ΑΝΑΛΥΣΗ

ΚΕΦ. 1 : ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Προσέχουμε πάντα τα x για τα οποία ορίζεται μία συνάρτηση ή μία συναρτησιακή σχέση. Αν δεν μας δίνονται πρέπει να τα βρίσκουμε. **Συνεπώς όταν μας δίνεται μια συνάρτηση, πρέπει να βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της.**

2. Για κάθε συνάρτηση f με πεδίο ορισμού D_f ισχύει : για κάθε $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

   Δηλαδή σε μία ισότητα, μπορούμε βάζουμε και στα 2 μέλη f, αρκεί να είμαστε εντός πεδίου ορισμού.

3. Αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A_f είναι 1-1, τότε :

   για κάθε $x_1, x_2 \in A_f$ με $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

   Δηλαδή σε μία ισότητα, μόνο αν η συνάρτηση είναι 1-1 μπορούμε να βγάζουμε από τα 2 μέλη την f.

4. Για τη σύνθεση της g με την f $(\text{δηλαδή της } fog)$ ισχύουν:
   - Το πεδίο ορισμού της $(fog)(x) = f(g(x))$ λαμβάνουμε υπόψη ότι $x \in D_g$ ώστε $g(x) \in D_f$.
   - Αν το σύνολο τιμών της $g(x)$ περιέχεται στο πεδίο ορισμού της $f(x)$ τότε το πεδίο ορισμού της $h(x) = f(g(x))$ συμπίπτει με το πεδίο ορισμού της $g(x)$.
   - Αν μας δίνεται ο τύπος $f(g(x)) = ...$ και γνωρίζουμε την $g(x)$ τότε κάνουμε αντικατάσταση… $g(x) = y \Leftrightarrow x = ...$ και βρίσκουμε τον τύπο της f (: $f(y) = ...$)
   - Αν μας δίνεται ο τύπος $f(g(x)) = ...$ και γνωρίζουμε την $f(x)$ τότε στην $f(x)$ βάζουμε όπου χ το $g(x)$ και εξισώνουμε τις δύο ισότητες

$f(g(x)) = ...$ οι οποίες προκύπτουν ….. κατόπιν βρίσκουμε εύκολα την $g(x)$.

- Αν οι f, g έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας τότε η σύνθεση της g με την f, δηλαδή η fog, είναι γνησίως αύξουσα. (Αποδεικνύεται με τον ορισμό).
- Αν οι f, g έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας τότε η σύνθεση της g με την f, δηλαδή η fog, είναι γνησίως φθίνουσα. (Αποδεικνύεται με τον ορισμό).

.

5. Για μια γνήσια μονότονη συνάρτηση f ισχύουν

- Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο A_f τότε

  Για κάθε $x_1, x_2 \in A_f$ με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

- Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A_f τότε

  Για κάθε $x_1, x_2 \in A_f$ με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Σημαντικές σχέσεις για την επίλυση ανισώσεων ή στην απόδειδη´´ ανισοτικών´´ σχέσεων

- Αν η f είναι γνήσια μονότονη στο A_f τότε

  η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια το πολύ ρίζα στο A_f
- Ισοδύναμα το παραπάνω σημαίνει ότι η γραφική παράσταση C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα το πολύ σημείο.
- Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ και σε κάποιο x_o του Δ μηδενίζεται τότε στο σημείο αυτό θα αλλάζει πρόσημο. Βρίσκουμε το πρόσημό της χρησιμοποιώντας τον ορισμό της μονοτονίας.

6. Για την αντιστρεψιμότητα μιας συνάρτησης f και την αντίστροφη της f^{-1} ισχύουν

- Η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της συνάρτησης f ορίζεται μόνο αν η f είναι «1-1» **και έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f.**
- Είναι γνησίως μονότονη, η f^{-1}, στο σύνολο τιμών της f αν η f είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της και έχει το ίδιο είδος μονοτονίας.
- Για κάθε y που ανήκει στο σύνολο τιμών της f υπάρχει μοναδικό x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f ώστε: $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$, εφόσον ορίζεται η f^{-1}.

- $f(f^{-1}(x))=x$ Για κάθε x που ανήκει στο σύνολο τιμών της f, εφόσον ορίζεται η f^{-1}
- $f^{-1}(f(x))=x$ Για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f, εφόσον ορίζεται η f^{-1}
- Οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1}, εφόσον ορίζεται η f^{-1}, είναι συμμετρικές ως προς την διχοτόμο 1ου και 3ου τεταρτημορίου δηλαδή την ευθεία ψ=χ.
- Το ($χ_ο$, $ψ_ο$) ανήκει στην γραφική παράσταση της f $\Leftrightarrow$ f($χ_ο$)=$ψ_ο$ και εφόσον η f αντιστρέψιμη , $\Leftrightarrow$ f^{-1}($ψ_ο$)=$χ_ο$ $\Leftrightarrow$ το ($ψ_ο$, $χ_ο$) ανήκει στην γραφική παράσταση της f^{-1}. Βέβαια απαιτείται και $χ_ο$ στοιχείο του πεδίου ορισμού της f.
- Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει την ψ=χ σε ένα σημείο τότε και η γραφική παράσταση της f^{-1} θα τέμνει την ψ=χ στο ίδιο σημείο.
- Οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} θα τέμνονται μόνο πάνω στην ψ=χ αν η f είναι γνησίως αύξουσα κάτι που δεν ισχύει αν η f δεν είναι γνησίως αύξουσα.

