ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO

Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν:

- η f είναι συνεχής στο [α, β] και, επιπλέον, ισχύει
- f(α) • f(β) < 0 .

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, x_0 ϵ (α, β) τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

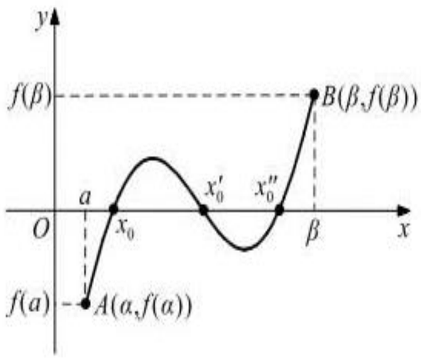
Παρατηρήσεις

1. Γεωμετρική ερμηνεία του Θ. Bolzano

Έστω μια συνεχής συνάρτησης f στο [α, β].

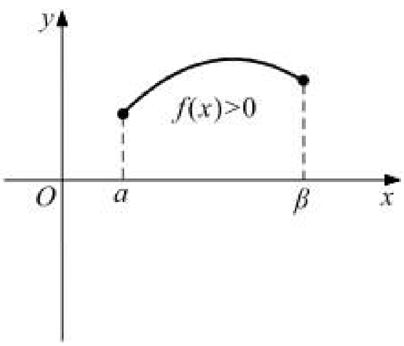
Επειδή τα σημεία A(α, f(α)) και B(β, f(β))

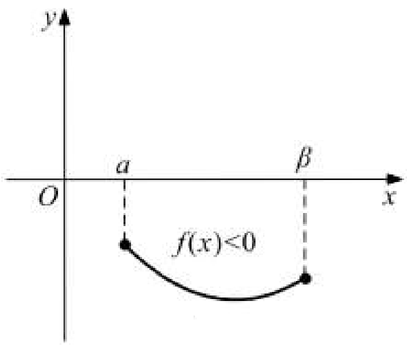
βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα x′x,



η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα τουλάχιστον σημείο x_0.

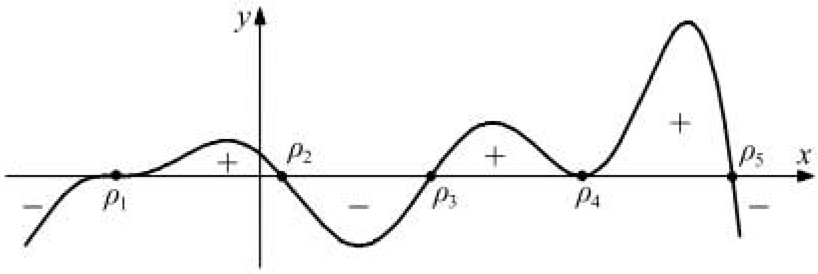
2. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε x ϵ Δ ή είναι αρνητική για κάθε x ϵ Δ, δηλαδή **διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα Δ.**





Βασική συνέπεια της παρατήρησης 2:

Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από το διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.



Μεθοδολογία 1: Ύπαρξη ρίζας εξίσωσης σε ανοικτό διάστημα

Για να αποδείξω την ύπαρξη ρίζας μιας εξίσωσης σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) κάνω τα παρακάτω βήματα:

1. Μεταφέρω όλους τους όρους στο πρώτο μέλος, ώστε να μείνει 0 στο δεύτερο μέλος.

2. Θέτω συνάρτηση f με τύπο το πρώτο μέλος της εξίσωσης.

3. Διαπιστώνω την συνέχεια της f στο [α, β].

4. Διαπιστώνω ότι τα f(α), f(β) είναι ετερόσημοι αριθμοί.

5. Από θεώρημα Bolzano για την f στο διάστημα [α, β] διαπιστώνω ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (α, β)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$, οπότε συμπεραίνω ότι και η εξίσωση έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α, β).

Παράδειγμα 1

Να δειχτεί ότι η εξίσωση x - 4 + συνx = 0 έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα (π, 2π).

