ΑΝΑΛΥΣΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

α Πρέπει να γνωρίζω:

- **Τον ορισμό – ιδιότητες και την απόδειξη του θεωρήματος (σελ. 186 του σχολικού βιβλίου).**
- **Ορισμοί εμβαδού (σελ 210-211 του σχολικού βιβλίου) και ορισμένου ολοκληρώματος (σελ 211-212 του σχολικού βιβλίου).**
- **Τις ιδιότητες πράξεων ορισμένου ολοκληρώματος.**
- **Τις μεθόδους ολοκλήρωσης.**
- **Το θεώρημα ύπαρξης αρχικής συνάρτησης (μόνο διατύπωση σελ. 216 του σχολικού βιβλίου)**
- **Διατύπωση και απόδειξη του Θεμελιώδους θεωρήματος του ολοκληρωτικού λογισμού, σελ. 216-217 του σχολικού βιβλίου)**
- **Τους τύπους εμβαδού χωρίου**

β ΕΥΡΕΣΗ ΠΑΡΑΓΟΥΣΑΣ

1. Η συνάρτηση F λέγεται παράγουσα της f που ορίζεται στο διάστημα Δ όταν : $F'(x) = f(x)$**, για κάθε** $x \in \Delta$**.**

2. Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ , έχει μορφή $G(x) = F(x) + c$ **, με** $c \in R$**.**

3. Αναζητούμε παράγουσα μιας συνάρτησης f
- **χωρίς να μας ενδιαφέρει αν η** f **είναι συνεχής ή όχι,**
- **απαραίτητα όμως η f να ορίζεται σε διάστημα Δ και όχι σε ένωση διαστημάτων,**
- **αν όμως η f ορίζεται σε ένωση διαστημάτων, τότε βρίσκουμε παράγουσα για κάθε περιορισμό της στο αντίστοιχο διάστημα.**

3. <u>Η παράγουσα μιας συνεχούς συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ πάντοτε υπάρχει, αλλά δεν είναι μοναδική.</u>

4. Όπως είδαμε, κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ , έχει άπειρες παράγουσες στο διάστημα αυτό. Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι είμαστε πάντα σε θέση να υπολογίζουμε την παράγουσα συνεχούς

συνάρτησης. Υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις ,που δεν υπολογίζονται (με βάση την ύλη της Γ΄Λυκείου) οι παράγουσες τους.

π.χ. Οι συναρτήσεις $e^{-x^2}, \frac{ημx}{x}, \frac{e^x}{x}, \frac{1}{\ln x}, ημx^2, \sqrt{ημx}$ **έχουν παράγουσες στα διαστήματα του πεδίου ορισμού τους, αλλά δεν είναι υπολογίσιμες.**

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΑΡΑΓΟΥΣΩΝ ΑΡΧΙΚΩΝ) ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

f(x)	F(x)
0	c
1	$x+c$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+c$
$x^α$	$\frac{x^{α+1}}{α+1}+c \quad α\in R-\{-1\}$
$x^ν$	$\frac{x^{ν+1}}{ν+1}+c \quad ν\in N$
$\frac{1}{x^ν}=x^{-ν}$	$\frac{x^{-ν+1}}{-ν+1}+c \quad ν\in N^*-\{1\}$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x}+c$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$
$\sqrt[ν]{x^μ}=x^{\frac{μ}{ν}}$	$\frac{x^{\frac{μ}{ν}+1}}{\frac{μ}{ν}+1}+c$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+c$
$ημx$	$-συνx+c$

$\sigma\upsilon\nu x$	$\eta\mu x + c$
$\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$	$-\sigma\varphi x + c$
$\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$\varepsilon\varphi x + c$
$\varepsilon\varphi x$	$-\ln\lvert\sigma\upsilon\nu x\rvert + c$
e^x	$e^x + c$
α^x	$\dfrac{\alpha^x}{\ln\alpha} + c \;, \alpha > 0$
$\ln x$	$x\ln x - x + c$
$\dfrac{1}{x\ln 10}$	$\log x + c$

Προσοχή

Αν η συνάρτηση f ορίζεται σε ένωση διαστημάτων, τότε η αντίστοιχη παράγουσα της στην δεξιά στήλη ,ορίζεται σε ένα από τα διαστήματα αυτά (ή ενδεχομένως και σε κάποιο υποσύνολο τους)

γ Το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι ο αριθμός $F(\beta) - F(\alpha)$, όπου *F* παράγουσα της συνεχούς *f(x)* .

δ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

1. Η συνάρτηση $\int_{a}^{x} f(t)dt$ είναι παράγουσα της συνεχούς $f(t)$:

$$\left(\int_{a}^{x} f(t)dt\right)' = f(x)$$

Είναι συνάρτηση με μεταβλητή το χ η οποία πρέπει να παίρνει τιμές στο ίδιο διάστημα με το α και στο οποίο διάστημα η $f(t)$ ορίζεται και είναι συνεχής.

