αν $\Delta > 0$, έχει δύο άνισες λύσεις

Αν $\Delta = 0$, έχει μία διπλή λύση.

Αν $\Delta < 0$, δεν έχει λύση (αδύνατη).

7. Τι λέμε κύρια και τι δευτερεύοντα στοιχεία ενός τριγώνου;

Κύρια στοιχεία ενός τριγώνου είναι οι πλευρές και οι γωνίες του.

Δευτερεύοντα στοιχεία του τριγώνου είναι οι διάμεσοι, οι διχοτόμοι και τα ύψη του.

8. Να διατυπώσετε τα κριτήρια σύγκρισης δύο τριγώνων.

1ο κριτήριο ισότητας (Π - Γ - Π) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση, τότε είναι ίσα.

2ο κριτήριο ισότητας (Γ - Π - Γ) Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

3ο κριτήριο ισότητας (Π - Π - Π) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

9. Να διατυπώσετε το θεώρημα Θαλή.

Αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μία είναι ανάλογα προς τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζονται στην άλλη.

10. Πότε δύο πολύγωνα λέγονται όμοια;

Αν δύο πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι όμοια.

11. Πότε δύο τρίγωνα λέγονται όμοια; Διατυπώστε ένα κριτήριο ομοιότητας τριγώνων.

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι όμοια.

Δύο τρίγωνα είναι όμοια, όταν έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

A. Να γράψετε στην κόλλα σας ολοκληρωμένες τις παρακάτω ταυτότητες:

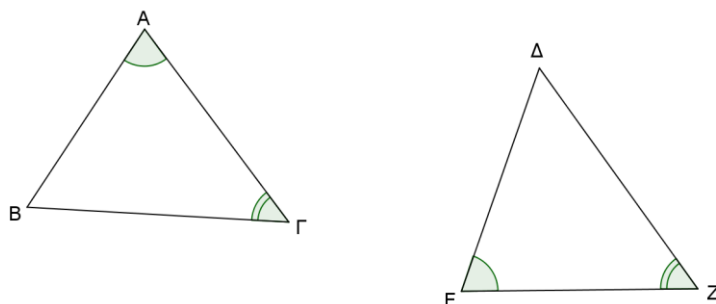
i) $\alpha^2 - \beta^2 = \dots\dots\dots$

ii) $(\alpha + \beta)^3 = \dots\dots\dots$

iii) $(\alpha - \beta)^3 = \dots\dots\dots$

iv) $(\alpha - \beta)^2 = \dots\dots\dots$

B. Τα τρίγωνα ABΓ και ΔΕΖ είναι όμοια.



Να συμπληρώσετε τους διπλανούς λόγους: $\frac{AB}{\dots} = \frac{\dots}{EZ} = \frac{\dots}{\dots}$

Γ. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας τις παρακάτω προτάσεις και να συμπληρώσετε τα κενά ώστε να προκύψουν κριτήρια ισότητας τριγώνων:

α. Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν τις τους ίσες μία προς μία.

β. Δύο τρίγωνα είναι ίσα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την γωνία τους ίση.

γ. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν δύο αντίστοιχες ίσες μία προς μία.

δ. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν μία αντίστοιχη ίση και μία αντίστοιχη ίση.

Δ. Αφού μεταφέρεις στην κόλλα αναφοράς τον πίνακα 2, να τον συμπληρώσεις αντιστοιχώντας σε κάθε γινόμενο της Α στήλης του πίνακα 1 ένα μόνο ανάπτυγμα από την Β στήλη, ώστε να προκύψουν αξιοσημείωτες ταυτότητες.

A ΣΤΗΛΗ	B ΣΤΗΛΗ
i) $(\alpha - \beta)^2$ ii) $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$ iii) $(\alpha + \beta)^3$ iv) $(\alpha - \beta)^3$ v) $(\alpha + \beta)^2$	1) $\alpha^2 - \beta^2$ 2) $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$ 3) $\alpha^3 + 3\alpha\beta + \beta^3$ 4) $\alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$ 5) $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$ 6) $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

i	ii	iii	iv	v

Ε. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ) ,αν είναι λανθασμένες:

1. Ο αριθμός 2022 θεωρείται σταθερό μονώνυμο.
2. Τα μονώνυμα $5\kappa\lambda^2\mu$ και $5\kappa^2\lambda\mu$ είναι όμοια.
3. Ισχύει $(-\alpha - \beta)^2 = -(\alpha + \beta)^2$ για κάθε τιμή των πραγματικών αριθμών α και β .
4. Ισχύει $(\beta - \alpha)^3 = \beta^3 + 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 - \alpha^3$ για κάθε τιμή των πραγματικών αριθμών α και β .
5. Ο βαθμός του μονωνύμου xy^3w^5 ως προς x, y, w είναι 8.
6. Ισχύει $(-z + \omega)^2 = \omega^2 - 2z\omega + z^2$ για κάθε τιμή των πραγματικών αριθμών z και ω .
7. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει βαθμό 3 και το πολυώνυμο $Q(x)$ έχει βαθμό 2, τότε το πολυώνυμο $P(x) + Q(x)$ έχει βαθμό 5.