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση f(x) = x – 4 + συνx, x ϵ [π, 2π].

Η f είναι συνεχής στο [π, 2π] ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Είναι f(π) • f(2π) < 0, αφού f(π) = π + συνπ − 4 = π − 5 < 0 και f(2π) = 2π + συν2π − 4 = 2π − 3 > 0. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει ένα, τουλάχιστον, x_0 ϵ (π, 2π) τέτοιο, ώστε f(x_0) = 0 Άρα, η εξίσωση x – 4 + συνx = 0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (π, 2π).

Παράδειγμα 2

Να δειχτεί ότι η εξίσωση x - 1 - ημx = 0 έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα (0, 2).

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση f(x) = x - 1 - ημx, x ϵ [0, 2].

Η f είναι συνεχής στο [0, 2] ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Είναι f(0) • f(2) < 0, αφού f(0) = -1 < 0 και f(2) = 1- ημ 2 > 0 αφού ημ2<1. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει ένα, τουλάχιστον, x_0 ϵ (0, 2) τέτοιο, ώστε f(x_0) = 0 Άρα, η εξίσωση x - 1 - ημx = 0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0, 2).

Παράδειγμα 3

Να δειχτεί ότι η εξίσωση $2x^3+3x-1=0$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα (0, 1).

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2x^3+3x-1, \quad x \in [0, 1]$.

Η f είναι συνεχής στο [0, 1] ως πολυωνυμική. Είναι $f(0) \cdot f(1) < 0$, αφού $f(0) = -1 < 0$ και $f(1) = 4 > 0$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει ένα, τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$. Άρα, η εξίσωση $2x^3+3x-1 = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0, 1).

Παράδειγμα 4

Να δειχτεί ότι η εξίσωση $2x^3+x-2=0$ έχει μια ακριβώς ρίζα.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2x^3+x-2, \quad x \in R$.

Η f είναι συνεχής στο R ως πολυωνυμική. Με δοκιμές διαπιστώνω ότι $f(0) \cdot f(1) < 0$, αφού $f(0) = -2 < 0$ και $f(1) = 1 > 0$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει ένα, τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$. Άρα, η εξίσωση $2x^3+x-2 = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0, 1). Όμως η f είναι παραγωγίσιμη στο R ως πολυωνυμική με $f'(x) = 6x^2+1>0$ για κάθε $x \in R$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο R, συνεπώς και «1-1», οπότε η ρίζα x_0 είναι μοναδική στο R.

Παράδειγμα 5

Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x + x^3 = 3$ έχει μοναδική λύση στο (0, 1).

Λύση

$e^x + x^3 = 3 \Leftrightarrow e^x + x^3 - 3 = 0 \quad (1)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x + x^3 - 3$ με $D_f = \mathbb{R}$.

- Η f είναι συνεχής στο [0, 1] ως πράξη συνεχών συναρτήσεων.
- $f(0) = e^0 + 0 - 3 = -2 < 0$

  $f(1) = e^1 + 1 - 3 = e - 2 > 0$

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1)$ ώστε να ισχύει

$f(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} + x_0^3 - 3 = 0$. Δηλ. η (1) έχει τουλάχιστον μια λύση στο (0, 1).

Για κάθε $x_1, x_2 \in R$ έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \\ x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow x_1^3 - 2 < x_2^3 - 2 \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} e^{x_1} + x_1^3 - 2 < e^{x_2} + x_2^3 - 2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1–1. Συνεπώς η (1) έχει μοναδική λύση.

Παράδειγμα 6

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f:\mathbb{R} \to (-\infty, 2016)$ και $g:\mathbb{R} \to (2016, +\infty)$. Αν υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ με $f(\alpha)=\alpha^2$ και $g(\beta)=\beta^2$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) \cdot g(x_0) = 2016\, x_0^2$.