7. Αν ένας αριθμός κ ανήκει στο σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f τότε η εξίσωση $f(x)=k$ **θα έχει ρίζα στο πεδίο ορισμού της** f, δηλαδή υπάρχει $χ_ο$ στο πεδίο ορισμού της f ώστε: $f(x_o)=k$.
Αν η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

8. Από την ισότητα $f(\alpha)=f(\beta)$ μπορούμε να συμπεράνουμε α = β , εφόσον γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1» ή γνησίως μονότονη στο σύνολο όπου υπάρχουν τα α, β. Δηλαδή

$$\mathrm{f}(\alpha)=\mathrm{f}(\beta) \overset{\mathrm{f}\ 1\text{-}1}{\Leftrightarrow} \alpha=\beta$$

Σημαντική σχέση για την επίλυση εξισώσεων ή στην απόδειδη ΄΄ισοτικών΄΄ σχέσεων

9. Όταν μια συνάρτηση **δεν είναι «1-1»** τότε υπάρχουν α, β στο πεδίο ορισμού της για τα οποία ισχύει

$$\mathrm{f}(\alpha)=\mathrm{f}(\beta) \Rightarrow \alpha \neq \beta$$

10. Για τα όρια της μορφής $\lim_{x\to x_0} f(x)$ ισχύουν

Α. **Η εύρεση του ορίου** $\lim_{x\to x_0} f(x)$ προϋποθέτει ότι η f ορίζεται σε διάστημα της μορφής $(\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta)$.

Β. Η εφαρμογή των ιδιοτήτων προυποθέτει ότι υπάρχουν τα όρια και οι πράξεις μεταξύ τους είναι επιτρεπτές.

Γ. ΓΕΝΙΚΑ στην εύρεση του $\lim_{x\to x_0} f(x)$

- Εξετάζουμε αν εφαρμόζοντας τις βασικές ιδιότητες του ορίου ή το Κριτ. Παρεμβολής ή τα βασικά τριγ. όρια βρίσκουμε όριο πραγματικός αριθμός.

  $\Rightarrow$

  Αν ΝΑΙ ΤΕΛΟΣ

  Αν ΟΧΙ τότε

- **ΣΤΗΝ ΑΠΡ/ΣΤΙΑ** $\frac{0}{0}$ κάνουμε όλες εκείνες τις ενέργειες (παραγοντοποίηση , απαλοιφή απολύτου , συζυγή παράσταση……. ώστε να οδηγηθούμε **σε άρση** της απροσδιοριστίας ή σε απροσδιοριστία $\frac{\alpha}{0}$.
- **Η ΑΠΡ/ΣΤΙΑ** $\frac{\alpha}{0}$ **μας οδηγεί σε όριο** $\pm\infty$ **ή στο συμπέρασμα ότι δεν υπάρχει το όριο (αν τα πλευρικά όρια είναι άνισα).**

11. Χρησιμοποιούμε το **κριτήριο παρεμβολής** όταν μας δίνεται ανισοτική σχέση της μορφής $h(x)\le f(x)\le g(x)$

ή όταν η συνάρτηση έχει μια από τις παρακάτω μορφές

$f(x)=x^{\rho}\eta\mu\frac{1}{x^{\kappa}}$ **ή** $f(x)=x^{\rho}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x^{\kappa}}$ **ή** $f(x)=x^{\mu}\eta\mu\frac{1}{x^{\kappa}}\pm x^{\rho}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x^{\lambda}}$ **με x να τείνει στο 0, δηλαδή προκύπτει ημ$\pm\infty$ ή συν$\pm\infty$**

ή όταν δεν έχουμε τον τύπο της συνάρτησης οπότε προσπαθούμε να δημιουργήσουμε διπλή ανισοτική σχέση με τη συνάρτηση.

12. ΟΡΙΟ ΑΠΟ ΣΧΕΣΗ ΟΡΙΟΥ

Δίνεται ότι $\lim\limits_{x\to x_0} \Pi(f(x)) = L$ (δηλαδή είναι γνωστό το όριο μιας δοσμένης παράστασης της $f(x)$)

Και ζητείται το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ ή το $\lim\limits_{x\to x_0} \Phi(f(x)) = L$

δηλαδή το όριο μιας άλλης παράστασης της f .