8. Τα μονώνυμα $\frac{2}{5}x^3y\omega^2$ και $-5x^3y\omega^2$ είναι όμοια.
9. Τα μονώνυμα $-4x^2y$ και $4xy^2$ είναι αντίθετα.
10. Το πηλίκο δύο μονωνύμων είναι πάντα μονώνυμο.
11. Ισχύει η ταυτότητα $(\alpha + 3\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha \cdot 3\beta + 3\beta^2$
12. Ισχύει η ταυτότητα $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 + \beta^3$
13. Ισχύει η ταυτότητα $(-\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha \cdot \beta + \beta^2$
14. Ισχύει η ταυτότητα $(x - y)^2 = x^2 - 2x \cdot (-y) + y^2$
15. Τα μονώνυμα $3x^2y\omega$ και $3xy^2\omega$ είναι όμοια.
16. Ο βαθμός ως προς y του μονώνυμου $4x^3y^5$ είναι 5.
17. Ισχύει πάντα $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - \beta^2$.
18. Δύο μονώνυμα λέγονται αντίθετα όταν έχουν αντίθετους συντελεστές και ίδιο κύριο μέρος.
19. Το άθροισμα δύο μονωνύμων είναι πάντα μονώνυμο.
20. Το γινόμενο δύο μονωνύμων είναι πάντα μονώνυμο.
21. Το άθροισμα δύο μονωνύμων είναι πολυώνυμο.
22. Το άθροισμα δύο ομοίων μονωνύμων είναι μονώνυμο.
23. Δύο κανονικά πολύγωνα είναι όμοια.
24. Δύο πολύγωνα είναι όμοια αν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες.
25. Δύο πολύγωνα είναι όμοια αν έχουν τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες και τις πλευρές τους ανάλογες.
26. Δύο τετράγωνα είναι όμοια.
27. Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία οξεία γωνία ίση είναι όμοια.
28. Δύο τρίγωνα που έχουν ίσες γωνίες είναι ίσα.
29. Δύο ισοσκελή τρίγωνα είναι πάντα όμοια.
30. Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια, τότε είναι ίσα.
31. Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, τότε είναι όμοια.
32. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν δύο οποιεσδήποτε πλευρές τους μία προς μία ίσες.

33. Αν δύο πεντάγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, τότε πάντα είναι όμοια.
34. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.
35. Κύρια στοιχεία ενός τριγώνου είναι οι πλευρές και οι γωνίες του.
36. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες, μία προς μία, τότε πάντα είναι ίσα.
37. Σε δύο τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.
38. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες, μία προς μία, τότε είναι ίσα.
39. Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.
40. Δύο ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια.
41. Σε δύο τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.
42. Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.
43. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, τότε θα έχουν και την τρίτη τους γωνία ίση.
44. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία, τότε θα έχουν και την τρίτη τους πλευρά ίση.
45. Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος.
46. Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.
47. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο οι γωνίες της βάσης του είναι ίσες.
48. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διχοτόμος, το ύψος και η διάμεσος που φέρνουμε από οποιαδήποτε κορυφή προς την

απέναντι πλευρά συμπίπτουν.

49. Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο η διχοτόμος, το ύψος και η διάμεσος που φέρνουμε από οποιαδήποτε κορυφή προς την απέναντι πλευρά συμπίπτουν.

50. Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά ίση και 2 γωνίες ίσες μία προς μία, τότε πάντα είναι ίσα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ

A. i) $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$

ii) $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

iii) $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

iv) $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

B. $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{AF}{EZ} = \frac{BF}{\Delta Z}$

Γ. Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν τις **πλευρές** τους ίσες μία προς μία.

β. Δύο τρίγωνα είναι ίσα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την **περιεχόμενη** γωνία τους ίση.

γ. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν δύο αντίστοιχες **πλευρές** ίσες μία προς μία.

δ. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν μία αντίστοιχη **πλευρά** ίση και μία αντίστοιχη **οξεία γωνία** ίση.

Δ.

i	ii	iii	iv	v
5	1	2	4	6

Ε. Ερωτήσεις Σωστού Λάθους

1 Σ	2 Λ	3 Λ	4 Σ	5 Λ	6 Σ	7 Λ	8 Σ
9 Λ	10 Λ	11 Λ	12 Λ	13 Σ	14 Λ	15 Λ	16 Σ
17 Λ	18 Σ	19 Λ	20 Σ	21 Σ	22 Σ	23 Σ	24 Λ
25 Σ	26 Σ	27 Σ	28 Λ	29 Λ	30 Λ	31 Σ	32 Λ
33 Λ	34 Σ	35 Σ	36 Λ	37 Λ	38 Σ	39 Σ	40 Σ
41 Λ	42 Σ	43 Σ	44 Λ	45 Σ	46 Σ	47 Λ	48 Λ
49 Σ	50 Λ						