Λύση

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f(x) < 2016$ και $g(x) > 2016$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x)g(x) - 2016x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

- Η h είναι συνεχής στο [α, β] ως πράξη συνεχών συναρτήσεων
- $h(\alpha) = f(\alpha)g(\alpha) - 2016\alpha^2 = \alpha^2 g(\alpha) - 2016\alpha^2 = \alpha^2 (g(\alpha) - 2016) > 0$

  $h(\beta) = f(\beta)g(\beta) - 2016\beta^2 = f(\beta)\beta^2 - 2016\beta^2 = \beta^2 (f(\beta) - 2016) < 0$

Άρα από το θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε

$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0)g(x_0) = 2016x_0^2$.

ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΑΣ ΣΕ ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ

Ως γνωστόν το θεώρημα του Bolzano εφαρμόζεται σε κλειστό διάστημα [α,β], ενώ το συμπέρασμα του στο αντίστοιχο ανοικτό διάστημα. Έτσι λοιπόν όταν μας ζητηθεί η ρίζα, μιας συνεχούς συνάρτησης f στο [α,β] να ανήκει και αυτή στο κλειστό διάστημα [α,β] ή στα ημιανοικτά διαστήματα [α,β) ή (α,β] , θα έχουμε και μηδενισμό του γινομένου στη δεύτερη συνθήκη του θεωρήματος, δηλαδή $f(\alpha)\cdot f(\beta)\le 0$, συνεπώς θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in[a,\beta]$ ή ένα τουλάχιστον $x_0\in[a,\beta)$ ή ένα τουλάχιστον $x_0\in(a,\beta]$ τέτοιο, ώστε , $f(x_0)=0$ διότι:

- Αν $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, τότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(a,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.
- Αν $f(\alpha)\cdot f(\beta)=0$, τότε $x_0=\alpha$ ή $x_0=\beta$.

Παράδειγμα 7

Έστω f: [0, 1] → [−1, 0] συνεχής συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in[0, 1]$ τέτοιος ώστε $f(x_0)+{x_0}^{2016}=0$.

Λύση

Για κάθε $x\in[0, 1]$ ισχύει ότι $-1\le f(x)\le 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x^{2016}$ με $x\in[0, 1]$.

- Η g είναι συνεχής ως πράξη συνεχών συναρτήσεων.
- $g(0)=f(0)+0^{2016}=f(0)\le 0$.

  $g(1)=f(1)+1^{2016}=f(1)+1\ge 0$.

  Επομένως $g(0)\cdot g(1)\le 0$

Αν $g(0)\cdot g(1)<0$ τότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in(0, 1)$ τέτοιος ώστε $g(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)+{x_0}^{2016}=0$.

Αν $g(0)\cdot g(1)=0\Leftrightarrow g(0)=0$ ή $g(1)=0\Leftrightarrow x_0=0$ ή $x_0=1$

Επομένως υπάρχει $x_0\in[0, 1]$ τέτοιος ώστε $g(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)+{x_0}^{2016}=0$.

Παράδειγμα 8

Αν $α>0$ να δείξετε ότι η εξίσωση $αημx+π=x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,α+π]$.

Λύση

Από τη δοθείσα εξίσωση λαμβάνουμε ισοδύναμα $αημx+π-x=0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)= αημx+π-x$ ορισμένη και συνεχή στο R άρα και στο $[0,α+π]$.

Παρατηρούμε ότι $f(0)=π>0$ και $f(α+π)=αημ(α+π)+π-α-π=α[ημ(α+π)-1]$

Αρχικά έχουμε από τα δεδομένα ότι $α>0$.

Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

i. Αν $ημ(α+π)=1$ τότε είναι $f(α+π)=0$ δηλαδή η f έχει ρίζα το $α+π$.

ii. Αν $ημ(α+π)\neq 1$τότε $ημ(α+π)<1$ οπότε $ημ(α+π)-1<0$, συνεπώς $f(α+π)<0$. Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η f θα έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,α+π)$.

Από τις περιπτώσεις (i), (ii) συμπεραίνουμε ότι η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,α+π]$.

ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΑΣ ΣΕ ΣΕ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Παράδειγμα 9

Δίνεται η συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο διάστημα [α, β] με α>0. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $\dfrac{f(\xi)}{\xi} = \dfrac{\alpha}{\alpha - \xi} + \dfrac{\beta}{\beta - \xi}$.

Λύση

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\alpha}{\alpha - x} + \frac{\beta}{\beta - x} \Leftrightarrow f(x)(\alpha - x)(\beta - x) = \alpha x(\beta - x) + \beta x(\alpha - x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)(\alpha - x)(\beta - x) - \alpha x(\beta - x) - \beta x(\alpha - x) = 0 \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x)(\alpha - x)(\beta - x) - \alpha x(\beta - x) - \beta x(\alpha - x)$ με $x \in [\alpha, \beta]$.

- Η g είναι συνεχής στο [α, β] ως πράξη συνεχών συναρτήσεων
- $g(\alpha) = f(\alpha)(\alpha - \alpha)(\beta - \alpha) - \alpha\alpha(\beta - \alpha) - \beta\alpha(\alpha - \alpha) = -\alpha^2(\beta - \alpha)$

  $g(\beta) = f(\beta)(\alpha - \beta)(\beta - \beta) - \alpha\beta(\beta - \beta) - \beta\beta(\alpha - \beta) = -\beta^2(\alpha - \beta)$

  Άρα $g(\alpha) \cdot g(\beta) = -\alpha^2\beta^2(\alpha - \beta)^2 < 0$

Επομένως από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$g(\xi) = 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{f(\xi)}{\xi} = \frac{\alpha}{\alpha - \xi} + \frac{\beta}{\beta - \xi}.$$

Παράδειγμα 10

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{x^4+1}{x-1} + \dfrac{x^6+1}{x-2} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (1, 2).

Λύση

Αρκεί η εξίσωση $(x^4 + 1)(x - 2) + (x^6 + 1)(x - 1) = 0$ να έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (1, 2).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = (x^4 + 1)(x - 2) + (x^6 + 1)(x - 1)$ συνεχής σαν πολυωνυμική στο (1, 2).

$h(1) = (1^4 + 1)(1 - 2) + 0 = 2\cdot(-1) = -2$

$h(2) = 0 + (2^6 + 1)(2 - 1) = (64 + 1)\cdot 1 = 65$

Άρα $h(1)\,h(2) < 0$

Από το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $h(x) = 0$ θα έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (1, 2)

Μεθοδολογία 2: Εύρεση πρόσημου συνάρτησης

Για να προσδιορίσω το πρόσημο μιας συνάρτησης κάνω τα παρακάτω βήματα:

1. Βρίσκω το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

2. Διαπιστώνω την συνέχεια της f.

3. Βρίσκουμε τις ρίζες της f (Θέτω f(x)=0).

4. Σε καθένα από τα υποδιαστήματα που ορίζουν οι διαδοχικές ρίζες, επιλέγουμε έναν αριθμό και βρίσκουμε το πρόσημο της f στον αριθμό αυτό. Το πρόσημο αυτό είναι και το πρόσημο της f στο αντίστοιχο διάστημα (μας βοηθάει η κατασκευή ενός πίνακα προσήμων της f).

Παράδειγμα 10

Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f για όλες τις πραγματικές τιμές του x , όταν
$f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

Λύση

f συνεχής.
$f(x) = x^2(x+2) - (x+2) = (x+2)(x^2-1) = (x+2)(x-1)(x+1)$
Ρίζες : -2 , -1 , 1

Πίνακας προσήμου της f

Διάστημα	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
Αριθμός x_o	-3	$-3/2$	0	2
$f(x_o)$	-8	$5/8$	-2	12
Πρόσημο της f	$-$	$+$	$-$	$+$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ

Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν:

- η f είναι συνεχής στο [α, β] και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε για κάθε αριθμό η που βρίσκεται μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \eta$.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha, \beta]$, παρατηρούμε ότι :

- η g είναι συνεχής στο [α, β] και, επιπλέον, ισχύει
- $g(\alpha) \cdot g(\beta) < 0$.