<u>Να μην συγχέουμε την μεταβλητή του ορισμένου ολοκληρώματος t με την μεταβλητή της συνάρτησης ολοκλήρωμα x. Η κάθε μία για την άλλη είναι σταθερή – ανεξάρτητη. Το t παίρνει τιμές μεταξύ του α και του χ. Προσοχή! Οι μεταβλητές μπορεί να δοθούν και ανάποδα!</u>

2. Ισχύει : $\int_a^{\beta} f^{/}(t)dt = f(\beta) - f(a)$ **. Χρήσιμο για τον υπολογισμό της συνάρτησης f όταν είναι γνωστός ο ρυθμός μεταβολής της f και**

3. Αν F(x)= $\int_{\alpha}^{\chi} \mathrm{f(t)dt}$ **τότε F΄(x)= (** $\int_{\alpha}^{\chi} \mathbf{f(t)dt}$ **)΄= f (x)**

4. Η ανισότητα του ορισμένου ολοκληρώματος: Χρησιμοποιείται όταν έχουμε ορισμένο ολοκλήρωμα σε ένα διάστημα [α , β] ή σε διάστημα [α , χ] με χ>α.

Αν $f(x) \geq 0$ **για κάθε χ ε [α , β], τότε** $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$ **Αν όμως υπάρχει έστω και ένα χ_0 για το οποίο** $f(x_0) > 0$ **(δηλαδή αν η f δεν είναι παντού 0) τότε** $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$**.**

Παράδειγμα: Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_1^x e^{t^2} dt$

ΛΥΣΗ

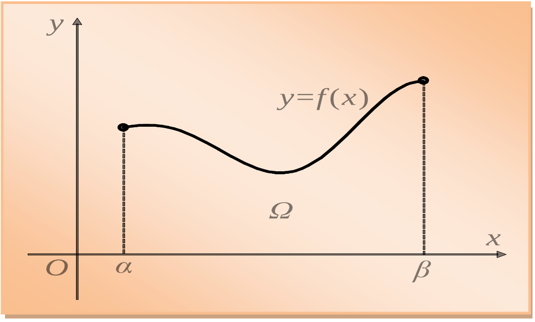
Η **συνάρτηση** $f(t) = e^{t^2}$ **, t ε IR είναι παραγωγίσιμη στο IR με** $f^{/}(t) = 2te^{t^2}$ **, t ε IR…… έχει ελάχιστη τιμή την** $f(0) = 1$ **οπότε:** $f(t) \geq 1$ **για κάθε , t ε IR. Με τη βοήθεια της ανισότητας του ολοκληρώματος στο διάστημα [1 , x] με x>1 έχουμε:** $\int_1^x f(t)dt \geq \int_1^x 1dt \iff \int_1^x f(t)dt \geq 1(x-1) \iff \int_1^x e^{t^2} dt \geq (x-1)$ **και εφόσον** $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1) = +\infty$ **θα είναι** $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_1^x e^{t^2} dt = +\infty$ **.**

ε. ΕΜΒΑΔΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1η Το χωρίο να περικλείεται από τη C_f ,τον άξονα x΄x και ίσως τις κατακόρυφες ευθείες χ=α και χ=β.

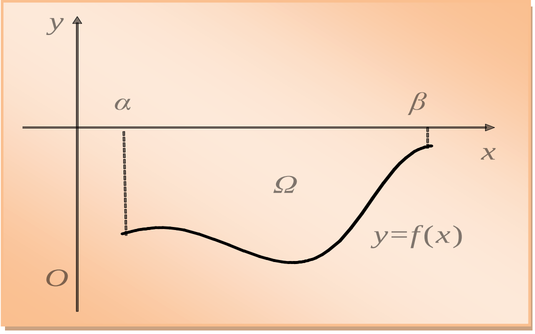
- **Αν** $f(x)\geq 0$ **για κάθε** $x\in[\alpha,\beta]$

  τότε $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta f(x)dx$



- **Αν** $f(x)\leq 0$ **για κάθε** $x\in[\alpha,\beta]$

τότε $E(\Omega)=-\int_\alpha^\beta f(x)dx$



- **Αν η** $f(x)$ **δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο** $[\alpha,\beta]$ **τότε βρίσκουμε τις λύσεις** $x_1,....,x_k$ **της εξίσωσης** $f(x)=0$ **στο** $[\alpha,\beta]$ **οπότε**

$$E(\Omega)=\left|\int_\alpha^{x_1} f(x)dx\right|+....+\left|\int_{x_k}^\beta f(x)dx\right|$$

<u>Συμπέρασμα :</u> Για να βρούμε το εμβαδόν χωρίου μεταξύ C_f και x΄x (και ίσως των κατακόρυφων ευθείων x=α και x=β) κάνω τα παρακάτω:

1. Αποδεικνύω τη συνέχεια της f στο [α,β] ή στο D_f, αν δεν δίνονται οι κατακόρυφες ευθείες.