Εργαζόμαστε ως εξής

- Συμβολίζουμε τη δοσμένη παράσταση της **f . Π.χ.** $g(x) = \Pi(f(x))$ (1)
- Λύνουμε την (1) ως προς την f και στη συνέχεια παίρνουμε όρια

13. **<u>Προσοχή!!!</u>** Μπορούμε να γράφουμε $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = f(x_o)$ **μόνον όταν γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο x_o.** Όταν για μια συνάρτηση, (του βιβλίου σας) , γνωρίζουμε τον τύπο της, ασυνέχεια ενδεχομένως να έχουμε μόνο στα σημεία που αλλάζει ο τύπος της.
Αν δεν γνωρίζουμε τον τύπο της συνάρτησης τα συμπεράσματά μας , για τη συνέχεια, θα προκύπτουν μόνο από τα δεδομένα.

14. Αν σε κάποια συνάρτηση δεν μπορούμε να βρούμε απευθείας την τιμή της στο x_o ενδεχομένως να χρειάζεται να υπολογίσουμε το όριό της στο x_o. Αν έχουμε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο x_o , τότε η τιμή της θα συμπίπτει με το όριό της. Αν f συνεχής στο x_o τότε:

$f(x_o) = \lim\limits_{x\to x_o} f(x)$.

15. Για τα όρια της μορφής $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ **ισχύουν**

Α. **Η εύρεση του ορίου** $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ προϋποθέτει ότι η f ορίζεται σε διάστημα της μορφής $(-\infty,\alpha)\cup(\beta,+\infty)$

Β. Η εφαρμογή των ιδιοτήτων προϋποθέτει ότι υπάρχουν τα όρια και οι πράξεις μεταξύ τους είναι επιτρεπτές.

Γ. ΓΕΝΙΚΑ στην εύρεση του $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$

- Μπορούμε να εργαστούμε **κατά περίπτωση εφαρμόζοντας τις παρακάτω ΜΕΘΟΔΟΥΣ** ή
- Να εργαστούμε εφαρμόζοντας γενικά

- Τις ιδιότητες του ορίου στο $\pm\infty$
- Το Κριτήριο Παρεμβολής
- **Παραγοντοποιώντας ,κατά περίπτωση ,τις μεγιστοβάθμιες δυνάμεις του x <u>και κάνοντας χρήση των βασικών ορίων</u>**
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\nu} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{\nu} = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^{\nu}} = 0$

16. **<u>Προσοχή!!!</u>** Δεν υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \eta\mu x$ και $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sigma\upsilon\nu x$. Σε περίπτωση που τα συναντάμε σε κάποια παράσταση χρησιμοποιούμε το Κ.Π. λαμβάνοντας υπόψη μας τις ιδιότητες: $|\eta\mu x| \le 1$, $|\sigma\upsilon\nu x| \le 1$, $|\eta\mu x| \le |x|$ για κάθε x. Η ισότητα στην τελευταία ανίσωση ισχύει μόνο στο 0.

17. Αν το $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$ είναι ένας θετικός ή αρνητικός αριθμός τότε κοντά στο x_o οι τιμές της συνάρτησης $f(x)$ θα είναι θετικοί ή αρνητικοί αριθμοί αντίστοιχα, μια σημαντική βοήθεια όταν θέλουμε να απαλείψουμε απόλυτα ή να κάνουμε Bolzano ή …… Παρόμοια συμπεράσματα έχουμε και στις περιπτώσεις που $x\to\pm\infty$, το όριο της συνάρτησης είναι $\pm\infty$

18. Αν το $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός και η συνάρτηση έχει τιμές , κοντά στο x_o , θετικές ή 0 τότε $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) \ge 0$ (προσοχή μπορεί να είναι και 0 το όριο ακόμη και αν $f(x) > 0$ κοντά στο x_o).

19. Αν γνωρίζουμε ότι $g(x) \le f(x)$ κοντά στο x_o και $\lim\limits_{x\to x_o} g(x) = +\infty$ τότε και με δεδομένο ότι θα ισχύει $g(x) \le f(x) < +\infty$ το συμπέρασμά μας , από το Κ.Π. θα είναι ότι $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = +\infty$. Παρόμοιο συμπέρασμα θα έχουμε και για το $-\infty$.

20. ΕΥΡΕΣΗ ΣΥΝΟΛΟΥ ΤΙΜΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

- Αν f συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα [α , β] τότε το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι $f(A)=\left[f(\alpha),f(\beta)\right]$
- Αν f συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα (α , β) τότε το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι

$$f(A)=\left(\lim_{x\to\alpha^+} f(x),\lim_{x\to\beta^-} f(x)\right)$$

- Αν f συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση στο διάστημα [α , β] τότε το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι $f(A)=\left[f(\beta),f(\alpha)\right]$
- Αν f συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση στο διάστημα (α , β) τότε το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι

$$f(A)=\left(\lim_{x\to\beta^-} f(x),\lim_{x\to\alpha^+} f(x)\right)$$