τότε, από θεώρημα Bolzano, υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - \eta = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = \eta$.

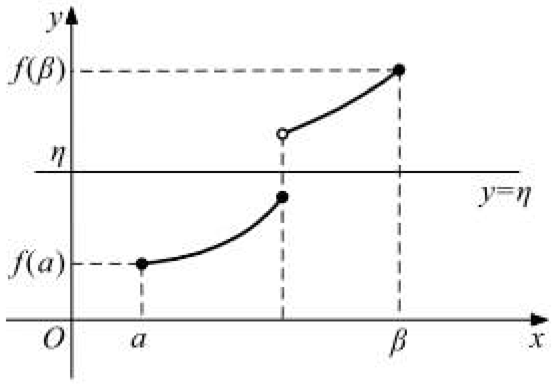
Παρατηρήσεις

1. Το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος Bolzano (στο θεώρημα Bolzano η=0). Συνεπώς, στις ασκήσεις που μας ζητάνε να αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \eta$, έχουμε δύο επιλογές:

Α. Να εφαρμόζουμε θεώρημα ενδιάμεσων τιμών για την f στο [α, β], ή

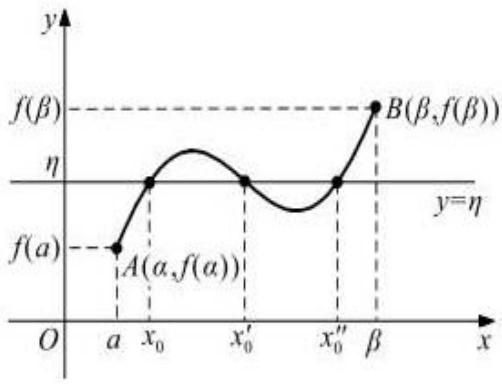
Β. Να θεωρούμε (βοηθητική) συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$ με $x \in [\alpha, \beta]$ και να εφαρμόζουμε θεώρημα Bolzano για την g στο [α, β]. (Συνήθως προτιμάμε το Β τρόπο με χρήση του θεωρήματος Bolzano).

2. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα [α, β], τότε, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα, δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.



3. Γεωμετρική ερμηνεία του Θ. Ενδιαμέσων τιμών

Έστω μια συνεχής συνάρτησης f στο [α, β] και έστω f(α) $\neq$ f(β) και αριθμός η που βρίσκεται μεταξύ των f(α) και f(β). Τότε η γραφική παράσταση της f τέμνει την οριζόντια ευθεία y=η σε ένα τουλάχιστον σημείο x_0, δηλαδή υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \eta$.



4. ***Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.***

Δηλαδή, αν μια συνάρτηση είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και είναι συνεχής και μη σταθερή συνάρτηση, τότε το σύνολο τιμών της είναι επίσης διάστημα (και όχι ένωση διαστημάτων).

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΤΙΜΗΣ

Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη και συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β], τότε η f παίρνει στο [α, β] μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

Δηλαδή, υπάρχουν x_1 , $x_2 \in [α, β]$ τέτοια, ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει

$$\mathbf{m \le f(x) \le M}\ , \quad \textbf{για κάθε}\ \ \mathbf{x \in [α, β]}\ .$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Από το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι το **σύνολο τιμών** μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το [α, β] είναι το κλειστό διάστημα **[m, M]** , όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της.

2. Συμπερασματικά, η συνέχεια μιας συνάρτησης f σε ένα κλειστό διάστημα, εξασφαλίζει την ύπαρξη (ολικού) μεγίστου και ελαχίστου της συνάρτησης στο διάστημα αυτό. Είναι σημαντική η προϋπόθεση ότι η συνάρτηση πρέπει να είναι συνεχής, αλλά και να ορίζεται σε κλειστό διάστημα. Αν μία τουλάχιστον από τις δύο συνθήκες δεν ισχύει, τότε δεν ισχύει το θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής.