2. Θέτω f(x)=0 και βρίσκω ρίζες και πρόσημο της f στο [α,β] ή στο διάστημα των ριζών (αν δεν δίνονται οι κατακόρυφες ευθείες).

3. Υπολογίζω το ζητούμενο εμβαδόν από τον τύπο

$$E(\Omega)=\left|\int_{\alpha}^{x_1} f(x)dx\right|+....+\left|\int_{x_k}^{\beta} f(x)dx\right|$$

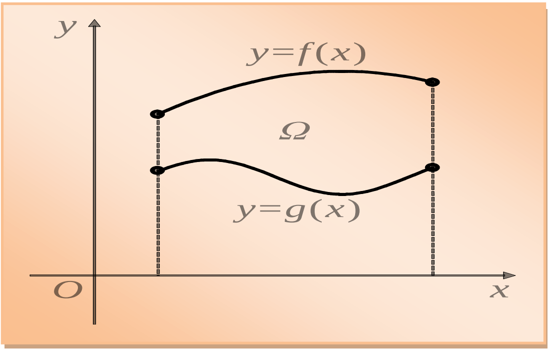
όπου $x_1,\dots,x_k$ οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$ στο $[\alpha,\beta]$,

ή αν δεν δίνονται οι κατακόρυφες ευθείες x=α και x=β, τότε

$$E(\Omega)=\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right|+....+\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx\right|$$

όπου $x_1,\dots,x_k$ οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2$^{\eta}$ Το χωρίο να περικλείεται από τη τις γραφικές παραστάσεις C_f, C_g, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=α και x=β.

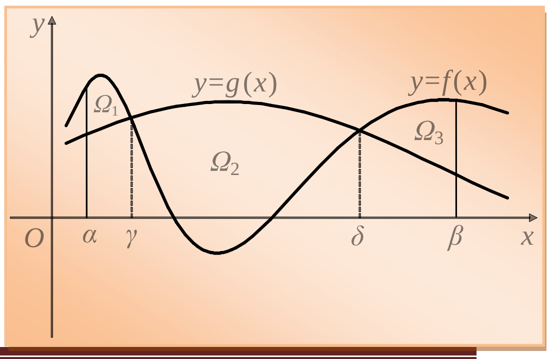


Αν $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ τότε

$$E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx$$

- Αν $f(x)\leq g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$

τότε $E(\Omega)=-\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx$



- Αν η διαφορά $f(x)-g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$. Τότε βρίσκουμε τις λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)$ στο $[\alpha,\beta]$ και με βάση το πρόσημο της f στο $[\alpha,\beta]$ ή ανάλογα με το σχήμα έχουμε π.χ.

$$E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\gamma}(f(x)-g(x))dx-\int_{\gamma}^{\delta}(f(x)-g(x))dx+\int_{\delta}^{\beta}(f(x)-g(x))dx$$

<u>Συμπέρασμα :</u> Για να βρούμε το εμβαδόν χωρίου μεταξύ C_f και C_g (και ίσως των κατακόρυφων ευθείων x=α και x=β) κάνω τα παρακάτω:

1. Αποδεικνύω τη συνέχεια των f, g στο [α,β] ή αν δεν δίνονται οι κατακόρυφες ευθείες στα D_f, D_g αντίστοιχα.

2. Θέτω f(x)= g(x) και βρίσκω ρίζες και πρόσημο της εξίσωσης στο [α,β] ή στο διάστημα των ριζών (αν δεν δίνονται οι κατακόρυφες ευθείες).

3. Υπολογίζω το ζητούμενο εμβαδόν από τον τύπο

$$E(\Omega)=\left|\int_{\alpha}^{x_1}(f(x)-g(x))dx\right|+.....+\left|\int_{x_k}^{\beta}(f(x)-g(x))dx\right|$$

όπου $x_1,\dots,x_k$ οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)$ στο $[\alpha,\beta]$,

<u>ή αν δεν δίνονται οι κατακόρυφες ευθείες x=α και x=β, τότε</u>

$$E(\Omega)=\left|\int_{x_1}^{x_2}f(x)-g(x)dx\right|+....+\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x)-g(x)dx\right|$$

όπου $x_1,\dots,x_k$ οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3η

Αν το χωρίο περικλείεται από τη τις γραφικές παραστάσεις 3 ή περισσοτέρων συναρτήσεων, τότε:

- **Εργαζόμαστε συνήθως με σχήμα.**
- **Το ζητούμενο εμβαδό υπολογίζεται σαν άθροισμα ή διαφορά απλούστερων χωρίων.**