3. Όταν μία συνάρτηση είναι συνεχής σε ανοικτό διάστημα (α, β) η ύπαρξη μέγιστης ή ελάχιστης τιμής δεν είναι εξασφαλισμένη.

Το παρακάτω παράδειγμα είναι μία κλασική άσκηση εφαρμογής του θεωρήματος μέγιστης και ελάχιστης τιμής.

Παράδειγμα 11

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο [2,4]. Να αποδείξετε ότι ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in [2,4]$τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \frac{2f(2)+3f(3)+4f(4)}{9}$.

Λύση

Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [2,4], από θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής παρουσιάζει μέγιστη τιμή M και ελάχιστη τιμή m στο [2,4].

$$m \le f(2) \le M \Leftrightarrow 2m \le 2f(2) \le 2M$$
$$m \le f(3) \le M \Leftrightarrow 3m \le 3f(3) \le 3M$$
$$m \le f(4) \le M \Leftrightarrow 4m \le 4f(4) \le 4M$$

Προσθέτουμε τις πιο πάνω σχέσεις και παίρνουμε:

$$2m + 3m + 4m \le 2f(2) + 3f(3) + 4f(4) \le 2M + 3M + 4M \Leftrightarrow$$
$$9m \le 2f(2) + 3f(3) + 4f(4) \le 9M \Leftrightarrow$$
$$m \le \frac{2f(2) + 3f(3) + 4f(4)}{9} \le M$$

Αφού η f είναι συνεχής στο [2, 4], από θεώρημα ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in [2,4]$ τέτοιο, ώστε

$f(x_0) = \frac{2f(2)+3f(3)+4f(4)}{9}$.

ΕΥΡΕΣΗ ΣΥΝΟΛΟΥ ΤΙΜΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

- Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο [α, β], τότε το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα [f(α), f(β)].
- Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο [α, β], τότε το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα [f(β), f(α)].
- Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο (α, β), τότε το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα (A, B) όπου

$$A=\lim_{x\to\alpha^+} f(x) \quad \text{και} \quad B=\lim_{x\to\beta^-} f(x)$$

- Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο (α, β), τότε το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα (B, A) όπου A και B αυτά που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη περίπτωση.

Παράδειγμα 12.

Να βρείτε σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)=x^3+2x-5$.

Λύση

A=R.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=3x^2+2>0$ για κάθε $x \in$ R.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο R οπότε f(R)=(A, B), με

$$\mathrm{A}=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^3+2x-5)=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$$

$$B=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^3+2x-5)=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$$

οπότε f (R)=($-\infty$, $+\infty$) = R.

Παράδειγμα 13

Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \ln x - 1$, $x \in [1,\ e]$

Λύση

f συνεχής και γν. αύξουσα στο $[1,\ e]$.

Άρα $f([1,\ e]) = [f(1),\ f(e)]$

Αλλά $f(1) = \ln 1 - 1 = 0 - 1 = -1$ και $f(e) = \ln e - 1 = 1 - 1 = 0$

Οπότε $f([1,\ e]) = [-1,\ 0]$

Παράδειγμα 14

Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = e^x + 1$, $x \in (-\infty,\ 0]$

Λύση

f συνεχής και γν. αύξουσα στο $(-\infty,\ 0)$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (e^x + 1) = 0 + 1 = 1$$

$$f(0) = e^0 + 1 = 1 + 1 = 2$$

Άρα $f((-\infty,\ 0)) = (1,\ 2]$

Παράδειγμα 15.

Να βρείτε σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x}{x-4}$.

Λύση

A=$(-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$ με

$$f'(x) = \frac{x' \cdot (x-4) - x(x-4)'}{(x-4)^2} = \frac{x-4-x}{(x-4)^2} = \frac{-4}{(x-4)^2} < 0 \text{ για κάθε}$$

x $\in$ $(-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 4)$ και στο $(4, +\infty)$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_1 = (-\infty, 4)$ οπότε $f(A_1) = (B,\ A)$, με

$$\mathrm{A} = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x-4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$B = \lim_{x\to4^-} f(x) = \lim_{x\to4^-} \frac{x}{x-4} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

οπότε f $(A_1)=(-\infty, 1)$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(4,+\infty)$ οπότε f$(A_2)=(B, A)$, με

$$A = \lim_{x\to4^+} f(x) = \lim_{x\to4^+} \frac{x}{x-4} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$B = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-+\infty} \frac{x}{x-4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$$

οπότε f $(A_2)=(1, +\infty)$.

Συνεπώς το σύνολο τιμών της f είναι:

f(A) = f $(A_1) \cup$ f $(A_2)=(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

Μεθοδολογία 3: Ύπαρξη ρίζας συνάρτησης με σύνολο τιμών

Στις ασκήσεις που αναζητάμε την ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας εξίσωσης (ή και μοναδικής) και δεν γνωρίζουμε συγκεκριμένο διάστημα στο οποίο θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε, κάποιο από τα υπαρξιακά θεωρήματα Bolzano (ή Rolle στην παράγουσα συνάρτηση) τότε εργαζόμαστε ως εξής:

- Μεταφέρουμε όλους τους όρους της δοθείσας εξίσωσης στο πρώτο μέλος
- Ορίζουμε το πρώτο μέλος ως μια συνάρτηση οπότε αναζητάμε την ύπαρξη της μοναδικής ρίζας της συνάρτησης αυτής.

- Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της συνάρτησης (αφού συμπεράνουμε την συνέχεια της και βρούμε τη μονοτονία της.
- Αν το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών τότε η εξίσωση έχει μια τουλάχιστον ρίζα.
- Αν επιπλέον η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη ή 1-1, η παραπάνω ρίζα είναι μοναδική.

Σημείωση: Αν το 0 δεν ανήκει στο σύνολο τιμών τότε η συνάρτηση, οπότε και η εξίσωση, δεν έχει ρίζα, δηλαδή είναι αδύνατη. Συνεπώς με το σύνολο τιμών μπορούμε να διαπιστώνουμε αν μια εξίσωση είναι αδύνατη ή πόσες τουλάχιστον ρίζες σε ένα διάστημα που ορίζεται.

Παράδειγμα 16

Να δειχτεί ότι η εξίσωση $x^3+6x^2-12x+\ln x=0$ έχει μια ακριβώς ρίζα.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)= x^3+6x^2-12x+\ln x$ ορισμένη και συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Για κάθε x>0 έχω

$$f'(x) =\left(x^3 - 6x^2 + 12x + \ln x\right)' \Leftrightarrow$$

$$f'(x) =3x^2 - 12x + 12 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) =3 \cdot (x^2 - 4x + 4) + \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) =3 \cdot (x-2)^2 + \frac{1}{x} > 0 \quad \textbf{αφού} \quad x > 0.$$

Άρα f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ οπότε το σύνολο τιμών της είναι f($(0,+\infty)$)= (B, A), με

$$A=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 4^+}\left(\mathbf{x^3}+\mathbf{6x^2}-\mathbf{12x}+\mathbf{lnx}\right)=-\infty$$

$$B=\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(\mathbf{x^3}+\mathbf{6x^2}-\mathbf{12x}+\mathbf{lnx}\right)=+\infty$$

οπότε f (A)=($-\infty$, $+\infty$) = R.

Παρατηρούμε ότι το 0 $\in$ f (A) οπότε η συνάρτηση έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο R. Επιπλέον η f είναι γνησίως μονότονη (αύξουσα) οπότε η ρίζα αυτή είναι μοναδική. Συνεπώς, η εξίσωση έχει μία ακριβώς ρίζα.

Σημείωση: Ακριβώς η ίδια διαδικασία επίλυσης της άσκησης θα μπορούσε να γίνει στην περίπτωση που η εκφώνηση έδινε την εξίσωση x^3+6x^2-12x+lnx=0,53. Η μόνη διαφορά θα ήταν στο τέλος όπου αντί για0 $\in$ f (A) θα γράφαμε 0,53 $\in$ f (A).